POSICIÓN RELATIVA

GEOMETRÍA - 2

Posición relativa entre dos rectas:

Opción 1. Rectas en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = x_1 + u_1 \cdot \alpha \\ y = y_1 + u_2 \cdot \alpha \\ z = z_1 + u_3 \cdot \alpha \end{cases} ; \begin{cases} x = x_2 + v_1 \cdot \beta \\ y = y_2 + v_2 \cdot \beta \\ z = z_2 + v_3 \cdot \beta \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} ; A^* = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x_2 - x_1 \\ u_2 & v_2 & y_2 - y_1 \\ u_3 & v_3 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Rangos	Tipo de sistema	Posición relativa	Solución
rg (A) = rg (A*) = 2	Compatible determinado	Secantes	Un punto
rg (A) = rg (A*) = 1	Compatible indeterminado	Coincidentes	La recta
rg (A) = 1 ≠ rg (A*) = 2	Incompatible	Paralelas	Sin solución
rg (A) = 2 ≠ rg (A*) = 3	Incompatible	Se cruzan	Sin solución

Opción 2. Rectas en forma general ó implícita.

$$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix} ; A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{array}\right)$$

Rangos	Tipo de sistema	Posición relativa	Solución
rg (A) = rg (A*) = 3	Compatible determinado	Secantes	Un punto
rg (A) = rg (A*) = 2	Compatible indeterminado	Coincidentes	La recta
rg (A) = 2 ≠ rg (A*) = 3	Incompatible	Paralelas	Sin solución
rg (A) = 3 ≠ rg (A*) = 4	Incompatible	Se cruzan	Sin solución

Posición relativa entre dos planos:

$$\begin{matrix} \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} ; A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array}\right)$$

Estudio de rangos	Tipos de sistemas	Posición relativa	Solución
rg (A) = rg (A*) = 2	Compatible indeterminado	Secantes	Una recta
rg (A) = rg (A*) = 1	Compatible indeterminado	Coincidentes	El plano
rg (A) = 1 ≠ rg (A*) = 2	Incompatible	Paralelos	Sin solución

Posición relativa entre una recta y un plano:

$$\begin{matrix} r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{matrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} ; A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$$

Estudio de rangos	Tipos de sistemas	Posición relativa	Solución
rg (A) = rg (A*) = 3	Compatible determinado	Secantes	Un punto
rg (A) = rg (A*) = 2	Compatible indeterminado	Coincidentes	La recta
rg (A) = 2 ≠ rg (A*) = 3	Incompatible	Paralelos	Sin solución

Posición relativa entre tres planos:

$$\begin{matrix} \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{matrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} ; A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$$

Estudio de rangos	Tipos de sistemas	Posición relativa	Solución
rg (A) = rg (A*) = 3	SCD	Los tres secantes	Un punto
rg (A) = 2 ≠ rg (A*) = 3 *(sin dos ecuaciones proporcionales)*	SI	Los tres secantes	Sin solución *(Tres rectas)*
rg (A) = 2 ≠ rg (A*) = 3 *(con dos ecuaciones proporcionales)*	SI	Dos paralelos y uno secante a ellos	Sin solución *(Dos rectas)*
rg (A) = rg (A*) = 2 *(sin dos ecuaciones proporcionales)*	SCI	Los tres secantes	Una recta
rg (A) = rg (A*) = 2 *(con dos ecuaciones proporcionales)*	SCI	Dos coincidentes y uno secante a ellos	Una recta
rg (A) = 1 ≠ rg (A*) = 2 *(sin dos ecuaciones proporcionales)*	SI	Los tres paralelos	Sin solución
rg (A) = 1 ≠ rg (A*) = 2 *(con dos ecuaciones proporcionales)*	SI	Dos coincidentes y uno paralelo a ellos	Sin solución *(Un plano)*
rg (A) = rg (A*) = 1	SCI	Los tres coincidentes	El plano