YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES · YOQUIEROAPROBAR.ES

LÍMITES

LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVABILIDAD Y ASÍNTOTAS

Límite de una función en un punto: El valor al cual se acerca la función f(x), cuando x se acerca a c, lo llamaremos límite L. Se simboliza:

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ Se lee: Límite de la función f(x) cuando x tiende a c, es igual a L. Esta expresión nos indica como se comporta la función en las cercanías al valor c, tanto por la derecha como por la izquierda, pero no necesariamente en el valor c.

Límites laterales:

$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ significa cuando x se aproxima a c por la izquierda el valor de la función (y) se acerca a L.

$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ significa cuando x se aproxima a c por la derecha el valor de la función (y) se acerca a L.

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ es equivalente a la existencia simultánea de los dos límites laterales cuyo valor ha de ser L.

Propiedades de los Límites: Las propiedades de los límites son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja.

Sean f(x) y g(x) dos funciones definidas en un mismo intervalo en donde está el valor a del límite y k una constante.

Unicidad del límite: cuando el límite existe, el límite es único.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Propiedad de la suma: el límite de la suma es la suma de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Propiedad de la resta: el límite de la resta es la resta de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

Propiedad del producto: el límite del producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Propiedad de la función constante: el límite de una función constante es esta misma constante. $\lim_{x\to a} k = k$

Propiedad del factor constante: en un límite de una constante multiplicada por una función se puede sacar la constante del límite sin que cambie el resultado. $\lim_{x\to a}[k\cdot f(x)] = k\cdot \lim_{x\to a} f(x)$

Propiedad del cociente: el límite de un cociente de dos funciones es el cociente de los límites de las mismas.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \; ; \quad \text{siempre que } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Propiedad de la función potencial: el límite de una función potencial es la potencia del límite de la base elevado al exponente:

$$\lim_{x\to a}[f(x)^k] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k$$

Propiedad de la raíz: el límite de una raíz, es la raíz del límite:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \quad \text{si el índice } n \text{ es par, debe ser } \lim_{x\to a} f(x) > 0$$

Propiedad de la función logarítmica: El límite del logaritmo es el logaritmo del límite.

$$\lim_{x\to a}[\log_k f(x)] = \log_k\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

Límite de una función elevada a otra función: Su valor es el límite de la primera elevado al límite de la segunda:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

(siempre que los límites de f y g no sean ambos 0).

Operaciones con infinito:

$$\infty \pm k = \infty \qquad (+\infty)+(+\infty) = +\infty$$

$$\infty \cdot k = \infty \quad (\text{si } k \neq 0) \qquad \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{0}{k} = 0 \qquad \frac{k}{0} = \infty \qquad \frac{0}{\infty} = 0 \qquad \frac{k}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{k} = \infty \qquad \frac{\infty}{0} = \infty \qquad k^0 = 1$$

$$0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \infty & \text{si } k < 0 \end{cases} \qquad k^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < k < 1 \end{cases}$$

$$0^{+\infty} = 0 \qquad (+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

Indeterminaciones:

$$\infty - \infty \qquad 0\cdot\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty^0$$

Cálculo de las indeterminaciones:

Límite de un polinomio:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\infty \\ (0\,-\infty)}} P(x) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (0\,-\infty)}} (\text{término de mayor grado})}$$

Límite de cociente de polinomios: Se resuelve factorizando numerador y denominador (habitualmente por Ruffini) y simplificamos.

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}}$$

Si es un límite en infinito, se resuelve dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de x.

Esta regla se puede generalizar, en ciertos casos a funciones que no sean polinómicas, por ejemplo, con raíces.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}}$$

Límites de funciones irracionales: Se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado de la expresión radical, y operando a continuación. Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0} = INDTDO = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2) = 4$$

Caso de existir dos expresiones radicales, una en el numerador y otra en el denominador, habría que realizar el procedimiento anterior dos veces (una por cada expresión).

Indeterminación infinito menos infinito: Se resuelve: Multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión radical, y operando a continuación. En algunos casos pasamos a la indeterminación ∞/∞. Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \infty - \infty = \text{INDTDO} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Observaciones:

En los casos en que $x\to-\infty$ podemos transformarla en $x\to\infty$ cambiando el signo de todos los coeficientes de potencia impar.

Indeterminación 1^∞ :

Se puede resolver aplicando la siguiente fórmula práctica:

$$\boxed{\lim f(x)^{g(x)} = 1^\infty = e^{\lim[f(x)-1]\cdot g(x)}}$$

También se puede resolver transformado la función para que se convierta en:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

www.yoquieroaprobar.es