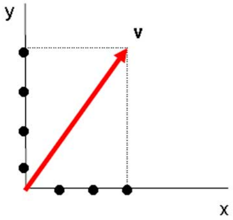
CINEMÁTICA

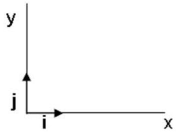
VECTORES



Para representar un vector gráficamente, en el plano, necesitamos sus dos coordenadas (x, y). Para representarlo analíticamente es necesario definir los llamados vectores unitarios.

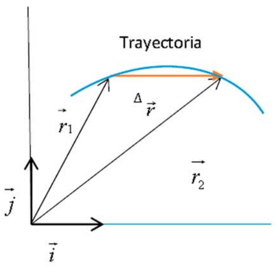
El vector de la izquierda se designa como:

$$\vec{v} = 3.\vec{i} + 4.\vec{j}$$



Para calcular el módulo de un vector utilizaremos la expresión:

$$\vec{v} = x.\vec{i} + y.\vec{j} \qquad \left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$$



VECTOR POSICIÓN

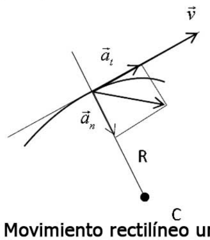
$$\boxed{\vec{r} = x_{(t)}\cdot(t)\cdot\vec{i} + y_{(t)}\cdot(t)\cdot\vec{j}}$$

VECTOR DESPLAZAMIENTO

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

CINEMÁTICA

Componentes intrínsecas de la aceleración:



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \qquad a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{R} \qquad a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

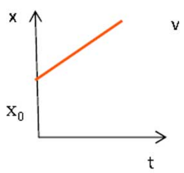
v = módulo velocidad
R = radio curvatura
a = módulo aceleración
a_t = módulo aceleración instantánea
a_n = módulo aceleración normal o centrípeta

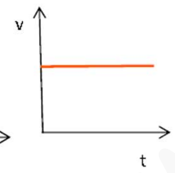
(Ver ejemplo al final de esta hoja)

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU):

v= cte.

$$\boxed{x = x_0 + v\cdot t \begin{cases} x = \text{posición} \\ v = \text{velocidad (constante)} \\ x_0 = \text{posición inicial} \end{cases}}$$

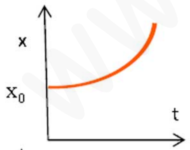




Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA):

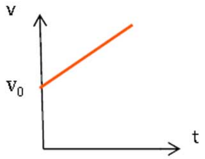
a= cte

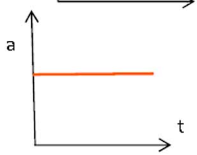
$$\boxed{x = x_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \Rightarrow \begin{cases} v = \text{velocidad (constante)} \\ v_0 = \text{velocidad inicial} \\ a = \text{aceleración} \end{cases}}$$



$$\boxed{v = v_0 + a\cdot t}$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a\cdot(x - x_0)}$$





Casos particulares:

- Caída libre $a = g = 9{,}8\ {}^{m}/_{s^2}$

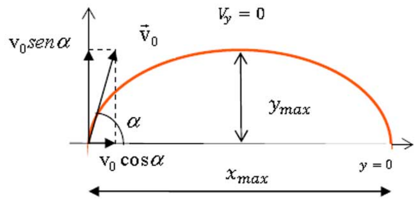
$$y = y_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$
$$v = -g\cdot t$$

- Tiro vertical

$$y = v_0\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$
$$v = v_0 - g\cdot t$$

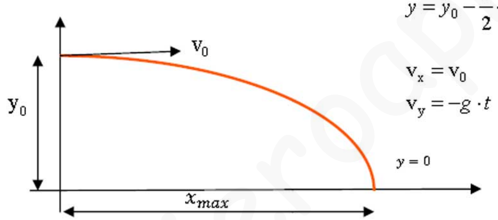
Composición de movimientos:

Tiro oblícuo:



$$x = v_0\cos\alpha\cdot t$$
$$y = v_0 sen\alpha\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$
$$v_x = v_0\cos\alpha$$
$$v_y = v_0 sen\alpha - g\cdot t$$

Tiro horizontal:



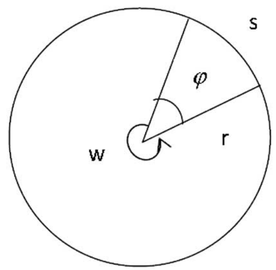
$$x = v_0\cdot t$$
$$y = y_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$
$$v_x = v_0$$
$$v_y = -g\cdot t$$

Movimiento circular uniforme (MCU):

w =cte

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + w\cdot t}$$

φ_0 =espacio angular inicial (rad)
w =velocidad angular (cte.)



Movimiento circular uniforme (MCUA):

α=cte

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi = \varphi_0 + w_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2 \\ &w = w_0 + \alpha\cdot t \\ &w^2 = w_0^2 + 2\cdot\alpha\cdot(\varphi - \varphi_0) \end{aligned}}$$

w_0 = velocidad angular incial
α = aceleración angular cte.

Relación entre magnitudes lineales y angulares:

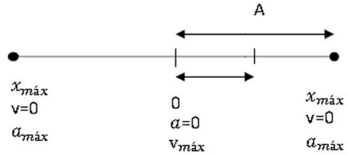
$$\boxed{\begin{aligned} &s = \varphi\cdot R \\ &v = w\cdot R \\ &a_t = \alpha\cdot R \\ &a_N = w^2\cdot R \end{aligned}}$$

s = espacio lineal
v = velocidad lineal
a_t = aceleración tangencial
a_N = aceleración normal o centrípeta

Movimiento armónico simple (MAS):

Elongación x(m)

$$\boxed{x = A\cdot sen(wt + \varphi_0)} \qquad x_{max} = A$$



Velocidad v(m/s)

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = -A\cdot w\cdot \cos(wt + \varphi_0)}$$

$$v_{max} = \pm A\cdot w$$

$A = amplitud$

$w = pulsación\ w\ ({}^{rad}/_{s})\ (velocidad\ angular)$

Aceleración $a(m/s^2)$

$\varphi_0 = fase\ inicial\ (rad)$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -A\cdot w^2\cdot sen(wt + \varphi_0) = -w^2\cdot x}$$

$$a_{max} = \pm A\cdot w^2$$

$$\boxed{w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\cdot f}$$

$T = periodo(s)$

$f = \frac{1}{T} = frecuencia\ (Hz)$

Componentes intrínsecas y cartesianas de la aceleración (ejemplo)

Las posiciones que ocupa un móvil en su movimiento, vienen dadas por las siguientes ecuaciones, en las que x, y, z quedan expresadas en metros y t en segundos: $X = t^2 + 2t - 5 \quad ; \quad Y = t + 1 \quad ; \quad Z = t^3 + 2t$

Halla para el instante t = 2s:

a) La posición del móvil y la distancia al origen.
b) El vector velocidad y su módulo
c) El vector aceleración y su módulo.
d) El módulo de la aceleración tangencial y normal.
e) El radio de curvatura.

a) $\vec{r} = (t^2 + 2t - 5)\vec{i} + (t+1)\vec{j} + (t^3 + 2t)\vec{k}$

$\vec{r}_{2s} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k} \quad ; \quad \left|\vec{r}\right| = \sqrt{162}$ m

b) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (2t+2)\vec{i} + \vec{j} + (3t^2+2)\vec{k}$

$\vec{v}_{2s} = 6\vec{i} + \vec{j} + 14\vec{k} \quad ; \quad \left|\vec{v}\right| = \sqrt{233}$ m/s

c) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{i} + 6t\vec{k}$

$\vec{a}_{2s} = 2\vec{i} + 12\vec{k} \quad ; \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{148}$ m/s²

d) $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(2t+2)^2 + 1 + (3t^2+2)^2} = \sqrt{9t^4 + 16t^2 + 8t + 9}$

$$\left|\vec{a}_t\right| = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt} = \frac{36t^3 + 32t + 8}{2\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 8t + 9}} = \frac{360}{2\sqrt{233}} = \frac{180}{\sqrt{233}} = 11{,}8\ m/s^2.$$

$$\left|\vec{a}_n\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{a}_t\right|^2 = 148 - 11{,}8^2 \approx 9\ m/s^2 \quad ; \quad \left|\vec{a}_n\right| = 3\ m/s^2$$

e) $\left|\vec{a}_n\right| = \dfrac{\left|\vec{v}\right|^2}{R} \quad ; \quad R = \dfrac{\left|\vec{v}\right|^2}{\left|\vec{a}_n\right|} = \dfrac{233}{3} = 77{,}6$ m