DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2012
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Ejercicio 1.-

a) [5 puntos] Sea **x** un número real positivo, exprese como un único radical la expresión,

$$4x\sqrt{x}+\sqrt[3]{8x\sqrt{x}}+4\sqrt{x}+\sqrt{x^3}$$

y calcule el valor de la misma para **x = 2**

b) [5 puntos] Calcule el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^6+26n^3}-n^3\right)$.

$a)$

$$4x\cdot x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}+4\cdot x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}=4x^{1+\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+4\cdot x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}=4x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{2+1}{6}}+4\cdot x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}=$$

$$=4x\cdot x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{3}{6}}+4\cdot x^{\frac{1}{2}}+x\cdot x^{\frac{1}{2}}=5x\cdot x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+4\cdot x^{\frac{1}{2}}=5x\cdot x^{\frac{1}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=(5x+6)\,x^{\frac{1}{2}}=(5x+6)\sqrt{x}=P(x)$$

$$P(2)=(5\cdot 2+6)\sqrt{2}=16\sqrt{2}$$

$b)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^6+26n^3}-n^3\right)=\infty-\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^6+26n^3}-n^3\right)\left(\sqrt{n^6+26n^3}+n^3\right)}{\sqrt{n^6+26n^3}+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+26n^3-n^6}{\sqrt{n^6+26n^3}+n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{26n^3}{\sqrt{n^6+26n^3}+n^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{26\frac{n^3}{n^3}}{\sqrt{\frac{n^6}{n^6}+26\frac{n^3}{n^6}}+\frac{n^3}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{26}{\sqrt{1+\frac{26}{n^3}}+1}=\frac{26}{\sqrt{1+\frac{26}{\infty}}+1}=\frac{26}{\sqrt{1+0}+1}=13$$

Ejercicio 2.-

a) [**5 puntos**] Sea $p(x)$ el polinomio $p(x)=x^3-2x^2-x+2$. Resuelva la ecuación $p(x)=0$, factorice $p(x)$ y resuelva la inecuación $p(x)>0$. Represente gráficamente las soluciones de la inecuación sobre la recta real.

b) [**5 puntos**] Calcule el área del recinto limitado por la parábola $y=3x-x^2$ y el eje OX.

$a)$

$$\textit{Raices del polinomio}\Rightarrow \pm 1\,,\,2\Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \underline{|0} \end{array}\Rightarrow x^3-2x^2-x+2=(x-1)\left(x^2-x-2\right)$$

$$x^2-x-2=0\Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9\geq 0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1+3}{2}=2 \\ x=\frac{1-3}{2}=-1 \end{cases}\Rightarrow Soluc\ -1\,,1\,,2$$

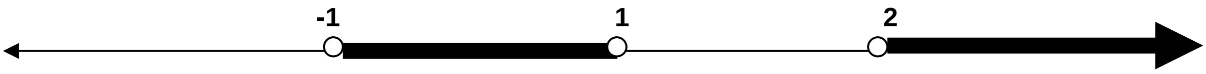
$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x+1)(x-2)\Rightarrow Si\ \ p(x)>0\Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2)>0\Rightarrow \begin{cases} x-1>0\Rightarrow x>1 \\ x+1>0\Rightarrow x>-1 \\ x-2>0\Rightarrow x>2 \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 2

a) Continuación

	$-\infty$	-1	1	2	∞
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**	
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**	
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**	
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**	

Solución $\forall x \in \Re / (-1 < x < 1) \cup (x > 2)$



La solución es la parte en negrilla y gruesa

b)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow (3 - x)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$2 \in [0\ ,\ 3] \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 - 2^2 = 6 - 2 = 4 > 0 \Rightarrow Positivo$$

$$A = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^3 - \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^3 = \frac{3}{2} \cdot (3^2 - 0^2) - \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 0^3) = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{81 - 54}{6} = \frac{27}{6}\ u^2$$

Ejercicio 3.-

a) [**5 puntos**] Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales y compruebe si la solución obtenida es correcta: $\begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ 3x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

b) [**5 puntos**] Sabiendo que en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos mide $\frac{\pi}{6}$ (*radianes*) y que el cateto opuesto mide 5 *cm.*, calcule el perímetro y el área del mismo.

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & 5 & 11 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado \Rightarrow 2z = -10 \Rightarrow z = -\frac{10}{2} = -5 \Rightarrow 3y - 5 = 7 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{3} = 4$$

$$-x + 2 \cdot 4 - 5 = 3 \Rightarrow -x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (0\ ,\ 4\ ,\ -5)$$

b)

$$sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{5}{H} \Rightarrow H = \frac{5}{sen\,\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10\ cm \Rightarrow 10 = \sqrt{5^2 + C^2} \Rightarrow 100 = 25 + C^2 \Rightarrow C^2 = 75 \Rightarrow C = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$Perimetro = 5 + C + H = 5 + 5\sqrt{3} + 10 = 15 + 5\sqrt{3} = 5\left(3 + \sqrt{3}\right) cm \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2}\ cm^2$$

Ejercicio 4.-

a) **[5 puntos]** Resuelva la ecuación: $\ln\sqrt{x+3}+2\ln\frac{1}{x+3} = \ln(e^{\frac{3}{2}})$, donde ln indica el logaritmo neperiano.

b) **[5 puntos]** Comprueba que la recta que pasa por los puntos $(-2,1)$ y $(6,-3)$ es perpendicular a la recta de ecuación $y=2x-5$ y determina el punto de corte entre ambas rectas.

$a)$

$$\ln\sqrt{x+3}+2\cdot[\ln 1-\ln(x+3)]=\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow \ln\sqrt{x+3}+2\cdot[0-\ln(x+3)]=\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow$$

$$\ln\sqrt{x+3}-2\cdot\ln(x+3)=\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow \ln\sqrt{x+3}-\ln(x+3)^2=\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow \ln\frac{\sqrt{x+3}}{(x+3)^2}=\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow$$

$$\ln\frac{(x+3)^{\frac{1}{2}}}{(x+3)^2}=\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow \ln\left[(x+3)^{\frac{1}{2}}(x+3)^{-2}\right]=\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow \ln\left[(x+3)^{\frac{1}{2}-2}\right]=\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left[(x+3)^{-\frac{3}{2}}\right]=\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow (x+3)^{-\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}\Rightarrow \frac{1}{(x+3)^{\frac{3}{2}}}=e^{\frac{3}{2}}\Rightarrow \left(\frac{1}{x+3}\right)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}\Rightarrow \frac{1}{x+3}=e\Rightarrow$$

$$ex+3e=1\Rightarrow ex=1-3e\Rightarrow x=\frac{1-3e}{e}$$

b) Si son perpendiculares el producto escalar de sus vectores directores es nulo

$$Ecuación\ de\ r\Rightarrow \frac{y-1}{x+2}=\frac{1-(-3)}{-2-6}\Rightarrow \frac{y-1}{x+2}=\frac{4}{-8}\Rightarrow \frac{y-1}{x+2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow x+2=-2y+2\Rightarrow x+2y=0$$

$$\begin{cases} r\equiv x+2y=0\Rightarrow \vec{v_r}=(-2,1) \\ s\equiv 2x-y-5=0\Rightarrow \vec{v_s}=(1,2)\end{cases}\Rightarrow \vec{v_r}\cdot\vec{v_s}=(-2,1)\cdot(1,2)=-2+2=0\Rightarrow \vec{v_r}\perp\vec{v_s}$$

$Punto\ de\ corte\ P$

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 4x-2y-10=0\end{cases}\Rightarrow 5x-10=0\Rightarrow 5x=10\Rightarrow x=\frac{10}{5}=2\Rightarrow 2+2y=0\Rightarrow 2y=-2\Rightarrow y=-1\Rightarrow P(2,-1)$$

Ejercicio 5.-

a) [5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^4 - 8x^2$. Calcule los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [5 puntos] Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros tiene por extremos los puntos $A(-1,4)$ y $B(7,-2)$. Calcule los puntos de corte de esta circunferencia con la recta de ecuación $y = 1$.

a)

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right) = 4x\,(x-2)(x+2) \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 4x\,(x-2)(x+2) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases}$$

	$-\infty$ -2	-2 0	0 2	2 ∞
4 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -2	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x \in \Re / (-2 < x < 0) \cup (x > 2)$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / (x < -2) \cup (0 < x < 2)$

Mínimo relativo $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 = 16 - 32 = -16$ **de Decreciente pasa a Creciente**

Máximo relativo $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 = 0$ **de Creciente pasa a Decreciente**

Mínimo relativo $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 = 16 - 32 = -16$ **de Decreciente pasa a Creciente**

b) El punto medio **O** del vector **AB** es el centro de la circunferencia y su módulo es el doble del radio de la circunferencia **C** buscada

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{(-1)+7}{2} = 3 \\ y_0 = \dfrac{4+(-2)}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(3,1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (7,-2) - (-1,4) = (8,-6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow$$

$$R = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$C \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

$$Si\ y = 1 \Rightarrow x^2 + 1^2 - 6x - 2 \cdot 1 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+10}{2} = 8 \\ x = \dfrac{6-10}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow Puntos\ de\ corte\ con\ y = 1 \Rightarrow \begin{cases} (8,1) \\ (-2,1) \end{cases}$$

Ejercicio 6.-

a) [5 puntos] Calcule $\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)$ y θ sabiendo que $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ y $\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}$.

b) [5 puntos] Determine las asíntotas de la gráfica de la función f, definida para $x \neq -1$, por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x+1}.$$

a)

$$\begin{cases} \cos^2\theta + sen^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - sen^2\theta = \cos(2\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos^2\theta = 1+\cos(2\theta) \Rightarrow \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2} \\ 2sen^2\theta = 1-\cos(2\theta) \Rightarrow sen^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow Como\ \pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ sen^2\theta = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow sen\ \theta = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Como\ \pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow sen\ \theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\theta = arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\ rad = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

b)

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{3\cdot(-1)^2}{-1+1} = \frac{3}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Asíntota\ vertical\ en\ x = -1$$

Asíntota horizontal

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{3}{0+0} = \frac{3}{0} \Rightarrow Sin\ solución$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \to \infty$

$$y = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x+1} = \frac{\infty}{-\infty} = \xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{1} = \lim_{x\to-\infty} 6x = 6\cdot(-\infty) = -\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{3}{1+0} = 3$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2}{x+1} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-3x^2-3x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3\cdot\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{1+\frac{1}{x}} = -3$$

Existe una **asíntota oblicua, y = -3x + 3**, cuando $x \to \infty$

Continuación del Ejercicio 6

b)Continuación

Asíntotas oblicuas (Continuación)

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x^2}{x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{2x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{2}=3$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2}{x+1}-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-3x^2-3x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{1}$$

$n=-3$

Existe asíntota oblicua , $y=3x-3$, *cuando* $x\to-\infty$