ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2010 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice y simplifique la fracción $\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$.

b) (5 puntos) Determine los coeficientes de la ecuación $3x^2 - ax + b = 0$ para que sus soluciones sean los valores 3 y -2.

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) En una progresión aritmética de 20 términos el primero es 5 y el décimo 32. Halle su razón y la suma de sus primeros 20 términos.

b) (5 puntos) Un banco concedió a una empresa un préstamo, a un interés compuesto del 6% durante 5 años y al cabo de ese tiempo el interés acumulado es de 3382.25 euros. ¿Qué capital prestó el banco a esa empresa?

EJERCICIO 3

a) (2 puntos) Represente la gráfica de la función $y = -2x + 5$.

b) (3 puntos) Represente gráficamente la función $y = (2-x)\cdot(x+1) - 2$.

c) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x^2+1}$.

EJERCICIO 4

a) (6 puntos) Dada la función $f(x) = x - \frac{3}{x+2}$ estudie si tiene asíntotas verticales u horizontales y represente las que existan. Determine también las regiones de crecimiento y decrecimiento de esta función.

b) (4 puntos) Se lanzan simultáneamente dos dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 12?

EJERCICIO 5

Una cooperativa aceitera quiere realizar un estudio sobre la influencia de las campañas publicitarias en sus cifras de ventas. Para ello dispone del gasto destinado a publicidad y del volumen de ventas en los últimos 5 años (ambos en miles de euros):

X : gasto en publicidad	2.5	2.8	2.9	3.1	3.5
Y : ventas	200	221	230	239	248

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Cuál será el volumen de ventas si la inversión en publicidad ascendiera a 3.8 miles de euros?

b) (5 puntos) Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.

EJERCICIO 6

a) (5 puntos) En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Asimismo, el 35% de las personas de esa ciudad son hombres mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?

b) (5 puntos) En un colegio se estudia la distribución de la nota de Matemáticas de sus estudiantes, resultando ser una Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2. Se elige al azar un estudiante de ese colegio, ¿cuál será la probabilidad de que su nota en esta asignatura sea mayor que 7.5?

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2010

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice y simplifique la fracción** $\dfrac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$**.**

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción anterior por el conjugado del denominador obtenemos:

$$\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{18-8}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{10}=$$

$$=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{8}}{5}=\frac{\sqrt{2\cdot 3^2}-\sqrt{2\cdot 2^2}}{5}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

b) (5 puntos) **Determine los coeficientes de la ecuación** $3x^2-ax+b=0$ **para que sus soluciones sean los valores 3 y** -2**.**

Como 3 y -2 son soluciones de la ecuación dada han de satisfacerla, es decir que al sustituir x por 3 y por -2 la igualdad debe cumplirse; por tanto:

$$3\cdot 3^2-a\cdot 3+b=0$$
$$3\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)+b=0.$$

Operando, queda

$$\left.\begin{array}{l}27-3a+b=0\\12+2a+b=0\end{array}\right\}\rightarrow$$ se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Restando ambas ecuaciones:

$$15-5a=0\rightarrow 15=5a\rightarrow a=\frac{15}{5}=3\rightarrow b=-27+3a=-18.$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **En una progresión aritmética de 20 términos el primero es 5 y el décimo 32. Halle su razón y la suma de sus primeros 20 términos.**

Sabemos que en una progresión aritmética se cumplen las siguientes igualdades:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

donde d es la diferencia, o razón de la progresión.
Particularizando las expresiones anteriores a nuestro caso, tendríamos:

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d \rightarrow 32 = 5 + 9d \rightarrow 9d = 27 \rightarrow d = 3$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$$

Calculemos a_{20}:

$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = 5 + 19 \cdot 3 = 5 + 57 = 62$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(5+62) \cdot 20}{2} = \frac{67 \cdot 20}{2} = 670$$

b) (5 puntos) **Un banco concedió a una empresa un préstamo, a un interés compuesto del 6% durante 5 años y al cabo de ese tiempo el interés acumulado es de 3382.25 euros. ¿Qué capital prestó el banco a esa empresa?**

La fórmula del interés compuesto cuando el tiempo, *n*, viene expresado en años es:

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

siendo *r* el tanto por ciento anual, rédito, al que se concede el préstamo.

Desconocemos el capital prestado C_0, pero sabemos que el capital final, C_n, la cantidad a devolver al banco, es la suma del capital prestado más los intereses devengados, es decir $C_5 = C_0 + 3382.25$.

Sustituyendo en la fórmula general:

$$C_0 + 3382.25 = C_0\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 \rightarrow C_0 + 3382.25 = C_0 \cdot 1.06^5 \rightarrow 1.06^5 C_0 - 1 \cdot C_0 = 3382.25$$

$$1.338225578 C_0 - 1C_0 = 3382.25 \rightarrow 0.338225578 C_0 = 3382.25 \rightarrow$$

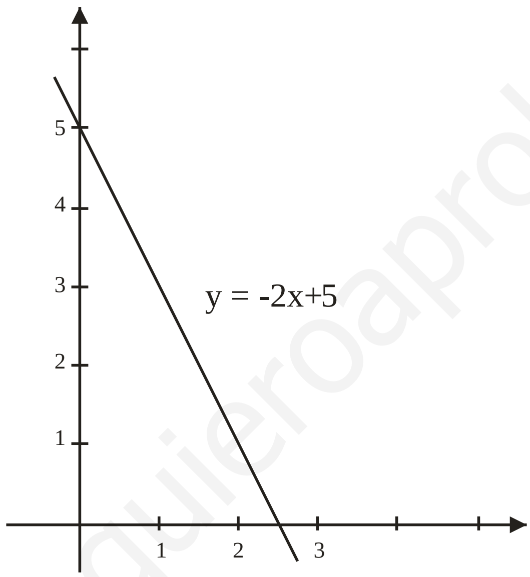
$$\rightarrow C_0 = \frac{3382.25}{0.338225578} \cong 10000$$

En consecuencia, el préstamo ascendía a 10000 euros.

EJERCICIO 3

a) (2 puntos) **Represente la gráfica de la función** $y = -2x + 5$**.**

La función anterior corresponde, gráficamente, a una recta. Para representarla es suficiente conocer dos puntos de ella, en particular los puntos donde corta a los ejes de coordenadas; éstos se obtienen así:
$x = 0 \rightarrow y = 5$; es decir, el punto (0, 5), punto donde la recta corta al eje de ordenadas, es un punto de la recta.
$y = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$; es decir, el punto (2.5, 0), punto donde la recta corta al eje de abscisas, es un punto de la recta.
La representación gráfica sería:



b) (3 puntos) **Represente gráficamente la función** $y = (2 - x) \cdot (x + 1) - 2.$

Efectuando las operaciones indicadas en la expresión anterior quedaría:

$$y = -x^2 + x + 2 - 2 = -x^2 + x.$$

La función anterior, polinómica de grado 2, corresponde gráficamente a una parábola. Para representarla es suficiente conocer el vértice y los puntos donde corta a los ejes de coordenadas.
Cálculo del vértice: Al ser el coeficiente de x^2 negativo, indica que la parábola es cóncava, el vértice está hacia arriba, es un máximo. La abscisa del vértice se obtiene derivando e igualando a 0:

$$y' = -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} = 0.5$$

Para calcular la ordenada del vértice sustituimos este valor de x, 0.5, en la función y obtenemos $y = -0.5^2 + 0.5 = -0.25 + 0.5 = 0.25$
Es decir, el vértice de la parábola, máximo de la función, es el punto de coordenadas $(0.5, 0.25)$.

Corte al eje de ordenadas:

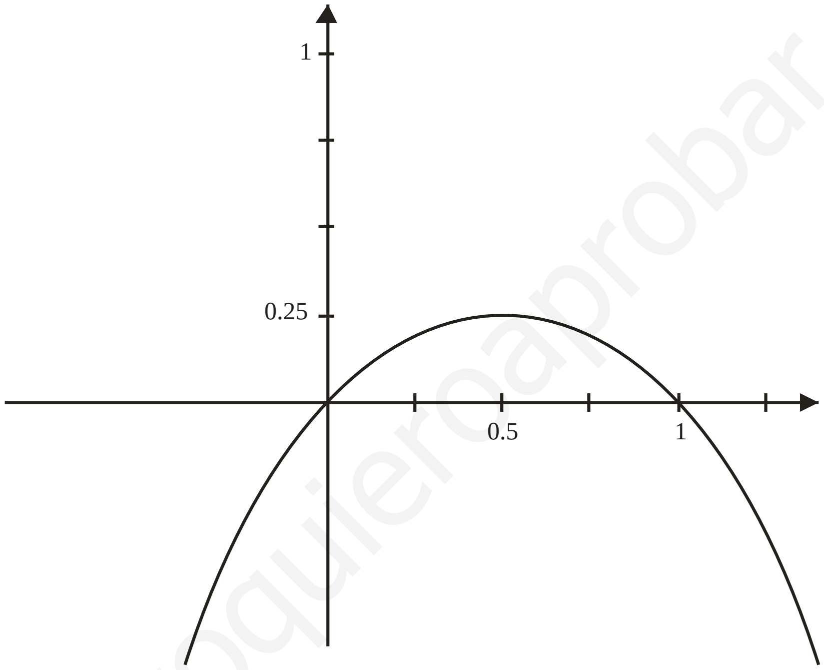
$x = 0 \to y = 0.$ Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 0), origen de coordenadas.

Corte al eje de abscisas:

$y = 0 \to -x^2 + x = 0 \to x(-x+1) = 0 \to x = 0,$ ó $-x+1 = 0 \to x = 0,$ ó $x = 1.$

Corta al eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (1, 0).

Con los datos obtenidos es inmediato dibujar la gráfica:



c) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x^2+1}.$

Hay que tener en cuenta que se trata de derivar una suma en la que el primer sumando es una raíz cuadrada y el segundo es un cociente; por tanto

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{0 \cdot (x^2+1) - 1 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

EJERCICIO 4

a) (6 puntos) **Dada la función** $f(x)=x-\dfrac{3}{x+2}$ **estudie si tiene asíntotas verticales u horizontales y represente las que existan. Determine también las regiones de crecimiento y decrecimiento de esta función.**

Expresemos la función anterior como una función racional, efectuando, para ello, la diferencia

$$f(x)=x-\frac{3}{x+2}=\frac{x^2+2x-3}{x+2}.$$

Las asíntotas verticales son rectas con ecuación de la forma $x=k$, siendo k un valor tal que $\lim\limits_{x\to k} f(x)=\infty$. En nuestro caso esta condición se cumple cuando $k=-2$, por tanto la recta de ecuación $x=-2$ es una asíntota vertical.

Las asíntotas horizontales son rectas con ecuación de la forma $y=h$, siendo h un valor tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=h$. En nuestro caso $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}=\infty$, por lo que no hay asíntota horizontal.

Las asíntotas oblicuas son rectas cuya ecuación es de la forma $y=mx+n$, siendo m un valor dado por $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

En nuestro caso $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2+2x-3}{x+2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x(x+2)}$=1.

En cuanto a n viene dado por $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$.

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-3}{x+2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-3-x^2-2x}{x+2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3}{x+2}\right]=0.$$

En consecuencia, la asíntota oblicua es la recta de ecuación $y=x$.

La representación gráfica de las asíntotas equivale, por tanto, a la representación gráfica de dos rectas cuyas ecuaciones son $x=-2$, recta perpendicular al eje de abscisas por el punto $(-2,0)$ e $y=x$, que es la bisectriz del 1º y 3º cuadrante.

La función es creciente en aquellos puntos donde la primera derivada es positiva, es decreciente en los puntos donde esta derivada es negativa; por tanto habrá que calcular la derivada de esa función y estudiar el signo de ésta:

$$f'(x)=\frac{(2x+2)\cdot(x+2)-(x^2+2x-3)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+6x+4-x^2-2x+3}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}$$

El denominador de esta fracción, por ser un cuadrado, toma siempre valores positivos (exceptuamos el valor 0, cuando $x = -2$ donde la función no es continua), por tanto el signo de la fracción será el que tome el numerador.

Tratemos de expresar en forma de producto el numerador; para ello calculemos sus raíces:

$$x^2 + 4x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-28}}{2}$$

Al resultarnos la raíz de un número negativo, que no existe en el conjunto de los números reales, podemos concluir que la parábola correspondiente a la representación gráfica de la función del numerador no corta al eje de abscisas por lo que los valores de la función son, para cualquier valor de x positivos ó negativos, en nuestro caso positivo.
En conclusión la función es creciente en todo su dominio, es decir en el conjunto

$$(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty).$$

b) (4 puntos) **Se lanzan simultáneamente dos dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 12?**

El espacio muestral, resultados posibles, estaría formado por las siguientes 36 parejas de resultados:

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6), \end{array} \right\}$$

Cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad de obtenerse, es decir se trata de resultados equiprobables, por lo que la probabilidad de que se realice uno cualquiera de ellos vale $\frac{1}{36}$.
Nos piden la probabilidad de que la suma de las caras sea 12; esta suma sólo se presenta cuando se obtiene el resultado (6,6), por tanto la probabilidad de que la suma sea 12 es igual que la probabilidad de que se obtenga (6, 6), o sea $\frac{1}{36}$.

EJERCICIO 5

Una cooperativa aceitera quiere realizar un estudio sobre la influencia de las campañas publicitarias en sus cifras de ventas. Para ello dispone del gasto destinado a publicidad y del volumen de ventas en los últimos 5 años (ambos en miles de euros):

X : gasto en publicidad	2.5	2.8	2.9	3.1	3.5
Y : ventas	200	221	230	239	248

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Cuál será el volumen de ventas si la inversión en publicidad ascendiera a 3.8 miles de euros?

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X tiene por expresión

$$y-\bar{y}=r\frac{s_y}{s_x}\left(x-\bar{x}\right) \text{, ó también } \quad y-\bar{y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}\left(x-\bar{x}\right)$$

donde r es el coeficiente de correlación lineal, que viene definido así $r=\frac{s_{xy}}{s_x s_x}$,

$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\bar{x}\cdot\bar{y}$ es la covarianza, $s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$ es la varianza de la variable X, s_x, desviación típica de la variable X, es la raíz cuadrada de la varianza s_x^2, y, por último, $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ es la media aritmética de la variable X.

Dispongamos los cálculos necesarios en forma de tabla:

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\cdot y_i$	y_i^2
	2.5	200	6.25	500	40000
	2.8	221	7.84	618.8	48841
	2.9	230	8.41	667	52900
	3.1	239	9.61	740.9	57121
	3.5	248	12.25	868	61504
Sumas $\rightarrow$	14.8	1138	44.36	3394.7	260366

$$\bar{x}=\frac{14.8}{5}=2.96\,; \quad \bar{y}=\frac{1138}{5}=227.6\,; \quad s_x^2=\frac{44.36}{5}-2.96^2=8.872-8.7616=0.1104$$

$$s_x=\sqrt{0.1104}\cong 0.332\,; \quad s_y^2=\frac{260366}{5}-227.6^2=52073.2-51801.76=271.44\,;$$

$$s_y=\sqrt{271.44}\cong 16.475\,; \quad s_{xy}=\frac{3394.7}{5}-2.96\cdot 227.6=678.94-673.696=5.244$$

La ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X* es

$$y - 227.6 = \frac{5.244}{0.1104}(x - 2.96)$$

ó en forma explícita $y = 47.5x + 87$.
La recta obtenida nos permite estimar el valor de la variable *Y* (venta obtenida) para valores de la variable *X* (inversión en publicidad).

En concreto, si se invierte en publicidad 3.8 miles de euros, $x = 3.8$, la venta estimada sería

$$y = 47.5 \cdot 3.8 + 87 = 180.5 + 87 = 267.5 \text{ miles de euros.}$$

b) (5 puntos) **Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.**

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_x} = \frac{5.244}{0.332 \cdot 16.475} = \frac{5.244}{5.47406} \cong 0.9579$$

Del valor del coeficiente de correlación lineal hay que tener en cuenta dos aspectos: su signo y su valor absoluto (el recorrido de valores de *r* va desde -1 a +1).

El signo nos indica si la relación es directa (al aumentar una variable la otra también lo hace) ó inversa (si aumenta una variable la otra disminuye) pero no nos indica si la relación es intensa o débil.

La relación entre las dos variables, directa o inversa, es más fuerte cuanto más próximo a 1 es el valor absoluto de *r* y más débil cuanto más se acerque a 0.

En nuestro caso se trata de una relación lineal directa (a más gasto en publicidad más venta) muy intensa.

EJERCICIO 6

a) (5 puntos) **En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Asimismo, el 35% de las personas de esa ciudad son hombres mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?**

La representación, mediante la siguiente tabla, de la distribución de las personas de esa ciudad nos facilita la resolución.

	mujeres	hombres	totales
mayores	40%	35%	75%
menores	15%	10%	25%
totales	55%	45%	100%

El número de cada celdilla representa el porcentaje de personas que cumplen, simultáneamente, la condición de la fila (mayor o menor) y columna (mujer u hombre) en la que se encuentra dicho número.

Por consiguiente, la probabilidad de que sea mujer sabiendo que es mayor de edad es de $\frac{40}{75} = 0.53$.

b) (5 puntos) **En un colegio se estudia la distribución de la nota de Matemáticas de sus estudiantes, resultando ser una Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2. Se elige al azar un estudiante de ese colegio, ¿cuál será la probabilidad de que su nota en esta asignatura sea mayor que 7.5?**

Sabemos que si la variable *X*, nota de Matemáticas de los alumnos de ese colegio, se distribuye según una ley Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2, $X \to N(7.2,1.2)$, la variable $\frac{X-7.2}{1.2}$ se distribuye según una variable Normal tipificada, *Z*, es decir *N*(0,1), cuyos valores vienen tabulados. Por lo tanto vamos a pasar de la variable *X* a la *Z*.

Nos preguntan la probabilidad de que la variable *X* tome valores mayores que 7.5, es decir

$$P(X > 7.5) = P(X - 7.2 > 7.5 - 7.2) = P(\frac{X-7.2}{1.2} > \frac{0.3}{1.2}) = P(Z > 0.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013.$$