DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

DISTRIBUCION BINOMIAL.

Es una de las distribuciones de probabilidad discretas más utilizada. En general, la función de probabilidad se suele dar en forma de una tabla en la que aparecen las probabilidades de los diferentes valores que puede tomar la variable aleatoria discreta.

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

La función de probabilidad verifica las siguientes propiedades:
1. La probabilidad p_i , es un número no negativo entre 0 y 1: $\boxed{0 \le p_i \le 1}$

2. La suma de todas las probabilidades es 1: $\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_i p_i = 1}$

3. La probabilidad de que una variable aleatoria tome algún valor dentro de un conjunto de valores concretos es la suma de las probabilidades asociadas a cada uno de ellos:

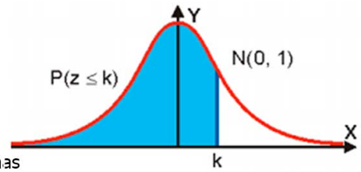
$$\boxed{P(a \le X \le b) = P(X = a) + \ldots + P(X = b)}$$

sólo tiene dos resultados posibles, que se denominan éxito (A) y fracaso (A^C), con probabilidades: P (A)=p, P(A^C)=q, siendo q=1-p. El experimento se repite n veces.
La distribución binomial de parámetros n y p se representa por B(n, p), siendo n el número de pruebas realizadas y p la probabilidad del suceso éxito.
Si representamos por X la variable aleatoria binomial que representa el número de éxitos (r) obtenidos en las n pruebas de un experimento, podemos calcular la probabilidad:

$$P(\text{obtener } r \text{ éxitos}) = P(X = r) = \binom{n}{r} p^r \cdot q^{n-r}$$

DISTRIBUCION NORMAL.

Es una de las distribuciones continuas la más importantes. La distribución normal estándar es muy importante porque se encuentra tabulada y no es necesario calcular el área correspondiente, esto nos permite calcular fácilmente las probabilidades asociadas a los distintos valores de la variable; además, cualquier distribución normal $N(\mu, \sigma)$ se puede tipificar, es decir, se puede reducir a una N(0, 1).
Las tablas de distribución normal N(0, 1) nos dan la probabilidad P(Z < k), para valores de k de 0 a 4, que es el área del recinto sombreado.



El valor de k se busca en las tablas de la siguiente manera: las unidades y las décimas se buscan en la columna de la izquierda, y las centésimas en la fila superior.
Recíprocamente, si conocemos el valor de la probabilidad P(Z < k), se puede saber el valor de k.
Recordar que en una distribución de variable continua las probabilidades puntuales son nulas: $\boxed{P(Z = a) = 0}$. Por tanto, $P(Z \le a) = P(Z < a)$

Veamos los distintos casos que se pueden presentar:
1. se encuentran directamente en las tablas. $\boxed{a \ge 0,\ P(Z \le a) = P(Z < a)}$

2. $\boxed{P(Z \ge a) = 1 - P(Z \le a)}$ 3. $\boxed{P(Z \le -a) = P(Z \ge a) = 1 - P(Z \le a)}$

4. $\boxed{P(a \le Z \le b) = P(Z \le b) - P(Z \le a)}$

Tipificación de la variable: $\boxed{P(X \le k) = P\left(Z \le \frac{k - \mu}{\sigma}\right)}$

APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA NORMAL

cuando la población es grande, la distribución binomial B(n,p) se aproxima a una normal: $\boxed{B(n,p) = N(np, \sqrt{npq})}$

es decir, la normal tendría por parámetros:
Media o valor esperado: $\boxed{\mu = n \cdot p}$
Desviación típica: $\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$
Suele considerase que la aproximación es buena cuando $\boxed{n \cdot p \ge 5}$ y $\boxed{n \cdot q \ge 5}$.
Nota: Dado que por mucho que se parezca nunca es igual una binomial que una normal, sería necesario aplicar en el cálculo de probabilidades un ajuste que recibe el nombre de **corrección de Yates**. No obstante, para simplificar el proceso se deja de lado esta diferencia y se calcularán las probabilidades directamente en la curva normal.
Se hará la siguiente corrección. $\boxed{P(X = a) = P(a - 0{,}5 \le X' \le a + 0{,}5)}$

ALGUNOS MODELOS DE EJERCICIOS

Cálculo de $z_{\alpha/2}$
Si nos piden por ejemplo para el 99%, el valor para buscar en la tabla N(0,1) se calcula con:

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

Intervalo característico (o de confianza) para la media:
Nos dan directamente la media (μ) y desviación (σ) de la población
En una distribución normal con media μ=8,2 y desviación típica σ=2,1, halla el intervalo característico para el 90%.
El intervalo característico es de la forma: $(\mu \pm z_{\alpha/2}{\cdot}\sigma)$
Si en el ejercicio nos dan la varianza, hay que hacer la raiz cuadrada para hallar σ.

Intervalo característico para la media -nos dan una muestra de n elementos-:
En una determinada empresa, se seleccionó al azar una muestra de (n) 100 empleados cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 705 euros, con una desviación típica de 120 euros. Halla un intervalo de confianza al 99% para la media de los ingresos mensuales de todos los empleados de la empresa.
El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \left(705 - 2{,}575 \cdot \frac{120}{\sqrt{100}};\ 705 + 2{,}575 \cdot \frac{120}{\sqrt{100}}\right);$$

(674,1; 735,9)

Intervalo característico para la media -nos dan una muestra de n elementos-:
Los pesos en una determinada población siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 5 kg. Pesando a 10 individuos de dicha población, se obtuvieron los siguientes resultados medidos en kilogramos:
62 65 63 58 64 60 57 62 60 58
Halla un intervalo de confianza al 90% para el peso medio de la población.
La media muestral la obtenemos a partir de los datos:

$$\bar{x} = \frac{57 + 58 \cdot 2 + 60 \cdot 2 + 62 \cdot 2 + 63 + 64 + 65}{10} = 60{,}9 \text{ kg}$$

Por tanto, el intervalo será:

$$\left(60{,}9 - 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}};\ 60{,}9 + 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}\right); \text{ es decir, } (58{,}30;\ 63{,}50)$$

Calcular el tamaño de la muestra para un error menor que ε:
La edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la universidad sigue una distribución normal con varianza 0,36. Deseamos estimar la edad media de dichos estudiantes con un error menor de 0,2 años y con una confianza del 99,5%. ¿De qué tamaño, como mínimo, debemos seleccionar la muestra?
Si la varianza es 0,36, entonces la desv. típica será $\sigma = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ años.
El error máximo admisible es

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\quad 0{,}2 = 2{,}81 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{2{,}81 \cdot 0{,}6}{0{,}2} = 8{,}43 \rightarrow n = 71{,}06$$

Debemos seleccionar, como mínimo, una muestra de 72 estudiantes.

Intervalo característico (o de confianza) para la proporción:
Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella hay 175 hembras.
a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94%.
El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

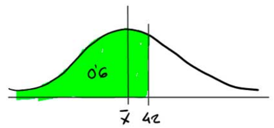
$$p = \frac{175}{500} = 0'35 \qquad \frac{1+0'94}{2} = 0'97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'88$$

sustituyendo, tenemos:

$$0'02 = 1'88\sqrt{\frac{0'35 \cdot 0'65}{n}} \Rightarrow n = \frac{1'88^2 \cdot 0'35 \cdot 0'65}{0'02^2} = 2010'19 \simeq 2011$$

Para terminar, un ejercicio diferente:

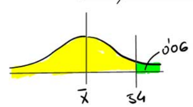
En una población, la característica X se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que X sea menor o igual que 42 es 0,6, y la de que X sea mayor que 54 es 0,06. Determina la media y la desviación típica de la distribución X.



$P(x \le 42) = 0'6$

$P\left(z \le \frac{42-\mu}{\sigma}\right) = 0'6 \qquad \frac{42-\mu}{\sigma} = 0'355 \Rightarrow \boxed{42 - \mu = 0'355\sigma}$

$P(x > 54) = 0'06 \rightarrow$



$P(x < 54) = 1 - 0'06 = 0'94$

$P\left(z < \frac{54-\mu}{\sigma}\right) = 0'94 \rightarrow \frac{54-\mu}{\sigma} = 1'555 \Rightarrow \boxed{54 - \mu = 1'555\sigma}$

$$\begin{array}{r} -42 + \cancel{\mu} = -0'355\sigma \\ 54 - \cancel{\mu} = 1'555\sigma \\ \hline 12 = 1'2\sigma \end{array} \rightarrow \sigma = \frac{12}{1'2} = \boxed{10 = \sigma}$$

$54 - \mu = 1'555 . 10 \Rightarrow \boxed{\mu = 38'45}$