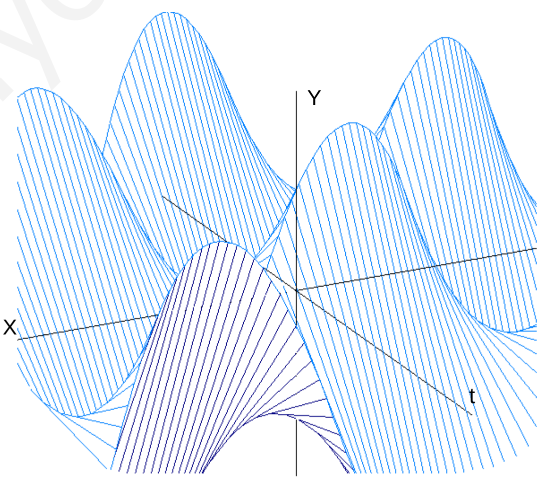
Agustín E. González Morales

FUNDAMENTOS DE FÍSICA GENERAL

(soluciones)



$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

TEMA I

CÁLCULO VECTORIAL

TEMA II

CINEMÁTICA

TEMA III

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA

TEMA IV

DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

TEMA V

TRABAJO Y ENERGÍA

TEMA VI

DINÁMICA DE ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO

TEMA VII

TERMODINÁMICA

TEMA VIII

CAMPO GRAVITATORIO Y ELECTROSTÁTICO

TEMA IX

ELECTROMAGNETISMO

Fuerza magnética. Ley de Lorentz
Movimiento de una partícula cargada dentro de un campo magnético uniforme
Espectrógrafo de masas. Ciclotrón
Campo magnético. Ley de Biot y Sabart. Permeabilidad magnética
Momento magnético. Galvanómetro
Campo creado por una corriente rectilínea indefinida
Fuerzas entre corrientes paralelas. Amperio
Campo creado por una espira circular uniforme, un solenoide abierto y un solenoide cerrado
- Espira circular
- Solenoide abierto
- Solenoide cerrado

Circulación del campo magnético. Ley de Ampere. Corriente de desplazamiento de Maxwell
Ejercicios

TEMA X

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Flujo magnético a través de una superficie cerrada
Experiencias de Faraday–Henry
Fuerzas electromotriz inducida. Ley de Faraday–Henry. Corriente inducida. Carga inducida
Ley de Lenz
Generalización de la Ley de Faraday–Henry
Autoinducción
- Coeficiente de autoinducción L. Inductancia de una bobina de n espiras
- F.e.m. de autoinducción
- Caía de tensión en una bobina
- Corrientes de cierre y apertura

Energía magnética almacenada en una bobina. Densidad de energía de un campo electromagnético
Inducción mutua
Transformadores
Fundamentos de la generación de la corriente alterna
Ejercicios

TEMA XI

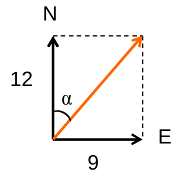
ONDAS

Movimiento vibratorio armónico
Energías potencial y cinética en el M.V.A.
Movimiento ondulatorio
Tipos de ondas
Ecuación del movimiento ondulatorio
- Fase
- Periodicidad

TEMA I

CÁLCULO VECTORIAL

1. **Un barco navega hacia el Norte a 12 nudos y la marea lo arrastra hacia el Este a 9 nudos. Calcular el rumbo y la velocidad real del buque.**



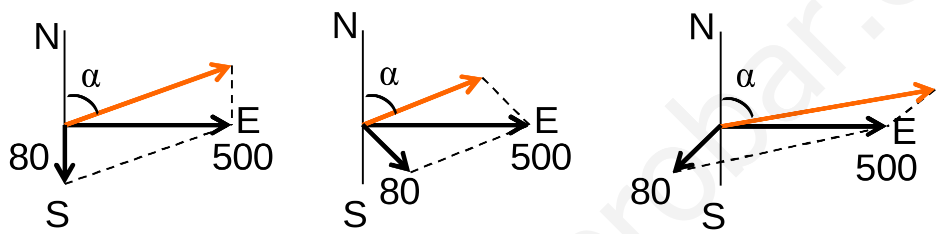
El módulo de la velocidad real es $v = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

Resp.: 15 nudos

El rumbo se mide desde el Norte en sentido horario: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{9}{12}$

Resp.: 36º 52’

2. **Deseamos volar en un avión a 500 km/h hacia el Este. Calcular el módulo de la velocidad y el rumbo del avión si el viento sopla a 80 km/h hacia a) el Sur; b) el Sureste; c) el Suroeste.**



(a) (b) (c)

Si se elige un SR cartesiano ortogonal dextrógiro con el semieje OX apuntando al E y el semieje OY hacia el N, la velocidad y el rumbo del avión en cada caso es:

a) $\vec{v} = 500\,\vec{i} + 80\,\vec{j}\,;\;\; v = \sqrt{500^2 + 80^2} = 506.36$ km/h.

El rumbo es $\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{500}{80}$ = 80º 54’ 35’’

Resp.: 506.36 km/h 80º 54’ 35’’

b) El rumbo SE forma 45º con el S y el E. Por tanto, la velocidad del viento es $40\sqrt{2}$ hacia el S y hacia el E. La velocidad del avión debe ser:

$$\vec{v} = (500 - 40\sqrt{2})\,\vec{i} + 40\sqrt{2}\,\vec{j}\,;\;\; v = \sqrt{\left(500 - 40\sqrt{2}\right)^2 + \left(40\sqrt{2}\right)^2} = 447.02 \text{ km/h.}$$

El rumbo es $\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{500 - 40\sqrt{2}}{40\sqrt{2}}$ = 82º 43’ 48’’

Resp.: 447.02 km/h 82º 43’ 48’’

c) El rumbo SO forma 45º con el S y el O. Por tanto, la velocidad del viento es $40\sqrt{2}$ hacia el S y hacia el O. La velocidad del avión debe ser:

$$\vec{v} = (500 + 40\sqrt{2})\,\vec{i} + 40\sqrt{2}\,\vec{j}\,;\;\; v = \sqrt{\left(500 + 40\sqrt{2}\right)^2 + \left(40\sqrt{2}\right)^2} = 559.44 \text{ km/h.}$$

El rumbo es $\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{500 + 40\sqrt{2}}{40\sqrt{2}}$ = 84º 11’ 47’’

Resp.: 549.44 km/h 84º 11’ 47’’

3. Dos fuerzas coplanarias concurrentes de 5 y 7 N forman 60º y –30º con el semieje OX. En la fuerza resultante calcular el módulo y el ángulo que forma con el semieje OX.

$$\vec{F}_1 = 5(\cos 60\,\vec{i} + \text{sen}\,60\,\vec{j}) \qquad \vec{F}_2 = 7\left(\cos(-30)\,\vec{i} + \text{sen}\,(-30)\,\vec{j}\right) = 7(\cos 30\,\vec{i} - \text{sen}\,30\,\vec{j})$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (5\cos 60 + 7\cos 30)\,\vec{i} + (5\,\text{sen}\,60 - 7\,\text{sen}\,30)\,\vec{j} = \frac{5+7\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{5\sqrt{3}-7}{2}\,\vec{j}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad \alpha = \text{arctg}\,\frac{F_y}{F_x}$$

Resp.: F = 8.6 N α = 5º 32’ 16’’

4. Si un vector de módulo 4 forma con los ejes X e Y ángulos de 60º, calcular el ángulo que forma con el eje Z y sus componentes.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,;\ \cos^2 60 + \cos^2 60 + \cos^2\gamma = 1$$

Resp.: γ = 45º

$$x = V\cos\alpha = 4\cos 60; \quad y = V\cos\beta = 4\cos 60; \quad z = V\cos\gamma = 4\cos 45$$

Resp.: $\vec{V} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\sqrt{2}\,\vec{k}$

5. Dados los vectores $\vec{a}$ de módulo 3 y cosenos directores proporcionales a 2, 1 y –2; $\vec{b}$ que tiene su origen respecto a un cierto SR en el punto O (–1, –2, 1) y el extremo en P (3, 0, 2); y $\vec{c} = (2,0,-3)$. **Calcular** $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

$$\frac{\cos\alpha}{2} = \frac{\cos\beta}{1} = \frac{\cos\gamma}{-2} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\vec{a} = 3(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 3\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) = (2,1,-2)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{OP} = (3,0,2) - (-1,-2,1) = (4,2,1)$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = 2(2,1,-2) - 3(4,2,1) + (2,0,-3)$$

Resp.: (–6, –4, –10)

6. Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b}$ tiene la dirección del eje OX y su módulo es el del momento del vector $7\vec{k}$ aplicado en el punto (1, 3, 3) con respecto a la recta r ≡ y = 3x – 2 situada en el plano XY; y $\vec{c}$ está sobre la recta r’ de ecuaciones x = y, z = 0, su módulo es $\sqrt{2}$ y sus componentes son positivas. Calcular el momento respecto al origen del sistema de vectores deslizantes $\vec{A} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{B} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{C} = \vec{a} + \vec{c}$ que pasan respectivamente por los puntos (1, 0, 0), (0, 0, 0) y (0, 1, 0)

Cálculo de $\vec{b}$

Empezamos por determinar un punto de la recta y = 3x – 2, situada en el plano XY. Sea, por ejemplo, x = 1, entonces y = 1. Por tanto, un punto de r es P(1, 1, 0). Calculemos el momento de $7\vec{k}$ aplicado en el punto (1, 3, 3) respecto a P:

$$\vec{M}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-1 & 3-1 & 3-0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14\vec{i}$$

Determinemos un vector según la dirección de la recta r. Elegimos otro punto Q sobre r, por ejemplo, x = 0, entonces y = –2, por tanto Q (0, –2, 0):

$$\overrightarrow{QP} = (1,1,0) - (0,-2,0) = (1,3,0)$$

el vector unitario según $\overrightarrow{QP}$ es:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{QP}}{QP} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2}}(1,3,0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{i} + 3\vec{j})$$

el módulo del momento de $7\vec{k}$ con respecto a r es:

$$\vec{M}_P \cdot \vec{u} = 14\vec{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{i} + 3\vec{j}) = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

por tanto

$$\vec{b} = \frac{14}{\sqrt{10}}\vec{i}$$

Cálculo de $\vec{c}$

Si $\vec{c}$ está sobre la recta r’ de ecuaciones x = y, z = 0, un vector director de la recta es el vector (1, 1, 0), y un vector unitario $\vec{u}'$ según la dirección de dicha recta es:

$$\vec{u}' = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{c} = c\,\vec{u}' = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) = (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{c} = (\vec{i} + \vec{j})$$

Por tanto:

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{b} = \left(2 + \frac{14}{\sqrt{10}}\right)\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{b} + \vec{c} = \left(\frac{14}{\sqrt{10}} + 1\right)\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{C} = \vec{a} + \vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

Los momentos son:

$$\vec{M}_{o\bar{A}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 + \frac{14}{\sqrt{10}} & -3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{j} - 3\vec{k}$$

$\vec{M}_{o\vec{B}} = 0$ pues pasa por el origen.

$$\vec{M}_{o\vec{C}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 3\vec{k}$$

Y el momento del sistema es:

$$\vec{M} = \vec{M}_{o\vec{A}} + \vec{M}_{o\vec{B}} + \vec{M}_{o\vec{C}}$$

Resp.: $\vec{M} = -\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$

7. **El vector $\vec{V}_1$, de módulo 10, tiene los cosenos directores proporcionales a 0, 3 y 4 y está situado en una recta que pasa por el origen de coordenadas, $\vec{V}_2 =$ (1, –1, –2) y su momento respecto al origen es (1, 3, 2), y $\vec{V}_3 =$ (–1, 0, 1) está situado en la recta de acción que pasa por el punto (2, –1, 2). Calcular el vector resultante y el momento resultante respecto al origen de coordenadas.**

$$\frac{\cos\alpha}{0} = \frac{\cos\beta}{3} = \frac{\cos\gamma}{4}$$

$$\cos\alpha = 0$$

$$\cos\gamma = \frac{4\cos\beta}{3}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

deducimos

$$\cos\beta = \frac{3}{5};\ \cos\gamma = \frac{4}{5}$$

entonces

$$\vec{V}_1 = V(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 10(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = (0, 6, 8)$$

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (0, 6, 8) + (1, -1, -2) + (-1, 0, 1) = (0, 5, 7)$$

Resp.: $\vec{R} = (0, 5, 7)$

Calculemos los momentos respecto al origen

$$\vec{M}_1 = 0 \ \text{(pasa por el origen)}$$

$$\vec{M}_2 = (1, 3, 2)$$

$$\vec{M}_3 = \vec{r} \times \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1, 4, 1)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_3 + \vec{M}_2 = (1,3,2) - (1,4,1) = (0,-1,1)$$

Resp.: $\vec{M} = (0,-1,1)$

8. Calcular el momento del vector $\vec{V} = (-1, 2, -5)$ aplicado en el punto (1, 2, 3) respecto al eje definido por la ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$.

Un punto P del eje es (1, –2 , 0); y el vector que une P con el punto de aplicación de $\vec{V}$ es $\vec{r} = (1,2,3) - (1-2,0) = (0,4,3)$; por tanto:

$$\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-26,-3,4)$$

Un vector unitario según la dirección del eje es: $\vec{u} = \frac{(2,3,-1)}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)$

$$\vec{M}_{eje} = \overrightarrow{\text{Pr oy}}_{eje}(\vec{r} \times \vec{V}) = (\vec{M}_P \cdot \vec{u})\vec{u} = (-26,-3,4) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)\frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)$$

Resp.: $\vec{M}_{eje} = \frac{-65}{14}(2,3,-1)$

9. Calcular el momento del vector $\vec{V} = (2,1,-2)$ que pasa por el punto P (3, 1, –2) respecto al punto A (1, 0, 1), el módulo del momento respecto al eje que pasa por A y B(1, 2, 1) y la distancia entre P y el eje AB.

Momento respecto a A

$$\vec{r} = \overrightarrow{AP} = (3,1,-2) - (1,0,1) = (2,1,-3)$$

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1,-2,0)$$

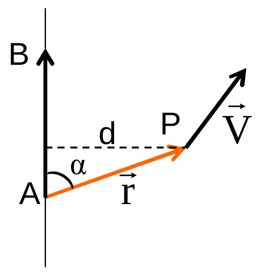
Resp.: $\vec{M}_A = (1,-2,0)$

Momento respecto al eje AB

$$M_{ejeAB} = \vec{M}_A \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = (1,-2,0) \cdot \frac{(1,2,1)-(1,0,1)}{AB} = \frac{(0,2,0)}{2} = (1,-2,0)\cdot(0,1,0) = -2$$

Resp.: $M_{ejeAB} = -2$

Distancia entre P y el eje AB:



$$\vec{r} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (6,0,4); \text{cuyo módulo es } \sqrt{6^2+4^2} = 2\sqrt{13}$$

Como $\left|\vec{r} \times \overrightarrow{AB}\right| = AB \cdot d$; entonces $d = \frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{AB}\right|}{AB} = \frac{2\sqrt{13}}{2}$

Resp.: $d = \sqrt{13}$

10. Descomponer el vector $\vec{V}$ dirigido según $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, de módulo $\sqrt{27}$, según las direcciones $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}$.

El vector $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ tiene los tres cosenos directores iguales, como $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, entonces:

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y

$$\vec{V}=V(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\sqrt{27}\,\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=3(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\ .$$

El vector $\vec{V}$ escrito como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ es:

$$3(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=m\vec{u}+n\vec{v}+p\vec{w}=m(\vec{i}+\vec{j})+n(\vec{j}+\vec{k})+p(\vec{i}+\vec{k})$$

donde obtenemos: $m=n=p=\dfrac{3}{2}$, por tanto:

Resp.: $\vec{V}=\dfrac{3}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$

11. Dados los vectores $\vec{V}_1=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{V}_2=\vec{i}-2\vec{j}$, calcular las componentes de un vector unitario perteneciente al plano determinado por $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ perpendicular al vector $\vec{V}=\vec{V}_1-2\vec{V}_2$.

El vector buscado es una combinación lineal de $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$:

$$\vec{U}=m\vec{V}_1+n\vec{V}_2=(2m+n)\vec{i}-2(m+n)\vec{j}+m\vec{k}$$

$$\vec{V}=\vec{V}_1-2\vec{V}_2=2\vec{j}+\vec{k}$$

Al ser $\vec{U}$ y $\vec{V}$ perpendiculares: $\vec{U}\cdot\vec{V}=0$

$$-2(m+n)\cdot 2+m\cdot 1=0 \qquad n=-\frac{3m}{4}$$

$$\vec{U}=\left(2m-\frac{3m}{4}\right)\vec{i}-2\left(m-\frac{3m}{4}\right)\vec{j}+m\vec{k}=\frac{m}{4}(5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k})$$

El módulo es:

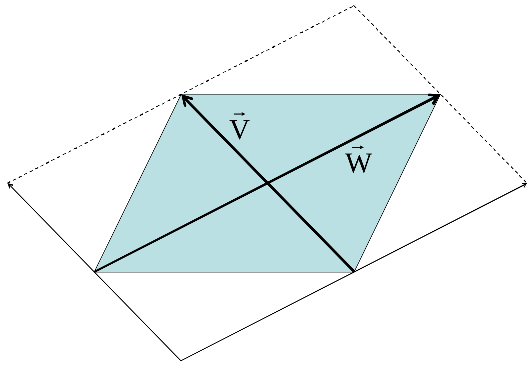
$$U=\frac{m}{4}\sqrt{5^2+(-2)^2+4^2}=\frac{m}{4}\sqrt{45}$$

El vector unitario en la dirección y el sentido de $\vec{U}$ es:

$$\vec{u} = \frac{\vec{U}}{U} = \frac{\frac{m}{4}(5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})}{\frac{m}{4}\sqrt{45}}$$

Resp.: $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{45}}(5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})$

12. Hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales son $\vec{V} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ y $\vec{W} = \vec{i} + \vec{k}$.



Como se aprecia en la figura, el área del paralelogramo es la mitad del que formaríamos con las diagonales como lados:

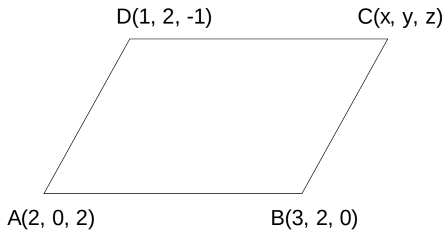
$$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4, 2, -4)$$

$$\left|\vec{V} \times \vec{W}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = 6$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{V} \times \vec{W}\right| = \frac{6}{2}$$

Resp.: 3

13. Tres vértices de un paralelogramo ABCD tienen por coordenadas A(2, 0, 2), B(3, 2, 0) y D(1, 2, –1). Calcular las coordenadas de C, el área del paralelogramo y el ángulo en B.



$$\overrightarrow{AB} = (3,2,0) - (2,0,2) = (1,2,-2) = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AD} = (1,2,-1) - (2,0,2) = (-1,2,-3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (x, y, z) - (3,2,0) = (x - 3, y - 2, z) = \overrightarrow{AD}$$

Por tanto:

$$x - 3 = -1; \quad y - 2 = 2; \quad z = -3$$

Resp.: C(2, 4, –3)

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 5, 4) \qquad S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 4^2} = 3\sqrt{5}$$

Resp.: $S = 3\sqrt{5}$

El ángulo en el vértice B:

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{(-1,-2,2)\cdot(-1,2,-3)}{\sqrt{9}\sqrt{14}} = -\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Resp.: B = 143º 18’ 3’’

14. Los vectores $\vec{A}(-3,2,1), \vec{B}(2,-4,0), \vec{C}(4,-1,8)$ son concurrentes en el punto (3, 1, 2). Calcular el momento del vector resultante respecto al origen de coordenadas.

Como los vectores son concurrentes podemos aplicar el teorema de Varignon. Para ello calculamos el vector resultante, y después el momento de éste respecto al origen:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (3,-3,9)$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \text{ x } \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = (15,-21,-12)$$

Resp.: $\vec{M}_O = (15,-21,-12)$

15. Sea $\vec{v} = (5t^2, 25\sqrt{t}, \ln t)$, calcular el módulo de la derivada y la derivada del módulo para el valor t = 1.

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(10t, \frac{25}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{t}\right); \left|\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right| = \sqrt{100t^2 + \frac{625}{4t} + \frac{1}{t^2}}; \left|\frac{d\vec{v}(1)}{dt}\right| = \sqrt{100 + \frac{625}{4} + \frac{1}{1}}$$

Resp.: $\left|\frac{d\vec{v}(1)}{dt}\right| = \frac{\sqrt{1029}}{2}$

$$\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{25t^4 + 625t + \ln^2 t} = \frac{100t^3 + 625 + (2\ln t)\frac{1}{t}}{2\sqrt{25t^4 + 625t + \ln^2 t}}; \left|\frac{d|\vec{v}(1)|}{dt}\right| = \frac{100+625}{2\sqrt{25+625}}$$

Resp.: $\left|\frac{d|\vec{v}(1)|}{dt}\right| = \frac{725}{2\sqrt{650}}$

16. Calcular el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores $\vec{V}_1(1,2,3), \vec{V}_2(4,5,6), \vec{V}_3(8,7,9)$.

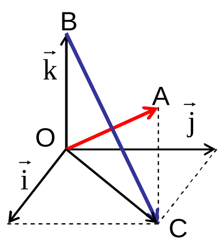
$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \text{ x } \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -9$$

Volumen: $\left|\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \text{ x } \vec{V}_3)\right| = |-9| = 9$

Resp.: 9

17. Calcular el ángulo que forman las diagonales de un cubo.

Basta calcularlo en un cubo situado en el origen de coordenadas, tres de cuyas aritas sean los vectores $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$.



$$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1,1,1) \cdot (1,1,-1) = \sqrt{3}\sqrt{3}\cos\alpha$$

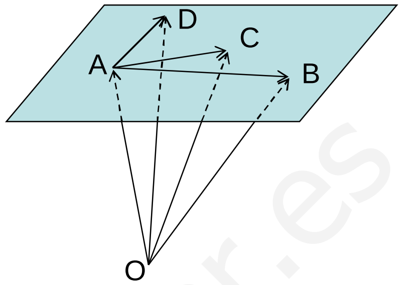
$$\cos\alpha = \frac{1}{3}$$

Resp.: α = 70º 31’ 43’’

18. Demostrar que, si se cumple que $a\,\overrightarrow{OA}+b\,\overrightarrow{OB}+c\,\overrightarrow{OC}+d\,\overrightarrow{OD}=0$, la condición necesaria y suficiente para que los puntos extremos A, B, C y D de los vectores sean coplanarios es a + b + c + d = 0.

Sean $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ una base de espacio vectorial $\Re^3$. Entonces:

$$\Delta_1 = \det(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}) \neq 0$$



Sean

$$\overrightarrow{OA} = (a_x, a_y, a_z)$$
$$\overrightarrow{OB} = (b_x, b_y, b_z)$$
$$\overrightarrow{OC} = (c_x, c_y, c_z)$$
$$\overrightarrow{OD} = (d_x, d_y, d_z)$$

si el punto D pertenece al plano entonces:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z & 1 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \\ c_x & c_y & c_z & 1 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como $a\,\overrightarrow{OA}+b\,\overrightarrow{OB}+c\,\overrightarrow{OC}+d\,\overrightarrow{OD}=0$ con (a, b, c, d) ≠ 0 entonces:

$$a\cdot a_x + b\cdot b_x + c\cdot c_x + d\cdot d_x = 0 \qquad (1)$$
$$a\cdot a_y + b\cdot b_y + c\cdot c_y + d\cdot d_y = 0 \qquad (2)$$
$$a\cdot a_z + b\cdot b_z + c\cdot c_z + d\cdot d_z = 0 \qquad (3)$$

En Δ_2 multiplicamos la primera fila F_1 por a, F_2 por b, F_3 por c y F_4 por d, y sustituimos la fila cuarta por $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} aa_x & aa_y & aa_z & a \\ bb_x & bb_y & bb_z & b \\ cc_x & cc_y & cc_z & c \\ (1)=0 & (2)=0 & (3)=0 & a+b+c+d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\Delta_1 = 0$$

por tanto:

Resp.: a + b + c + d = 0

TEMA II

CINEMÁTICA

1. **Un ciclista circula por una región donde existen subidas y bajadas, ambas de igual longitud. En las subidas va a 5 km/h, en las bajadas a 20 km/h. Calcular su celeridad media.**

Sea L la longitud tanto de las subidas como de las bajadas.

Si t_1 es el tiempo que emplea en subir L, y t_2 es el que tarda en bajar L, entonces las celeridades medias de subida y bajada son v_1 y v_2:

$$v_1 = \frac{L}{t_1} = 5\text{ km/h} \qquad v_2 = \frac{L}{t_2} = 20\text{ km/h}$$

La celeridad media v necesaria para realizar el recorrido total 2L en un tiempo $t = t_1 + t_2$ es:

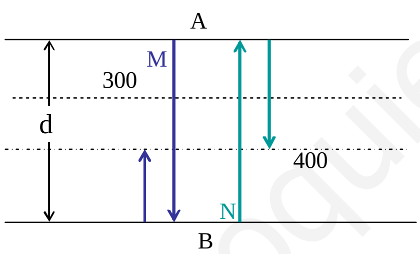
$$v = \frac{2L}{t} = \frac{2L}{t_1 + t_2} = \frac{2L}{\frac{L}{5} + \frac{L}{20}}$$

Operando:

Resp: v = 8 km/h

Nota: Obsérvese que la celeridad media no es la media de las celeridades.

2. **Dos nadadores cruzan un canal entre dos puntos A y B. Uno sale de A y otro de B, al mismo tiempo. Suponiendo que inician el viaje de regreso en cuanto llegan a la orilla opuesta, y sabiendo que a la ida se han cruzado a 300 m de A, y a la vuelta lo han hecho a 400 m de B, calcular la distancia entre las dos orillas.**



El nadador M que sale de A recorre 300 m a velocidad v_M , mientras que el N que sale de B recorre d – 300 en el mismo tiempo t_1 a velocidad v_N, tal que:

$$t_1 = \frac{300}{v_M} = \frac{d - 300}{v_N}$$

Pero M recorre d + 400 mientras que N nada 2d – 400 en el mismo tiempo t_2, por tanto:

$$t_2 = \frac{d + 400}{v_M} = \frac{2d - 400}{v_N}$$

Dividiendo miembro a miembro las dos expresiones:

$$\frac{d + 400}{300} = \frac{2d - 400}{d - 300}$$

Despejando:

Resp.: d = 500 m

3. **Una partícula que parte del reposo se mueve siguiendo una trayectoria recta con una aceleración dada por la expresión a = a_0 exp(–kt), donde a_0 y k son constantes. Hallar la velocidad límite y el camino recorrido al cabo de t segundos.**

$$v = \int_0^t a\,dt = \int_0^t a_0 e^{-kt}\,dt$$

$$v = -\frac{a_0}{k}(e^{-kt} - 1)$$

La velocidad límite se alcanza cuando el tiempo tiende a infinito. Su valor es:

Resp.: $v_\infty = \frac{a_0}{k}$

El camino recorrido al cabo de t segundos es:

$$x = \int_0^t v\,dt = \int_0^t -\frac{a_0}{k}(e^{-kt} - 1)dt$$

Resp.: $x = \frac{a_0}{k}\left[\frac{1}{k}(e^{-kt} - 1) + t\right]$

4. **Dos discos separados 0.5 m, están montados en un mismo eje horizontal que gira a 1600 RPM. Se dispara una bala, paralelamente al eje, que atraviesa los dos discos, pero el agujero del segundo está desviado del primero un ángulo de *π*/15 rad. Calcular la velocidad de la bala.**

$$\omega = 1600\text{ RPM} = \frac{160\pi}{3}\text{ rad/s}$$

En la expresión $\varphi = \omega t$:

$$\frac{\pi}{15} = \frac{160\pi}{3}t$$

de donde se deduce que $t = \frac{1}{800}$ s. Sustituyendo en $v = \frac{d}{t}$, obtenemos:

$$v = \frac{0.5}{\frac{1}{800}}$$

Resp.: v = 400 m/s

5. **Calcular la altura en metros desde la que debe caer un cuerpo en el vacío para recorrer una longitud de g metros (el valor de g es el de la aceleración de la gravedad), durante el último segundo de su caída.**

La altura h se recorre en un tiempo t, tal que:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

La velocidad que alcanza tras recorre t – 1 segundos partiendo de reposo es: v = g (t – 1). Si en el último segundo recorre una distancia s = g, entonces en la expresión $s = vt + \frac{1}{2}gt^2$:

$$g = g(t-1)\cdot 1 + \frac{1}{2}gt^2$$

de donde deducimos que $t = \frac{3}{2}$ s; por tanto, el valor de h es:

$$h = \frac{1}{2}g\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{Resp.: } h = \frac{9}{8}g$$

6. Un cuerpo cae libremente sin velocidad inicial. Demostrar que el tiempo que invierte en recorrer el enésimo metro de su trayectoria es

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

Si tarda t_1 segundos en recorrer n –1 metros partiendo del reposo, entonces:

$$n - 1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \qquad (1)$$

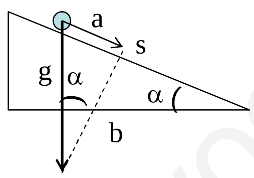
Si tarda t segundos en recorrer el último metro (el enésimo), entonces la velocidad v que adquiere en recorrer los n metros partiendo del reposo es $v = g(t_1 + t)$. Pero v también es $v = \sqrt{2gn}$; por lo tanto:

$$g(t_1 + t) = \sqrt{2gn} \qquad (2)$$

Eliminando t_1 entre (1) y (2), y despejando t, obtenemos:

$$\text{Resp.: } t = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

7. Demostrar que la inclinación de los tejados debe ser de 45º para que el agua permanezca en ellos el menor tiempo posible, si la superficie horizontal que cubren es fija.



En la figura, la superficie cubierta por el tejado es b = s cos α, siendo s el camino que recorre una gota. La aceleración a la que está sometida (despreciando rozamientos) es a = g sen α. Si parte del reposo, entonces:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \operatorname{sen} \alpha$$

por tanto

$$t^2 = \frac{2b}{g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{4b}{g \operatorname{sen} 2\alpha}$$

El mínimo valor de t^2 se obtiene cuando sen 2α = 1; es decir, 2α = 90º; α = 45º, como queríamos demostrar.

8. En un movimiento rectilíneo se mantiene constante el producto del camino recorrido por velocidad x·v= 8 m²/s. Si para t = 0 es x = 0, hallar la posición para t = 4 s.

Como $v = \frac{dx}{dt}$, entonces $x\frac{dx}{dt} = 8$; es decir:

$$x\,dx = 8\,dt$$

Integrando:

$$\int x dx = \int 8 dt$$

$$\frac{x^2}{2} = 8t + k$$

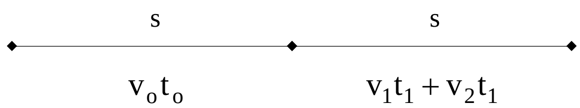
Como para t = 0 es x = 0, entonces k = 0, de donde deducimos que:

$$x = 4\sqrt{t}$$

y para t = 4:

Resp: x = 8 m

9. Un móvil recorre la mitad del camino a 15 m/s. El resto lo hace a 12 m/s la mitad del tiempo restante, y a 8 m/s la otra mitad. Determinar la velocidad media.



En recorrer la primera mitad invierte t_o segundos, mientras que la segunda lo hace en $2t_1$ segundos; por lo tanto, la velocidad media v (si el recorrido fuese rectilíneo en un solo sentido) es:

$$v = \frac{2s}{t_o + 2t_1} = \frac{2s}{\frac{s}{v_o} + 2\frac{s}{v_1 + v_2}}$$

Por lo tanto:

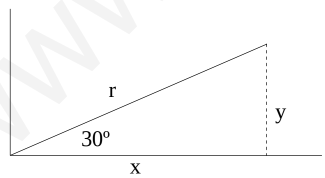
$$v = \frac{2v_o(v_1 + v_2)}{2v_o + v_1 + v_2} = \frac{2{\cdot}15(12+8)}{2{\cdot}15 + 12 + 8}$$

Resp.: v = 12 m/s

10. La trayectoria descrita por una partícula está definida por la ecuación:

$$\mathbf{(x^2 + y^2)^2 = 4\,(x^2 - y^2)}$$

Calcular el módulo del radio vector cuando éste forma 30º con la horizontal.



Sustituyendo x = r cos 30, y = r sen 30, con $r^2 = x^2 + y^2$ en la ecuación del enunciado, obtenemos:

$$r^4 = 4(r^2\cos^2 30 - r^2 \mathrm{sen}^2\, 30)$$

De donde deducimos:

Resp.: $r = \sqrt{2}$

11. El plato de una bicicleta enorme tiene 30 cm de radio. Parte del reposo con una aceleración de 0.4 π rad /s^2 y transmite su movimiento a un piñón de 18 cm de radio mediante la cadena. Determinar el tiempo que tarda el piñón en alcanzar 300 RPM.

Cualquier longitud L recorrida por la cadena debe ser la misma en el plato que en el piñón. Si el plato de radio R gira un ángulo φ y el piñón de radio r gira un ángulo φ', entonces:

$$L = \varphi R = \varphi' r$$

Derivando respecto al tiempo $\varphi R = \varphi' r$, obtenemos $\omega R = \omega' r$, y derivando de nuevo:

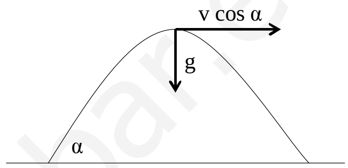
$$\alpha R = \alpha' r \qquad \alpha' = \frac{\alpha R}{r}$$

Pero el piñón parte del reposo, por tanto: $\omega' = \alpha' t$. Sustituyendo α' y despejando t:

$$t = \frac{\omega' r}{\alpha R} = \frac{300 \frac{2\pi}{60} 18}{0.04\pi \cdot 30}$$

Resp.:15 s

12. Calcular el radio de curvatura mínimo de la trayectoria de un proyectil disparado con una velocidad inicial v y con α grados de elevación.

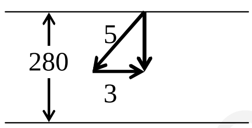


La aceleración total que tiene el proyectil en el vértice de la trayectoria es, exclusivamente, su componente normal a_n, cuyo valor es precisamente g; además, como la aceleración tangencial es nula, a_n es máxima.

Por otro lado, en ese punto la velocidad del móvil es mínima, pues la componente vertical de la velocidad es nula. Como consecuencia, el radio de curvatura mínimo se produce en el vértice de la trayectoria. Su valor es:

$$R_{min} = \frac{v^2_{min}}{a_{n_{max}}} = \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

13. Una canoa, a 5 m/s sobre el fondo, cruza un río de 280 m cuya corriente es de 3 m/s. ¿Cuánto tarda si toma el rumbo preciso para que el trayecto sea el más corto posible?



El trayecto más corto posible es el perpendicular a las orillas del río. En la figura se aprecia que la velocidad real sobre el fondo se compone de la velocidad de la canoa y la provocada por la corriente:

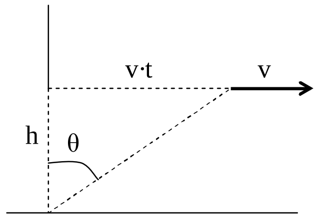
$$v = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Por tanto, el tiempo que tarda en cruzar el río es:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{280}{4}$$

Resp.: 70 s

14. Se apunta con un dispositivo seguidor de aeronaves a un avión que vuela horizontalmente con velocidad v, a una altura h. Calcular la velocidad y la aceleración angulares de la visual para cualquier ángulo.



En la figura se aprecia el ángulo θ que varía conforme el avión se mueve, pero en todo momento se cumple que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{vt}{h}$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{tg}\,\theta) = \frac{d}{dt}\left(\frac{vt}{h}\right)$$

Teniendo en cuenta que v y h son constantes:

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{h}$$

pero, sabemos que $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, por tanto:

$$\omega = \frac{\frac{v}{h}}{\sec^2\theta}$$

es decir:

Resp.: $\omega = \dfrac{v}{h}\cos^2\theta$

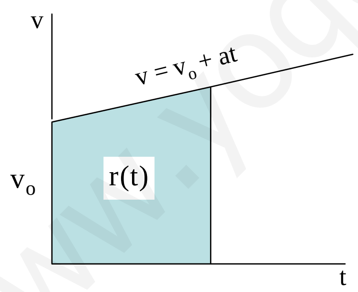
Para calcular la aceleración angular α volvemos a derivar:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\omega = \frac{v}{h}(-2\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\frac{v}{h}\cos^2\theta$$

es decir:

Resp.: $\alpha = -\left(\dfrac{v}{h}\right)^2 \mathrm{sen}\,2\theta\cos^2\theta$

15. En un MRUA, ¿cómo se representa el espacio en la gráfica velocidad-tiempo?



Teniendo en cuenta que el módulo de la velocidad en cualquier instante es:

$$v = v_o + at$$

la velocidad se representa en una gráfica velocidad-tiempo como una recta. Además, la velocidad es la derivada de la posición, entonces:

$$r(t) = \int_{v_o}^{v} v\,dt$$

por lo tanto, r(t) se representa en la gráfica mediante el área de la figura.

16. Si, como hipótesis de un tiro con un cañón, se supone que el alcance x es una función de la forma x = $v^a g^b m^c$ f(α), donde v es la velocidad inicial, g es la aceleración de la gravedad, m la masa del proyectil y f(α) es una función adimensional del ángulo de lanzamiento; calcular a, b y c efectuando exclusivamente un análisis dimensional. Analizar el valor obtenido de c.

Sea L la dimensión de una longitud, T la del tiempo y M la de la masa. La ecuación de dimensiones de x es L, la de v es LT^{-1}, la de g es LT^{-2} y la de m es M. Entonces, las dimensiones de la expresión del enunciado son:

$$L = \left(LT^{-1}\right)^a \left(LT^{-2}\right)^b M^c$$

es decir:

$$L = L^{a+b} T^{-a-2b} M^c$$

lo que implica que:

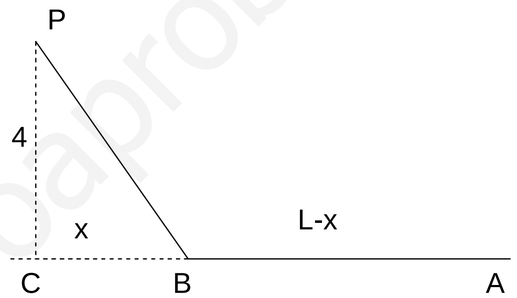
$$a + b = 1$$
$$-a - 2b = 0$$
$$c = 0$$

de donde se deduce que:

Resp.: a = 2, b = –1, c = 0

De c = 0 se desprende que el alcance no depende de la masa del proyectil.

17. Una diligencia viaja en línea recta desde A hasta B a 5 km/h. ¿En qué pueblo debe bajarse un viajero para seguir andando a 3 km/h y llegar a P lo antes posible si la distancia PC es 4 km?



Sea t_1 el tiempo invertido en recorrer AB, y t_2 el necesario para ir desde B hasta P. Como $t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v}$:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L - x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 + 4^2}}{3}$$

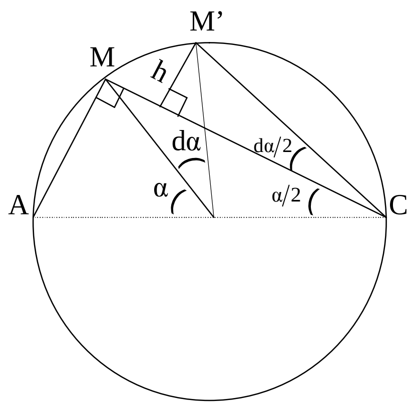
Para hacer mínimo el tiempo total, derivamos t con respecto a x, e igualamos a cero:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4^2}} = 0$$

Despejando x:

Resp: x = 3 km

18. Un punto M describe una circunferencia de radio R cm estando sometido a la atracción de un punto C de la misma. Su velocidad areolar es k cm²/s. Hallar los módulos de la velocidad y aceleración y el tiempo que tarda en recorrer un arco ¾ π que termina en C.



El valor de la superficie infinitesimal CMM' (casi triangular) es:

$$dS = \frac{1}{2}\ CM \cdot h$$

siendo $h = CM' \operatorname{sen}\left(\frac{d\alpha}{2}\right)$

de donde

$$dS = \frac{1}{2} CM \cdot CM' \,\mathrm{sen}\left(\frac{d\alpha}{2}\right)$$

pero, como el ángulo $\frac{d\alpha}{2}$ es infinitesimal, el segmento CM’ es equivalente (en el límite) al segmento CM y sen $\frac{d\alpha}{2}$ es equivalente a $\frac{d\alpha}{2}$; es decir:

$$dS = \frac{1}{2} CM^2 \frac{d\alpha}{2}$$

Como en el triángulo ACM, $CM = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$, entonces:

$$dS = R^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} d\alpha$$

es decir:

$$\frac{dS}{d\alpha} = R^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad areolar $\frac{dS}{dt}$ es constante, de valor k:

$$k = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

pero

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega = \frac{v}{R}$$

por lo que

$$k = R^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{v}{R}$$

de donde deducimos que:

Resp.: $v = \frac{k}{R}\sec^2\frac{\alpha}{2}$

El módulo de la aceleración tangencial se obtiene derivando la expresión anterior:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{k}{R}\sec^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{k}{R} + \frac{k}{R}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{k}{R} 2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sec^2\frac{\alpha}{2}\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dt}$$

Sustituyendo $\frac{d\alpha}{dt} = \omega = \frac{v}{R}$ y simplificando:

$$a_t = \frac{k^2}{R^3}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sec^4\frac{\alpha}{2}$$

El módulo de la aceleración normal es:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\frac{k^2}{R^2}\sec^4\frac{\alpha}{2}}{R} = \frac{k^2}{R^3}\sec^4\frac{\alpha}{2}$$

Como el módulo de la aceleración total es:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Resp.: $a = \frac{k^2}{R^3}\sec^5\frac{\alpha}{2}$

Para calcular el tiempo que invierte en recorrer un arco de ¾ π radianes despejamos dt en:

$$k = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\frac{d\alpha}{dt}$$

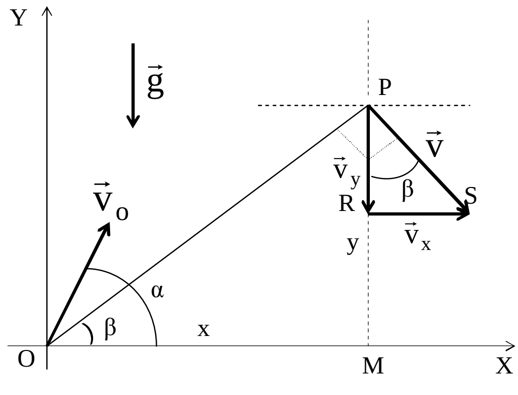
de donde deducimos que:

$$\int_0^t dt = \frac{R^2}{k}\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{0}\cos^2\frac{\alpha}{2}d\alpha$$

Integrando:

Resp.: $t = \frac{R^2}{4k}\left(\frac{3\pi}{2} + \sqrt{2}\right)$

19. Un proyectil se lanza desde el origen de coordenadas O con un ángulo α respecto al eje horizontal OX, e impacta sobre un plano inclinado un ángulo β < α respecto al eje OX que pasa por O. Calcular: a) α en función de β, si la velocidad en ese instante es perpendicular al plano, b) el punto de impacto en el plano en función de β y de la velocidad inicial del proyectil.



a)

Eje X

$$v_x = v_o\cos\alpha$$
$$x = v_o t\cos\alpha$$

Eje Y

$$v_y = v_o\,\text{sen}\,\alpha - gt$$
$$y = v_o t\,\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

En el triángulo PRS:

$$\cot g\,(270+\beta) = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_o\cos\alpha}{v_o\,\text{sen}\,\alpha - gt}$$

si llamamos $z = \frac{gt}{\cos\alpha}$ y tenemos en cuenta que cotg (270 + β) = – tg β, entonces:

$$-\text{tg}\,\beta = \frac{v_o}{v_o\text{tg}\,\alpha - z} \qquad (1)$$

En el triángulo OMP:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x} = \frac{v_o t\,\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{v_o t\cos\alpha}$$

es decir:

$$\text{tg}\,\beta = \text{tg}\,\alpha - \frac{z}{2v_o} \qquad (2)$$

De (1) y (2), con $z = \frac{gt}{\cos\alpha}$, deducimos que:

Resp.: tg α = 2 tgβ + cotg β

b)

En el triángulo OMP:

$$OP = \frac{x}{\cos\beta} = \frac{v_o t\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (3)$$

De (2) y 3, con $z = \frac{gt}{\cos\alpha}$, deducimos que:

$$OP = \frac{2v_o^2\cos^2\alpha}{g}\frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\beta}{\cos\beta}$$

como tg α = 2 tgβ + cotg β y $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}$, la expresión de OP se simplifica resultando:

Resp.: $OP = \frac{2v_o^2}{g}\frac{\text{sen}\,\beta}{1+3\,\text{sen}^2\beta}$

20. Determinar el ángulo bajo el cual debe lanzarse un móvil en el vacío, desde un punto O, para alcanzar la recta AB en el menor tiempo posible.

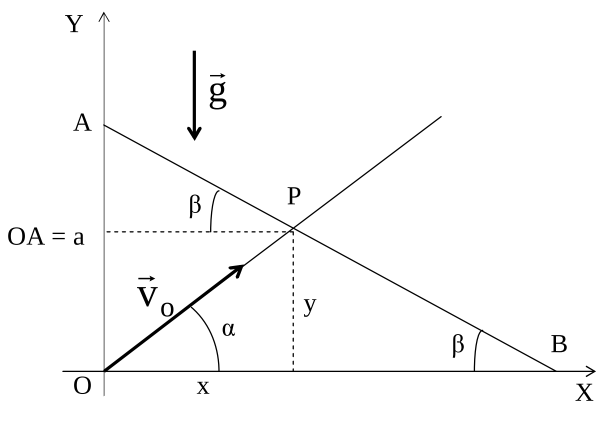
$$x = v_o t\cos\alpha \qquad (1)$$

$$y = v_o t\,\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

En P: $a - y = x\,\text{tg}\,\beta$ (3)

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$a - v_o t\,\text{sen}\,\alpha + \frac{1}{2}gt^2 = v_o t\cos\alpha\,\text{tg}\,\beta$$



Observamos que hay dos variables: t y α. Derivamos la expresión anterior respecto a α:

$$-v_o\frac{dt}{d\alpha}\text{sen}\,\alpha - v_o t\cos\alpha + \frac{1}{2}g\cdot 2t\frac{dt}{d\alpha} = v_o\frac{dt}{d\alpha}\cos\alpha\ \text{tg}\,\beta - v_o t\ \text{sen}\,\alpha\ \text{tg}\,\beta$$

despejando $\frac{dt}{d\alpha}$ e igualando a cero para determinar el mínimo, obtenemos:

$$-\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha\ \text{tg}\,\beta = 0$$

es decir:

$$\text{tg}\,\alpha\ \text{tg}\,\beta = 1$$

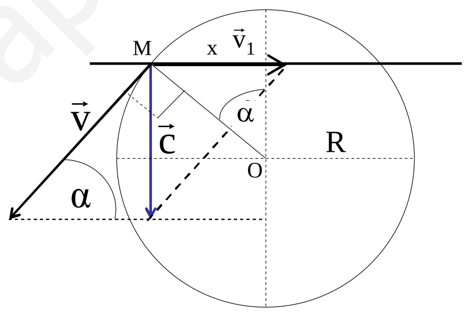
por lo tanto:

Resp.: $\alpha = 90^\circ - \beta$

21. Una recta se mueve normalmente a su dirección con velocidad constante c. En su movimiento corta a una circunferencia fija de centro O en un punto variable M. Hallar la velocidad y la aceleración de M sobre la circunferencia y sobre la recta, en función de c, R y α.

Descomponemos c según las velocidades v y v_1, como se aprecia en la figura. Como $v = \frac{c}{\text{sen}\,\alpha} = \omega R$, entonces $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ es:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{c}{R\ \text{sen}\,\alpha}$$



La aceleración tangencial es:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\frac{c\cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{c^2}{R}\frac{\cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha}$$

la aceleración normal es:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2}{R\text{sen}^2\alpha}$$

y la aceleración total es $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$; es decir:

Resp.: $a = \frac{c^2}{R\text{sen}^3\alpha}$

Como x = R sen α, la velocidad v_1 sobre la recta es:

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = R\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

por tanto:

Resp.: $v_1 = c\ \text{cotg}\,\alpha$

Y la aceleración sobre la recta es a_1:

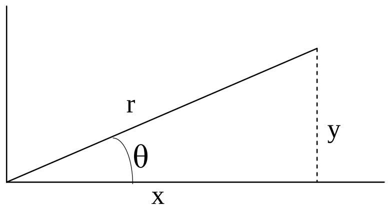
$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = -c\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

es decir:

Resp.: $a_1 = -\dfrac{c^2}{R\text{sen}^3\alpha}$

22. Una partícula se mueve sobre una trayectoria de ecuación r = 2θ. Para θ = 60º, determinar su velocidad, si θ = t².

$x = r\cos\theta,\quad y = r\,\text{sen}\,\theta,\quad r = 2\theta,\quad \theta = t^2$:



$x = 2t^2\cos t^2,\quad y = 2t^2\,\text{sen}\,t^2$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 4t\cos t^2 - 4t^3\text{sen}\,t^2$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 4t\,\text{sen}\,t^2 + 4t^3\cos t^2$$

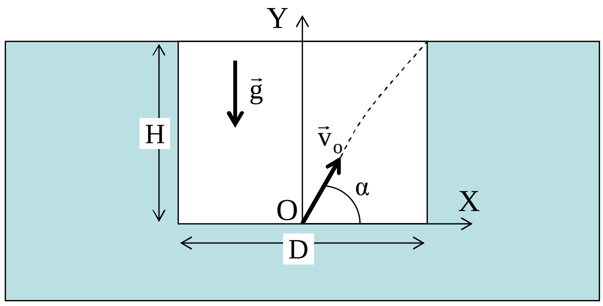
Para $\theta = 60^o = \frac{\pi}{3} = t_o^2$ entonces $t_o = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$. Sustituyendo t_o en las expresiones de v_x y v_y, y teniendo en cuenta que:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Resp.: $v(t_o) = 5.927$ m/s

23. La prueba de una espoleta de una granada de fragmentación se realiza en el centro del fondo de un pozo cilíndrico de profundidad H. Los fragmentos que se forman durante la explosión, cuyas velocidades no sobrepasan la velocidad v_0, no deben caer en la superficie de la tierra que circunda al agujero. ¿Cuál debe ser el diámetro mínimo D del pozo?

El fragmento no debe superar la distancia horizontal $\frac{D}{2}$ cuando alcance la altura H, por tanto:



Eje X

$$\frac{D}{2} = v_0 t\cos\alpha \qquad (1)$$

Eje Y

$$H = v_0 t\,\text{sen}\,\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Se despeja t en (1) y se sustituye en H, teniendo presente que $1 + \text{tg}^2\,\alpha = \sec^2\alpha$:

$$H = \frac{D}{2}\text{tg}\,\alpha - \frac{gD^2}{8v_0^2}(1 + \text{tg}^2\alpha)$$

Reordenando la expresión anterior como una ecuación de 2º grado en tg α:

$$\mathrm{tg}^2\alpha - \frac{4v_0^2}{gD}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \left(1 + \frac{8Hv_0^2}{gD^2}\right) = 0$$

Para que dicha ecuación, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, no tenga solución real; es decir, para que el fragmento *no* alcance la altura H, debe ocurrir que $b^2 < 4ac$. O sea:

$$\left(\frac{4v_0^2}{gD}\right)^2 < 4\left(1 + \frac{8Hv_0^2}{gD^2}\right)$$

es decir:

$$D^2 > \frac{4v_0^2}{g^2}(v_0^2 - 2gH)$$

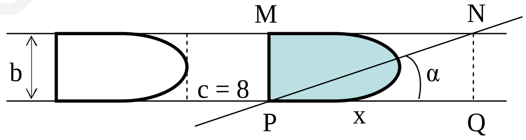
de tal forma que:

Resp.: Para $v_0^2 < 2gH$, D puede tomar cualquier valor.

Para $v_0^2 > 2gH$, $D = \frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh}$

24. Por una calle de anchura a = 10 m circulan, uno tras otro y perfectamente alineados, coches a v = 24 km/h, de anchura b = 2 m, distanciados entre sí c = 8 m (distancia del parachoques posterior del precedente al anterior del siguiente). Calcular: a) el tiempo necesario para que un peatón cruce la calle en línea recta lo más despacio posible, y b) la velocidad y la trayectoria del peatón.

Sea PN la trayectoria recta descrita por el peatón, de manera que cuando está en P, el parachoques trasero del coche sombreado está en PM; pero, cuando llega a N, el parachoques delantero del coche sin sombrear debe estar en QN.



Sea t_1 el tiempo que tarda el peatón en ir de P a N. En t_1 el coche trasero recorre a velocidad v:

$$c + PQ = c + x$$

por tanto:

$$t_1 = \frac{c + x}{v}$$

La velocidad del peatón v_1 será:

$$v_1 = \frac{PN}{t_1} = \frac{\dfrac{b}{\mathrm{sen}\,\alpha}}{\dfrac{c + x}{v}}$$

siendo

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

por tanto

$$v_1 = v\frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{c + x} \qquad (1)$$

Si v_1 debe ser mínima, entonces $\frac{dv_1}{dx} = 0$, de donde resulta que:

$$x = \frac{b^2}{c} = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo este valor de x en (1):

Resp.: v_1 = 1,6169 m/s

Para determinar la trayectoria basta calcular α:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{b}{x} = 4$$

Resp.: α = 75º 57’ 50”

Y el tiempo t, invertido en cruzar la calle es:

$$t = \frac{a}{v_1 \text{ sen } \alpha} = \frac{10}{1.6169 \text{ sen } \alpha}$$

Resp.: t = 6.375 s

25. Una partícula se mueve en el plano XY con aceleración constante ‘a’ en el sentido negativo del eje OY. La ecuación de la trayectoria es y = px – qx², siendo p y q constantes. Determinar la velocidad en el origen de coordenadas.

La velocidad de la partícula en el eje Y es $v_y = \frac{dy}{dt}$, y la aceleración es $a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -a$, por tanto:

$$v_y = \frac{d(px - qx^2)}{dt} = p\frac{dx}{dt} - 2qx\frac{dx}{dt}$$

$$-a = p\frac{d^2x}{dt^2} - 2q\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt} + x\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

pero, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ y $\frac{dx}{dt} = v_x$, por tanto:

$$v_y = (p - 2qx)\, v_x$$

$$-a = -2q\, v_x^2$$

es decir:

$$v_x = \sqrt{\frac{a}{2q}} \qquad v_y = (p - 2qx)\sqrt{\frac{a}{2q}}$$

y en el origen de coordenadas (0,0):

$$v_x(0) = \sqrt{\frac{a}{2q}} \quad v_y(0) = p\sqrt{\frac{a}{2q}}$$

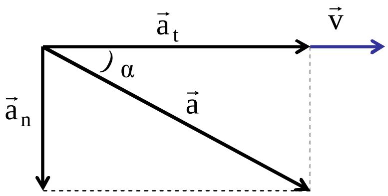
como

$$v(0) = \sqrt{v_x^2(0) + v_y^2(0)}$$

entonces

Resp.: $v(0) = \sqrt{(1+p^2)\frac{a}{2q}}$

26. Un móvil se desplaza por un arco de circunferencia de radio R. Su velocidad depende del recorrido según la relación v = k$\sqrt{s}$ donde k es constante. Determinar el ángulo que forman los vectores aceleración total y velocidad, en función de s.



$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{k}{2\sqrt{s}}\frac{ds}{dt} = \frac{k}{2\sqrt{s}}v = \frac{k}{2\sqrt{s}}k\sqrt{s} = \frac{k^2}{2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{k^2 s}{R}$$

El ángulo solicitado es el que forman los vectores $\vec{a}_t$ y $\vec{a}$:

Resp.: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_t} = \operatorname{arctg}\frac{2s}{R}$

27. Un movimiento rectilíneo es tal que su velocidad en función del desplazamiento es v = 3x +1. Hallar las ecuaciones horarias sabiendo que para t = 0 se encuentra en el origen.

Como $v = \frac{dx}{dt} = 3x + 1$, es decir $\frac{dx}{3x+1} = dt$, por tanto:

$$\int \frac{dx}{3x+1} = \int dt$$

$$\frac{1}{3}\ln(3x+1) + k = t$$

Como para t = 0 es x = 0, entonces k = 0, por lo que, despejando x:

Resp.: $x = \frac{e^{3t} - 1}{3}$

$$v = \frac{dx}{dt} = e^{3t}$$

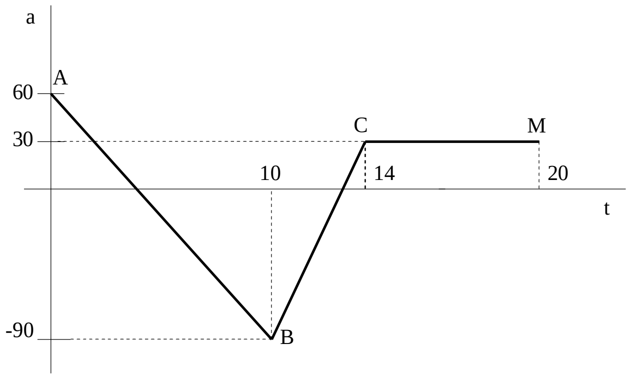
Resp.: $v = e^{3t}$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3e^{3t}$$

Resp,: $a = 3\, e^{3t}$

28. Una partícula parte del reposo y sigue una trayectoria recta con una aceleración cuya variación en el tiempo viene dada por la quebrada ABCM en un plano de ejes

aceleración – tiempo. Las coordenadas (a, t) de los vértices de la quebrada en el S.I. son las siguientes: A(60,0), B(–90,10), C(30,14) y M(30,20). Calcular la posición y la velocidad para t = 20.



<u>En el tramo AB</u>:

Sea a = mt + b, como para t = 0 es a = 60, entonces b = 60; y para t = 10 es a = –90, por tanto m = –15. De donde deducimos que:

$$a = -15t + 60$$

Integrando la expresión anterior, obtenemos $v(t) = -7.5t^2 + 60t + k_1$. Como la partícula parte del reposo, v(0) = 0, por tanto $k_1 = 0$:

$$v(t) = -7.5t^2 + 60t$$

Y en el instante t = 10 obtenemos v_B:

$$v_B = -150 \text{ m/s}$$

Integrando la expresión v(t), obtenemos $x(t) = -2.5t^3 + 30t^2 + k_2$. Pero, en t = 0 la partícula se encuentra en x = 0, por tanto $k_2 = 0$:

$$x(t) = -2.5t^3 + 30t^2$$

Y en el instante t = 10 obtenemos x_B:

$$x_B = 500 \text{ m}$$

<u>En el tramo BC</u>:

Sea a = mt + b, como para t = 10 es a = –90 y para t = 14 es a = 30, entonces los valores de m y b son m = 30 y b = –390. De donde deducimos que:

$$a = 30t - 390$$

Integrando la expresión anterior, obtenemos $v(t) = 15t^2 - 390t + k_3$. Como la partícula tiene una velocidad v(10) = –150, entonces $k_3 = 2250$ m/s, por tanto:

$$v(t) = 15t^2 - 390t + 2250$$

Y en el instante t = 14 obtenemos v_C:

$$v_C = -270 \text{ m/s}$$

Integrando la expresión v(t), obtenemos $x(t) = 5t^3 - 195t^2 + 2250t + k_4$. Pero, en t = 10 la partícula se encuentra en x = 500, por tanto $k_4 = -7500$ m, es decir:

$$x(t) = 5t^3 - 195t^2 + 2250t - 7500$$

Y en el instante t = 14 obtenemos x_C:

$$x_C = -500$$

<u>En el tramo CM</u>:

Es

$$a = 30$$

Integrando obtenemos $v(t) = 30t + k_5$. Como la partícula tiene una velocidad $v(14) = -270$, entonces $k_5 = -690$ m/s, por tanto:

$$v(t) = 30t - 690$$

Y en el instante t = 20 obtenemos v_M:

Resp: $v_M = -90$ m/s

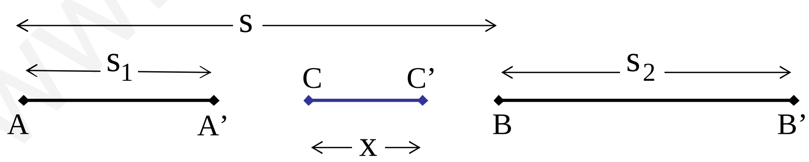
Integrando la expresión v(t), obtenemos $x(t) = 15t^2 - 690t + k_6$. Pero, en t = 14 la partícula se encuentra en x = –500, por tanto $k_6 = 6220$ m, por tanto:

$$x(t) = 15t^2 - 690t + 6220$$

Y en el instante t = 20 obtenemos x_M:

Resp.: $x_M = -1580$ m

29. Dos puntos A y B se encuentran en reposo, situados a una distancia s entre ambos. En la recta que los une hay otro punto C, también en reposo, que distan de A el doble que de B. Los puntos A y B se ponen en movimiento sobre su recta soporte con aceleraciones de 4 y 1 m/s² respectivamente. ¿Hallar la aceleración de C de manera que dicho móvil se encuentre siempre a una distancia de A doble que de B.



Del enunciado se deduce que:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} = 2$$

Pero

$$A'C' = AC + x - s_1$$

$$B'C' = BC + s_2 - x$$

por tanto:

$$\frac{AC + x - s_1}{BC + s_2 - x} = 2$$

y teniendo en cuenta que AC = 2 BC, calculamos x:

$$x = \frac{s_1 + 2s_2}{3}$$

Pero sustituyendo $x = ½\ a\ t^2$, $s_1=½\ a_1t^2$ y $s_2 = ½\ a_2t^2$, tras simplificar obtenemos:

$$a = \frac{a_1 + 2a_2}{3} = \frac{4 + 2{\cdot}1}{3}$$

Resp.: 2 m/s^2

30. Una partícula se mueve a lo largo de una curva $x = 2t^2$, $y = t^2 – 4t$, $z = 3t – 5$, donde t es el tiempo. Hallar las componentes de la velocidad y la aceleración en la dirección del vector cartesiano (1, –3, 2) cuando t = 1.

Para calcular la velocidad y aceleración basta derivar las tres componentes del vector de posición obteniendo: $\vec{v} = (4t, 2t - 4, 3)$ y $\vec{a} = (4, 2, 0)$. Para t = 1: $\vec{v}(1) = (4, -2, 3)$

Un vector unitario según la dirección del vector (1,–3,2) es:

$$\vec{u} = \frac{(1,-3,2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,2)$$

Para calcular las proyecciones sobre (1,–3,2), los vectores se multiplican escalarmente por $\vec{u}$:

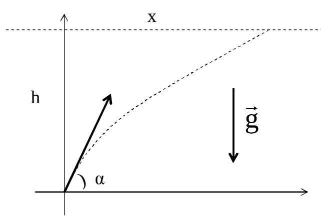
$$\vec{v}(1){\cdot}\vec{u} = \frac{4{\cdot}1 + (-2){\cdot}(-3) + 3.2}{\sqrt{14}}$$

Resp.: Proyección de $\vec{v}(1) = \frac{16}{\sqrt{14}}$

$$\vec{a}{\cdot}\vec{u} = \frac{4{\cdot}1 + 2{\cdot}(-3) + 0.2}{\sqrt{14}}$$

Resp.: Proyección de $\vec{a} = \frac{-2}{\sqrt{14}}$

31. Un móvil describe un M.R.U. a 360 km/h en una trayectoria horizontal a 1000 m de altura sobre el plano horizontal. En un instante dado, pasa por la vertical de un punto P del plano y, en ese mismo instante, se lanza un proyectil de 10 kg desde P con una velocidad que forma un ángulo α con el plano horizontal. Calcular el valor de la tag α, sabiendo que el móvil fue alcanzado por el proyectil 3 segundos después del instante anterior.



Si v_o es la velocidad inicial del proyectil, se cumple que:

$$h = v_o\, t\, \text{sen}\, \alpha - \frac{1}{2}\, gt^2 \qquad \text{sen}\, \alpha = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{v_o t} \qquad (1)$$

$$x = v_o\, t \cos \alpha \qquad \cos \alpha = \frac{x}{v_o t} \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

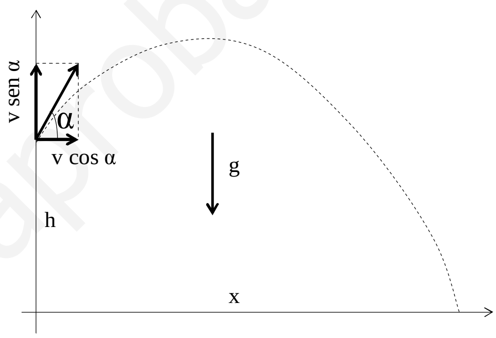
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{x}$$

Pero, si la velocidad del móvil es v, entonces el valor de x también es vt:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{vt} = \frac{1000 + \frac{1}{2}9.8{\cdot}3^2}{360\frac{1000}{3600}3}$$

Resp.: tg α = 3.48

32. ¿Bajo qué ángulo respecto a la horizontal es necesario lanzar una piedra a 14 m/s desde un acantilado de 20 m de altura, para que llegue al mar a una distancia máxima del borde del precipicio?



De x = vt cos α despejamos t:

$$t = \frac{x}{v\cos\alpha} \qquad (1)$$

$$y = h + vt\,\mathrm{sen}\,\alpha - ½\,g\,t^2 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) y haciendo y = 0 para determinar el alcance sobre la horizontal:

$$0 = h + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2}\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

reordenando términos en tg α, teniendo en cuenta que $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$:

$$\mathrm{tg}^2\alpha - \frac{2v^2}{gx}\mathrm{tg}\,\alpha + \left(1 - \frac{2v^2h}{gx^2}\right) = 0$$

ecuación de 2º grado en tg α de la forma a $\mathrm{tg}^2\,\alpha$ + b tg α + c cuyo discriminante $b^2 - 4ac$ debe ser mayor o igual a cero para que exista solución:

$$\frac{4v^4}{g^2x^2} - 4\left(1 - \frac{2v^2h}{gx^2}\right) \geq 0$$

despejando x:

$$x \leq \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gh}$$

de donde se deduce que el valor máximo de x es:

$$x_{max} = \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gh}$$

que se corresponde con la anulación de $b^2 - 4ac$. Por tanto, el valor de tg α que provoca el alcance máximo es:

$$\text{tg}\,\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{\dfrac{2v^2}{gx_{max}}}{2\cdot 1} = \frac{v^2}{gx_{max}}$$

y sustituyendo x_{max}:

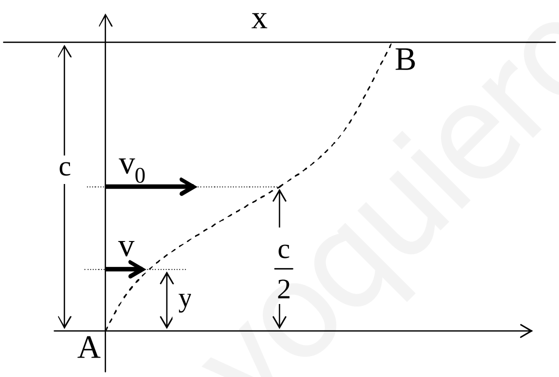
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}}$$

Para h = 20 y v = 14 m/s:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Resp.: α = 30º

33. La velocidad de la corriente de un río de anchura c crece proporcionalmente a la distancia desde la orilla, alcanzando su valor máximo v_0 en el centro. Junto a las orillas la velocidad de la corriente es cero. Un bote flota de modo que su velocidad u con respecto al agua es constante y perpendicular a la orilla. Hallar la distancia a la cual será llevado por la corriente al cruzar el río y determinar la trayectoria del bote.



Si la velocidad de la corriente varía linealmente, siendo v_0 a una distancia ½c de la orilla, cero en la orilla A y v a una distancia y, entonces la ecuación de la velocidad es:

$$v = \frac{2v_0}{c}y$$

válida para valores de y comprendidos entre 0 y ½ c.

El camino recorrido por el bote en el eje Y es $y = ut$. Sustituyendo el valor de y en la expresión de v:

$$v = \frac{2v_0 u}{c}t$$

que proporciona la velocidad, según el eje X, que tiene el bote al ser arrastrado por la corriente hasta el *centro del río*. Obsérvese que la aceleración en el eje X es precisamente el coeficiente que multiplica a t en la ecuación anterior:

$$a = \frac{2v_0 u}{c}$$

cuyo valor es constante. Por lo tanto el bote experimenta una aceleración según un MRUA en el eje X hasta que alcanza el centro del río.

Para determinar la velocidad de la corriente, v', en el tramo que va desde el centro del río hasta la otra orilla B, tenemos que tener en cuenta que en y = ½c la velocidad es v_0, pero cuando y = c, entonces la velocidad es cero. Por tanto:

$$v' = \frac{2v_0}{c}(c - y)$$

expresión válida para los valores de y comprendidos entre ½ c y c. Como el camino recorrido por el bote según el eje Y sigue siendo y = ut, sustituimos este valor en la expresión de v':

$$v' = 2v_0 - \frac{2v_0 u}{c} t$$

que proporciona la velocidad, según el eje X, que tiene el bote al ser arrastrado por la corriente desde el *centro del río* hasta la orilla B. Obsérvese que la aceleración en el eje X es precisamente el coeficiente que multiplica a t en la ecuación anterior:

$$a' = -\frac{2v_0 u}{c}$$

cuyo valor es constante. Por lo tanto, el bote experimenta una deceleración según un MRUA en el eje X desde el centro del río hasta la orilla opuesta. Además, nótese que a = –a'.

Si el bote cruza completamente el río en un tiempo 2T, como la anchura del río es c, de la expresión y = ut deducimos que c = u·2T. Por tanto:

$$T = \frac{c}{2u}$$

Además, como a = –a', el movimiento es simétrico respecto al centro del río (ver figura), de manera que en el eje X el bote está acelerando durante la primera mitad del recorrido y decelerando durante la segunda mitad. Para t = T el bote se encuentra en la posición x(T):

$$x(T) = \frac{1}{2} a T^2$$

Para calcular la posición x en el instante t = 2T, empleamos la expresión $r = r_0 + v_0 (t - t_0) + ½ a(t - t_0)^2$, siendo r = x, t_0 = T, r_0 = x(T) , $v_0 = v_0$ (la velocidad en el centro del río) y a = a', la deceleración que experimenta en el segundo tramo. Por tanto:

$$x = \frac{1}{2} a T^2 + v_0 T + \frac{1}{2} a' T^2$$

Sustituyendo los valores obtenidos de a, a' y T:

Resp.: $x = \frac{v_0 c}{2u}$

Para calcular la trayectoria del bote entre la orilla A y el centro del río eliminamos t entre las ecuaciones $x = \frac{1}{2} a t^2$, y = ut con $a = \frac{2v_0 u}{c}$:

Resp.: parábola $y^2 = \frac{cu}{v_0} x$

La trayectoria entre el centro del río y la orilla opuesta B es la parábola simétrica a la anterior, respecto al centro del río.

34. Dos móviles parten del mismo punto y en el mismo sentido recorriendo una circunferencia de 2 m de radio. El primero se mueve con una velocidad angular de 2 rad/s, y el segundo con una aceleración de 1 rad/s². ¿Cuánto tiempo tardarán en reunirse

de nuevo? ¿Qué aceleraciones tangencial y radial tienen en ese instante? ¿Qué ángulo forman las aceleraciones totales de ambos móviles?

El móvil 1 gira un ángulo $\varphi_1 = \omega_1 t$, el móvil 2 gira un ángulo $\varphi_2 = ½\ \alpha\ t^2$. Si $\varphi_1 = \varphi_2$:

$$\omega_1 t = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 \quad \text{por tanto} \quad t = \frac{2\omega_1}{\alpha_2}$$

sustituyendo valores:

Resp.: t = 4 s

La aceleración tangencial del móvil 1 es cero.

Resp.: $a_{t1} = 0$

La aceleración radial o centrípeta del móvil 1 es:

$$a_{n1} = \omega_1^2 R$$

sustituyendo valores:

Resp.: a_{n1} = 8 rad/s^2

La aceleración tangencial del móvil 2 es:

$$a_{t2} = \alpha_2 R$$

sustituyendo valores:

Resp.: a_{t2} = 2 rad/s^2

La aceleración radial o centrípeta del móvil 2 es:

$$a_{n2} = \omega_2^2 R = (\alpha_2 t)^2 R = \left(\alpha_2 \frac{2\omega_1}{\alpha_2}\right)^2 R = 4\omega_1^2 R$$

sustituyendo valores:

Resp.: a_{n2} = 32 rad/s^2

El ángulo que forman las aceleraciones totales de ambos móviles es el que existe entre la aceleración total del móvil 2 y su aceleración tangencial (pues coincide con la dirección de la aceleración total del móvil 1). Por tanto:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_{n2}}{a_{t2}} = \frac{32}{2} = 16$$

Resp.: θ = 86º 25’ 25”,2

35. Un punto material describe una trayectoria circular de 1 m de radio dando 30 vueltas en un minuto. Calcular el período, la frecuencia, la velocidad lineal, la velocidad areolar y la aceleración.

Como en 60 segundos da treinta vueltas, tarda 2 segundos en dar una.

Resp.: T = 2 s

La frecuencia es la inversa del periodo:

Resp.: f = ½ s^{-1}

Como la velocidad angular es $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y la velocidad lineal es v = ωR, entonces:

$$v = \frac{2\pi}{T} R$$

Resp.: v = π m/s

La velocidad areolar v_a es el área barrida en cada vuelta en la unidad de tiempo:

$$v_a = \frac{\pi R^2}{T}$$

Resp.: ½ π m^2/s

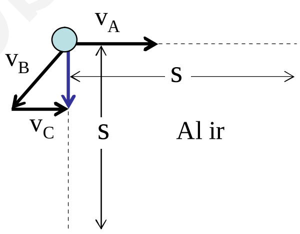
La aceleración que tiene este móvil es sólo la centrípeta:

$$a_n = \omega^2 R$$

Resp.: π^2 rad/s^2

36. Desde una boya situada en el centro de un río parten dos botes A y B tomando direcciones perpendiculares: el bote A a lo largo del río y el B a lo ancho. Al separase la misma distancia de la boya emprenden el regreso. Hallar la relación entre el tiempo empleado por cada bote t_A/t_B, si la velocidad de cada uno es 1.2 veces la de la corriente del río.

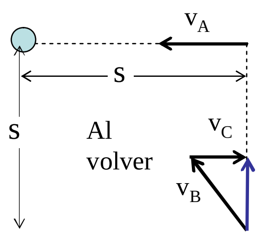
El tiempo invertido por A en "ir" es:



$$t_{A1} = \frac{s}{v_A + v_C}$$

siendo v_C la velocidad de la corriente que, en este caso, es "a favor".

El tiempo invertido por B en "ir" es:



$$t_{B1} = \frac{s}{\sqrt{v_B^2 - v_C^2}}$$

pues la velocidad real es la suma vectorial $\vec{v}_B + \vec{v}_C$ representada en la figura.

El tiempo invertido por A en "volver" es:

$$t_{A2} = \frac{s}{v_A - v_C}$$

pues en este caso la corriente es "en contra".

El tiempo invertido por B en "volver" es:

$$t_{B2} = \frac{s}{\sqrt{v_B^2 - v_C^2}}$$

pues la velocidad real es la suma vectorial $\vec{v}_B + \vec{v}_C$ también representada en la figura.

Los tiempos totales t_A y t_B son la suma de los dos parciales de cada bote. Si tenemos en cuenta que los dos llevan la misma velocidad v y que ésta es n = 1.2 veces la de la corriente:

$$t_A = \frac{2sn}{v_C(n^2-1)} \qquad t_B = \frac{2s}{v_C\sqrt{n^2-1}}$$

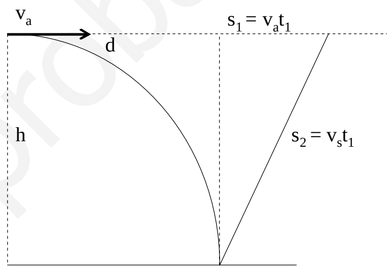
Dividiendo t_A entre t_B:

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$$

y para n = 1.2:

Resp.: $\frac{t_A}{t_B} = 1.809$

37. Un avión en vuelo horizontal rectilíneo, a una altura de 7840 m y a 450 km/h, deja caer una bomba al pasar por la vertical de un punto A del suelo. a) ¿Al cabo de cuánto tiempo se produce la explosión de la bomba por impacto con el suelo?, b) ¿qué distancia ha recorrido entre tanto el avión?, c) ¿a qué distancia del punto A se produce la explosión?, d) ¿cuánto tiempo tarda en oírse la explosión desde el avión, a contar desde el instante de lanzamiento, si el sonido se propaga a 330 m/s?



a)

$h = ½\, gt^2$, por tanto $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7840}{9.8}}$

Resp.: 40 s

b)

$$d = v_a t = \frac{450}{3.6} 40$$

Resp: 5000 m

c)

A la misma que la que ha recorrido el avión en 40 s.

Resp.: 5000 m

d)

Como se cumple la relación pitagórica: $s_2^2 = s_1^2 + h^2$, entonces $(v_s t_1)^2 = (v_a t_1) + h^2$; por tanto:

$$t_1 = \frac{h}{\sqrt{v_s^2 - v_a^2}} = \frac{7840}{\sqrt{330^2 - \left(\frac{450}{3.6}\right)^2}} = 25.67$$

$$T = t + t_1 = 40 + 25.67$$

Resp: 65.67 s

38. Se dispara un cañón con 15º de elevación y una velocidad inicial de 200 m/s. Calcular: a) la velocidad con la que llega a tierra?, b) ¿tropieza con una colina de 300 m de altura, situada en la mitad del alcance?; en caso afirmativo, ¿qué solución podríamos dar si queremos hacer blanco en el mismo objetivo, disparando con el mismo cañón y desde el mismo punto?

a)

Llega a tierra con la misma velocidad (en módulo) con la que se produjo el disparo.

Resp.: 200 m/s

b)

El tiempo de vuelo es la mitad del necesario para obtener el alcance máximo:

$$t = \frac{1}{2} t_{max} = \frac{v \operatorname{sen} \alpha}{g} \qquad (1)$$

La altura alcanzada en ese instante es:

$$h = v \operatorname{sen} \alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sustituyendo (1) en la expresión anterior, resulta:

$$h = \frac{v^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} = \frac{200^2 \operatorname{sen}^2 15}{2.9.8} = 136.7 \text{ m}$$

Resp.: Tropieza

Podríamos disparar con el ángulo complementario:

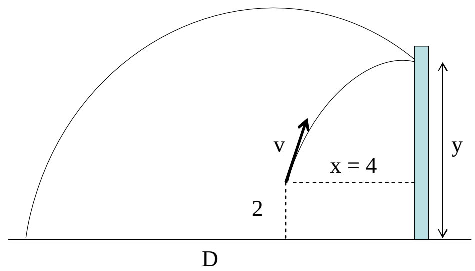
$$\alpha' = 90 - \alpha$$

pues

$$h' = \frac{v^2 \operatorname{sen}^2 \alpha'}{2g} = \frac{200^2 \operatorname{sen}^2 75}{2.9.8} = 1904.1 \text{ m}$$

Resp.: Disparar con un ángulo de 75º

39. Un muchacho, que está a 4 m de una pared vertical, lanza una pelota contra la pared desde una altura de 2 m, con una velocidad inicial de $10\vec{i} + 10\vec{j}$ m/s. Cuando la pelota choca en la pared se invierte la componente horizontal de su velocidad, pero permanece constante la vertical. ¿Dónde chocará la pelota contra el suelo?



Como $x = v_{ox} t; 4 = 10t;$ entonces $t = 0.4$ s. Y para ese instante:

$$y = y_0 + v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 = 2 + 10 \cdot 0.4 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 0.4^2 = 5.216$$

además en ese instante la velocidad vertical con la que tropieza en la pared es:

$$v_y = v_{oy} - gt = 10 - 9.8 \cdot 0.4 = 6.08$$

Partiendo de esa velocidad debe alcanzar el suelo en un tiempo t_1, por tanto, aplicando la expresión $y = y_0 + v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$ para ese instante:

$$0 = 5.216 + 6.08 t_1 - \frac{1}{2} 9.8 t_1^2$$

ecuación de segundo grado en t_1 cuya solución positiva es t_1 = 1.8243. Como la velocidad en el eje horizontal sólo cambia de sentido, pero mantiene su módulo, la distancia horizontal D de la figura es:

$$D = v_x t_1 = 10 \cdot 1.8243$$

Resp.: A 18.243 m de la pared

40. Un avión bombardero en vuelo horizontal a 360 km/h y 1000 m de altura, lanza una bomba. a) ¿A qué distancia de un objetivo inmóvil, medida horizontalmente, debe lanzar?, b) si el objetivo se mueve por una carretera horizontal a 72 km/h en la misma dirección y plano vertical, ¿a qué distancia debe lanzar, si el objetivo se mueve en el mismo o en distinto sentido?

a)

Como $x_1 = vt;\ y = \frac{1}{2}gt^2$ entonces $x_1 = v\sqrt{\frac{2y}{g}} = \frac{360}{3.6}\sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{9.8}}$

Resp.: 1428.57 m

b)

Si el objetivo se mueve a velocidad v' en el mismo sentido:

$$x_2 = (v + v')t = (v + v')\sqrt{\frac{2y}{g}} = \left(\frac{360}{3.6} + \frac{72}{3.6}\right)\sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{9.8}}$$

Resp.: 1714.29 m

Si lo hace en sentido contrario:

$$x_2 = (v - v')t = (v - v')\sqrt{\frac{2y}{g}} = \left(\frac{360}{3.6} - \frac{72}{3.6}\right)\sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{9.8}}$$

Resp.: 1142.86 m

41. Un móvil situado en el origen de coordenadas, tiene una velocidad inicial v en el sentido positivo del eje OX. Simultáneamente se le aplican dos aceleraciones constantes del mismo módulo, una dirigida según el sentido negativo del eje OX y la otra en el sentido positivo del eje OY. Calcular: a) la trayectoria, b) las coordenadas del punto de velocidad mínima, y c) el valor de la velocidad mínima.

a)

$$x = vt - \frac{1}{2}at^2$$
$$y = \frac{1}{2}at^2$$

Para eliminar t entre las dos ecuaciones, las sumamos y despejamos t:

$$t = \frac{x + y}{v}$$

tras sustituir en y, obtenemos:

Resp.: $x^2 + y^2 + 2xy - \frac{2v^2}{a}y = 0$

b)

Si v_t es el módulo de la velocidad, entonces:

$$v_x = v - at$$
$$v_y = at$$
$$v_t^2 = v_x^2 + v_y^2$$

de donde deducimos que:

$$v_t^2 = f(t) = v^2 + 2a^2t^2 - 2vat$$

y derivando f(t) con respecto al tiempo e igualando a cero para determinar el mínimo:

$$4a^2t_{min} - 2va = 0 \text{ por tanto: } t_{min} = \frac{v}{2a}$$

es decir:

$$v_{t\,min} = \sqrt{v^2 + 2a^2t_{min}^2 - 2vat_{min}}$$

Resp.: $v_{t\,min} = \frac{v}{\sqrt{2}}$

c)

Las coordenadas donde se consigue este valor mínimo son:

$$x_{min} = vt_{min} - \frac{1}{2}at_{min}^2$$
$$y_{min} = \frac{1}{2}at_{min}^2$$

Resp: $x_{min} = \frac{3v^2}{8a}; y_{min} = \frac{v^2}{8a}$

42. El movimiento de un cuerpo, que cae en un medio resistente partiendo del reposo, está definido por la ecuación $\frac{dv}{dt} = A - Bv$, con A y B constantes. Calcular en función de A y B: a) la aceleración inicial, b) la velocidad para la cual la aceleración es nula, c) la expresión de la velocidad en cualquier instante.

a)

Como parte del reposo entonces es v = 0 en $a = \frac{dv}{dt} = A - Bv$, por tanto, la aceleración en el instante inicial es:

Resp.: a = A

b)

La velocidad para la cual la aceleración $a = \frac{dv}{dt} = A - Bv$ se anula es:

$$A - Bv = 0$$

Resp.: $v = \frac{A}{B}$

c)

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{A - Bv} = dt$$

Integrando

$$\int_0^v \frac{dv}{A - Bv} = \int_0^t dt$$

Resp.: $v(t) = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)$

43. Un punto se mueve en el plano XY según la ley x = pt, y = pt(1 – qt), con p y q constantes. Determinar: a) la ecuación de la trayectoria, b) la velocidad y aceleración en función del tiempo, y c) el instante en el que el vector velocidad forma un ángulo de ¼ π radianes con la aceleración.

a)

Como t = x/p, sustituimos este valor en la expresión de y:

Resp.: Parábola: $y = x - \frac{q}{p}x^2$

b)

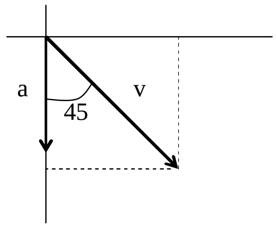
$$v_x = \frac{dx}{dt} = p; \qquad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = p(1-2qt); \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -2pq$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Resp.: $v = p\sqrt{1+(1-2qt)^2}$; a = 2pq

c)

$$\text{tg}\, 315 = \frac{v_y}{v_x}$$

$$-1 = \frac{p(1-2qt)}{p}$$



Resp.: $t = \frac{1}{q}$

44. Un móvil, que parte del origen de coordenadas, recorre la curva x^2 = 2y. La proyección del movimiento sobre el eje OX es un MRU a 2 m/s. Hallar al cabo de $\sqrt{2}$ segundos: a) el módulo de la velocidad, b) las componentes intrínsecas de la aceleración, y c) el radio de curvatura.

a)

Como v_x = 2, la posición en el eje X es: x = v_xt = 2t. Como y = ½ x^2, sustituyendo x obtenemos y = $2t^2$. Derivando: v_y = 4t. Y sustituyendo estos valores en:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4+16t^2}$$

Para t = $\sqrt{2}$ **:**

Resp.: $v\left(\sqrt{2}\right)$ = 6 m/s

b)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{4+16t^2}$$

Para t = $\sqrt{2}$ **:**

Resp.: $a_t\left(\sqrt{2}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ m/s^2

Como $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$ y $a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4$ la aceleración total a es 4, y la aceleración normal para $t = \sqrt{2}$ es:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

Resp: $a_n = \frac{4}{3}$ m/s^2

c)

De $a_n = \frac{v^2}{R}$ deducimos que $R = \frac{v^2}{a_n}$, cuyo valor para $t = \sqrt{2}$ es:

Resp.: R = 27 m

45. Una partícula se mueve sobre la trayectoria $y = x^2 + x + 1$ de manera que para x = 1 v_y = 3 m/s. Calcular el vector velocidad en ese instante.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1 = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}$$

Por tanto

$$v_x = \frac{v_y}{2x + 1}$$

Sustituyendo x = 1 y v_y = 3:

$$v_x = 1$$

Como $\vec{v} = (v_x, v_y)$:

Resp.: $\vec{v} = (1{,}3)$

46. Una partícula que tiene un movimiento rectilíneo recorre una distancia de 7 m antes de empezar a contar el tiempo, y cuando t = 2 s posee una velocidad de 4 m/s. Si la ecuación de la aceleración es $a = 3t^2 - 1$, calcular: a) la velocidad y la posición, b) la velocidad media entre t = 2 y t = 4, y c) la distancia a la posición inicial para t = 7.

a)

$$v = \int a dt = \int (3t^2 - 1)dt = t^3 - t + k$$

Como v(2) = 4, entonces k = –2.

Resp.: $v(t) = t^3 - t - 2$

$$x = \int v dt = \int (t^3 - t - 2)dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - 2t + k'$$

Como x(0) = 7, entonces k' = 7

Resp.: $x(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - 2t + 7$

b)

$$v_{m:2\to 4} = \frac{x(4) - x(2)}{4-2} = \frac{55-5}{2}$$

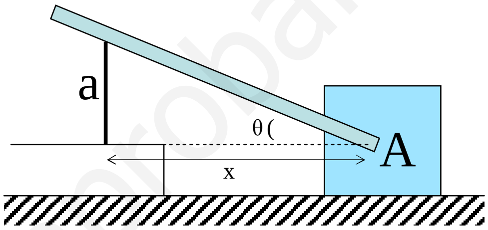
Resp.: 25 m/s

c)

$$x(7) = \frac{7^4}{4} - \frac{7^2}{2} - 2 \cdot 7 + 7$$

Resp.: 568.75 m

47. La barra de la figura se desliza sobre el poste vertical y está sujeta al bloque A que se mueve hacia la derecha con velocidad constante v. Determinar la velocidad angular de la barra.



Como $x = a \cot g\, \theta$, derivando respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = a\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

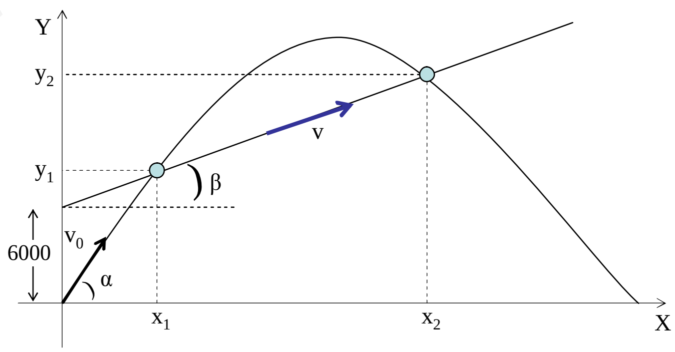
pero $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, entonces

$$v = -\frac{a}{\operatorname{sen}^2\theta}\omega$$

por tanto

Resp.: $\omega = -\frac{v}{a}\operatorname{sen}^2\theta$

48. Un avión vuela a velocidad constante con un ángulo β de ascensión respecto a la horizontal. Cuando está a 6000 m de altura sobrevuela un cañón enemigo que, en ese instante, abre fuego con una velocidad inicial del proyectil de 600 m/s. Poco después la bala pasa rozando el avión. Cuando el avión está a 9604 m de altura el proyectil vuelve a pasar rozando, explotando en el suelo 20 segundos después. Calcular: a) el ángulo de elevación del cañón, b) el ángulo β, y c) la velocidad del avión en km/h.



a)

Como la velocidad horizontal del avión es v cos β, la posición x_1 del avión es $x_1 = vt_1 \cos\beta$. La velocidad horizontal del proyectil es $v_0 \cos\alpha$, y su posición x_1 (coincidente con la del avión en el instante t_1) es $x_1 = v_0t_1 \cos\alpha$. Por tanto:

$$v \cos\beta = v_0 \cos\alpha \qquad (1)$$

La posición y_1 la alcanzan el avión y el proyectil en el instante t_1. La velocidad vertical del avión es constantemente v sen β. El proyectil está sometido a la aceleración de la gravedad e inicialmente tiene una velocidad vertical v_0 sen α, por tanto:

$$y_1 = 6000 + vt_1 \text{ sen } \beta = v_0t_1 \text{ sen } \alpha - ½\, gt_1^2 \qquad (2)$$

Análogamente con $y_2 = 9604$ en el instante t_2:

$$y_2 = 9604 = 6000 + vt_2 \text{ sen } \beta = v_0t_2 \text{ sen } \alpha - ½\, gt_2^2 \qquad (3)$$

Como el proyectil llega al suelo en el instante $t_2 + 20$:

$$0 = v_0(t_2 + 20) \text{ sen } \alpha - ½\, g(t_2 +20)^2$$

deducimos que:

$$v_0 \text{ sen } \alpha = ½\, g(t_2 + 20) \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$9604 = ½\, g\, (t_2 + 20)t_2 - ½\, gt_2^2$$

obtenemos $t_2 = 98$ s. Este valor lo llevamos a (4) para determinar α:

$$\text{sen } \alpha = \frac{g(t_2 + 20)}{2v_0} = \frac{9.8(98 + 20)}{2 \cdot 600}$$

Resp.: α = 74º 30’ 28”

b)

En (1), sabiendo α:

$$v \cos\beta = 160.2646 \qquad (5)$$

En (3), para $t_2 = 98$:

$$9604 = 6000 + v \cdot 98 \text{ sen } \beta$$

Por tanto:

$$v \text{ sen } \beta = 36.7755 \qquad (6)$$

Dividiendo (6) entre (5):

$$\text{tg } \beta = \frac{36.7755}{160.2646}$$

Resp.: β =12º 55’ 25.6”

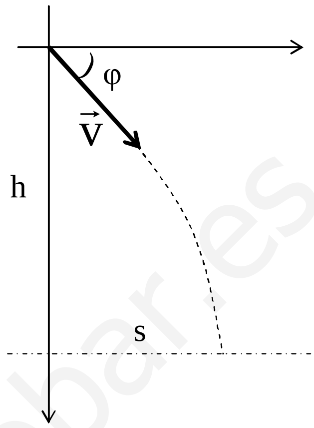
c)

En (1):

$$v = v_0 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 600 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 164.43\ \text{m/s} = 164.43 \cdot 3.6\ \text{km/h}$$

Resp.: v = 591.95 km/h

49. Un bombardero vuela en picado a 300 m/s y deja caer una bomba desde 180 m de altura, estando su proyección horizontal a 60 m del objetivo. Con g = 10 S.I., ¿con qué ángulo con respecto a la horizontal debe picar?



Como s = vt cos φ, h = vt sen φ + ½ gt^2, entonces:

$$h = s\ \text{tg}\ \varphi + \frac{1}{2} g \frac{s^2}{v^2}(1 + \text{tg}^2\varphi)$$

Introduciendo datos y reordenando términos:

$$\text{tg}^2\varphi + 300\ \text{tg}\ \varphi - 899 = 0$$

cuya solución menor de 90º es:

Resp.: 71º 16’ 47.83”

50. Una partícula se mueve en línea recta con una aceleración a = 2 $\sqrt{v}$. En t = 2 s su posición es $\frac{64}{3}$ m y su velocidad 16 m/s. Determinar la posición, velocidad y aceleración en t = 3 s.

Como $a = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{v}$, $2\,dt = \frac{dv}{\sqrt{v}}$, e integrando:

$$\int 2\,dt = \int \frac{dv}{\sqrt{v}}$$

$$2t + k_1 = 2\sqrt{v}$$

Para t = 2, v = 16, entonces k_1 = 4; de donde deducimos que:

$$v = (t + 2)^2$$

Como $v = \frac{ds}{dt} = (t+2)^2$, $(t+2)^2\,dt = ds$, e integrando y teniendo en cuenta que para t = 2 la posición es $s = \frac{64}{3}$:

$$s = \frac{1}{3}(t+2)^3$$

Y para t = 3:

Resp.. $s(3) = \frac{125}{3}$ m, v(3) = 25 m/s, a(3) = 10 m/s^2

51. Tres turistas tienen que llegar a un lugar en el plazo de tiempo más corto, contándose el tiempo hasta que el último llega al citado lugar. Andando caminan a 4 km/h, pero disponen de una bicicleta con la que dos de ellos pueden ir a 20 km/h. Deciden que uno de ellos lleve a otro en la bici hasta un punto determinado del camino, desde donde el

segundo continúa a pie, y el otro vuelve con la bici a recoger al tercero. Hallar la velocidad media.

Sean $v_1 = 4$, $v_2 = 20$, t_1 el tiempo en bicicleta, t_2 el que tarda el ciclista en volver y $t_1 + t_2$ el tiempo que están andando. El tiempo será el menor posible cuando todos lleguen en el mismo instante. La velocidad media v_m será:

$$v_m = \frac{v_1(t_1+t_2)+v_2 t_1}{t_1+t_2+t_1}$$

y para que la bicicleta y el peatón coincidan en el punto de recogida:

$$v_2 t_1 - v_2 t_2 = v_1(t_1+t_2)$$

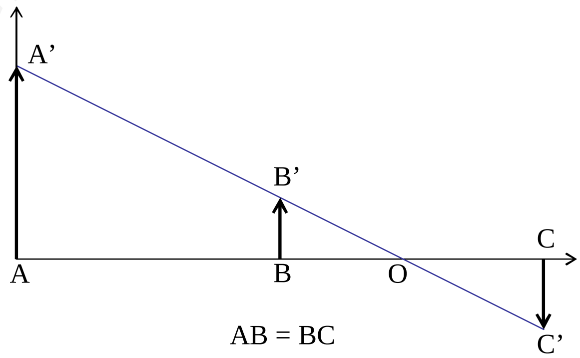
de donde deducimos que $t_1 = 1.5\ t_2$. E Introduciendo los datos la expresión de la velocidad media:

Resp.: 10 km/h

52. Tres puntos A, B y C, en el momento inicial, están situados sobre la misma recta horizontal. El punto A comienza a moverse verticalmente hacia arriba con velocidad v constante, y el punto C, sin velocidad inicial, verticalmente hacia abajo con aceleración a constante. Si los tres puntos empiezan a moverse simultáneamente, ¿de qué modo debe moverse B verticalmente para encontrarse en todo momento en la recta que une A con C?

Como $\vec{AA'} = vt\ \vec{j}; \vec{CC'} = -\frac{1}{2}at^2\vec{j}$; además:

$$\frac{\vec{AA'}}{\vec{AO}} = \frac{\vec{BB'}}{\vec{BO}} = \frac{-\vec{CC'}}{\vec{OC}}$$



y aprovechando las propiedades de las proporciones:

$$\frac{\vec{AA'}-\vec{BB'}}{\vec{AO}-\vec{BO}} = \frac{\vec{BB'}-\vec{CC'}}{\vec{BO}+\vec{OC}}$$

pero

$$\vec{AO}-\vec{BO} = \vec{BO}+\vec{OC}$$

por tanto,

$$\vec{AA'}-\vec{BB'} = \vec{BB'}-\vec{CC'}$$

de donde deducimos que:

$$\vec{BB'} = \frac{\vec{AA'}+\vec{CC'}}{2} = \left(\frac{v}{2}t - \frac{1}{2}\frac{a}{2}t^2\right)\vec{j}$$

es decir:

Resp.: B se mueve según un M.R.U.A. cuya velocidad inicial es $\frac{v}{2}$ y cuya aceleración es $\frac{a}{2}$.

53. Cuando un coche que se mueve a 90 km/h da la vuelta a una esquina, se encuentra con otro que circula delante de él en la misma dirección y sentido a 45 km/h. Si la máxima deceleración que sus frenos pueden proporcionar es de 6 m/s², a) calcular la distancia mínima entre ambos que impedirá el choque si el tiempo de reacción del conductor es de 0.5 segundos.

Sea v_1 = 90 km/h, v_2 = 45 km/h y d la distancia de separación que debe ser recorrida por el coche 1 a una velocidad inicial *relativa* $v_1 - v_2$ con una aceleración $a = -6$ m/s², por tanto:

$$d = (v_1 - v_2)t - \frac{1}{2}at^2$$

por otro lado, el coche 1 debe adquirir la velocidad del coche 2 en el intervalo t; es decir:

$$v_2 = v_1 - at$$

Despejando t en esta última expresión y sustituyéndolo en la anterior:

$$d = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$$

Pero, si el conductor del coche 1 tarda un tiempo t' = 0.5 s en reaccionar, mientras tanto recorre una distancia $(v_1 - v_2)$t' a velocidad constante, de manera que la distancia real mínima que necesita es:

$$d = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} + (v_1 - v_2)t'$$

Introduciendo los datos:

Resp.: 19.25 m

54. Un coche posee un aceleración máxima a, constante para velocidades altas, y una desaceleración máxima 2a. Debe recorrer una distancia corta L, empezando y finalizando el trayecto en reposo en un tiempo mínimo T. ¿En qué posición de L debe empezar a decelerar, y en qué fracción del tiempo total debe estar decelerando?

Como empieza y finaliza en reposo: $at_1 = 2at_2$, entonces:

$$t_1 = 2t_2$$

La distancia L será la recorrida acelerando y desacelerando:

$$L = \frac{1}{2}at_1^2 + \frac{1}{2}2at_2^2$$

De las expresiones anteriores deducimos que:

$$L = \frac{3}{4}at_1^2$$

Empezará a decelerar cuando deje de acelerar; es decir, cuando haya recorrido una distancia:

$$d = \frac{1}{2}at_1^2$$

Dividiendo miembro a miembro:

Resp.: $\dfrac{d}{L} = \dfrac{2}{3}$

Si el tiempo total es $T = t_1 + t_2$, como $t_1 = 2t_2$, entonces:

$$T = \frac{3}{2} t_1$$

de donde deducimos que:

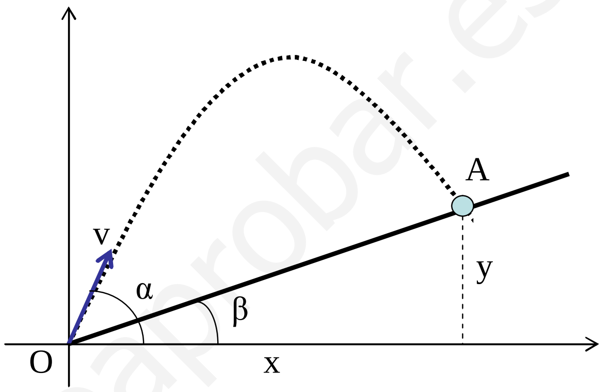
Resp.: $t_1 = \dfrac{2}{3} T$

55. Por O pasa un plano inclinado un ángulo β con la horizontal. Un proyectil se lanza desde O con una velocidad v e impacta en un punto A del plano. Determinar el ángulo α de lanzamiento, con respecto a la horizontal, para que la distancia OA sea mínima.

Las coordenadas (x, y) de A son:

$$x = vt \cos \alpha$$

$$y = vt \,\text{sen}\, \alpha - \tfrac{1}{2} gt^2$$



Como $y = x \,\text{tg}\, \beta$, sustituyendo x e y deducimos que:

$$t = \frac{2v}{g} \frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

expresión en la que hemos tenido en cuenta que

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\, \alpha \cos \beta - \cos \alpha \,\text{sen}\, \beta$$

Como

$$x = OA \cos \beta$$

entonces:

$$OA = \frac{2v^2}{g} \frac{\cos \alpha \,\text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos^2 \beta}$$

Derivando respecto a α e igualando a cero dicha derivada:

$$-\text{sen}\, \alpha \,\text{sen}\,(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) = 0$$

de donde deducimos que :

$$\text{ctg}\, \alpha = \text{tg}\,(\alpha - \beta)$$

es decir:

$$90^\circ - \alpha = \alpha - \beta$$

Resp.: $\alpha = 45^\circ + \tfrac{1}{2} \beta$

56. Un coche marcha por una carretera a 25 m/s. En el momento de pasar por un cruce perpendicular un gamberro le lanza una piedra, en el plano normal al movimiento del coche, con un ángulo de elevación de 45º, desde una altura de 1.2 m. Si el módulo de la velocidad inicial de la piedra, relativa al coche, es de 10 m/s, calcular: a) la velocidad inicial de la piedra relativa a la carretera, y b) lugar de la trayectoria donde alcanzará al coche.

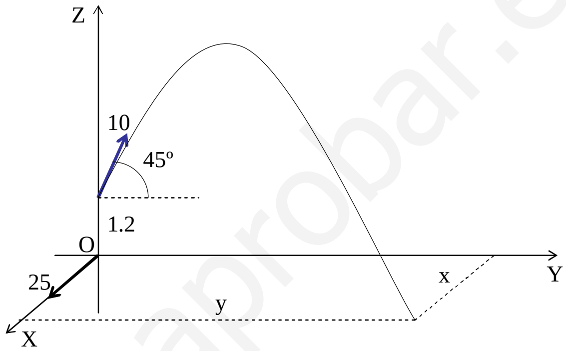
a)

La velocidad inicial de la piedra relativa a la carretera es la que tiene con respecto al coche $10(\cos 45\vec{j} + \text{sen } 45\vec{k}) = 5\sqrt{2}(\vec{j} + \vec{k})$ más la velocidad del coche:

esp.: $25\vec{i} + 5\sqrt{2}(\vec{j} + \vec{k})$

b)

Como



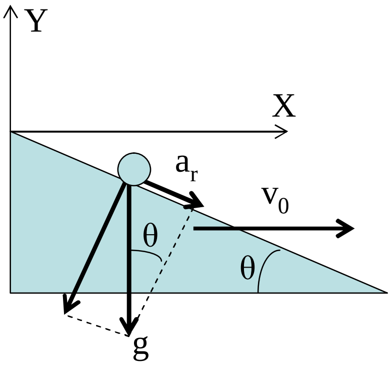
$$0 = 1.2 + 10t \text{ sen } 45 - \frac{1}{2}gt^2$$

ecuación de 2º grado en t cuya solución posible es t = 1.596. Como x = 25 t, y = 10t cos 45, para t = 1.596 obtenemos:

Resp.: $39.9\ \vec{i} + 11.3\ \vec{j}$

57. Una partícula, que se abandona en la parte superior de un plano de 10 m, inclinado 30º con la horizontal, desliza sin rozamiento. Simultáneamente el plano se mueve con una velocidad horizontal de 3 m/s de forma que la partícula no se separa del plano. Si g = 10 m/s^2, calcular: a) la velocidad y aceleración absoluta de la partícula cuando llegue al final del plano, y b) la trayectoria absoluta de la partícula en ecuaciones paramétricas.

a)



La velocidad absoluta del plano es $\vec{v}_0 = 3\vec{i}$, y la aceleración de la partícula, relativa al plano, $\vec{a}_r$, tiene por módulo g sen θ = 10 sen 30 = 5 y sus componentes cartesianas son:

$$\vec{a}_r = 5(\cos 30\vec{i} - \text{sen } 30\vec{j}) = \frac{5}{2}(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$$

La velocidad relativa $\vec{v}_r$ es la integral de la aceleración relativa; es decir:

$$\vec{v}_r = \frac{5t}{2}(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$$

pues en t = 0 la velocidad es cero.

La velocidad absoluta $\vec{v}$ es la suma vectorial de la velocidad relativa y la que tiene el plano:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_0 = \left(3 + \frac{5\sqrt{3}t}{2}\right)\vec{i} - \frac{5t}{2}\vec{j}$$

La partícula llegará al final del plano cuando recorra sus 10 metros partiendo del reposo, pero con la aceleración relativa de 5 m/s^2:

$$L = \tfrac{1}{2}\, a_r\, t^2; \quad t = \sqrt{\frac{2L}{a_r}} = \sqrt{\frac{2{\cdot}10}{5}} = 2\ \text{s}$$

Para t = 2, la velocidad absoluta es:

Resp.: $\vec{v}(2) = (3 + 5\sqrt{3})\,\vec{i} - 5\,\vec{j}$

b)

$$x = \int_0^t \left(3 + \frac{5\sqrt{3}t}{2}\right)_x dt$$

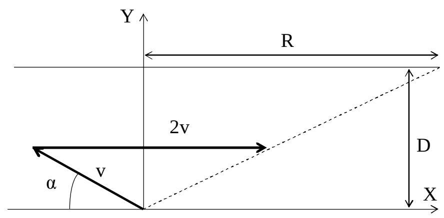
Resp.: $x = 3t + \frac{5}{4}\sqrt{3}t^2$

$$y = \int_0^t \frac{-5t}{2} dt$$

Resp.: $y = -\frac{5}{4}t^2$

58. Un nadador es capaz de nadar a la mitad de la velocidad de la corriente de un río que quiere atravesar de manera que la corriente lo arrastre lo menos posible. a) ¿Con qué ángulo con respecto a la orilla debe nadar?, y b) ¿a qué distancia se lo llevará la corriente si la anchura del río es de 200 m?

a)



Las componentes de la velocidad son:

$$v_x = 2v - v \cos \alpha$$
$$v_y = v \operatorname{sen} \alpha$$

El tiempo invertido en cruzar es:

$$t = \frac{D}{v_y} = \frac{D}{v \operatorname{sen} \alpha}$$

La distancia R es:

$$R = v_x t = D\frac{2 - \cos\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Efectuando la deriva de R con respecto a α e igualándola a cero, resulta:

$$1 - 2 \cos \alpha = 0$$

Resp.: 60º

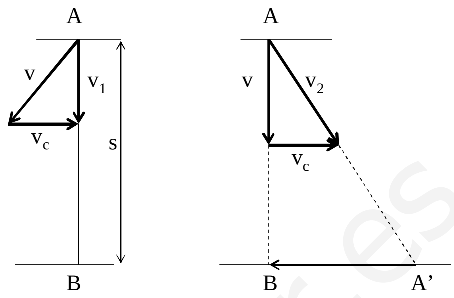
b)

$$R = D\frac{2 - \cos\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 200\frac{2 - \cos 60}{\operatorname{sen} 60}$$

Resp.: $200\sqrt{3}$ m

59. Dos nadadores tienen que atravesar un río desde el punto A de una de las orillas hasta el B, situado en la orilla opuesta enfrente al primero. Uno de ellos decide atravesar según la recta AB, pero el otro quiere mantenerse en todo momento perpendicular a la corriente, de manera que la distancia que lo arrastre la recorrerá andando a velocidad u. ¿Con qué valor de u alcanzarán ambos nadadores el punto B al mismo tiempo si la velocidad a la que nadan es de 2.5 km/h y la de la corriente es 2 km/h?

Si la velocidad de la corriente es v_c, la velocidad absoluta del nadador 1 es:



$$v_1 = \sqrt{v^2 - v_c^2}$$

El tiempo que invierte en cruzar es:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{\sqrt{v^2 - v_c^2}} \quad (1)$$

La velocidad absoluta del nadador 2 es:

$$v_2 = \sqrt{v^2 + v_c^2}$$

El tiempo que invierte es:

$$t_2 = t_{AA'} + t_{A'B} = \frac{s}{v} + \frac{A'B}{u}$$

pero

$$A'B = v_c t_{AA'} = v_c \frac{s}{v}$$

por tanto:

$$t_2 = \frac{s}{v} + \frac{v_c s}{vu} \qquad (2)$$

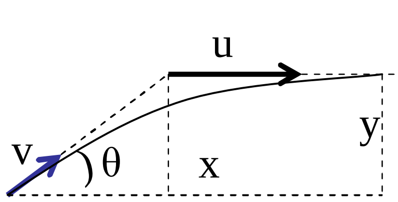
igualando (1) y (2) y despejando u:

$$u = \frac{v_c\sqrt{v - v_c^2}}{v - \sqrt{v - v_c^2}}$$

E introduciendo valores:

Resp.: u = 3 km/h

60. Un pato volaba por una recta horizontal a velocidad constante u. Un cazador inexperto le disparó un proyectil a velocidad v con una dirección orientada hacia la posición del pato en el instante de disparar. ¿A qué altura volaba el pato si, a pesar de todo, fue alcanzado?



Como $x = \frac{h}{\text{tg}\,\theta} + ut$ y también es $x = vt\cos\theta$, entonces, igualando y despejando t:

$$t = \frac{h}{tg\,\theta\,(v\cos\theta - u)}$$

y sustituyendo este valor en:

$$h = vt \text{ sen } \theta - ½ \, gt^2$$

Resp.: $h = \frac{2u}{g}(v\cos\theta - u)tg^2\theta$

61. Desde una altura H se lanzan dos pelotas con la misma velocidad, una hacia arriba con un ángulo α y otra hacia abajo con un ángulo β (ambos respecto a la horizontal). Demostrar que las dos pelotas chocan contra el suelo a la misma velocidad.

Analicemos el lanzamiento hacia arriba. Empleamos un sistema cartesiano con el origen en el suelo. Las componentes de la velocidad son:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \text{ sen } \alpha - gt$$

El módulo al cuadrado de la velocidad total en cada instante es:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2\cos^2\alpha + (v_o \text{ sen } \alpha - gt)^2 = v_0^2 - 2g\left(v_0 t \text{ sen } \alpha - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

Pero, la posición al llegar al suelo es:

$$0 = H + v_0 \, t \text{ sen } \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Por tanto:

$$v^2 = v_0^2 + 2gH$$

expresión en la que se aprecia que el resultado es *independiente* del ángulo de lanzamiento.

62. ¿Con qué velocidad mínima debe lanzarse un cuerpo desde 30 m de altura para que caiga a 40 metros de su proyección horizontal?

Empleamos un sistema cartesiano con el origen en el suelo.

$$s = v_0 \, t \cos\alpha$$

$$0 = H + v_0 \, t \text{ sen } \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

En la expresión de s despejamos t, lo sustituimos en la segunda y determinamos v_0^2:

$$v_0^2 = \frac{gs^2}{2\cos^2\alpha(H + s\,tg\,\alpha)} = \frac{gs^2}{H(2\cos^2\alpha - 1 + 1) + s\,2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha} = \frac{gs^2}{H + H\cos 2\alpha + s\text{ sen }2\alpha} = \frac{gs^2}{f(\alpha)}$$

f(α) debe ser máxima para que la velocidad sea mínima, por eso derivamos f(α) respecto a α e igualamos a cero:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = -2H\text{ sen }2\alpha + 2s\cos 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{s}{H} = \frac{40}{30}$$

de donde deducimos que sen 2α = 0.8 y cos 2α = 0.6. E introduciendo datos en:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gs^2}{H + H\cos 2\alpha + s\,\text{sen}\,2\alpha}}$$

Resp.: 14 m/s

63. Un punto gira retardadamente en una trayectoria circular de radio R de modo que, en todo momento, sus aceleraciones normal y tangencial tienen el mismo módulo. Si en el instante inicial su velocidad es v_0, calcular la velocidad en función del recorrido.

Como gira retardadamente: $a_t = -\frac{dv}{dt}$. Si $a_t = a_n$:

$$-\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R}$$

pero

$$-\frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{v^2}{R}$$

es decir

$$-\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{R}$$

o sea

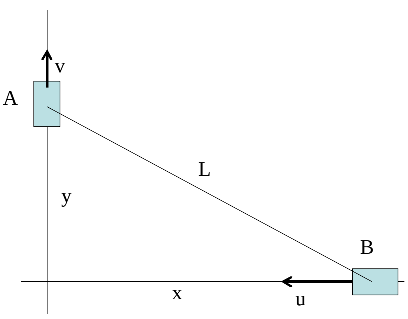
$$-\frac{dv}{ds}v = \frac{v^2}{R}$$

simplificando e integrando:

$$-\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_0^s \frac{ds}{R}$$

Resp.: $v = v_0 e^{-\frac{s}{R}}$

64. Dos carritos se mueven siguiendo los ejes X e Y, unidos mediante una barra de longitud L. Uno de ellos sube por el eje Y a velocidad v. Determinar el movimiento del otro.



El carrito A se desplaza a velocidad constante, de manera que:

$$v = \frac{dy}{dt} \qquad y = vt$$

Además, se cumple la relación pitagórica:

$$x = \sqrt{L^2 - y^2} = \sqrt{L^2 - v^2t^2}$$

y derivando x con respecto al tiempo obtenemos $u = \frac{dx}{dt}$:

Resp: $u = -\frac{v^2 t}{\sqrt{L^2 - v^2 t^2}}$

65. Un vehículo, cuyas ruedas tienen un diámetro de 80 cm y 14 radios, desciende por una pendiente sin rozamiento. El movimiento es registrado por una cámara que toma 24 fotos por segundo. Al proyectar la película se aprecia que para t = 20 s la velocidad de rotación de las ruedas es aparentemente nula. Calcular la pendiente.

Si n es el número de radios, para que la rueda parezca inmóvil tiene que girar un múltiplo de $\frac{2\pi}{n}$ en el tiempo T transcurrido entre dos fotos.

Sea $k\frac{2\pi}{n}$ el ángulo girado en T con una aceleración angular α, partiendo de una velocidad angular ω_0. Entonces:

$$k\frac{2\pi}{n} = \omega_0 T + \frac{1}{2}\alpha T^2$$

Al cabo de t = 20 s más se produce la inmovilización aparente de la ruedas en el siguiente múltiplo de $\frac{2\pi}{n}$, el k + 1. Por tanto:

$$(k+1)\frac{2\pi}{n} = (\omega_0 + \alpha t)T + \frac{1}{2}\alpha T^2$$

De las dos expresiones deducimos que:

$$\frac{2\pi}{n} = \alpha t T \qquad \alpha = \frac{2\pi}{ntT}$$

Si el ángulo de inclinación del plano es φ, entonces a = g sen φ = αR y, además, si N es el número de tomas, entonces $T = \frac{1}{N}$, de donde deducimos que:

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{2\pi NR}{gnt} = \frac{2\pi\cdot 24\cdot 0.4}{9.8\cdot 14\cdot 20}$$

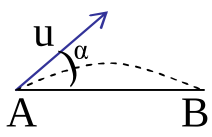
Resp.: 1º 15’ 34.5”

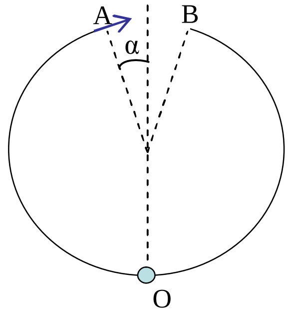
66. Un alambre está doblado en forma de arco de radio R. En él se asienta, sin rozamiento, una cuenta que puede moverse a lo largo del alambre. En el instante inicial la cuenta está en la posición O. ¿Qué velocidad horizontal es necesario trasmitirle a la cuenta para que al llegar a A alcance el punto B, si el ángulo central que mide el arco AB es 2α?

Se aprecia en la figura que:

$$AB = 2(R\ \text{sen}\ \alpha)$$

Pero AB también es el alcance de un lanzamiento efectuado desde A con velocidad u y un ángulo de elevación α:





$$AB = \frac{u^2}{g}\text{sen}\ 2\alpha = \frac{u^2}{g} 2\ \text{sen}\ \alpha \cos\alpha$$

Igualando:

$$u^2 = \frac{gR}{\cos\alpha}$$

La velocidad v con la que debe salir de O es:

$$v = \sqrt{u^2 + 2gh}$$

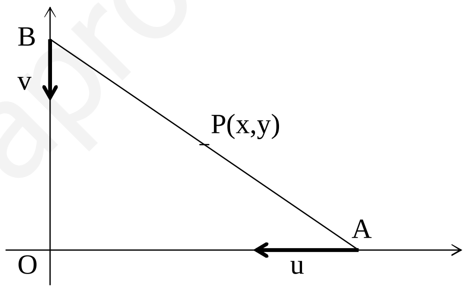
$$v = \sqrt{u^2 + 2gR(1 + \cos\alpha)}$$

Sustituyendo u^2:

Resp.: $v = \sqrt{gR\left(2 + 2\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)}$

67. Dos móviles A y B están obligados a moverse sobre los semiejes OX y OY en busca del origen de coordenadas a velocidades constantes v_1 y v_2 respectivamente. Inicialmente A se encuentran a distancia a y B a distancia b del origen. Determinar: a) el movimiento del punto medio P del segmento AB, y b) el instante en el que la distancia OP es mínima.

a)



Como

$$x_A = a - ut$$

$$y_B = b - vt$$

entonces las coordenadas de P son:

$$x = ½\,(a - ut)$$

$$y = ½\,(b - vt)$$

Eliminando t y operando resulta que la trayectoria es la recta de ecuación

$$\frac{2x - a}{u} = \frac{2y - b}{v}$$

La velocidad de P es $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{2}(u, v)$, cuyo módulo es constante de valor $\frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}$, por tanto:

Resp.: Es un M.R.U. cuya velocidad es $\frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}$

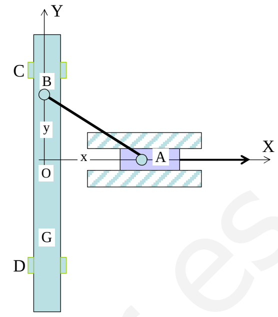
b)

$$f(t) = OP^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left[(a - ut)^2 + (b - vt)^2\right]$$

Derivando f(t) con respecto al tiempo, igualando a cero y despejando t:

Resp.: $t = \frac{au + bv}{u^2 + v^2}$

68. La barra G se puede desplazar siguiendo un movimiento de vaivén según el eje Y guiada por los cojinetes perfectamente lubricados C y D, debido a una varilla AB de 5 metros cuyo extremo A se mueve según el eje X accionado por un émbolo a una velocidad constante de 1 m/s en el sentido positivo del eje OX. Calcular la velocidad y aceleración de la barra G en el instante en el que el segmento BO mida 3 metros.



Sea AB = k y c = 1 m/s la velocidad de A. Según se aprecia en la figura :

$$c = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

Como se ha de cumplir la relación pitagórica:

$$x^2 + y^2 = k^2$$

Derivando respecto a t:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

es decir:

$$2\,x\,c + 2\,y\,v = 0$$

o sea

$$v = -c\frac{x}{y} = -c\frac{\sqrt{k^2 - y^2}}{y} \qquad (1)$$

y cuando y = 3:

$$v_{y=3} = -1\cdot\frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{3}$$

Resp.: $v_{y=3} = -\frac{4}{3}$ m/s

Para calcular la aceleración en (1) derivamos v con respecto a t:

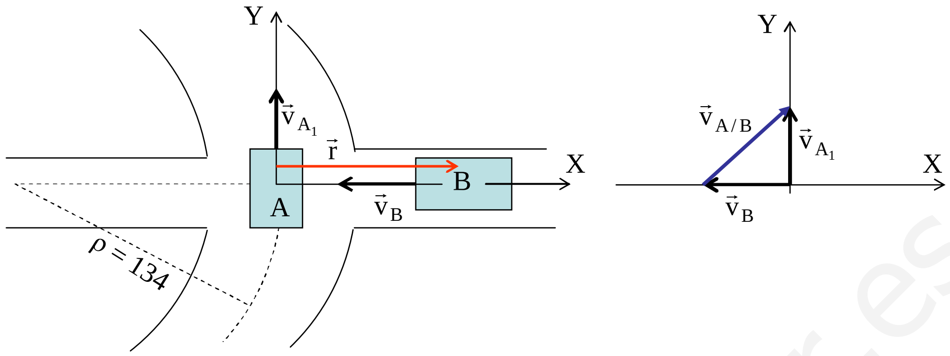
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}v = -c\frac{\frac{-y}{\sqrt{k^2 - y^2}}y - \sqrt{k^2 - y^2}}{y^2}\left(-c\frac{\sqrt{k^2 - y^2}}{y}\right) = -\frac{k^2c^2}{y^3}$$

y cuando y = 3:

$$a_{y=3} = -\frac{5^2\cdot 1^2}{3^3}$$

Resp.: $a_{y=3} = -\frac{25}{27}$

69. El coche A gira en una curva de 134 m de radio a 48 km/h. En el instante indicado en la figura ambos coches están separados 30.48 m y el coche B se mueve a 72 km/h, pero disminuye su velocidad a razón de 3 m/s^2. Determinar el módulo de la velocidad y la aceleración de A observadas desde B. El vector velocidad de B observado desde A, ¿es la opuesta a la velocidad de A observada desde B? Calcularla.



El coche B sólo se traslada, no gira, por lo tanto, el sistema de referencia situado en B sólo experimenta una "traslación". En la figura de la derecha, $\vec{v}_{A_1}$ es la velocidad absoluta del coche A (cuyo módulo es 48 km/h = 40/3 m/s), $\vec{v}_B$ es la velocidad absoluta de B (cuyo módulo es 72 km/h = 20 m/s) y $\vec{v}_{A/B}$ el la velocidad de A vista desde B. Se cumple la siguiente relación vectorial:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{A_1} - \vec{v}_B$$

El módulo de $\vec{v}_{A/B}$ es:

$$v_{A/B} = \sqrt{v_{A_1}^2 + v_B^2} = \sqrt{48^2 + 72^2}$$

Resp.: $v_{A/B}$ = 86.5 km/h

La aceleración absoluta del móvil A es sólo la centrípeta, cuyo valor es:

$$\vec{a}_A = -\frac{v_{A_1}^2}{\rho}\vec{i} = -\frac{\left(\frac{40}{3}\right)^2}{134}\vec{i} = -\frac{1600}{1206}\vec{i} \text{ m/s}^2$$

Como, según los datos, $\vec{a}_B = -3\vec{i}$ y se cumple que:

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

Entonces:

$$\vec{a}_{A/B} = -\left(\frac{1600}{1206} + 3\right)\vec{i}$$

cuyo módulo es:

Resp.: $a_{A/B}$ = –4.33 m/s^2

Ahora bien, la velocidad de B observada desde A *no* es la misma que la opuesta a la velocidad de A observada desde B, porque para calcular $\vec{v}_{B/A}$ hay que tener en cuenta que el sistema de referencia situado en A experimenta una "rotación". Si $\vec{v}_A$ es la velocidad absoluta de A, entonces:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_1} + \vec{\omega} x \vec{r} = v_{A_1}\vec{j} + \frac{v_{A_1}}{\rho} r\vec{j} = \frac{40}{3}\vec{j} + \frac{\frac{40}{3}}{134} 34.48\vec{j} = 16.36\vec{j}$$

Como se cumple la siguiente relación vectorial:

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

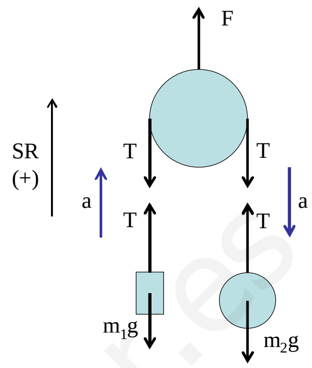
Resp.: $\vec{v}_{B/A} = -20\vec{i} - 16.36\vec{j}$ m/s
de módulo 93 km/h

TEMA III

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA

1. **Una cuerda inelástica, sin peso, sujeta dos masas de 2 y 3 kg que cuelgan de sus extremos sobre una polea sin rozamiento. ¿Qué fuerza ejerce la cuerda sobre la polea? (g = 10 m/s²)**

En la polea (supuesta ideal: sin masa):



$$F - 2T = 0$$

En la masa 1:

$$T - m_1 g = m_1 a$$

En la masa 2:

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

Con estas tres ecuaciones obtenemos:

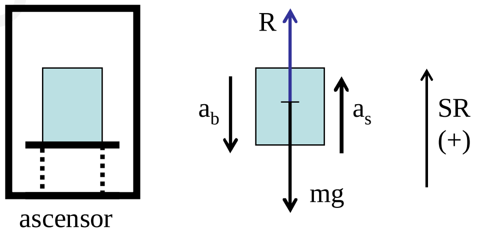
$$F = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{2+3} 10$$

Resp.: 48 N

2. **Un peso de 70 Kg se encuentra sobre una báscula de resorte, en un ascensor, a 30 cm de altura. Demostrar que, para g = 10 m/s², la relación entre lo que marca la báscula al subir y al bajar con aceleración constante de 2 m/s² es 3/2. ¿Depende de la masa? ¿Depende de la altura?**

Dibujamos el diagrama del sólido libre del peso de 70 kg en el que se aprecia la reacción de la báscula R. Esta reacción es, precisamente, la fuerza medida por la báscula.

Si R_s es la reacción que se produce subiendo y R_b es la detectada bajando:



$$R_s - mg = ma_s \qquad R_s = m(g + a_s)$$

$$R_b - mg = -ma_b \qquad R_b = m(g - a_b)$$

Por tanto

$$\frac{R_s}{R_b} = \frac{g + a_s}{g - a_b} \qquad (1)$$

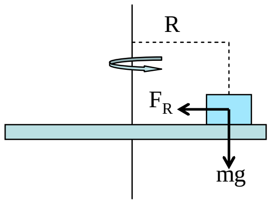
$$\frac{R_s}{R_b} = \frac{10+2}{10-2}$$

Resp.: $\frac{3}{2}$

Como se aprecia en la expresión (1), dicha relación es independiente de la masa depositada en la báscula y de la altura a la que se encuentre el ascensor.

3. **Tenemos un bloque de m kg, situado a R metros del centro de una plataforma horizontal giratoria, que tiene un coeficiente estático de rozamiento μ_e. Demostrar que la máxima**

velocidad angular que puede comunicarse a la plataforma sin que el bloque deslice es $\sqrt{\mu_e \frac{g}{R}}$.



La única fuerza que actúa horizontalmente es la de rozamiento provocando la existencia de una aceleración centrípeta $\omega^2 R$, de manera que:

$$F_R = m\omega^2 R$$

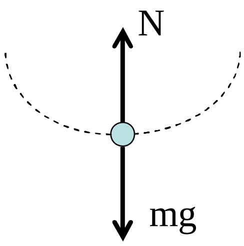
Como el valor máximo de la fuerza de rozamiento es:

$$F_R = \mu_e mg$$

Entonces, la velocidad angular máxima es:

$$\omega_{max} = \sqrt{\mu_e \frac{g}{R}}$$

4. **Un aviador se lanza en picado a 98 m/s y termina su descenso describiendo un arco de circunferencia en el plano vertical. Si el peso aparente es ocho veces el real, ¿cuál es el radio de la trayectoria?**



El aviador está sentado en su asiento. Su diagrama del sólido libre es el de la figura, en el que N es la reacción del asiento. Esta reacción es la que mide el peso aparente del piloto:

$$N - mg = m\frac{v^2}{R}$$

Como N = 8mg, entonces:

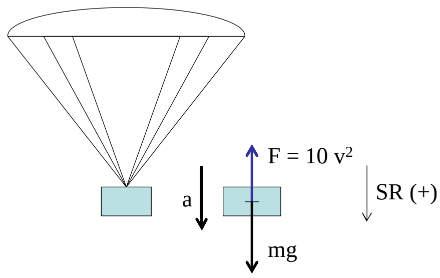
$$R = \frac{v^2}{7g}$$

y con los datos:

Resp.: 140 m

5. **Un cuerpo de 64 kg se deja caer en paracaídas. Si la fuerza ejercida por el paracaídas es $F = 10\ v^2$ (S.I.). Calcular la velocidad límite en km/h con $g = 10\ m/s^2$.**

$$mg - 10\ v^2 = m\ a$$



La velocidad límite se alcanza cuando la aceleración a es cero, por tanto:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{10}} = 8\ m/s$$

y en km/h

Resp.: 28.8

6. **Demostrar que el valor mínimo de la fuerza horizontal que debe aplicarse sobre el eje de una rueda de radio r y masa m, para que suba un escalón de altura h < r es**

$$\mathbf{mg\ cotg\ \alpha}$$

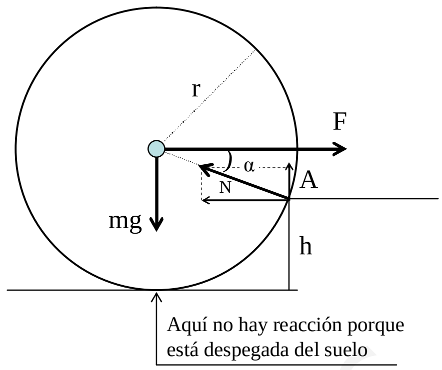
siendo α el ángulo formado por la fuerza y el radio en el punto de contacto con el escalón.

En el instante en el que despega del suelo, no existe aceleración vertical ni horizontal:

$$F - N\cos\alpha = 0 \qquad N\,\text{sen}\,\alpha - mg = 0$$

De las expresiones anteriores deducimos que:

$$F = mg\,\text{cotg}\,\alpha$$



Otro método:

La suma de todos los momentos respecto al punto A de las fuerzas que actúan sobre la rueda debe ser cero en el instante en el que la rueda *empieza* a despegarse del suelo. Obsérvese que la reacción N no influye en el cálculo de estos momentos porque está aplicada precisamente en el punto A. Si establecemos que las fuerzas que provocarían giros a derechas generan momentos positivos, entonces:

$$F(r - h) - mgr\cos\alpha = 0$$

además

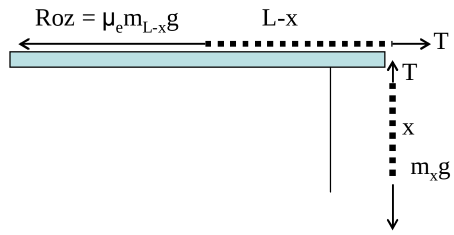
$$h = r - r\,\text{sen}\,\alpha$$

entonces:

$$F = mg\,\text{cotg}\,\alpha$$

7. Colocamos una cuerda flexible de longitud L sobre una mesa de forma que parte de ella cuelga por un extremo. Calcular la máxima longitud de cuerda que puede colgar, sin que se caiga, si el coeficiente estático de rozamiento es μ_e.

Sea la cuerda homogénea de densidad lineal ρ. Entonces:



$$\rho = \frac{m}{L} = \frac{m_x}{x} = \frac{m_{L-x}}{L-x}$$

Por tanto

$$m_x = \frac{m}{L}x \qquad m_{L-x} = \frac{m}{L}(L-x)$$

En el tramo que cuelga:

$$T - m_x g = 0\,; \qquad T - \frac{m}{L}x = 0$$

En el tramo apoyado en la mesa:

$$T - \mu_e m_{L-x} g = 0\,; \qquad T - \mu_e \frac{m}{L}(L-x)g = 0$$

Eliminado T y despejando x:

Resp.: $x = \dfrac{\mu_e}{1+\mu_e}L$

8. Una cisterna descarga agua a 500 litros/segundo sobre un tren aljibe de masa m y volumen V. Calcular la fuerza que ejerce la locomotora, cuando va a velocidad constante de 2 m/s, durante la carga de agua.

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt}$$

Como circula a velocidad constante $\frac{dv}{dt} = 0$, entonces:

$$F = \frac{dm}{dt}v$$

Como la densidad del agua es 1 g/cm^3, 500 litros equivalen a 500 kg; es decir: $\frac{dm}{dt} = \frac{500\,\text{kg}}{1\,\text{s}}$; por tanto:

$$F = \frac{dm}{dt}v = 500·2$$

Resp.: 1000 N

9. Se lanza verticalmente hacia arriba un móvil con una velocidad inicial de v_0. Un viento lateral ejerce una fuerza horizontal igual a la quinta parte del peso del móvil. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento caerá?

$$F = ma;\ \frac{1}{5}mg = ma$$

Por tanto la aceleración horizontal es constante de valor $a = \frac{g}{5}$.

El tiempo que tarda en alcanzar el punto más alto se calcula en la expresión $v = v_0 - gt$ haciendo $v = 0$.

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Como el tiempo de vuelo t_v que tarda en llegar de nuevo al suelo es el doble del anterior, la distancia horizontal recorrida es:

$$x = \frac{1}{2}at_v^2 = \frac{1}{2}\frac{g}{5}\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2$$

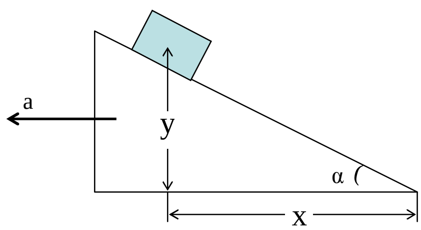
Resp.: $\frac{2}{5}\frac{v_0^2}{g}$

10. Sobre un plano inclinado α grados sobre la horizontal se coloca un cuerpo. Calcular la aceleración horizontal que hay que comunicar al plano para que el movimiento del cuerpo sea vertical y en caída libre.

Mientras el cuerpo baja la distancia y, el plano debe avanzar la distancia x:

$$y = ½\ gt^2$$

$$x = ½\ at^2$$



Además se debe cumplir la siguiente relación trigonométrica:

$$x = y \cot g\, \alpha$$

Con estas tres ecuaciones se deduce que:

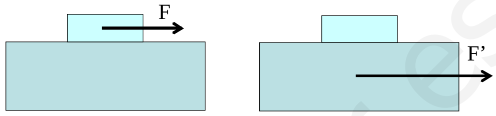
Resp.: $a = g \cot g\, \alpha$

11. Un bloque de masa M descansa sobre una superficie horizontal. Sobre dicho cuerpo se coloca otro de masa m que necesita una fuerza horizontal F para que deslice sobre M estando éste fijo. Calcular la fuerza horizontal máxima que se puede aplicar sobre M sin que deslice m. Todas las superficies son perfectamente lisas.

En la fig. (a), con M fijo:

$$F = m\, a$$

En la fig. (b), considerando al conjunto como un todo que se mueve con aceleración a:



(a) (b)

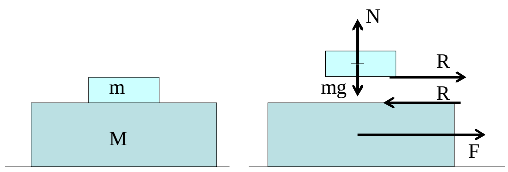
$$F' = (m+M)\, a$$

Dividiendo miembro a miembro:

Resp.: $F' = F\dfrac{M+m}{m}$

12. Un bloque de masa m está encima de otro de masa M que se apoya en un suelo horizontal liso. El coeficiente de rozamiento entre ambos bloques es μ. ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima aplicada en el bloque de abajo para que el bloque de arriba deslice sobre el inferior?

Si R es la fuerza de rozamiento entre ambas masas, del diagrama del sólido libre de la masa M deducimos:



$$F - R = Ma$$

El mínimo valor de F es el que permite que M se mueva con un MRU, por tanto:

$$F - R = 0$$

Pero, en el diagrama del sólido libre de m:

$$N - mg = 0$$

Además

$$R = \mu N$$

Por tanto:

Resp.: $F = \mu mg$

13. Un bloque de 2 kg está encima de otro de 5 kg que se apoya en un suelo horizontal liso. Una fuerza horizontal aplicada en el bloque de abajo genera una aceleración de 0.8 m/s^2 a la masa de 5 kg. Si la fuerza de rozamiento entre ambos bloques es de 1.2 N, calcular la fuerza aplicada y la aceleración del bloque superior.

Empleando los diagramas del ejercicio anterior:

$$F - R = Ma$$

$$F = Ma + R = 5 \cdot 0.8 + 1.2$$

Resp.: F = 5.2 N

$$R = m\,a'$$

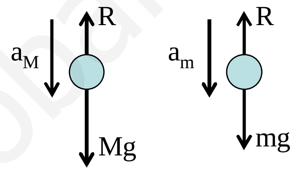
$$a' = \frac{R}{m} = \frac{1.2}{2}$$

Resp.: $a' = 0.6\ m/s^2$

14. Se dejan caer, a la vez, desde la misma altura, dos objetos esféricos del mismo tamaño y distinta masa. La resistencia del aire es la misma para los dos. Demostrar que el cuerpo de mayor masa llega antes al suelo.

$$Mg - R = M\,a_M \qquad a_M = g - \frac{R}{M}$$

$$mg - R = m\,a_m \qquad a_m = g - \frac{R}{m}$$



Como M >m

$$\frac{R}{M} < \frac{R}{m}$$

entonces

$$a_M > a_m$$

15. Una ametralladora dispara n proyectiles por segundo a v m/s. La masa del proyectil es m. ¿Cuánto vale la fuerza media ejercida sobre el blanco?

$$F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{n(mv)}{1}$$

Resp.: nmv

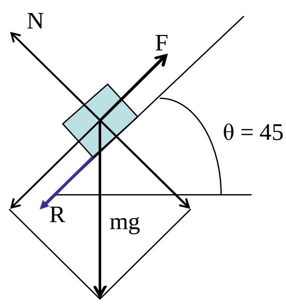
16. Un bloque de 2 kg está a punto de deslizar por un plano rugoso de 30º. Calcular la fuerza mínima necesaria, paralela al plano, para que empiece a subir por él cuando esté inclinado 45º.

Si con el plano inclinado 30º el cuerpo está *a punto* de deslizar quiere decir que el coeficiente estático de rozamiento es

$$\mu_e = \text{tg } 30º$$

Cuando el ángulo sea de 45º, si comienza a deslizar mediante la fuerza F entonces:

$$F - mg \text{ sen } \theta - R = 0$$



siendo

$$R = \mu_e N = \mu_e\, mg \cos \theta$$

por tanto

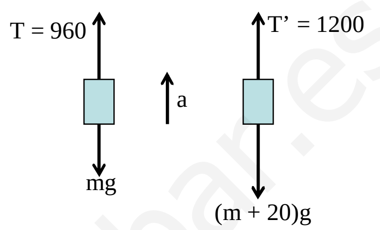
$$F = mg\,(\text{tg } 30º \cos 45º + \text{sen } 45º)$$

Resp.: $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$Kp

17. **Un hombre se encuentra sobre una balanza de resorte en un ascensor que posee una aceleración ascendente. La balanza marca 960 N. Pero, si coge una masa de 20 kg en sus masas, la balanza indica 1200 N. Con g = 10 m/s^2 calcular la aceleración del ascensor.**

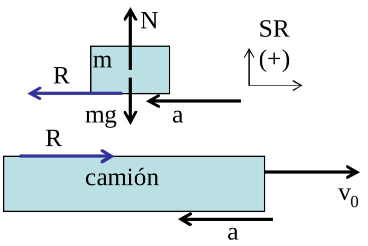
$$960 - mg = ma$$
$$1200 - (m + 20)\,g = (m + 20)\,a$$

Resp.: $a = 2$ m/s^2



18. **Un camión que circula a 108 km/h transporta un cuerpo frágil sobre el suelo de su caja con coeficiente estático de rozamiento caja-cuerpo 0.3. El conductor quiere detener el camión sin que el cuerpo se deslice. Con g = 10 en el S.I., ¿cuál es la distancia mínima de parada del camión?**

En el diagrama del sólido libre de la masa m que tiene a desplazarse hacia la derecha cuando el camión frena:



$$-R = -m\,a$$

$$N - mg = 0$$

Además:

$$R = \mu N$$

De donde deducimos que la aceleración de la frenada es:

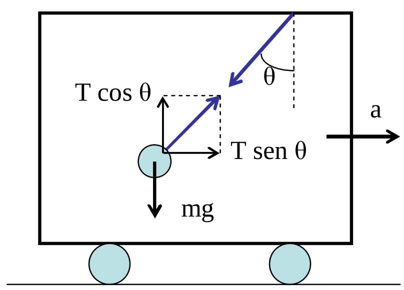
$$a = \mu g$$

El camión termina parándose, por tanto, en la expresión $v^2 = v_0^2 - 2as$ hacemos v = 0 y deducimos que:

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{\left(\frac{108}{3.6}\right)^2}{2 \cdot 0.3 \cdot 10}$$

Resp.: 150 m

19. **Un vagón se mueve a 5 m/s^2. Un objeto de 2 kg cuelga del techo por una cuerda sin peso, ¿qué ángulo forma la cuerda con la vertical? (g = 10 en el S.I.)**



$$T \text{ sen } \theta = ma$$

$$T \cos \theta - mg = 0$$

De donde deducimos que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{g} = \frac{5}{10}$$

Resp.: $\theta = 26.56º$

20. Un revolver dispara un proyectil de 15 gramos a 100 m/s sobre una pared homogénea, que le ofrece una resistencia constante a la penetración de 6 N. ¿Cuánto tiempo tardará en detenerse?

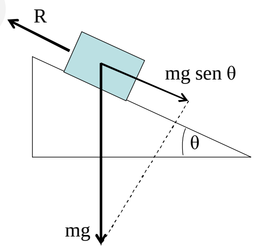
$$F\ \Delta t = m\ \Delta v$$

$$6\ \Delta t = 15\cdot 10^{-3}\ (100 - 0)$$

Resp.: $\Delta t = 0.25$ s

21. Un coche de 1500 kg desciende una pendiente del 5% sin que funcione el motor. El conjunto de las resistencias que se oponen al movimiento viene dado por la expresión $0.6\cdot v^2$ en el SI, siendo v la velocidad. Calcular la velocidad límite alcanzada.

La velocidad límite se alcanza cuando la aceleración en la dirección del plano es nula:



$$mg\ \text{sen}\ \theta - R = 0$$

$$mg\ \text{sen}\ \theta - 0.6\ v^2 = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{mg\text{sen}\theta}{0.6}} = \sqrt{\frac{1500\cdot 9.8\cdot 0.05}{0.6}}$$

Resp.: 35 m/s

22. La fuerza de los gases que impulsan a un proyectil de 20 gramos cuando se dispara viene dada por la expresión $800 - 2\cdot 10^4 t$ (S.I.). Tarda en salir por la boca del fusil 0.01 s. Calcular su velocidad al final del ánima.

$$F\ dt = m\ dv \qquad \int_0^t F dt = \int_0^0 m dv$$

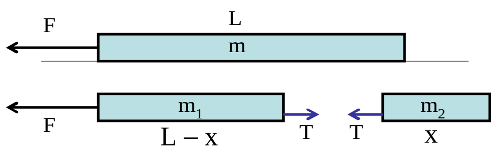
$$\int_0^{0.01} (800 - 2\cdot 10^4 t) dt = mv$$

Introduciendo los datos:

Resp.: 350 m/s

23. Una barra homogénea de longitud L se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento debido a una fuerza F que tira de ella en la dirección de la superficie. Calcular el valor de la fuerza que una parte de la barra de longitud x ejerce sobre la otra.

Aplicando la segunda ley de Newton al tramo de longitud L – x:



$$F - T = m_1\ a$$

Y al tramo x:

$$T = m_2 a$$

Como la densidad lineal λ es constante:

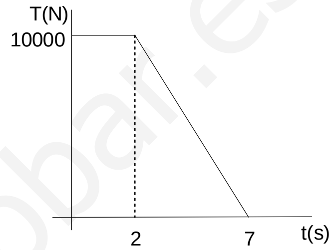
$$\lambda = \frac{m_1}{L - x} = \frac{m_2}{x} = \frac{m}{L}$$

siendo $m = m_1 + m_2$.

Con estas tres ecuaciones deducimos que T (la fuerza que ejerce m_2 sobre m_1 y viceversa) es:

Resp.: $T = F\frac{x}{L}$

24. Un avión se desplaza a 200 m/s en un M.R.U. En un determinado instante dispara un misil de 100 kg de peso con la ley de empuje T de la figura. Si la masa del misil se reduce desde sus 100 kg iniciales hasta 50 kg durante la fase en la que existe empuje y la variación temporal de la masa es igual a $\dot{m} = -\alpha \cdot T$, calcular el valor de la constante α. Calcular la velocidad del misil a los 8 segundos de vuelo y el espacio recorrido por el misil a los 4 segundos de vuelo.



Según la gráfica, el empuje es:

$T = 10000$ para $0 \le t \le 2$
$T = 14000 - 2000\,t$ para $2 < t \le 7$

Como $\frac{dm}{dt} = -\alpha T$; por tanto: $dm = -\alpha T\, dt$

$$\int_{100}^{m_1(t)} dm = \int_0^2 -\alpha T dt = \int_0^2 -\alpha \cdot 10000 dt \qquad m_1(t) = 100 - 10000\alpha\, t \qquad m_1(2) = 100 - 20000\alpha$$

Como para t = 7 la masa debe ser 50 kg, determinamos el valor de α:

$$\int_{m_1(2)}^{50} dm = \int_2^7 -\alpha(14000 - 2000t)dt \qquad \text{Resp.: } \alpha = \frac{1}{900}$$

La ley de variación de la masa para el intervalo [0,2] es:

$$m_1(t) = 100\left(1 - \frac{t}{9}\right) \qquad [0,2]$$

El valor de $m_1(2)$ es:

$$m_1(2) = \frac{700}{9}\ \text{Kg}$$

Calculemos la ley de variación de la masa para el intervalo (2,7]:

$$\int_{\frac{700}{9}}^{m_2(t)} dm = \int_2^t -\frac{1}{900}(14000 - 2000t)dt$$

$$m_2(t) = \frac{10}{9}(t^2 - 14t + 94) \qquad (2,7]$$

El valor de $m_2(7)$ es:

$$m_2(7) = 50 \text{ Kg}$$

Y el valor de la masa en el intervalo $(7, \infty)$ es:

$$m_3(t) = 50 \qquad (7, \infty)$$

Además sabemos que:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{900}$$

Como

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m(t)\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = m(t)\frac{dv}{dt} - v\frac{T}{900}$$

En la dirección de la propulsión $\Sigma F = T$:

$$T = m(t)\frac{dv}{dt} - v\frac{T}{900}$$

Separando variables:

$$\frac{T}{m(t)}dt = \frac{900}{900+v}dv \qquad (1)$$

Integrando (1) entre $t = 0$ y $t = t \le 2$:

$$\int_0^t \frac{10000}{m_1(t)}dt = \int_{200}^{v_1(t)} \frac{900}{900+v}dv$$

$$v_1(t) = 900\left(\frac{11}{9-t} - 1\right) \qquad [0,2]$$

donde calculamos $v(2)$:

$$v(2) = \frac{3600}{7} \text{ m/s}$$

Integrando la expresión (1) entre $t = 2$ y $t = t \le 7$:

$$\int_2^t \frac{14000 - 2000t}{m_2(t)}dt = \int_{\frac{3600}{7}}^{v_2(t)} \frac{900}{900+v}dv$$

$$v_2(t) = 900\left(\frac{1100}{9 \cdot m_2(t)} - 1\right) \qquad (2,7]$$

En la expresión anterior, calculamos la velocidad del misil en $t = 7$ s, porque en $t = 8$ s tiene la misma, ya que ha cesado el empuje:

$$v(8) = v(7) = 1300 \qquad \text{Resp.: } v(8) = 1300 \text{ m/s}$$

Para determinar el espacio recorrido por el misil en los primeros 4 segundos, debemos efectuar el cálculo en dos partes: entre t = 0 y t = 2, y entre t = 2 y t = 4:

Espacio recorrido entre t = 0 y t = 2:

$$s_{0-2} = \int_0^2 v_1(t)dt = 9900 \ln (9/7) - 1800 \text{ m}$$

Espacio recorrido entre t = 2 y t = 4:

$$s_{2-4} = \int_2^4 v_2(t)dt = 6600\sqrt{5}\,\text{arctag}\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right) - 1800 \text{ m}$$

El espacio total recorrido será la suma de los dos calculados $s = s_{0-2} + s_{2-4}$:

Resp.: s = 2134.606 m

<u>Método simplificado</u>:

Supongamos que la masa del misil permanece constante e igual a 100 Kg:

$$\Sigma F = m\,\frac{dv}{dt}: \qquad T = 100\,\frac{dv}{dt} \qquad Tdt = 100\,dv \qquad (2)$$

Integrando (2) entre t = 0 y t = t ≤ 2:

$$\int_0^t 10000dt = \int_{200}^{v_1(t)} 100dv$$

$$v_1(t) = 200 + 100t \qquad [0,2]$$

donde calculamos v(2):

$$v(2) = 400 \text{ m/s}$$

Integrando (2) entre t = 2 y t = t ≤7:

$$\int_2^t (14000 - 2000t)dt = \int_{400}^{v_2(t)} 100dv$$

$$v_2(t) = 10\,(-t^2 + 14t + 16) \qquad (2,7]$$

En la expresión anterior, calculamos la velocidad del misil en t = 7 s, porque en t = 8 s tiene la misma, ya que ha cesado el empuje:

$$v(8) = v(7) = 650 \qquad \text{Resp.: } v(8) = 650 \text{ m/s}$$

Para determinar el espacio recorrido por el misil en los primeros 4 segundos, debemos efectuar el cálculo en dos partes: entre t = 0 y t = 2, y entre t = 2 y t = 4:

Espacio recorrido entre t = 0 y t = 2:

$$s_{0-2} = \int_0^2 v_1(t)dt = 600 \text{ m}$$

Espacio recorrido entre t = 2 y t = 4:

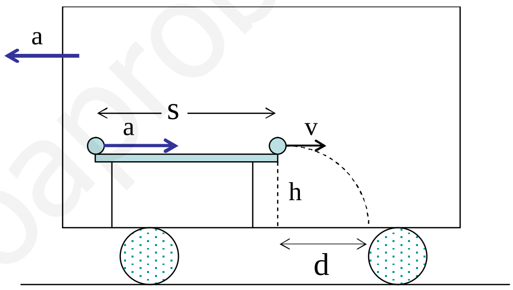
$$s_{2-4} = \int_2^4 v_2(t)dt = \frac{2920}{3} \text{ m}$$

El espacio total recorrido será la suma de los dos calculados $s = s_{0-2} + s_{2-4}$:

Resp.: s = 1573.33 m

25. Una mesa horizontal de 80 cm de altura está fija a un vagón de ferrocarril en reposo. Se coloca sobre ella una bola. El vagón, de 4 toneladas, se pone en marcha y la bola cae al piso del mismo a una distancia de 60 cm de la proyección del borde de la mesa, sobre la que la bola ha recorrido 1 metro antes de caer. Despreciando el rozamiento y suponiendo que el arranque del vagón se ha realizado con aceleración constante, determinar la fuerza de tracción aplicada al vagón.

La aceleración de la bola es la misma a la que está sometida el vagón, pero de sentido contrario. Como la bola parte del reposo y recorre s = 1 m, la velocidad que tiene en el borde de la mesa *con respecto la vagón* es:



$$v = \sqrt{2as}$$

Como

$$h = ½ gt^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sustituyendo v y t en

$$d = vt + ½ at^2$$

y llamando

$$x = \sqrt{\frac{ah}{g}} \qquad (1)$$

obtenemos:

$$x^2 + 2\sqrt{s}x - d = 0$$

ecuación de segundo grado cuya solución posible es:

$$x = \sqrt{s+d} - \sqrt{s}$$

De (1):

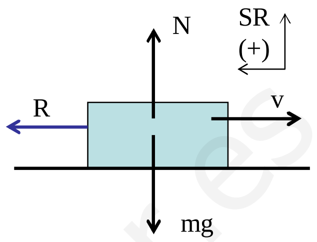
$$a = \frac{gx^2}{h} = \frac{g}{h}\left(\sqrt{s+d} - \sqrt{s}\right)^2$$

Y aplicando la 2ª ley de Newton al vagón:

$$F = Ma = 4000\frac{9.8}{0.8}\left(\sqrt{1.6} - \sqrt{1}\right)$$

Resp.: F = 3438.7 N

26. Se deja caer una caja sobre una cinta transportadora que se mueve a 3 m/s. Si la caja está inicialmente en reposo y el coeficiente de rozamiento es 1/3, ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que deje de deslizar?



Inicialmente la caja adquiere la velocidad de la cinta, entonces actúa la fuerza de rozamiento R hasta que se detiene la caja (respecto a la cinta transportadora):

$$\Sigma F_x = m\,a \qquad R = m\,a$$

$$R = \mu N = \mu\, mg$$

Con las expresiones anteriores deducimos que:

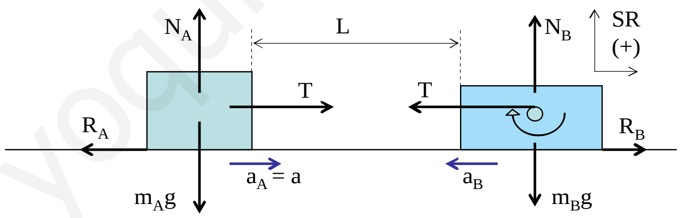
$$a = \mu g$$

Como $v = v_0 + at$:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0-(-3)}{\frac{1}{3}9.8}$$

Resp.: 0.918 s

27. Sobre un plano horizontal con coeficiente de rozamiento μ se encuentran dos cuerpos A y B, separados L metros, que pueden deslizar. El cuerpo B, de masa la mitad que la de A, tiene un carretel donde se va enrollando una cuerda que tira de A con aceleración constante a. ¿Al cabo de cuánto tiempo los cuerpos chocan?



Cuerpo A		Cuerpo B
Eje X:	$T - R_A = m_A\, a$	$R_B - T = m_B\,(-a_B)$
Eje Y:	$N_A = m_A\, g$	$N_B = m_B\, g$
	$R_A = \mu N_A$	$R_B = \mu N_B$

Teniendo en cuenta que $m_B = ½\, m_A$, con las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$a_B = -\,(2a + \mu g)$$

La aceleración *relativa* con la que se acercan los dos cuerpos es:

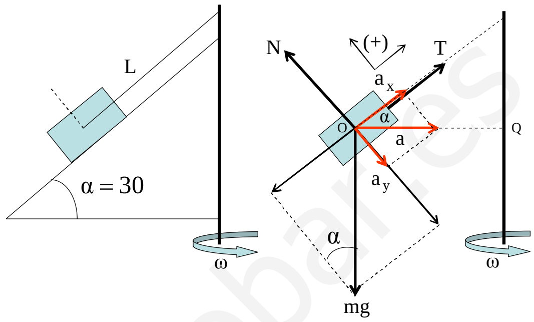
$$a_r = a + |a_B| = a + 2a + \mu g = 3a + \mu g$$

La distancia L se recorre en un tiempo t tal que $L = ½\, a_r\, t^2$. Es decir:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_r}}$$

Resp.: $t = \sqrt{\dfrac{2L}{3a + \mu g}}$

28. Un bloque de 10 kg descansa sobre un plano liso de 30º que puede girar alrededor del eje indicado. La longitud L es 2 m. ¿Cuál es la tensión de la cuerda cuando la velocidad angular ω del bloque y el plano es 10 RPM? ¿Qué ω haría que el cuerpo estuviese justo en contacto con el plano? ¿Cuál es la tensión de la cuerda en estas condiciones?



Del diagrama del sólido libre se desprende que:

$$T - mg \text{ sen } \alpha = m\, a_x$$

La aceleración centrípeta es $a = \omega^2 \overline{OQ}$, pero $OQ = L \cos \alpha$. Y la componente a_x de dicha aceleración es $a_x = a \cos \alpha$; por tanto:

$$T - mg \text{ sen } \alpha = m\, \omega^2 L \cos^2 \alpha \qquad (1)$$

Con los datos obtenemos:

Resp.: T = 65.45 N

Por otro lado:

$$N - mg \cos \alpha = m\, a_y$$

Sustituyendo $a_y = -a \text{ sen } \alpha = -\omega^2 L \cos \alpha \text{ sen } \alpha$, y teniendo en cuenta que si el cuerpo no está en contacto con el plano entonces N = 0, obtenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \text{ sen } \alpha}}$$

Resp.: ω = 3.13 rad/s

En estas condiciones, la nueva tensión se calcula sustituyendo ω en (1):

T = 196 N

29. Se desea subir una caja a lo largo de una pendiente con movimiento uniforme. Para ello se tira de una cuerda que lleva atada. ¿Qué ángulo debe formar la cuerda con la pendiente para que la fuerza que hay que realizar sea mínima? μ = 0.1.

Como el movimiento es rectilíneo y uniforme, la aceleración es cero. Por tanto:

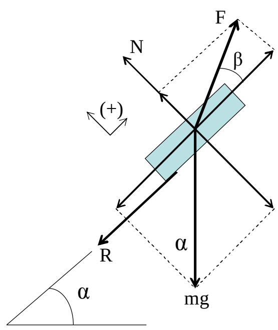
$$F \cos \beta - mg \text{ sen } \alpha - R = 0$$

En el eje perpendicular:

$$N + F \text{ sen } \beta - mg \cos \beta = 0$$

Además:

$$R = \mu N$$



Con estas ecuaciones deducimos:

$$F = \frac{k}{\cos\beta + \mu \operatorname{sen}\beta} \qquad \text{siendo } k = mg\,(\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha)$$

Derivando con respecto a β e igualando a cero:

$$\frac{dF}{d\beta} = -\frac{k(-\operatorname{sen}\beta + \mu\cos\beta)}{(\cos\beta + \mu\operatorname{sen}\beta)^2} = 0$$

es decir:

$$\operatorname{tg}\beta = \mu$$

con $\mu = 0.1$

Resp.: β = 5º 42' 38.14"

Nota: Obsérvese que el resultado no depende del valor de m ni de α.

30. Sobre el bloque A de masa M que puede deslizar por un plano inclinado α grados con la horizontal, se apoya el bloque B de masa m < M que puede deslizar a su vez sobre aquél. Ambos cuerpos están unidos por un hilo ideal. El coeficiente de rozamiento es k en todas las superficies. a) Hallar el valor mínimo de α en función de M, m y k para que el sistema inicie el movimiento. b) Si k = 0.2 hallar la relación M/m para que el movimiento comience cuando α = 45º.

a)

En el momento de iniciar el movimiento la aceleración según la dirección del plano es nula.

Cuerpo A

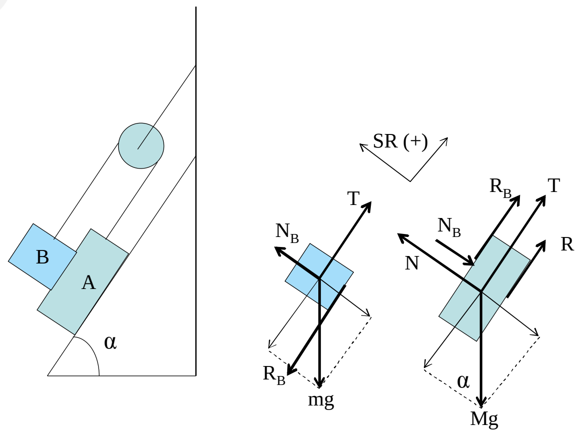
$R_B + T + R - Mg\operatorname{sen}\alpha = 0$
$N - Mg\cos\alpha - N_B = 0$

Cuerpo B

$T - R_B - mg\operatorname{sen}\alpha = 0$
$N_B - mg\cos\alpha = 0$

Además:

$R_B = kN_B$
$R = kN$



Con estas seis ecuaciones obtenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M + 3m}{M - m}k$$

por tanto

$$\text{Resp.: } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{M + 3m}{M - m}k$$

b)

Para k = 0.2 y α = 45:

$$\frac{M+3m}{M-m}=\frac{\frac{M}{m}+3}{\frac{M}{m}-m}=0.2$$

Resp.: $\frac{M}{m}=2$

31. Colocamos un objeto sobre un plano cuya inclinación vamos aumentando gradualmente. Cuando el ángulo de inclinación es de 25º comienza a moverse y observamos que recorre 80 cm en 1.4 s. Calcular los coeficientes estático y dinámico de rozamiento.

El coeficiente estático de rozamiento es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación θ que provoca que el cuerpo *comience* a deslizar.

$$\mu_e = \text{tg}\ \theta$$

Resp.: $\mu_e = 0.466$

La aceleración del cuerpo se calcula con la expresión:

$$s = \tfrac{1}{2}\, a\, t^2 \qquad\qquad a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2\cdot 0.8}{1.4^2}$$

Y cuando está en movimiento:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - \mu\ mg \cos\theta = m\, a$$

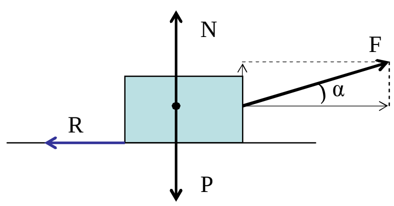
por tanto:

$$\mu = \frac{g\,\text{sen}\theta - a}{g\cos\theta}$$

Resp.: $\mu = 0.374$

32. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre el suelo y una caja de 100 N, si la fuerza mínima necesaria para moverla es de 60 N?

La fuerza mínima F será aquella que consiga que la caja se ponga en movimiento. En ese instante la aceleración horizontal es nula.



$$F\cos\alpha - R = 0$$

$$N + F\ \text{sen}\ \alpha - P = 0$$

$$R = \mu\, N$$

De estas tres ecuaciones deducimos que:

$$F = \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu\ \text{sen}\ \alpha} \qquad (1)$$

Como el numerador es constante, basta hacer mínimo el denominador $f(\alpha) = \cos\alpha + \mu\ \text{sen}\ \alpha$. Derivando $f(\alpha)$ con respecto a α e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = -\text{sen}\ \alpha + \mu\cos\alpha = 0$$

es decir

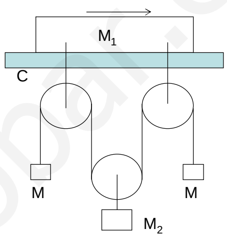
$$\mu = \operatorname{tg} \alpha$$

empleando en (1) las identidades trigonométricas $\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ y despejando μ:

$$\mu = \frac{F}{\sqrt{P^2 - F^2}} = \frac{60}{\sqrt{100^2 - 60^2}}$$

Resp.: $\mu = 0.75$

33. El carro de masa M_1 = 1000 kg desliza sobre el carril C (μ = 0.05). Del carro cuelgan tres poleas de peso despreciable a través de las que laborea una cuerda ideal. Si M_2 = 2000 kg, M = 100 kg, calcular: a) La fuerza que es necesario aplicar al carro para mantener la velocidad constante de 1 m/s; b) el tiempo que tarda M_2 en recorrer una longitud vertical de 20 m si parte del reposo. (g = 10 m/s^2).

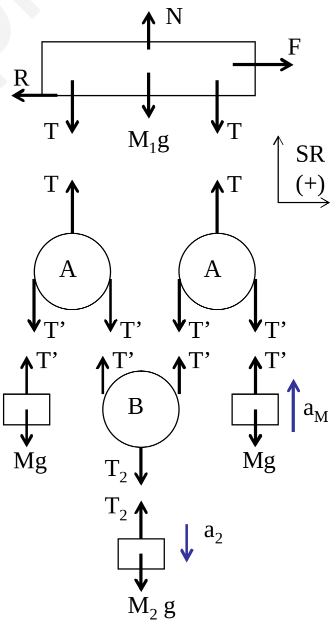


a)

Como la velocidad es constante, la aceleración de M_1 es nula.

En la masa M_1:

$$F - R = 0$$
$$N - 2T - M_1 g = 0$$
$$R = \mu N$$



En cada polea A:

$$T - 2T' = 0$$

En la polea B:

$$2T' - T_2 = m_B\, a_B$$

pero la masa de la polea es despreciable:

$$2T' - T_2 = 0$$

En cada masa M:

$$T' - Mg = M\, a_M$$

En la masa M_2:

$$T_2 - M_2 g = -M_2\, a_2$$

Y teniendo en cuenta que $|a_M| = |a_2| = a$, con las ecuaciones anteriores podemos calcular la aceleración y la fuerza F:

$$a = g\,\frac{M_2 - 2M}{M_2 + 2M} \qquad\qquad F = \mu g\left(\frac{8MM_2}{M_2 + 2M} + M_1\right)$$

Introduciendo datos:

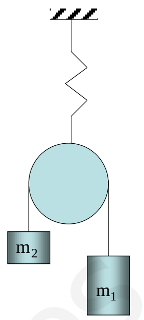
Resp.: F = 863.63 N

b)

$$h = \frac{1}{2} a\, t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

Resp.: t = 2.211 s

34. En el sistema de la figura m_1 = 2 kg, m_2 = 1 kg, la constante del resorte es k = 500 N/m y su longitud natural L_0 = 20 cm. Determinar la longitud L del resorte cuando el sistema se pone en movimiento.



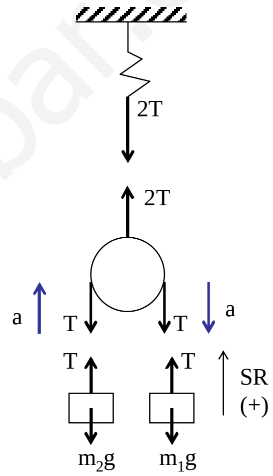
La polea es de masa despreciable y las cuerdas son ideales:

$$T - m_2 g = m_2\, a$$

$$T - m_1 g = m_1(-a)$$

Las ecuaciones anteriores permiten calcular T:

$$T = \frac{2gm_1m_2}{m_1 + m_2}$$



La tensión 2T es la que deforma el resorte según la ley de Hooke:

$$2T = k\,\Delta y$$

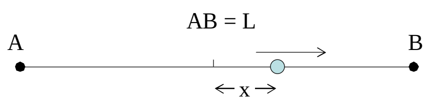
$$\Delta y = \frac{2T}{k} = \frac{4gm_1m_2}{k(m_1 + m_2)}$$

Como

$$L = L_0 + \Delta y = 0.2 + \frac{4 \cdot 9.8 \cdot 2 \cdot 1}{500(2+1)}$$

Resp.: L = 0.252266 m

35. Entre dos puntos A y B, en el centro, hay un punto móvil inicialmente en reposo. A y B permanecen fijos. El móvil es atraído por A y B con una fuerza proporcional a las distancias respectivas. k_A y k_B son las constantes de proporcionalidad. Hallar la relación k_B/k_A suponiendo que el móvil efectúa su inversión del movimiento en B.



$$\Sigma F = m\,a\!: \; k_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - k_A\left(\frac{L}{2} + x\right) = m\frac{dv}{dt}$$

Pero

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$

por tanto:

$$k_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - k_A\left(\frac{L}{2} + x\right) = mv\frac{dv}{dx}$$

Separando variables e integrando:

$$\int k_B\left(\frac{L}{2}-x\right)-k_A\left(\frac{L}{2}+x\right)dx=\int v dv$$

$$k_B\left(\frac{L}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)-k_A\left(\frac{L}{2}x+\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}mv^2+cte$$

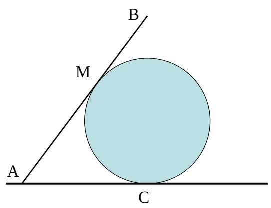
Para x = 0 la velocidad es cero, por tanto cte = 0. Y para $x=\frac{L}{2}$ la velocidad también se anula (debido a la inversión del movimiento), entonces:

$$\frac{1}{2}k_B-\frac{3}{2}k_A=0$$

es decir:

Resp.: $\frac{k_B}{k_A}=3$

36. Una barra AB homogénea, de longitud 2L y peso P, se apoya en el suelo por su extremo A y también en M sobre un disco de peso P' y radio R. El coeficiente de rozamiento del disco con el suelo es μ_1. El de la barra con el suelo μ_2. El de la barra con el disco μ_3. Calcular: a) las reacciones en A, C y M, y b) las condiciones que deben cumplir μ_1, μ_2, μ_3 para que exista equilibrio.



a)

En la figura 1 se presenta el diagrama del sólido libre de la barra. Como todas las piezas están en equilibrio, la aceleración es nula, por tanto:

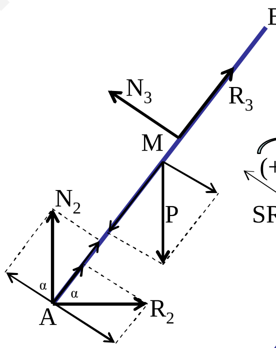


Fig.1

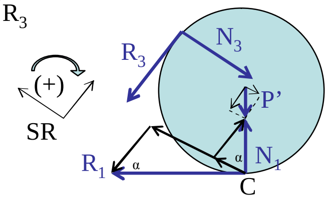


Fig.2

$R_3 + R_2 \cos\alpha + N_2 \operatorname{sen}\alpha - P \operatorname{sen}\alpha = 0$ (1)

$N_3 - R_2 \operatorname{sen}\alpha + N_2 \cos\alpha - P \cos\alpha = 0$ (2)

La suma de todos los momentos respecto a cualquier punto es cero. Tomando momentos respecto al punto A:

$(P \cos\alpha)\, L - AM \cdot N_3 = 0$

Pero en la fig. 3

$R = AM \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$

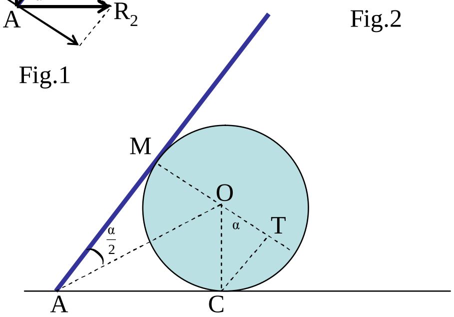


Fig.3

por tanto:

Resp.: $N_3=\frac{PL}{R}\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

En el disco, figura 2:

$N_1 \operatorname{sen}\alpha - R_3 - R_1 \cos\alpha - P' \operatorname{sen}\alpha = 0$ (3)

$N_1 \cos\alpha - N_3 + R_1 \operatorname{sen}\alpha - P' \cos\alpha = 0$ (4)

La suma de los momentos de las fuerzas respecto al punto C debe ser cero (ver también fig. 3):

$$N_3 \cdot CT - R_3 (r + OT) = 0$$

Pero CT = R sen α y OT = R cos α; por tanto:

$$\text{Resp.: } R_3 = N_3 \frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Con N_3 y R_3 en (1), (2), (3) y (4) calculamos el resto de las reacciones:

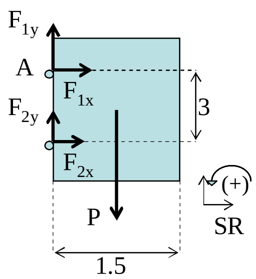
$$\text{Resp.: } R_1 = R_2 = R_3;\ N_1 = N_3 - P';\ N_2 = P - N_3$$

b)

Las condiciones de equilibrio que se deben cumplir son:

$$\text{Resp.: } R_1 \le \mu_1 N_1;\ R_2 \le \mu_2 N_2;\ R_3 \le \mu_3 N_3$$

37. Los goznes A y B de una puerta, de 1.5 m de anchura y 40 kp de peso, distan entre sí 3 metros. El peso es soportado en sus ⅔ partes por el gozne superior. Calcular las fuerzas que ejercen los goznes sobre la puerta.



Como la puerta no se mueve, se trata de un situación estática en la que no hay aceleraciones de ningún tipo.

La suma de fuerzas en el eje vertical es:

$$F_{1y} + F_{2y} - P = 0$$

Como

$$F_{1y} = ⅔\, P$$

entonces

$$F_{2y} = ⅓\, P$$

La suma de fuerzas en el eje horizontal es:

$$F_{1x} + F_{2x} = 0 \qquad (1)$$

Obsérvese que empleando exclusivamente las dos ecuaciones anteriores no es posible determinar las componentes horizontales de las reacciones. Pero, como la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier punto debe ser cero, tomando momentos respecto al punto A:

$$F_{2x} \cdot 3 - P \cdot \frac{1.5}{2} = 0$$

de donde deducimos que

$$F_{2x} = ¼\, P$$

y con (1):

$$F_{1x} = -¼\, P$$

El signo (–) de F_{1x} indica que el sentido de dicha fuerza es el contrario al representado en el diagrama del sólido libre.

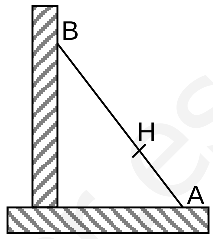
Por tanto, las reacciones son:

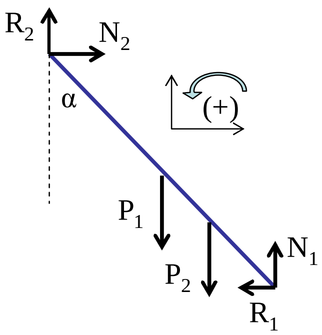
$$\vec{F}_1 = 40\left(-\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}\right) \qquad \vec{F}_2 = 40\left(\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}\right)$$

cuyos módulos son:

Resp.: $F_1 = \frac{10}{3}\sqrt{73}$ kp; $F_2 = \frac{50}{3}$ kp

38. Una escalera de peso P_1 y longitud 2L se apoya en A sobre el suelo y en B sobre una pared vertical. Un hombre de peso P_2 sube por la escalera hasta una posición H tal que AH = a. Los coeficientes de rozamiento con el suelo y con la pared son μ_1 y μ_2. Hallar: a) el valor máximo del ángulo que forma la pared con la escalera sin que resbale; b) dicho ángulo si el hombre sube hasta el extremo B.





a)

Como la escalera no se mueve, , se trata de un situación estática en la que no hay aceleraciones de ningún tipo.

La suma de fuerzas en el eje vertical es:

$$R_2 + N_1 - P_1 - P_2 = 0$$

La suma de fuerzas horizontales es:

$$N_2 - R_1 = 0$$

El valor máximo de α será el que permita que el rozamiento en B y en A sea el máximo posible; es decir:

$$R_1 = \mu_1 N_1$$

$$R_2 = \mu_2 N_2$$

Como no tenemos todavía ecuaciones suficientes, tenemos en cuenta que el momento de todas las fuerzas con respecto al punto A debe ser cero:

$$P_2\, a \operatorname{sen}\alpha + P_1 L \operatorname{sen}\alpha - N_2\, 2L\cos\alpha + R_2\, 2L \operatorname{sen}\alpha = 0$$

Con las cinco ecuaciones anteriores podemos determinar el ángulo α a través de su tangente:

Resp.: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2L\mu_1(P_1 + P_2)}{(LP_1 + aP_2)(1 + \mu_1\mu_2) - 2L\mu_1\mu_2(P_1 + P_2)}$

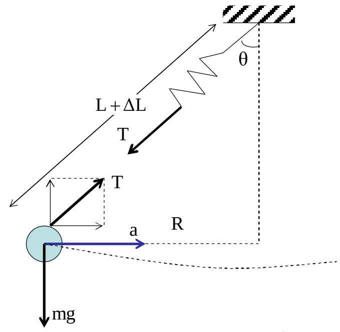
b)

Si a = 2L:

Resp.: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\mu_1(P_1 + P_2)}{2P_2 + (1 - \mu_1\mu_2)P_1}$

39. Enganchamos una partícula de 1 kg a un resorte espiral (k = 1 Kp/cm) de masa despreciable cuya longitud natural es 48 cm. Hacemos girar al conjunto como un péndulo

cónico a 60 rpm. Calcular: a) El alargamiento del resorte; b) el ángulo que forma la altura del cono con la generatriz.



En el diagrama del sólido libre de la partícula, la componente T sen θ es la que provoca la aceleración centrípeta:

$$T \text{ sen } \theta = m\,\omega^2 R \qquad (1)$$

Además:

$$T \cos\theta = mg \qquad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2), y teniendo en cuenta que $\text{sen } \theta = \dfrac{R}{L + \Delta L}$:

$$L + \Delta L = \frac{g}{\omega^2 \cos\theta} \qquad (3)$$

En el resorte, según la ley de Hooke, la deformación producida es directamente proporcional a la fuerza T que actúa T = k ΔL, y según (2) $T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$, por tanto:

$$\cos\theta = \frac{mg}{k\Delta L}$$

Con los datos:

Resp.: θ = 60º aprox.

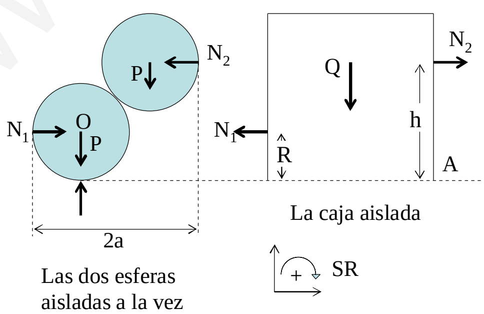
Por último, sustituyendo en (3) y despejando:

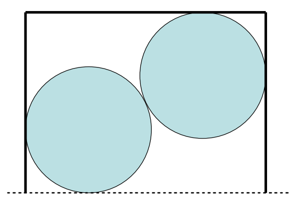
$$\Delta L = \frac{m\omega^2 L}{k - m\omega^2}$$

de donde se deduce:

Resp.: 2 cm

40. Una caja prismática de 20 cm de anchura, a la que le falta la base inferior, contiene dos cilindros iguales de 6 cm de radio y 0.5 kg, que se apoyan entre sí y contra las paredes de la caja. La longitud de la caja es la misma que la de los cilindros. Calcular el peso mínimo de la caja para que no sea volteada por el peso de los cilindros.





2a = 20 cm R = 6 cm P = 0.5 kg

Supongamos que las esferas son completamente lisas, de manera que las reacciones en los apoyos y en su punto de contacto mutuo sean perpendiculares a las superficies. Además, se trata de un problemas estático (sin aceleraciones). Por tanto, en el diagrama del sólido libre de las dos esferas juntas, en el eje X:

$$N_1 = N_2 \qquad (1)$$

La suma de los momentos de las fuerzas con respecto a O debe ser cero:

$$P(2a - 2R) - N_2\,(h - R\,) = 0 \qquad (2)$$

En el diagrama de la caja de peso Q:

$$N_2h - Qa - N_1R = 0 \qquad (3)$$

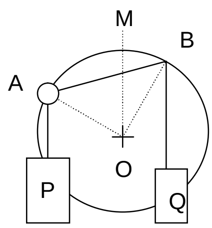
De (1), (2) y (3) deducimos que, para que exista equilibrio, el peso mínimo de la caja debe ser:

$$Q = 2P\,\frac{a - R}{a}$$

Con los datos:

Resp.: Q = ⅔ kg

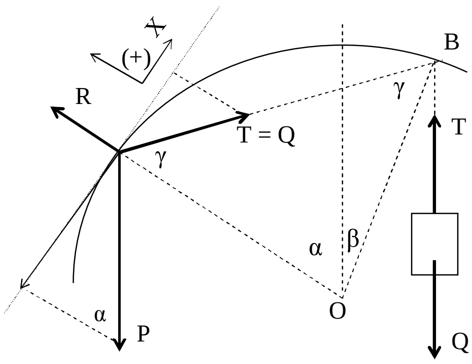
41. En un aro circular hay una anilla A que puede resbalar sobre él sin rozamiento y de la que pende un peso P. La anilla está unida a un hilo ideal que pasa por un eje normal al aro en B, de cuyo extremo cuelga otro peso Q. El ángulo AOM es 60º y el MOB es 30º cuando el sistema está en equilibrio. Calcular, en estas condiciones, la razón P/Q.



En el diagrama del sólido libre de la anilla, la reacción R es radial (dirigida según la dirección OA) porque no hay rozamiento.

En equilibrio no hay aceleración y la suma de todas las componentes de las fuerzas según el eje X debe ser cero:

$$-P \text{ sen } \alpha + T\cos(90 - \gamma) = 0$$



Pero en el diagrama del sólido libre de la masa Q se aprecia que:

$$T = Q$$

Por otro lado:

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 180$$

es decir:

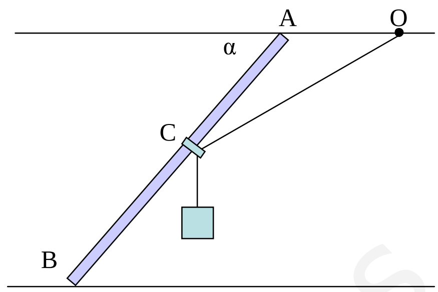
$$90 - \gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

por tanto:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\cos 45}{\text{sen } 60}$$

Resp.: $\frac{P}{Q} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

42. Un hilo, de masa despreciable, sujeto en O, tiene una anilla C que puede resbalar a lo largo de la varilla AB que forma con la horizontal un ángulo α = 60º. Del extremo del hilo cuelga un peso P. La distancia OA es 1 metro. Calcular AC de manera que la anilla esté en equilibrio.



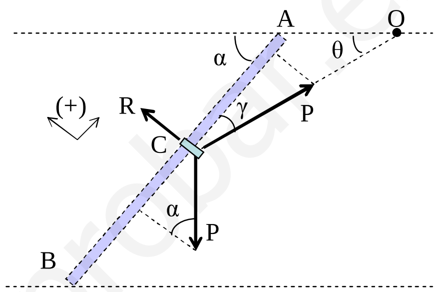
En la figura inferior está dibujado el diagrama del sólido libre de la anilla C. La suma de fuerzas según la dirección de la barra AB debe ser cero porque el sistema está en equilibrio:

$$-P \operatorname{sen} \alpha + P \cos \gamma = 0 \qquad (1)$$

En el triángulo ACO se cumple que:

$$\alpha = \gamma + \theta$$

$$\frac{AC}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{AO}{\operatorname{sen} \gamma}$$



por tanto:

$$AC = AO \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{\operatorname{sen} \gamma}$$

pero, en (1) sen α = cos γ; es decir:

$$\gamma = 90 - \alpha$$

y

$$\alpha - \gamma = \alpha - (90 - \alpha) = 2\alpha - 90$$

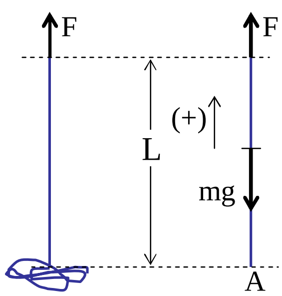
por tanto

$$AC = AO \frac{\operatorname{sen}(2\alpha - 90)}{\cos \alpha} = 1 \frac{\operatorname{sen}(120 - 90)}{\cos 60}$$

Resp.: AC = 1 m

43. Al extremo de una cuerda flexible, homogénea, de sección constante y densidad lineal ρ, que se encuentra totalmente apilada en el suelo, le aplicamos una fuerza variable capaz de elevarla con velocidad constante v. Calcular dicha fuerza en función de la altura L del extremo sobre el suelo.

Dibujamos el diagrama del sólido libre del tramo L de cuerda que no está apoyada en el suelo, teniendo presente que en el extremo A la tensión de la cuerda es despreciable. Además, con la densidad lineal sabemos que m = ρL; por tanto:



$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d(\rho L \vec{v})}{dt} = \rho \vec{v} \frac{dL}{dt}$$

A la hora de derivar hemos tenido en cuenta que la velocidad es constante. Por otro lado,

$$\frac{dL}{dt} = \vec{v}$$

y

$$\sum \vec{F} = F - mg = F - \rho L g$$

por tanto:

$$F - \rho L g = \rho v^2$$

es decir:

Resp.: $F = \rho\,(Lg + v^2)$

44. Determinar la tensión T del cable que se indica en la combinación de poleas que soporta el peso P.

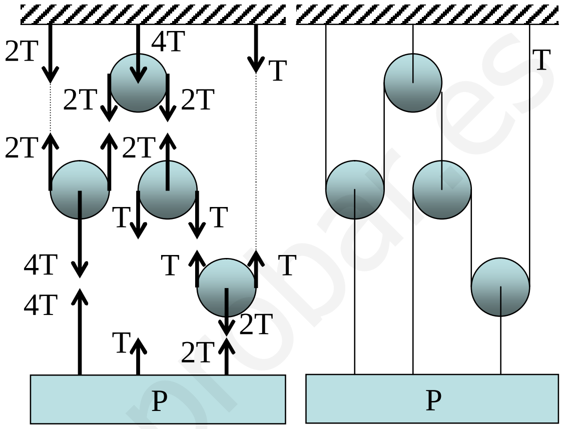
Suponemos que tanto las poleas como las cuerdas son ideales (sin masa).

Del diagrama del sólido libre de peso P se desprende que:

$$P = 4T + T + 2T$$

Es decir:

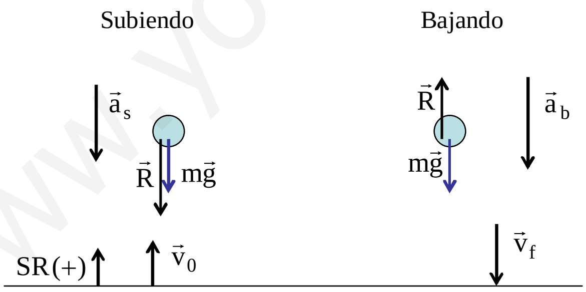
Resp.: $T = \dfrac{P}{7}$



45. Se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de masa m. La resistencia del aire es constante, de valor R. Demostrar que, si t_b es el tiempo que está bajando y t_s el que está subiendo, se cumple la relación

$$\frac{t_b}{t_s} = \sqrt{\frac{mg + R}{mg - R}}$$

de la que se deduce que el tiempo de bajada es "mayor" que el de subida.



Subiendo:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_s$$
$$-R - mg = -ma_s$$
$$a_s = g + \frac{R}{m}$$

Bajando:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_b$$
$$R - mg = -ma_b$$
$$a_b = g - \frac{R}{m}$$

Llamando $k = \dfrac{R}{m} > 0$:

$a_s = g + k$ $\qquad\qquad\qquad$ $a_b = g - k$

Aplicando la ecuación $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ del MRUA:

Subiendo: $\qquad\qquad\qquad$ Bajando:

$0 = v_0 - (g + k)t_s$ $\qquad\qquad$ $-v_f = 0 - (g - k)t_b$

$t_s = \dfrac{v_0}{g+k}$ (1) $\qquad\qquad$ $t_b = \dfrac{v_0}{g-k}$ (2)

Energéticamente, para alcanzar una altura h o cayendo desde dicha altura:

Subiendo: $\qquad\qquad\qquad$ Bajando:

$\frac{1}{2}mv_0^2 - Rh = mgh$ $\qquad\qquad$ $mgh - Rh = \frac{1}{2}mv_f^2$

de donde deducimos que:

$$v_0^2 = v_f^2 + 4\frac{R}{m}h$$

es decir:

$$v_0^2 = v_f^2 + 4kh$$

Además, aplicando la ecuación $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ del MRUA subiendo:

$$h = v_o t_s - \frac{1}{2}(g+k)t_s^2$$

por tanto:

$$v_0^2 = v_f^2 + 4k\left(v_o t_s - \frac{1}{2}(g+k)t_s^2\right)$$

Dividiendo por v_0^2, sustituyendo t_s de (2) y extrayendo la raíz cuadrada:

$$\frac{v_f}{v_0} = \sqrt{\frac{g-k}{g+k}} \qquad (3)$$

Pero, dividiendo (2) entre (1):

$$\frac{t_b}{t_s} = \frac{v_f}{v_0}\frac{g+k}{g-k}$$

y sustituyendo (3) y $k = \dfrac{R}{m}$**,** obtenemos:

Resp.: $\dfrac{t_b}{t_s} = \sqrt{\dfrac{mg+R}{mg-R}}$

46. Un automóvil de 1425 kg parte del reposo sobre una pista horizontal. Suponiendo que la resistencia al avance es de 15 kp, calcular: a) la aceleración necesaria para alcanzar 120 km/h en 800 m. En el instante en el que se alcanza esa velocidad se desconecta el motor de

la transmisión, b) determinar la distancia recorrida antes de pararse, y c) el tiempo que tarda en hacerlo.

a)

Como parte del reposo, $v^2 = 2as$, por tanto:

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(120\frac{1000}{3600}\right)^2}{2 \cdot 800}$$

Resp.: $a = 0.694\ m/s^2$

b)

$$a' = \frac{F}{m} = \frac{15\ kp}{1450\ kg} = \frac{15 \cdot 9.8\ N}{1450\ kg} = 0.103$$

con esta aceleración recorrerá hasta detenerse una distancia:

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(120\frac{1000}{3600}\right)}{2 \cdot 0.103}$$

Resp.: 5393.74 m

c)

La distancia anterior se recorre en un tiempo:

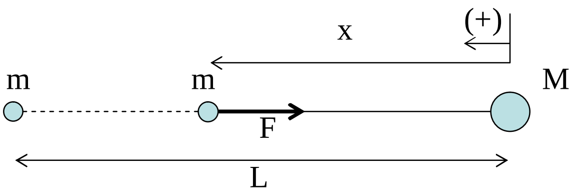
$$t = \frac{v}{a} = \frac{\left(120\frac{1000}{3600}\right)}{0.103}$$

Resp: 323.6 s

47. Un punto móvil de masa m es atraído por otro fijo de masa M con un fuerza proporcional a m y M e inversamente proporcional al cubo de la distancia que los separa, con una constante de atracción de valor k. Determinar el tiempo que invierte m en llegar hasta M si, partiendo del reposo, L es la separación inicial.

Cuando m se encuentra en la posición indicada, el módulo de la fuerza de atracción es:

$$F = k\frac{mM}{x^3}$$



Aplicando a la masa m la 2ª ley de Newton F = ma, teniendo en cuenta el sistema de referencia indicado en la figura:

$$-k\frac{mM}{x^3} = m\frac{dv}{dt}$$

deducimos que:

$$\frac{dv}{dt} = -k\frac{M}{x^3}$$

pero

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$

de manera que, ordenando términos e integrando:

$$-\int_0^v vdv = \int_L^x k\frac{M}{x^3}dx$$

$$v^2 = kM\frac{L^2 - x^2}{L^2x^2}$$

Para determinar la velocidad elegimos la solución negativa pues, según el SR, ese es el signo apropiado.

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{kM}\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{Lx}$$

Reordenando e integrando:

$$\sqrt{kM}\int_0^t dt = -\int_d^0 \frac{Lx}{\sqrt{L^2 - x^2}}dx$$

de donde resulta :

Resp.: $t = \frac{L^2}{\sqrt{kM}}$

TEMA IV

DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

1. **Un proyectil de masa m, lanzado con una velocidad $\vec{v}_0 = 4\vec{i} + 3\vec{k}$, cuando se encuentra en el punto más alto de su trayectoria, hace explosión y se parte en dos pedazos, uno de ellos de masa $\frac{1}{3}$m. Si el trozo mayor lleva una velocidad $8\vec{i}$ inmediatamente después de la explosión, ¿cuál es la velocidad del menor?**

   En el punto más alto de la trayectoria sólo tiene la componente horizontal de la velocidad. Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento inmediatamente antes y después de la explosión:

$$m \cdot 4\vec{i} = \frac{2}{3} m \cdot 8\vec{i} + \frac{1}{3} m\vec{v}$$

Resp: $\vec{v} = (-4, 0{,}0)$

2. **Se dispara una granada a 600 m/s con 45º de elevación respecto al plano horizontal. Al llegar al punto más alto explota en dos fragmentos de igual masa, uno cae verticalmente al suelo con velocidad inicial nula, si el valor de g es 10 m/s^2, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento cae el otro?**

   El cdm se desplaza siguiendo la trayectoria prevista aunque se produzca la explosión, ya que las fuerzas internas no la perturban. Por lo tanto el alcance es:

$$x_{cdm} = \frac{v^2}{g} \text{sen } 2\alpha = \frac{600^2}{10} \text{sen } 90 = 36000$$

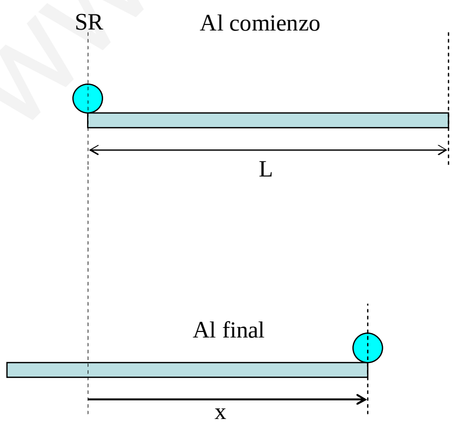
   Si la masa de la granada es m, la de cada trozo es ½ m. Además, la coordenada x_1 del trozo que cae verticalmente es ½ x_{cdm}. Como:

$$x_{cdm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m}; \ 36000 = \frac{\frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{2} 36000 + \frac{1}{2} m \cdot x_2}{m}$$

   Despejando x_2:

Resp: 54000 m

3. **Sobre las aguas tranquilas de un lago flota una tabla de 20 kg y 1 metro de longitud. En uno de sus extremos hay un gato de 5 kg que se mueve hasta el otro extremo. ¿Cuánto avanza el animal respecto al agua?**



   Sea m la masa del gato y M la de la tabla de longitud L. La coordenada x_G del cdm del conjunto formado por el gato y la tabla es:

$$x_G = \frac{m x_g + M x_t}{m + M}$$

   De manera que "al comienzo", con el gato en el extremo izquierdo:

$$x_{G0} = \frac{5 \cdot 0 + 20 \cdot 0.5}{5 + 20}$$

   Cuando el gato se mueve hacia la derecha, la tabla lo hace hacia la izquierda, así "al final":

$$x_{Gf} = \frac{5 \cdot x + 20 \cdot (x - 0.5)}{5 + 20}$$

Teniendo en cuenta que la resultante de todas las fuerzas externas provoca la variación de la cantidad de movimiento del cdm:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_G}{dt}$$

Pero, en este caso sólo actúan fuerzas internas, por lo tanto $\vec{p}_G$ es constante. Como la velocidad inicial del cdm es cero y la masa no varía, la velocidad del cdm debe ser cero en todo instante. Como

$$v_G = \frac{\Delta x_G}{\Delta t} = \frac{x_{Gf} - x_{G0}}{\Delta t} = 0$$

Entonces

$$x_{Gf} = x_{G0}$$

Igualando estas expresiones deducimos x:

Resp.: x = 80 cm

4. Un cuerpo de 0.2 Kg sigue una trayectoria cuyo vector de posición es $\vec{r}_1 = (2t, 3t^2, -3)$ y otro de masa doble sigue la trayectoria indicada por $\vec{r}_2 = 8\vec{i} - 2t\vec{j} + 4t^2\vec{k}$. ¿Cuál es la velocidad del cdm en el instante t =1 s?

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = (2,6t,0) \qquad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = (0,-2,8t)$$

$$\vec{v}_{cdm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{0.2(2,6t,0) + 0.4(0,-2,8t)}{0.2 + 0.4}$$

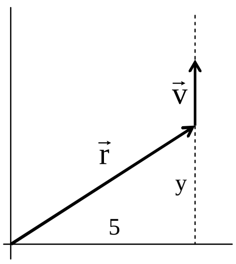
Y para t = 1:

$$\vec{v}_{cdm} = \frac{(2,2,16)}{3}$$

cuyo módulo es:

Resp: $\sqrt{\frac{88}{3}}$

5. Una partícula de 2 kg se mueve con una velocidad de $3\vec{j}$ m/s en el plano XY a lo largo de la recta x = 5. Hallar el momento cinético respecto al origen.



$$\vec{r} = 5\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & y & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Resp: 30 $\vec{k}$

6. Un niño de 50 kg está en reposo sobre un tabla horizontal lisa. Lanza una piedra de 2 kg con 60º de elevación a 100 m/s. Calcular la velocidad con la que retrocede el niño.

La cantidad de movimiento del sistema debe conservarse. Como antes del lanzamiento es cero:

$$0 = 50\,\vec{v} + 2\cdot 100(\cos 60\,\vec{i} + \text{sen}\ 60\,\vec{j})$$

De donde deducimos que:

$$\vec{v} = -2(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})$$

Por tanto, la velocidad del desplazamiento horizontal del niño es:

Resp: 2 m/s

7. Un vagón de masa M se desliza sin rozamiento por una vía horizontal. Cuando la velocidad del tren es V, un hombre de masa m se pone a correr hacia la parte trasera del vagón hasta que adquiere una velocidad v con respecto al vagón. En ese preciso momento se tira del tren. ¿A qué velocidad circula el tren cuando el hombre lo abandona?

Inicialmente la velocidad del hombre con respecto al vagón es cero; por tanto, la cantidad de movimiento del sistema formado por el vagón y el hombre es:

$$(M + m)\,V$$

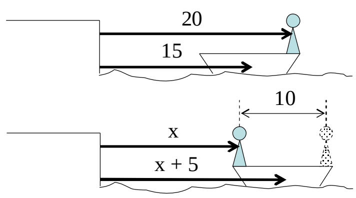
Cuando el hombre alcanza la parte trasera a velocidad v respecto la vagón, si la velocidad del vagón en ese instante es V', la velocidad absoluta del hombre es V' – v; y la cantidad de movimiento del sistema es:

$$MV' + m(V' - v)$$

Como no existen fuerzas externas, igualamos ambas expresiones y deducimos:

Resp: $V' = V + v\dfrac{m}{M + m}$

8. Una persona de 75 kg se encuentra en reposo sobre un bote de 225 kg que flota en un lago en calma. Inicialmente la persona está a 20 m de la orilla, mientras que el cdm del bote está a 15 m. ¿A qué distancia de la orilla estará la persona cuando se haya desplazado 10 m sobre el bote en busca de la orilla?



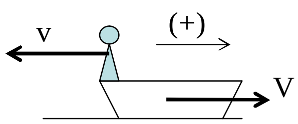
Como no existen fuerzas externas al sistema formado por el bote y la persona, la posición del cdm permanece invariable:

$$x_{cdm} = \frac{75\cdot 20 + 225\cdot 15}{75 + 225} = \frac{75\cdot x + 225(x + 5)}{75 + 225}$$

de donde deducimos:

Resp.:12.5 m

9. Un hombre de masa m salta desde una lancha de masa M a la orilla de un lago, impulsándose a una velocidad v. La lancha retrocede, pero debe vencer una resistencia del agua $R = kV^2$, donde k es constante y V es la velocidad variable de la lancha. Calcular: a) la velocidad inicial de la lancha; b) el impulso del hombre; c) la velocidad de la lancha en función del tiempo.



a)

La cantidad de movimiento inicial es cero. Como se conserva en el instante anterior y posterior al salto:

$$-mv + MV_0 = 0$$

Resp.: $V_0 = \frac{m}{M} v$

b)

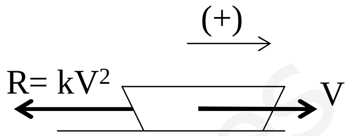
$$I = F\,\Delta t = m\,\Delta v = m(v - 0)$$

Resp.: I = mv

c)

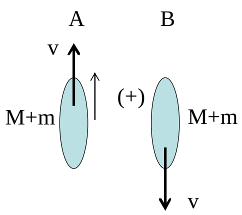
$$\Sigma F = ma: \; -kV^2 = M\frac{dV}{dt}$$

$$\int_0^t \frac{k}{M}dt = -\int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V^2}$$



Resp.: $\frac{1}{V} = \frac{1}{V_0} + \frac{k}{M}t$

10. Dos canoas de masa M navegan paralelamente a velocidades iguales v, la una al encuentro de la otra. Cuando se hayan a la misma altura, de una canoa se lanza una carga de masa m hacia la otra, después de la segunda canoa se lanza a la primera una carga de la misma masa. A continuación se lanzan simultáneamente las mismas cargas. ¿En qué caso la velocidad de las canoas será mayor?



Primer caso:

La canoa A recibe la masa m con velocidad (– v). La cantidad de movimiento del sistema formado por esa masa m y la canoa A, antes de que m caiga en A, es: (M + m)v – mv. Cuando m cae en A, la cantidad de movimiento del conjunto es A y m es: (M + 2m)v’. Como no han actuado fuerzas externas:

$$(M + m)v - mv = (M + 2m)v'$$

de donde dedicimos:

$$v' = \frac{M}{M + 2m}v \qquad (1)$$

Desde la canoa B, que tenía una cantidad de movimiento – (M + m)v, se ha lanzado m a velocidad – mv. La canoa B se queda sin m a velocidad v”:

$$-(M + m)v = -Mv'' - mv$$

$$v'' = v \qquad (2)$$

Ahora, B recibe una masa m desde A, pero con velocidad v’, y lacanzará la velocidad v_B:

$$mv' - Mv'' = -(m + M)\,v_B$$

Sustituyendo (1) y (2):

$$v_B = \frac{M}{M + 2m}v$$

Por último, A lanzó m a la velocidad v’:

$$(M + m)\,v' = Mv_A + mv'$$

de donde deducimos que:

$$v_A = -v_B$$

<u>Segundo caso</u>:

Lanzamiento desde A:

$$(M + m)\ v = Mv_1 + mv$$

Lanzamiento desde B:

$$-(M + m)\ v = -Mv_2 - mv$$

Con estas dos expresiones obtenemos:

$$v_1 = v_2 = v$$

Llegada de m de B hasta A:

$$Mv_1 - mv = (M + m)\ v'_A$$

$$v'_A = \frac{M - m}{M + m} v$$

Y análogamente deducimos que:

$$v'_B = -v'_A$$

Comparando observamos que:

$$v'_A < v_A$$

Por tanro, la velocidad de las canoas será mayor

Resp.: Cuando el lanzamiento no es simultáneo

11. Un recipiente se 20 toneladas se está moviendo a 11 m/s. Está lloviendo y las gotas caen verticalmente en su interior. Una vez que ha recogido 2 toneladas de agua, ¿cuál es la velocidad del recipiente?

Debe conservarse la cantidad de movimiento horizontal del sistema formado por el recipiente y las gotas:

$$20{\cdot}11 = (20 + 2)\ v$$

Resp.: v = 10 m/s

12. Un hombre de 80 kg está montado en un carrillo de 40 kg que se mueve sobre el suelo horizontal a 2 m/s. Salta fuera del carrillo de modo que su velocidad con respecto al suelo es de 1 m/s en sentido opuesto al movimiento del carrillo. Calcular: a) la velocidad del cdm del sistema antes y después de que salte; b) la velocidad del carrillo después de saltar; c) la velocidad del cdm después de que el hombre llegue al suelo y quede en reposo; d) la fuerza responsable de la variación de la velocidad del cdm, si tarda una décima de segundo en saltar.

a)

La velocidad del cdm justo antes y después del salto es la misma:

$$v_{cdm} = \frac{mv + MV}{m + M} = \frac{40 \cdot 2 + 80 \cdot 2}{40 + 80}$$

Resp.: $v_{cdm} = 2$ m/s

b)

$$v_{cdm} = \frac{40 \cdot v - 80 \cdot 1}{40 + 80}$$

de donde deducimos:

Resp.: v = 8 m/s

c)

$$v'_{cdm} = \frac{40 \cdot 8 + 80 \cdot 0}{40 + 80}$$

Resp.: $v'_{cdm} = \frac{8}{3}$ m/s

d) La fuerza externa responsable de la variación de la velocidad del cdm es el rozamiento R. Si tarda 0.1 s en saltar:

$$R = \frac{\Delta p_{cdm}}{\Delta t} = \frac{(m + M)(v'_{cdm} - v_{cdm})}{\Delta t} = \frac{(40 + 80)\left(\frac{8}{3} - 2\right)}{0.1}$$

Resp.:800 N

13. Un globo de 120 kg, estacionario, lleva colgando una escala con un joven en ella de 80 kg. El joven empieza a subir por la escala a 5 m/s respecto al globo. ¿Con qué velocidad baja el globo respecto al suelo?

La cantidad de movimiento inicial es cero y debe conservarse. Si la velocidad de bajada del globo es v y la consideramos negativa, la velocidad absoluta de subida del joven es 5 – v:

$$0 = -120\,v + 80\,(5 - v)$$

Resp.: 2 m/s

14. **Un vagón de 1400 kg, vacío, con una capacidad de 3.5 m^3, se mueve horizontalmente a 12 km/h, sin rozamiento. Su paltaforma interior tiene una superficie de 2 m^2 y lleva descubierta la cara superior. Empieza a llover a razón de un mililitro por centímetro cuadrado, cada segundo. Calcular la ecuación de la velocidad en función del tiempo desde que comenzó a llover y la velocidad del vagón cuando se haya llenado de agua.**

Sea m = 1400 kg, v = 12 km/h, Q = 1 ml/cm^2·s el caudal por unidad de superficie, S = 2 m^2, la densisdad del agua ρ = 1g/cm^3, la masa de agua m_a y V su volumen. Si el tiempo que está lloviendo es t, entonces:

$$m_a = \rho V = \rho Q S t$$

La cantidad de movimiento *horizontal* del sistema vagón – lluvia permanece constante. Antes de llover es mv, y mientras llueve es $(m+m_a)v'$:

$$m\,v = (m + m_a)v'$$

Sustituyendo m_a y despejando v':

$$v' = \frac{m}{m + \rho QSt} v$$

Introduciendo los datos en el Sistema Internacional:

Resp.: $v' = \dfrac{16800}{1400 + 20t}$

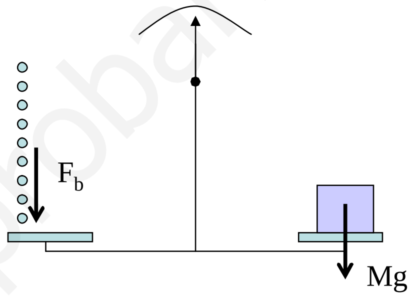
Cuando el vagón se ha llenado, la masa de agua es:

$$\rho QSt = \rho \cdot 3.5\ m^3 = 1000 \cdot 3.5\ kg = 3500\ kg$$

$$v' = \frac{16800}{1400 + 3500}$$

Resp.: 3.43 km/h

15. Un chorro de bolitas de 0.5 gramos sale de un tubo horizontal a razón de 100 bolitas por segundo, y choca contra uno de los platillos de una balanza. Las bolitas caen desde una altura de 0.5 m respecto al platillo y rebotan hasta la misma altura. Calcular el valor de la masa que debe colocarse en el otro platillo de la balanza para que el fiel permanezca en el cero.



Sea $\alpha = \dfrac{m}{\Delta t}$ la masa de las bolitas que caen en la unidad de tiempo. Como caen 100 bolitas de 0.5 gramos en un segundo:

$$\alpha = \frac{m}{\Delta t} = \frac{100 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}}{1} = 0.05\ kg/s$$

La fuerza F_b ejercida por la bolitas es igual a la variación en el tiempo de su cantidad de movimiento:

$$\vec{F}_b = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta m\vec{v}}{\Delta t} = \alpha \Delta \vec{v}$$

Como la velocidad de caida es (–v) y la de rebote es v, el módulo de la la varaicón de la velocidad es:

$$\Delta v = v - (-v) = 2v$$

y el módulo de $\vec{F}_b$ es:

$$F_b = 2\alpha v$$

siendo v la velocidad de caida desde una altura de 0.5 m; es decir:

$$v = \sqrt{2gh} = 3.1305\ m/s$$

Para que la balanza permanezca en el cero tiene que ocurrir que:

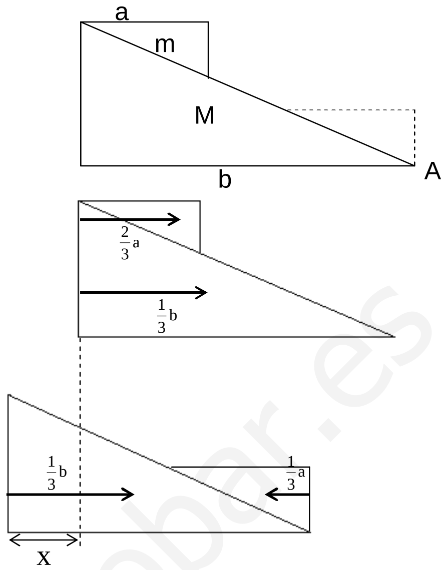
$$F_b = Mg$$

$$2\alpha v = Mg$$

$$M = \frac{2\alpha v}{g} = \frac{2 \cdot 0.05 \cdot 3.1305}{9.8}$$

Resp.: 319.4 gramos

16. Dos cuñas lisas de masas m y M y anchuras a y b descansan sobre una base sin rozamiento, como se muestra en la figura. Determinar el retroceso de la cuña inferior hasta el instante en que la cara vertical de la superior llega al punto A.



Las distancias señaladas en las figuras tienen en cuenta las propiedades del baricentro de un triángulo.

Como horizontalmente no actúan fuerzas exteriores, se conserva la cantidad de movimiento del sistema formado por ambas cuñas:

$$(m + M)\, x_{cdm} = \tfrac{2}{3}\, a\, m + \tfrac{1}{3}\, b\, M$$

Y cuando m llega a A:

$$(m + M)\, x_{cdm} = (b - x - \tfrac{1}{3} a)\, m + (\tfrac{1}{3} b - x)\, M$$

Igualando y despejando x:

$$\text{Resp.: } x = \frac{m}{m+M}(b-a)$$

17. Calcular el cdm de un sistema formado por tres partículas de 1 kg, 2 kg y 3 kg, situadas respectivamente en los puntos (0, 3, 1), (3, 0, $\frac{5}{2}$) y (4, 2, 1).

$$x_{cdm} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4}{1+2+3}$$

$$y_{cdm} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2}{1+2+3}$$

$$z_{cdm} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2.5 + 3\cdot 1}{1+2+3}$$

Resp: ½ (6, 3, 3)

18. Calcular el cdm de un sistema de dos partículas de 1 kg y 2 kg situadas respectivamente en (1, 0, –1) y (0, 1, 1). Si sobre cada partícula actúan las fuerzas (0, 1, t) y (1, t, 2t); calcular la posición del cdm al cabo de 2 segundos.

$$\vec{r}_{cdm0} = \frac{1(1,0,-1) + 2(0,1,1)}{1+2}$$

$$\text{Resp.: } \vec{r}_{cdm0} = \frac{1}{3}(1,2,1)$$

$$\vec{a}_{cdm} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}}{m_1 + m_2} = \frac{(0,1,t) + (1,t,2t)}{1+2} = \frac{1}{3}(1, 1+t, 3t)$$

$$\vec{v}_{cdm} = \int \vec{a}_{cdm}\, dt = \frac{1}{3}\left(t, t + \frac{t^2}{2}, \frac{3}{2}t^2\right) + \vec{k}_1$$

Como en el instante inicial la velocidad es cero, entonces $\vec{k}_1 = 0$.

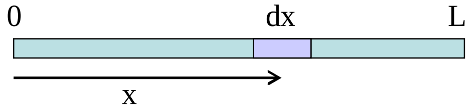
$$\vec{r}_{cdm} = \int \vec{v}_{cdm}\, dt = \frac{1}{3}\left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \frac{t^3}{2}\right) + \vec{k}_2$$

siendo $\vec{k}_2 = \vec{r}_{cdm0}$. Y sustituyendo t = 2:

Resp.: $\vec{r}_{cdm}(2) = \left(1, \frac{16}{9}, \frac{5}{3}\right)$

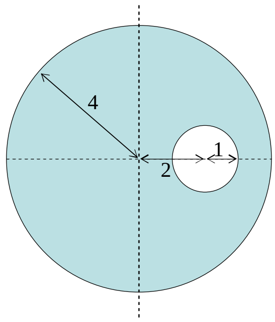
19. Una varilla delgada de longitud L tiene una densidad variable que aumenta de forma proporcional a la distancia a partir de un extremo, de acuerdo con la relación ρ = ρ₀ (1 + x/L). Calcular la posición del cdm.

$$x_{cdm} = \frac{\int_0^L x\,dm}{\int_0^L dm} = \frac{\int_0^L x\rho\,dx}{\int_0^L \rho\,dx} = \frac{\int_0^L x\rho_0(1+x/L)\,dx}{\int_0^L \rho_0(1+x/L)\,dx}$$



Resp.: $x_{cdm} = \frac{5}{9}L$

20. Hallar el cdm de una esfera homogénea de 4 cm de radio con un hueco esférico de 1 cm de radio cuyo centro dista del otro 2 cm.

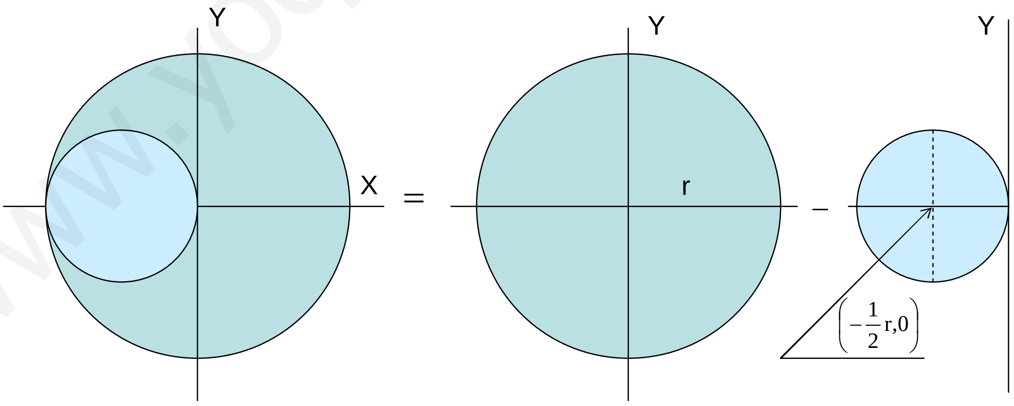


En la figura se aprecia que por simetría la coordenada vertical del cdm es cero. Para calcular la coordenada horizontal basta suponer que el hueco se comporta como una masa *negativa*. Si el radio de la esfera es R = 4 y el del hueco es r = 1:

$$x_{cdm} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot 0 - \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 2}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^2)}$$

Resp.: $-\frac{2}{63}$ cm

21. Calcúlense las coordenadas (x, y) del cdm de un disco homogéneo de radio r, centrado en (0, 0), que tiene un orificio de radio ½ r tangente al diámetro OY.



Como se aprecia en la figura, podemos suponer que el cdm del disco con el orificio es el mismo que el que tiene el disco completo si *restamos* la parte del orificio.

La densidad superficial del disco completo de masa M, sin orificio, es la misma que la que tiene el orificio con *masa* m *negativa*:

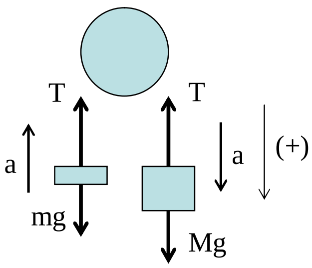
$$\sigma = \frac{M}{r^2} = \frac{m}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

Dada la simetría de la figura, la coordenada vertical del cdm es y = 0. Calculemos la coordenada horizontal:

$$x_{cdm} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m} = \frac{0 \cdot M - m\left(-\frac{r}{2}\right)}{M - m} = \frac{-\sigma\left(\frac{r}{2}\right)^2\left(-\frac{r}{2}\right)}{\sigma r^2 - \sigma\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{6}$$

Resp: $\left(\frac{r}{6}, 0\right)$

22. En una máquina de Atwood (formada por una polea y una cuerda ideal) cuelgan dos masas de 50 y 100 kg a la misma altura. Al cabo de un segundo, ¿cuánto habrá descendido el cdm del sistema con g = 10 m/s²?



$$mg - T = m\,(-a)$$

$$Mg - T = Ma$$

De donde deducimos que:

$$a = \frac{m - M}{m + M} g$$

Derivando dos veces la expresión del vector de posición de cdm deducimos que la aceleración del cdm es:

$$a_{cdm} = \frac{m a_m + M a_M}{m + M} = \frac{m(-a) + Ma}{m + M} = \frac{M - m}{M + m} a$$

y sustituyendo a:

$$a_{cdm} = \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^2 g$$

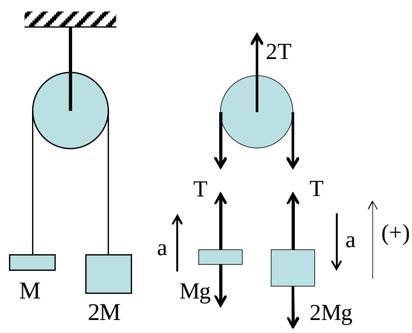
Como

$$S = ½\, a_{cdm} t$$

Para t = 1 resulta:

Resp: $\frac{5}{9}$ m

23. En el dispositivo de la figura, la polea y las cuerdas no tienen masa y las masas 2M y M están inicialmente en reposo. Determinar la aceleración de las masas; la tensión de la cuerda y la aceleración del cdm del sistema.



T – Mg = Ma   T – 2Mg = – 2 Ma

De donde deducimos que:

Resp.: $T = \frac{4}{3} Mg; a = \frac{1}{3} g$

Vamos a emplear dos métodos para calcular a_{cdm}:

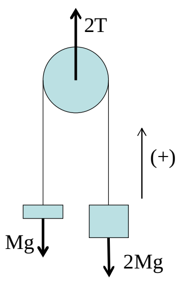
Primer método:

$$a_{cdm} = \frac{Ma_M + 2Ma_{2M}}{M + 2M} = \frac{Ma + 2M(-a)}{M + 2M} = -\frac{1}{3} a$$

y sustituyendo a:

Resp.: $a_{cdm} = -\frac{1}{9} g$

Segundo método:



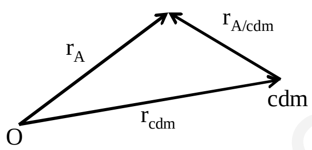
Aislamos el conjunto como se aprecia en la figura y aplicamos la 2ª ley de Newton al sistema como un todo:

$$a_{cdm} = \frac{\sum F_{ext}}{M + 2M} = \frac{2T - Mg - 2Mg}{M + 2M}$$

Y sustituyendo T:

Resp.: $a_{cdm} = -\frac{1}{9} g$

24. El vector de posición de una partícula respecto a un sistema de referencia inercial es (3t, 2t, t). El vector de posición del cdm del sistema de partículas al que pertenece es (t, 4t, 4t). Calcular el módulo de la velocidad de la partícula respecto al cdm del sistema.



$$\vec{r}_A = (3t, 2t, t); \vec{r}_{cdm} = (t, 4t, 4t)$$

$$\vec{r}_{A/cdm} = \vec{r}_A - \vec{r}_{cdm}$$

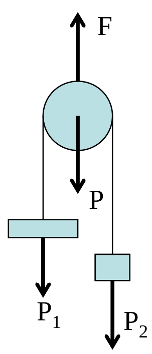
y derivando

$$\vec{v}_{A/cdm} = \vec{v}_A - \vec{v}_{cdm} = (1,4,4) - (3,2,1) = (-2,2,3)$$

cuyo módulo es:

Resp: $\sqrt{17}$

25. De un cuadernal de 11 kg cuelgan dos masas de 6 y 8 kg unidas por un cabo de masa despreciable que laborea por él. El cuadernal se iza mediante una fuerza de 320 N. Calcular la aceleración del cdm del sistema.



$$\sum \vec{F}_{ext} = m_{total} \vec{a}_{cdm}$$

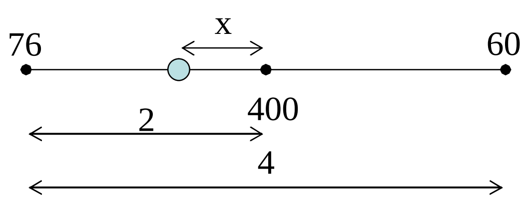
$$F - (P + P_1 + P_2) = (m + m_1 + m_2)\, a_{cdm}$$

$$320 - (11 + 6 + 8)9.8 = (11 + 6 + 8)\, a_{cdm}$$

Resp.: 3 m/s^2

26. Dos personas de 76 y 60 kg están colocadas en los extremos de una barra de 400 kg y 4 m de longitud. Calcular la distancia del cdm del sistema al cdm de la barra.

Considerando el origen sobre la masa de 76 kg, la coordenada del cdm es:



$$x_{cdm} = \frac{76 \cdot 0 + 400 \cdot 2 + 60 \cdot 4}{76 + 400 + 60} = 1.94\ \text{m}$$

Por tanto:

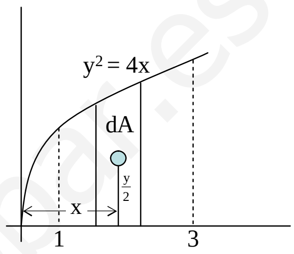
$$x = 2 - 1.94$$

Resp.: 6 cm

27. Calcular las coordenadas del cdm de la superficie limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 3.

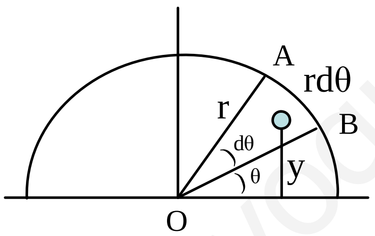
$$x_{cdm} = \frac{\int_1^3 x\,dA}{A} = \frac{\int_1^3 xy\,dx}{\int_1^3 y\,dx} = \frac{2\int_1^3 x\sqrt{x}\,dx}{2\int_1^3 \sqrt{x}\,dx}$$

$$y_{cdm} = \frac{\int_{x=1}^{x=3} \frac{y}{2}\,dA}{A} = \frac{\int_1^3 \frac{y}{2}\,y\,dx}{\int_1^3 y\,dx} = \frac{2\int_1^3 x\,dx}{2\int_1^3 \sqrt{x}\,dx}$$



Resp.: (2.086597, 1.42988)

28. Se tiene una masa distribuida sobre un semicírculo de radio r. ¿A qué altura sobre el diámetro se encuentra el cdm?



El área infinitesimal dS de la superficie ABO es:

$$dS = \frac{1}{2}(r d\theta) \cdot r = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

La coordenada y del cdm está situada a ⅔ del vértice O, de manera que:

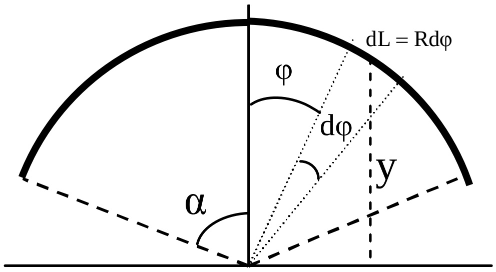
$$y = \frac{2}{3} r \operatorname{sen} \theta$$

Calculemos el cdm:

$$y_{cdm} = \frac{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} y\,dS}{\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{\int_0^\pi \frac{2}{3} r \operatorname{sen}\theta \, \frac{1}{2} r^2 d\theta}{\frac{1}{2}\pi r^2}$$

Resp.: $\frac{4r}{3\pi}$

29. Hallar el cdm de un arco de circunferencia de radio R y amplitud 2α.



Si la densidad lineal es λ, entonces la masa total M del arco de circunferencia 2α es:

$$M = \rho L = \rho\, 2\alpha R$$

La masa del elemento diferencial dφ es:

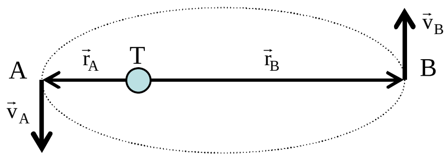
$$dm = \rho dL = \rho R d\varphi$$

como $y = R\cos\varphi$ entonces:

$$y_{cdm} = \frac{\int_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\alpha} y\,dm}{M} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi\,\rho R d\varphi}{\rho 2\alpha R}$$

Resp.: $y_{cdm} = \dfrac{R}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha$

30. Un satélite de la Tierra de masa m describe una órbita elíptica. Las distancias máxima y mínima a la superficie de la Tierra son 2600 y 350 km respectivamente. Si la velocidad máxima del satélite es 26000 km/h, hallar su velocidad en los puntos de mínimo acercamiento, sabiendo que el radio de la Tierra es de 6400 km.



El momento angular del satélite respecto a T es constante en toda la tyrayectoria; por tanto:

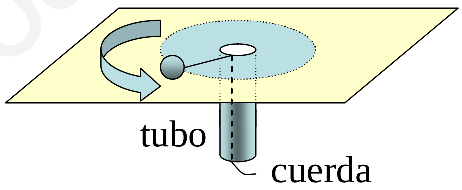
$$\vec{L}_A = \vec{L}_B;\ \vec{r}_A \times m\vec{v}_A = \vec{r}_B \times m\vec{v}_B$$

de donde se deduce que $r_A v_A = r_B v_B$:

$$26000\,(6400 + 350) = v_B\,(6400 + 2600)$$

Resp.: $v_B = 19500$ km/h

31. Un objeto pequeño está unido a una cuerda que pasa por el interior de un tubo, como indica la figura. El objeto describe un movimiento circular de 0.5 m de radio en el plano horizontal, con velocidad angular de 20 rpm. Al tirar de la cuerda hacia abajo se reduce el radio de la trayectoria. Calcular la velocidad angular cuando el radio mide 0.25 m.



La fuerza con la que se tira de la cuerda es central; por tanto, se conserva el momento angular del objeto respecto al centro del orificio. Como el vector de posición es perpendicular a la velocidad del objeto, el módulo del momento angular es:

$$L = mrv$$

siendo

$$v = \omega r$$

por tanto

$$L = mr^2\omega$$

Es decir:

$$m\cdot 0.5^2\cdot 20 = m\cdot 0.25^2\cdot\omega$$

Resp.: $\omega = 80$ rpm

TEMA V

TRABAJO Y ENERGÍA

Trabajo
Potencia. Rendimiento
Energía
Energía cinética. Teorema de la energía cinética
Fuerzas conservativas
Energía potencial
- Energía potencial gravitatoria
- Energía potencial elástica

Energía mecánica
- Sin rozamiento
- Con rozamiento

Determinación de la fuerzas conservativa mediante la energía potencial
Campos escalares
- Gradiente

Campos vectoriales
- Circulación
- Flujo
- Divergencia
- Rotacional

Choques entre cuerpos
- Choque oblicuo
- Choque elástico
- Choque inelástico
- Choque no perfectamente elástico
- Choque central

1. **Se diseña una columna cilíndrica con discos iguales de 1 m de altura y 50 kg cada uno, que han de colocarse uno encima del otro. Hallar el trabajo necesario para construir una columna que tenga 10 m. ($g = 10\ m/s^2$).**

El trabajo realizado "por nosotros" es igual y de signo contrario al que realiza el campo gravitatorio: $W = -W_c = \Delta Ep$. Suponemos que el primer bloque está ya colocado. El cdm del siguiente habrá que elevarlo 1.5 metros, el siguiente 2.5, y así sucesivamente:

$$W = mg\,(1.5 + 2.5 + \ldots + 9.5) = 50\cdot 10\cdot 49.5$$

Resp.: 24750 J

2. **Un móvil de 1 kg se desplaza según la trayectoria $x = 3t^2$, $y = -2t$, $z = 3t$ en el S.I. Hallar la potencia desarrollada en t = 1 s.**

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = m\vec{a}\cdot\vec{v}$$

$$\vec{v} = (6t, -2, 3) \quad \vec{v}\,(1) = (6, -2, 3)$$

$$\vec{a} = (6, 0, 0)$$

Por tanto:

$$P(1) = 1\,(6, -2, 3)\cdot(6, 0, 0)$$

Resp.: 36 W

3. **Una bala de 10 g incide horizontalmente a 400 m/s sobre un bloque en reposo de 390 g, incrustándose en él. Calcular la pérdida de energía mecánica, si se desprecian los rozamientos.**

$$mv = (m+M)v'$$

$$0.01\cdot 400 = (0.01+0.390)v' \qquad v' = 10\ m/s$$

$$\Delta E = ½\ mv^2 - ½\ (m+M)v'^2 = ½\cdot 0.01\cdot 400^2 - ½\ (0.01+0.390)\cdot 10^2$$

Resp.: 780 J

4. **Un proyectil de 15 g sale a 100 m/s por la boca del cañón de un fusil, cuya ánima mide 75 cm de largo. ¿Qué fuerza impulsa al proyectil, supuesta constante?**

$$W_T = \Delta Ec: \quad F\,d = ½\ m\,v^2$$

$$F\cdot 0.75 = ½\cdot 0.015\cdot 100^2$$

Resp.: 100 N

5. **Un motor de 12.5 KW eleva un montacargas de 500 kg a 50 m de altura en 25 segundos. Calcúlese el rendimiento del motor ($g = 10\ m/s^2$).**

$$W = -W_c = \Delta Ep = mgh$$

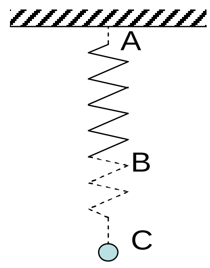
La potencia útil es $P_u = W/t = mgh/t$

La potencia suministrada es P_s

$$\eta = \frac{P_u}{P_s} = \frac{\frac{500\cdot 10\cdot 50}{25}}{12500} = 0.8$$

Resp.: 80%

6. Un resorte de masa despreciable y longitud AB cuelga del techo por A. En el extremo B una masa m oscila desde B (posición inicial del resorte sin la masa m colgada) hasta C. El segmento BC mide h. Calcular la energía elástica cuando pasa por C.



Al actuar sólo fuerzas conservativas la energía mecánica permanece constante. Aquí es la suma de la energía potencial elástica Ee y la energía potencial gravitatoria Ep:

$$Ee_B + Ep_B = Ee_C + Ep_C$$

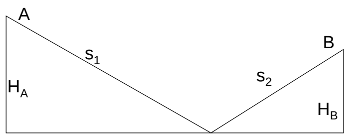
Tomando como altura "cero" el punto C:

$$Ee_B + mgh = Ee_C + 0$$

$$\Delta E = Ee_C - Ee_B = mgh$$

Resp.: mgh

7. Un vagón de 10000 kg parte del reposo y viaja 300 m cuesta bajo por una pendiente del 1%. Con la velocidad adquirida sube 60 m por una pendiente del 2% hasta detenerse. Calcular la fuerza de rozamiento, supuesta constante, que existe durante todo el recorrido (g = 10 m/s²).



$$H_A = 0.01 \cdot s_1 = 0.01 \cdot 300 = 3$$

$$H_B = 0.02 \cdot s_2 = 0.02 \cdot 60 = 1.2$$

$$Ep_A + Ec_A - W_{FR} = Ep_B + Ec_B$$

pero $Ec_A = Ec_B = 0$; de donde

$$W_{FR} = Ep_A - Ep_B$$

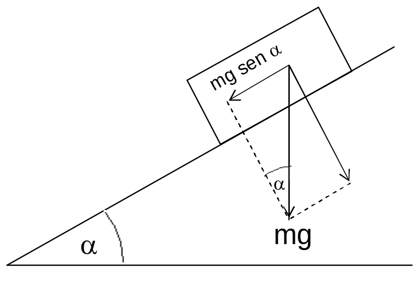
con $W_{FR} = mg(H_A - H_B)$; además $W_{FR} = F_R\,(s_1 + s_2)$

Por tanto:

$$F_R = \frac{mg(H_A - H_B)}{s_1 + s_2} = \frac{10^4 \cdot 10 \cdot (3 - 1.2)}{300 + 60}$$

Resp.: 500 N

8. Un ciclista pesa con su bicicleta 700 N y sube una pendiente del 5% a 36 km/h. Despreciando rozamientos, ¿qué potencia desarrolla?



El ciclista debe vencer la fuerza mg sen α:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = mg \text{ sen } \alpha \; v = 700 \cdot 0.05 \cdot 10$$

Resp.: 350 W

9. Un bloque de masa M comprime un resorte una longitud x. Se deja en libertad de manera que el bloque se desplaza por una superficie horizontal sin rozamiento a velocidad v. El mismo muelle proyecta un segundo bloque de masa 4M con una velocidad 3v. ¿Qué distancia se comprimió en este segundo caso?

La variación de energía elástica se invierte en variar la energía cinética:

$$\tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} M v^2$$

$$\tfrac{1}{2}\,k\,x'^2 = \tfrac{1}{2}\,4M\,(3v)^2$$

Dividiendo miembro a miembro:

Resp: x' = 6x

10. Un futbolista da una patada a un balón de 0.5 kg con una fuerza de 500 N. El balón sale con un ángulo de 45º y cae a una distancia de 40 m. Calcular el tiempo que duró el contacto del pie con el balón. (g = 10 m/s^2).

Con la expresión del alcance máximo x_{max} determinamos v:

$$v = \sqrt{\frac{g x_{max}}{\text{sen } 2\alpha}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 40}{1}} = 20 \text{ m/s}$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$$

$$500 \cdot \Delta t = 0.5 \cdot 20$$

Resp.: 0.02 s

11. Un cuerpo se mueve según la trayectoria x = 2t, y = t^2 – t, z = 5. Sobre él actúa una fuerza f_x = 5, f_y = 3t, f_z = t^2 – t (todas las unidades en el S.I.). Calcular el trabajo efectuado por la fuerza desde t = 2 s hasta t = 3 s.

$$\vec{F} = (5, 3t, t^2 - t)$$

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz) = (2, 2t-1, 0)\,dt$$

$$W = \int_{\vec{r}(2)}^{\vec{r}(3)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_2^3 (5, 3t, t^2 - t) \cdot (2, 2t - 1, 0)\,dt = \frac{81}{2}\text{ J}$$

Resp.: 40.5 J

12. Una bola A de 2 kg avanza a una velocidad $3\vec{i} + 4\vec{j}$ m/s hacia otra B de 3 kg que está en reposo. Tras el choque, la B sale a $2\vec{i} + 3\vec{j}$ m/s. Calcular la velocidad de A.

$$m_A\,\vec{v}_A + m_B\,\vec{v}_B = m_A\,\vec{v}_{A1} + m_B\,\vec{v}_{B1}$$

$$2(3\vec{i} + 4\vec{j}) + 3 \cdot 0 = 2 \cdot \vec{v}_{A1} + 3(2\vec{i} + 3\vec{j})$$

Resp.: $-0.5\,\vec{j}$

13. Un fusil dispara balas de 2 gramos a 400 m/s. La fuerza variable de los gases de la combustión de la carga de proyección ejercen sobre el culote del proyectil, viene dada por la expresión 320 – 300 x, donde x se expresa en metros y mide la distancia desde el cierre hasta el proyectil. Calcular la longitud del cañón.

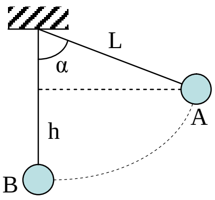
$$\int_0^L F\,dx = \frac{1}{2} m v^2$$

$$320\,L + 150\,L^2 = \tfrac{1}{2}\,0.002 \cdot 400^2$$

La resolución de la anterior ecuación de 2º grado proporciona dos soluciones para L: 1.3 y 0.8 metros. Seleccionamos la de menor longitud de tubo.

Resp.: 0.8 m

14. Una bola de 10 g está suspendida de un hilo de 1 m sin masa. Se desplaza de modo que el hilo forma 60º con la vertical. Al soltarla, ¿con qué velocidad pasa por la posición de equilibrio? (g = 10 S.I.).



$Ep_A = Ec_B$

$Ep_A = mgh = mg\,(L - L\cos\alpha)$

$Ec_B = ½\, m\, v^2$

Por tanto $v = \sqrt{2\,g\,L\,(1-\cos\alpha)}$

Resp.: $\sqrt{10}$ m/s

15. Un péndulo balístico consta de una masa de 1.5 kg suspendida de una cuerda de 1 m. Un proyectil de 10 gramos posee una velocidad de 400 m/s y pasa a través de la masa de 1.5 kg. Después del choque el péndulo oscila formando un ángulo máximo de 24º. Calcular la velocidad del proyectil y la energía perdida durante el choque.

Empleamos la misma figura del ejercicio anterior. Sea M = 1.5 kg la masa del péndulo. Su velocidad v_p en B es:

$$v_p = \sqrt{2\,g\,L\,(1-\cos\alpha)} = 1.3017$$

La masa del proyectil es m. Antes del choque tiene una velocidad v, y v' tras el choque:

$$mv = Mv_p + mv'$$

$$0.01 \cdot 400 = 1.5 \cdot 1.3017 + 0.01v'$$

Resp.: v' = 204.74 m/s

$$\Delta E = ½\, m(v^2 - v'^2) - ½\, Mv_p^2$$

Resp.: 589.12 J

16. En el campo dado por $f(x,y,z) = xy^2 + 2xyz - z^2$, calcular el módulo del gradiente en el punto (1, 1, 0).

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2yz\Big]_{(1,1,0)} = 1\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2xz\Big]_{(1,1,0)} = 2\,; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xy - 2z\Big]_{(1,1,0)} = 2$$

El módulo del gradiente en (1, 1, 0) es: $\nabla f = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$

Resp.: 3

17. Una masa de 20 kg se mueve a 0.5 m/s y choca con otra de 35 kg que está en reposo. Tras el choque, la segunda se mueve a 0.3 m/s en el mismo sentido que llevaba la primera. Calcular el coeficiente de restitución.

Se trata de un choque central

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{1d} + m_2 v_{2d}$ $\qquad 20 \cdot 0.5 + 0 = 20\, v_{1d} + 35 \cdot 0.3$ $\qquad v_{1d} = -0.025$

$$k = -\frac{v_{1d} - v_{2d}}{v_1 - v_2} = -\frac{-0.025 - 0.3}{0.5 - 0}$$

Resp.: 0.65

18. Calcular el trabajo desarrollado por la fuerza $\vec{F} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k}$ cuando su punto de aplicación se traslada desde A (0, 0, 0) hasta B (2, −1, 3).

$$W = \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (2x\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k})\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \int_{(0,0,0)}^{(2,-1,3)} 2xdx - ydy + 3zdz$$

Resp.: 17

19. Señalar cuál de los siguientes campos de fuerzas es conservativo: a) $\vec{V}_a$ = (xy^2z, x – y, $y^2 - x^2z$); b) $\vec{V}_b$ = ($3e^{2x}$, – sen y, x^2); c) $\vec{V}_c$ = (3xy, $-2y^2$, 0); d) $\vec{V}_d$ = (2xy, x^2, 0). Calcular el rotacional y la divergencia de cada campo.

Aplicando la definición de rotacional:

$$\text{Rot } \vec{V}_a = (2y,\ xy^2 + 2xz,\ 1-2xyx)$$
$$\text{Rot } \vec{V}_b = (0,\ -2x,\ 0)$$
$$\text{Rot } \vec{V}_c = (0,\ 0,\ -3x)$$
$$\text{Rot } \vec{V}_d = (0,\ 0,\ 0)$$

Por tanto, el campo $\vec{V}_d$ es irrotacional y, en consecuencia, conservativo.

Aplicando ahora la definición de divergencia:

$$\text{div } \vec{V}_a = -x^2 + y^2z - 1$$
$$\text{div } \vec{V}_b = 6\,e^{-2x} - \cos y$$
$$\text{div } \vec{V}_c = -y$$
$$\text{div } \vec{V}_d = 2y$$

20. Dos bolas de billar de masas 1 y 2 kg, que se desplazan hacia la derecha por la misma línea recta a 20 y 10 m/s respectivamente, chocan de manera que la bola de 1 kg golpea a la de 2 kg. Suponiendo que el choque es elástico, calcular las velocidades tras el choque.

$$v_{1d} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \qquad v_{2d} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_{1d} = \frac{1-2}{1+2}20 + \frac{2\cdot 2}{1+2}10 \qquad v_{2d} = \frac{2-1}{1+2}10 + \frac{2\cdot 1}{1+2}20$$

Resp.: $v_{1d} = \frac{20}{3}$ m/s; $v_{2d} = \frac{50}{3}$ m/s

21. Una bola de billar (1), que avanza por el eje X a 5 m/s, choca con otra de igual masa (2) que está en reposo en el origen de coordenadas. Tras la colisión las bolas salen desviadas 36º 52’ 11.63” y –53º 7’ 48.37” respectivamente. Calcular la velocidad de cada bola. Demostrar que se trata de un choque elástico.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_{1d} + m_2\vec{v}_{2d}$$

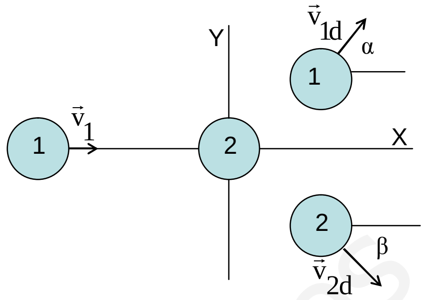
$$m_1 = m_2 = m$$

$$\vec{v}_1 = 5\vec{i}$$

$$\vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{v}_{1d} = v_{1d}(\cos\alpha\ \vec{i} + \text{sen}\ \alpha\ \vec{j})$$

$$\vec{v}_{2d} = v_{2d}(\cos\beta\ \vec{i} + \text{sen}\ \beta\ \vec{j})$$



Introduciendo estos datos en la ecuación vectorial:

$$5m\vec{i} = mv_{1d}(\cos\alpha\ \vec{i} + \text{sen}\ \alpha\ \vec{j}) + mv_{2d}(\cos\beta\ \vec{i} + \text{sen}\ \beta\ \vec{j})$$

Simplificando y separando componentes:

$$5 = \cos\alpha\ v_{1d} + \cos\beta\ v_{2d}$$

$$0 = \text{sen}\ \alpha\ v_{1d} + \text{sen}\ \beta\ v_{2d}$$

es decir:

$$5 = 0.8\ v_{1d} + 0.6\ v_{2d}$$

$$0 = 0.6\ v_{1d} - 0.8\ v_{2d}$$

Resolviendo el sistema:

Resp.: $v_{1d} = 4$ m/s; $v_{2d} = 3$ m/s

La energía cinética antes del choque es:

$$Ec_a = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\cdot 5^2 = \frac{25}{2}m$$

La energía cinética después del choque es:

$$Ec_d = \frac{1}{2}mv_{1d}^2 + \frac{1}{2}mv_{2d}^2 = \frac{1}{2}m\cdot 4^2 + \frac{1}{2}m\cdot 3^2 = \frac{25}{2}m$$

Es decir:

$$Ec_a = Ec_d$$

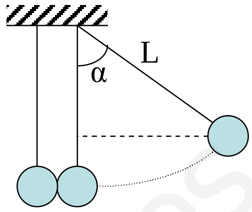
22. Un bloque de 20000 kg, que se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento, impacta a 36 km/h contra otro en reposo de 10 gramos. Suponiendo el choque elástico, calcular la velocidad del segundo.

De las ecuaciones del choque calculadas en el problema 20 deducimos que:

$$v'_2 = \frac{(m_1 - m_2)\ v_2 + 2\ m_1\ v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0 + 2\cdot 20000\cdot 10}{20000 + 0.01} \cong 20 \text{ m/s}$$

Resp.: 20 m/s

23. Dos bolas B_1 y B_2 de masas m_1 y m_2 están suspendidas de dos hilos inextensibles de longitud L. Las bolas se tocan cuando los hilos están verticales. Separamos B_1 de su posición de equilibrio un ángulo α, manteniendo el hilo extendido y en el mismo plano vertical que el otro hilo. Al soltar B_1 choca con B_2 que estaba inmóvil. Calcular: a) la velocidad de B_1 cuando choca con B_2; b) las velocidades de ambas bolas después del choque supuesto perfectamente elástico; c) las alturas a las que ascienden después del choque.



a)

Como calculamos en el problema 14:

Resp.: $v_1 = \sqrt{2\,g\,L\,(1-\cos\alpha)}$

b)

De las ecuaciones del choque elástico:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\,v_1 + 2\,m_2\,v_2}{m_1 + m_2} \qquad v'_2 = \frac{(m_1 - m_2)\,v_2 + 2\,m_1\,v_1}{m_1 + m_2}$$

con $v_2 = 0$ obtenemos:

Resp.: $v'_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1$

$v'_2 = \dfrac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,v_1$

c)

En $v = \sqrt{2gh}$ basta aplicar los valores v'_1 y v'_2 calculados en b) para calcular h_1 y h_2 respectivamente.

24. Una pelota muy elástica de 30 gramos puede rebotar hasta el 90% de su altura original. a) Calcular la energía que se pierde en el primer rebote cuando cae desde 3 metros; b) Si cae desde una altura h inicial y realiza n botes, calcular la altura del bote enésimo; c) ¿Cuántos botes se necesitan para que la altura sea el 1% de la original?

a)

Energía perdida = 10% mgh = $0.1 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8 \cdot 3$

Resp.: 0.0882J

b)

$$h_1 = 0.9\,h;\; h_2 = (0.9)^2 h;\; \ldots;\; h_n = 0.9^n\,h$$

Resp.: $0.9^n\,h$

c)

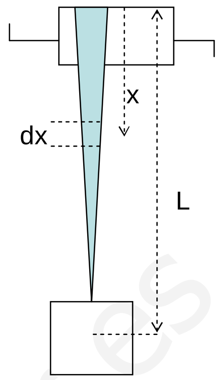
$$h_n = 1\%\,h = 0.01\,h$$

$$0.01h = 0.9^n\,h$$

tomando logaritmos y despejando obtenemos n = 43.7. Por tanto:

Resp.: 44 botes

25. El cable del que cuelga un ascensor de 800 kg mide 120 m y su peso varía uniformemnte desde 15 kg/m metro en el extremo superior a 10 kg/m en el inferior. Calcular el trabajo que se realiza para subir el ascensor, suponiendo que todo el cable se arrolla sobre un torno.



Masa por unidad de longitud del cable: ax + b.

Para x = 0 : $b = 15$

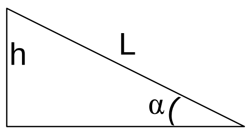
Para x = L = 120 : $a = -\dfrac{1}{24}$

Por tanto, la masa de un cable de longitud x será: $m = x\left(15 - \dfrac{x}{24}\right)$

$$W = \int_0^{120} (800 + m)g\cdot dx = \int_0^{120} \left[800 + x\left(15 - \frac{x}{24}\right)\right]\cdot 9.8\cdot dx = 1764000\ \text{J}$$

Resp.: 1764000 J

26. Sobre un plano inclinado 30º con la horizontal se lanza hacia arriba un cuerpo de 100 gramos, por la línea de máxima pendiente, a 10 m/s. El coeficiente de rozamiento es 0.2. Calcular: a) el espacio que recorre el cuerpo hasta detenerse; b) el incremento máximo de energía potencial; c) el calor desprendido por efecto del rozamiento; d) Si al alcanzar la máxima altura, el cuerpo desciende, ¿cuál es su velocidad al pasar por la posición incial?



a)

$$½\ m\ v^2 = mgh + W_R$$

$$½\ m\ v^2 = mg\ L\ \text{sen}\ \alpha + \mu\ mg \cos \alpha \cdot L$$

$$L = \frac{v^2}{2g(\text{sen}\ \alpha + \mu \cos \alpha)} = 7.5787\ \text{m}$$

Resp.: 7.5787 m

b)

$$\Delta Ep = mgh = mg\ L\ \text{sen}\ \alpha = 3.7136\ \text{J}$$

Resp.: 3.7136 J

c)

$$W_R = \mu mg \cos \alpha\ L\ (\text{en J}) = \mu mg \cos \alpha\ L\cdot 0.24\ (\text{en cal}) = 0.3087\ \text{cal}$$

Resp.: 0.3087 J

d)

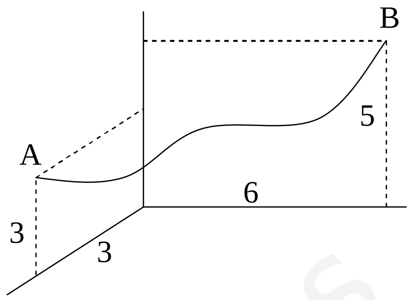
$$½\ m\ v_f^2 = ½\ m\ v^2 - 2\ W_R$$

$$v_f = \sqrt{v^2 - 4\cdot 0.2\cdot 9.8 L\cdot \cos 30} = 6.9673\ \text{m/s}$$

Resp.: 6.973 m/s

27. Un bloque de 10 kg se desliza sin rozamiento desde A hasta B siguiendo la trayectoria de la figura. Durante el movimiento está solicitado por la fuerza $\vec{F}$ = (2x^2 , 3y^2, z^2) N. Sabiendo que la velocidad en A es 20 m/s, calcular la velocidad en B. (g = 10 m/s^2).

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(3,0,3)}^{(0,6,5)} (2x^2, 3y^2, z^2)\cdot(dx, dy, dz) = \frac{692}{3}$$

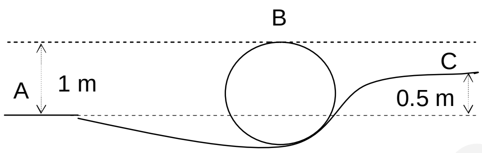


$$W = \Delta Ec = ½\ m\ (v_B^2 - v_A^2)$$

de donde $v_B = \sqrt{v_A^2 + \dfrac{2W}{m}} = 21.12$ m/s

Resp.: 21.12 m/s

28. Sobre unos carriles, sin rozamiento, inicialmente horizontales (zona A de la figura), circula un vagón. En la zona B se convierten en un bucle circular de 0.7 metros de radio. Finalizan en C, de nuevo horizontalmente. ¿Con qué velocidad habrá que lanzar el vagón desde A para que llegue a C rizando el rizo en B? ¿Con qué velocidad llegará en este caso a C?



En B el móvil está animado de aceleración centrípeta en el eje vertical. Por tanto:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_B : mg = m\ \frac{v_B^2}{R}$$

$$v_B^2 = Rg.$$

Como la energía mecánica E se conserva:

$$E_A = E_B : ½\ m\ v_A^2 = mgh_B + ½\ m\ v_B^2 \qquad v_A = \sqrt{(2h_B + R)g}$$

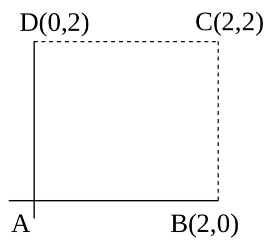
Resp.: v_A = 5.1439 m/s

$$E_A = E_C : ½\ m\ v_A^2 = mgh_C + ½\ m\ v_C^2 \qquad v_C = \sqrt{v_A^2 - 2gh_C}$$

Resp.: v_C = 4.0817 m/s

29. Sobre una partícula actúa una fuerza $\vec{F}$ = (4y, 5) (unidades en el S.I.). Demostrar que no es conservativa calculando el trabajo realizado para desplazarse desde el origen al punto (2,2) a lo largo de dos trayectorias: una según el eje X, hasta el punto (2,0) y después continúa paralelamente al eje Y; y la otra que discurre primero por el eje Y, hasta el punto (0, 2) y después continúa paralelamente al eje X.

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} 4ydx + 5dy$$



En AB: y = 0, dy = 0 $W_{AB} = \int 4\cdot 0\cdot dx + \int 5\cdot 0 = 0$

En BC: x = 2, dx = 0; $W_{BC} = \int 4y\cdot 0 + \int_0^2 5dy = 10$

Resp.: $W_{AB} + W_{BC} = 10$

En AD: x = 0, dx = 0; $W_{AD} = \int 4y\cdot 0 + \int_0^2 5dy = 10$

En DC: y = 2, dy = 0; $W_{DC} = \int_0^2 4\cdot 2dx + \int 5\cdot 0 = 16$

Resp.: $W_{AD} + W_{DC} = 26$

Nota: El rotacional de $\vec{F}$ es 4 $\vec{j}$. *Por tanto, la integral depende del camino elegido.*

30. Una partícula de masa m gira en una trayectoria circular de radio R, con una aceleración normal que varía con el tiempo según $a_n = kt^2$, donde k es constante. Hallar el valor medio de la potencia durante los primeros T segundos.

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = m\ \vec{a}_t\cdot\vec{v} = m\ (dv/dt)\ v$$

$$a_n = kt^2 = v^2/R$$

$$v = \sqrt{kR}\,t\ ;\ dv/dt = \sqrt{kR}$$

$$P = mkRt$$

$$Pm = \frac{1}{T}\int_0^T mkRt\cdot dt = ½\ mkRT$$

Resp.: ½ mkRT

31. Se lanza una pelota de 15 gramos mediante una pistola que posee un muelle cuya constante es 600 N/m y que puede comprimirse hasta 5 cm. Calcular: a) la altura que puede alcanzar la pelota si se dispara verticalmente; b) la distancia horizontal máxima que puede recorrer si se dispara con el ángulo adecuado.

a)

$$½\ k\ x^2 = mgh;\ ½\cdot 600\cdot 0.05^2 = 0.015\cdot 9.8\cdot h$$

Resp.: h = 5.102 m

b)

$$½\ k\ x^2 = ½\ mv^2;\ \text{ y con } 45º,\ \ x_{max} = \frac{v^2}{g} = \frac{kx^2}{mg} = \frac{600\cdot 0.05^2}{0.015\cdot 9.8} = 2h$$

Resp.: $x_{max} = 10.204$ m

32. Un esquiador de 70 kg inicia el descenso desde la parte superior de una colina circular con una velocidad inicial pequeña. Despreciando el rozamiento, calcular: a) la velocidad en función de α; b) el ángulo α en el que pierde el contacto con la pendiente.

a)

En Fig. 1: $½\ mv^2 = mgR\ (1 - \cos\alpha)$

Resp.: $v = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)}$

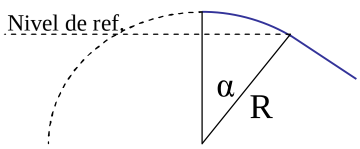


Fig.1

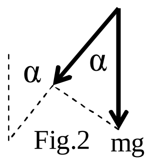


Fig.2

b)

En Fig. 2, la componente del peso mg cos α es la única fuerza que actúa en dirección radial. Por tanto, debe ser igual al producto de la masa por la aceleración centrípeta:

$$mg\cos\alpha = m\ v^2/R.$$

Si introducimos el valor de v calculado en a), obtenemos cos α = ⅔.

Resp: 48º 11' 23"

33. Desde la superficie de la Tierra se empieza a levantar un cuerpo de masa m aplicándole una fuerza que varía con la altura h según la ley $\vec{F} = 2(k\,h - 1)\,m\,\vec{g}$, donde k es una constante positiva. Determinar el incremento de la energía potencial en la primera mitad del camino de ascenso y el trabajo de esta fuerza.

El trabajo que realiza la fuerza F debe incrementar la energía potencial en la cantidad mgH cuando el cuerpo alcance la altura H. Por tanto:

$$W = \int_0^H \vec{F}\cdot d\vec{r} = -mg\int_0^H 2(kh-1)dh = mgH$$

Hay que tener presente que, si dh es positivo, el vector g será negativo, de ahí el signo menos que colocamos en la segunda integral. Si resolvemos la integral y despejamos k deducimos: k = 1/H.

El trabajo en la primera mitad del recorrido se calcula con la misma integral anterior sustituyendo el valor de k y poniendo H/2 como límite superior de integración, obteniendo:

Resp.: La variación de energía potencial es ½ mgH y W = ¾ mgH

34. Un bloque de 5 kg se sujeta contra un muelle, cuya constante es 20 N/cm, comprimiéndolo 3 cm. Se deja en libertad y el muelle se alarga empujándolo por una superficie horizontal rugosa con un coeficiente de rozamiento 0.2. a) Determinar el trabajo ejercido por el muelle cuando se alarga desde la posición comprimida hasta la de equilibrio; b) calcular el trabajo ejercido por la fricción sobre el bloque entre las mismas posiciones; c) determinar la velocidad del bloque cuando el muelle está en la posición de equilibrio; d) si el bloque no estuviera unido al muelle, ¿qué distancia recorrería sobre la superficie rugosa?

a)

$$W_e = ½\ k\ x^2 = ½\ 2000\cdot 0.03^2$$

Resp.: W_e = 0.9 J

b)

$$W_R = -F_R\ x = -0.2\cdot 5\cdot 9.8\cdot 0.03$$

Resp.: W_R = –0.294 J

c)

$$W_T = \Delta Ec;\ W_e + W_R = ½\ mv^2$$

$$0.9 - 0.294 = ½\cdot 5\cdot v^2$$

Resp.: v = 0.492 m/s

d)

$$W_T = \Delta Ec$$

$$-F_R \cdot x = 0 - ½\ mv^2$$

$$-0.2\cdot 5\cdot 9.8\cdot x = -½\cdot 5\cdot 0.492^2$$

Resp.: x = 6.184 cm

35. Un motor eléctrico, cuyo rendimiento es del 85%, acciona un montacargas que pesa vacío 437 kg y que puede cargarse con 1537 kg más. Ha de elevarse hasta 24.6 metros

en 35 segundos. a) calcular la potencia media del motor; b) si el arranque (tiempo que tarda en adquirir la velocidad de ascensión) lo realiza en 2.1 segundos, determinar la potencia del motor en ese intervalo; c) calcular la potencia necearia para subir el montacargas vacío a la misma velocidad.

a)

La potencia útil P_u es el trabajo que realiza en la unidad de tiempo en subir a plena carga:

$$P_u = W/t = \text{peso}\cdot h/t = (437 + 1537)\cdot 9.8\cdot 24.6/35 = 13596.912 \text{ W}$$

Para calcular la potencia media P_m hay que tener en cuenta el rendimiento $\eta = P_u/P_m$:

$$P_m = 13596.912/0.85$$

Resp: 15.996 kW

b)

Suponemos que durante el arranque (t_1=2.1s) se produce un m.r.u.a. que parte del reposo, y que el resto (t_2=32.9 s) se realiza según un m.r.u. El camino recorrido serán los 24.6 metros. Por tanto:

$$s = ½\, at_1^2 + vt_2 \quad \text{como } v = at_1$$

$$s = ½\, vt_1 + vt_2;\ 24.6 = ½\, v\cdot 2.1 + v\cdot 32.9$$

$$v = 0.7246 \text{ m/s}$$

La altura alcanzada durante el arranque es $h' = ½\, vt_1 = 0.761$ m. El trabajo útil necesario para realizar la operación de arranque será $W_u = mgh' + ½\, mv^2 = 15236.52$ J. La potencia útil es $W_u/t_1 = 7255.486$ W.

La potencia media durante el arranque será 7255.486/0.85

Resp.: 8.536 kW

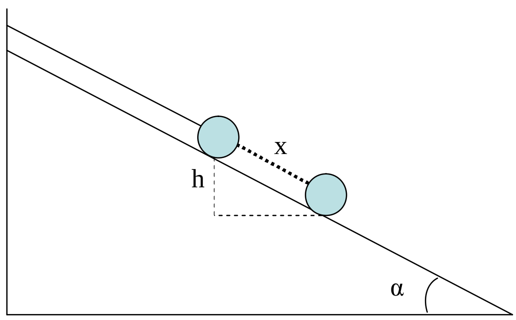
c)

En vacío la potencia media necesaria será:

$$mgv/\eta = 437\cdot 9.8\cdot 0.7246/0.85$$

Resp.: 3.651 kW

36. Se dispone de una cuerda elástica de longitud natural L y constante k. Cuando se cuelga de ella verticalmente un objeto de masa m, se alarga hasta una longitud L'. Uno de los extremos de la cuerda se ata a la parte superior de un plano inclinado sin rozamiento que forma 30º con la horizontal. Una vez que la cuerda descansa sobre el plano, se ata a ella el objeto de masa m, que se libera desde una posición en que la cuerda posee su longitud original. Calcular la distancia recorrida por el objeto a lo largo del plano antes de alcanzar el primer punto de reposo.



Si se cuelga el objeto verticalmente, en la posición de equilibrio su peso es igual a la fuerza recuperadora:

$$mg = k(L' – L)$$

Así calculamos k.

En la figura, la energía potencial mgh (con h = x sen α) se convierte en elástica ½ k x^2. Por tanto:

$$mgx \text{ sen } \alpha = \frac{1}{2} \frac{mg}{L'-L} x^2$$

$$x = 2(L' - L) \text{ sen } \alpha.$$

Con α = 30º resulta:

Resp.: x = L' – L

37. Se lanza una pelota a 19.6 m/s formando 15º con la horizontal y rebota en una pared sin rozamiento situada a 4.9 m, de manera que vuelve al punto de lanzamiento. Calcular el coeficiente de restitución.

$$v_o = 19.6 \text{ m/s}; \alpha = 15º; d = 4.9 \text{ m}$$

La velocidad de salida es:

$$\vec{v}_o = v_o (\cos\alpha\, \vec{i} + \text{sen}\,\alpha\, \vec{j})$$

Al cabo de t_1 segundos recorre: d = $v_o t_1$ cos α, por tanto t_1 = d/(v_o cos α). Además, la velocidad horizontal se mantiene hasta t_1, pero la vertical se reduce debido a la gravedad. Por tanto, la velocidad antes de impacto es:

$$\vec{v}_1 = v_o \cos\alpha\, \vec{i} + (v_o \text{ sen }\alpha - gt_1)\, \vec{j}$$

La altura h a la que impacta es $v_o t_1$ sen α – ½$g t_1^2$. Sustituyendo t_1 obtenemos:

$$h = d \text{ tag } \alpha - \frac{gd^2}{2v_o^2 \cos^2 \alpha}$$

Desde esa posición, con una velocidad $\vec{v}_2 = -v_{2x}\, \vec{i} + v_{2y}\, \vec{j}$, rebota hasta alcanzar de nuevo la posición de partida al cabo de t segundos más. Por tanto:

(1) $$d = v_{2x} t$$

(2) $$0 = h + v_{2y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Al no existir rozamiento, no se produce pérdida de velocidad *en el eje vertical* durante el choque. Por tanto:

$$v_{2y} = v_{1y} = v_o \text{ sen } \alpha - gt_1 = v_o \text{ sen } \alpha - g \frac{d}{\cos\alpha}$$

Sustituyendo esta expresión en (2) obtenemos una ecuación de segundo grado en t, cuya solución (introduciéndole los datos) es:

$$t = \frac{1}{4\cos\alpha} + \sqrt{\text{tg }\alpha}$$

En (1) aplicamos un coeficiente de restitución k, tal que $v_{2x} = k v_o \cos\alpha$. Por tanto:

$$d = k v_o t \cos\alpha$$

De donde obtenemos definitivamente:

Resp.: $k = \frac{1}{3}$

0o0

Otra forma más elegante:

Si $t_1 = d/v_x$; $t_2 = d/kv_x$; con $v_x = v_o \cos \alpha$. Como la pelota regresa la punto de partida (altura cero) al cabo de $t_1 + t_2$ segundos, la gravedad está actuando ese tiempo en sentido contrario a la velocidad vertical que en todo momento tiene la pelota, de tal manera que:

$$v_o \operatorname{sen} \alpha (t_1 + t_2) - ½ g (t_1 + t_2)^2 = 0$$

Por tanto:

$$v_o \operatorname{sen} \alpha = ½ g (t_1 + t_2)$$

Si sustituimos t_1 y t_2, podemos despejar k:

$$k = \frac{gd}{v_o^2 \operatorname{sen} 2\alpha - gd}.$$

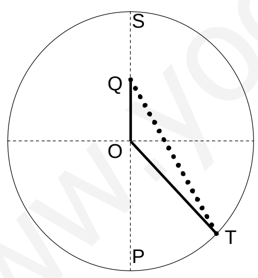
Introducidos los datos, obtenemos el mismo valor de k.

38. Un móvil de masa M gira sin fricción en el exterior de un carril circular de radio R y centro O. Se mueve bajo la acción de la gravedad y de un resorte de constante k, con el extremo unido a un punto fijo Q tal que OQ = ½ R. El resorte está sin tensión cuando el móvil está en S. a) Si el móvil se encuentra en T, hallar la energía potencial del móvil en función del ángulo α que forma OQ con OT; b)determinar la energía cinética mínima que debe tener el móvil en S para que llegue a recorrer toda la circunferencia.

a)

Tomando S como nivel cero de la energía potencial gravitatoria E_G, en T dicha energía es:

$$E_{GT} = -Mg [R + R \cos (180 - \alpha)] = MgR (\cos \alpha - 1)$$

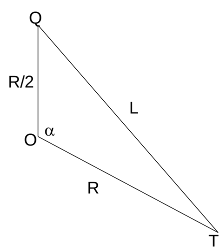


La energía potencial elástica en T es

$$E_{ET} = ½ k x^2$$

con $x = L - ½R$; pero aplicando el teorema del coseno al triángulo QOT:

$$L^2 = (½ R)^2 + R^2 - 2(½ R)R \cos \alpha$$



por tanto:

$$x = 0.5R(\sqrt{5 - 4\cos\alpha} - 1)$$

de donde

$$E_{ET} = 0.125\, kR^2 (\sqrt{5 - 4\cos\alpha} - 1)^2$$

Así deducimos que la energía potencial en T, Ep_T, es:

$$Ep_T = E_{GT} + E_{ET}$$

Resp.: $Ep_T = MgR (\cos \alpha - 1) + 0.125\, kR^2 (\sqrt{5 - 4\cos\alpha} - 1)^2$

b)

La energía potencial gravitatoria en S es cero: $E_{GS} = 0$.

La energía potencial elástica en S es:

$$E_{ES} = kR^2(\sqrt{5-4\cos 0}-1)^2 = 0$$

y la energía cinética en S es Ec_S. Por tanto, la energía total en S, E(S), es la suma de las tres anteriores:

$$E(S) = E_{GS} + E_{ES} + Ec_S = Ec_S$$

La energía potencial gravitatoria es P es:

$$E_{PS} = Mg\,(-2R) = -2MgR$$

La energía potencial elástica en P es:

$$E_{EP} = 0.125\,kR^2(\sqrt{5-4\cos 180}-1)^2 = ½kR^2$$

y la energía cinética *mínima* en P, Ec_{Pmin}, debe ser cero.

Por tanto, la energía total *mínima* en P, $E(P_{min})$, es la suma de las tres anteriores:

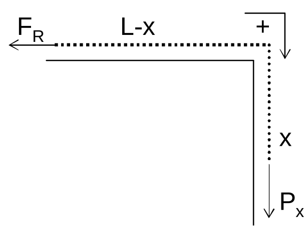
$$E(P_{min}) = E_{GP} + E_{EP} + Ec_{Pmin} = -2MgR + ½kR^2$$

Como $E(S) = E(P_{min})$, deducimos que:

Resp.: $Ec_{min} = -2MgR + ½kR^2$

39. Colocamos una cuerda flexible de longitud L sobre una mesa de tal forma que parte de ella cuelga por un extremo. Se deja caer desde una posición en la que se equilibran el peso del trozo que cuelga y el rozamiento dinámico de coeficiente μ. Calcular la velocidad de la cuerda cuando el extremo que está sobre la mesa llega al borde de la misma.

$$d = \frac{M}{L} = \frac{M_{L-x}}{L-x} = \frac{M_x}{x}$$



La fuerza resultante que actúa sobre la cuerda es $F = P_x - F_R$.

$$P_x = M_x\,g = dxg; \quad F_R = \mu M_{L-x}g = \mu d(L-x)g$$

Sustituyendo d = M/L obtenemos F:

(1) $$F = \frac{Mg}{L}\left[x - \mu(L-x)\right]$$

El trabajo de F se emplea en incrementar la energía cinética. Si partimos de una situación inicial sin velocidad ni aceleración con $x = x_o$, cuando el extremo de la cuerda llegue al borde de la mesa el valor de x será L. De donde:

(2) $$\int_{x_o}^{L} F dx = \frac{1}{2}Mv^2$$

Para determinar x_o basta considerar que F es cero en el instante inicial (sin aceleración):

$$x_o - \mu\,(L - x_o) = 0 \;\Rightarrow\; x_o = \mu L/(1+\mu).$$

Introduciendo x_o y (1) en (2), resolviendo la integral y despejando v, obtenemos:

Resp.: $v = \sqrt{\dfrac{gL}{1+\mu}}$

40. Dos partículas de 4 y 6 kg están situadas en los puntos (0,3) y (4,0) del plano OXY y se mueven a 2 $\vec{i}$ y 3 $\vec{j}$ m/s respectivamente. a) calcular el momento angular total respecto a O y respecto al sistema de referencia del cdm; b) determinar la energía cinética total relativa a O y al sistema de referencia del cdm; c) supongamos ahora que las partículas están unidas a un resorte de constante $2\cdot10^3$ N/m, incialmente sin estirar, ¿cómo afecta a la posición del cdm?; d) si en un instante el resorte está alargado 4 cm, hallar las energías cinética y potencial del sistema.

$$m_1 = 4;\; m_2 = 6;\; \vec{r}_1 = 3\vec{j}\,;\; \vec{r}_2 = 4\vec{i}$$

a)

$$\vec{L}_o = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 = 3\vec{j} \times 8\vec{i} + 4\vec{i} \times 18\vec{j} = 48\vec{k}$$

Resp.: $48\vec{k}$

Calculamos $\vec{r}_{cm}$ y $\vec{v}_{cm}$ con las expresiones:

$$(m_1 + m_2)\,\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

$$(m_1 + m_2)\,\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Obtenemos:

$$\vec{r}_{cm} = 2.4\vec{i} + 1.2\vec{j}$$

$$\vec{v}_{cm} = 0.8\vec{i} + 1.8\vec{j}$$

Las posiciones relativas al cdm $\vec{r}_{1cm}$ y $\vec{r}_{2cm}$ son:

$$\vec{r}_{1cm} = \vec{r}_1 - \vec{r}_{cm} = -2.4\vec{i} + 1.8\vec{j}$$

$$\vec{r}_{2cm} = \vec{r}_2 - \vec{r}_{cm} = 1.6\vec{i} - 1.2\vec{j}$$

Y las velocidades relativas al cdm $\vec{v}_{1cm}$ y $\vec{v}_{2cm}$:

$$\vec{v}_{1cm} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = 1.2\vec{i} - 1.8\vec{j}$$

$$\vec{v}_{2cm} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} = -0.8\vec{i} + 1.2\vec{j}$$

Sustituimos los datos anteriores en $\vec{L}_{cm} = \vec{r}_{1cm} \times m_1\vec{v}_{1cm} + \vec{r}_{2cm} \times m_2\vec{v}_{2cm}$ y obtenemos:

Resp.: $\vec{L}_{cm} = 14.4\vec{k}$

b)

$$Ec_o = ½\, m_1 v_1^2 + ½\, m_2 v_2^2 = ½\; 4\cdot4 + ½\; 6\cdot9$$

Resp.: Ec_o = 35 J

$$Ec_{cm} = ½\,(m_1 + m_2)\,v^2_{cm} = ½\,(4+6)\,(0.8^2 + 1.8^2)$$

Resp.: Ec_{cm}= 19.4 J

de donde deducimos también que $Ec_{1cm} + Ec_{2cm} = Ec_o - Ec_{cm} = 35 - 19.4 = 15.6$ J

c)

El resorte no afecta al movimiento del cdm ni a su posición porque introduce fuerzas internas al sistema.

d)

La energía *interna* del sistema U, constituida por la suma de las energías cinéticas de cada partícula referida al cdm y la energía potencial elástica que tenga acumulada, *debe permanecer constante*. Si inicialmente el resorte no estaba alargado, el valor de U será sólo el de la energía cinética de las dos partículas (referida al cdm): 15.6 J. Cuando, a expensas de U, el resorte se alargue 0.04 m, se acumulará en el sistema una energía potencial elástica:

$$\tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2}\, 2000 \cdot 0.04^2 = 1.6 \text{ J}$$

quedando una energía cinética residual en las partículas de 15.6 – 1.6 = 14 J. Por tanto:

Resp.: Energía potencial elástica: 1.6 J
Energía cinética: 14 J

41. Una partícula se mueve en una dimensión bajo un campo de fuerzas conservativo. Su energía potencial viene dada por la expresión $U(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$ (con x en m y U en J). Determinar: a) la fuerza f(x) que actúa sobre dicha partícula; b) el trabajo que realiza el campo cuando la partícula se desplaza desde el punto $x_1 = \pi/6$ hasta $x_2 = \pi/3$.

a)

$$f(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d\,\frac{\text{sen } x}{x}}{dx} = -\frac{x\cdot\cos x - \text{sen } x}{x^2}$$

Resp.: $f(x) = \dfrac{\text{sen x - x cos x}}{x^2}$

b)

$$W = -\Delta U = U(x_1) - U(x_2) = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} - \frac{\text{sen}\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}$$

Resp.: W = 0.1279363 J

42. La fuerza de resistencia ejercida por el agua sobre el casco de un determinado buque de $12\cdot10^6$ kg, para velocidades de 10 a 20 km/h, es una función de la velocidad del tipo $F = -kv^3$. a) Calcular k sabiendo que, cuando el motor suministra una potencia de 4 MW, la velocidad límite es 18 km/h; b) determinar la distancia recorrida por el buque lanzado y con el motor parado mientras su velocidad disminuye de 16 a 13 km/h, ¿cuál es la duración de este decrecimiento?

a)

Para vencer el rozamiento, la potencia suministrada debe ser igual al valor absoluto de F multiplicado por la velocidad v:

$$P = Fv = kv^4$$

Cuando el motor suministra 4 MW = $4\cdot10^6$ W estamos en presencia de la velocidad *límite* de 18 km/h = 5 m/s, es decir, se consume *toda* la potencia *suminitrada* por el motor:

$$4 \cdot 10^6 = k \cdot 5^4$$

Por tanto:

Resp.: k = 6400

b)

Si el buque está lanzado con el motor parado la única fuerza que está actuando es el rozamiento con el agua. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$-kv^3 = m\,\frac{dv}{dt}$$

Separando variables:

$$\frac{dv}{v^3} = -\frac{k}{m}dt$$

Integrando el primer miembro entre v_1 y v y el segundo miembro entre 0 y t, obtenemos:

(1) $$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_1^2} + \frac{2kt}{m}}}$$

de donde:

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{v_1^2} + \frac{2kt}{m}}}$$

Integrando el primer miembro entre 0 y x y el segundo entre 0 y t. Obtenemos:

(2) $$x = \frac{m}{k}\left(\sqrt{\frac{1}{v_1^2} + \frac{2kt}{m}} - \frac{1}{v_1}\right) = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_1}\right)$$

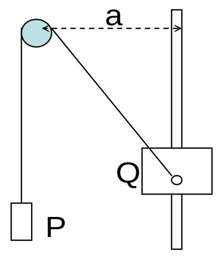
Con $v_1 = \frac{16}{3.6}$ y $v = \frac{13}{3.6}$ m/s en (1) obtenemos el valor de t:

Resp: t = 24.4 s

y en (2) calculamos la distancia recorrida:

Resp: x = 97.4 m

43. Un cordón flexible, que pasa por una polea muy pequeña, lleva en sus extremos dos masas de P y Q kg. El segundo resbala a lo largo de una barra perfectamente pulida. Hallar la velocidad de Q en función del camino recorrido, suponiendo que en el instante inicial se encuentra en reposo a la altura de la polea.



Mientras Q baja la distancia x, P sube $y = (x^2 + a^2)^{½} - a$.

Llamando $f = x^2 + a^2$, tenemos:

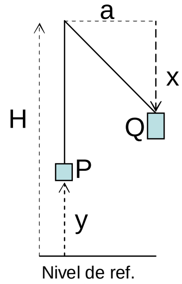
$$y = \sqrt{f} - a$$

El incremento de energía potencial ΔU que experimenta el sistema P y Q es:

$$\Delta U = \Delta U_P + \Delta U_Q$$

con $\Delta U_P = 0 - Pg(\sqrt{f} - a)$ y $\Delta U_Q = QgH - Qg(H - x) = Qgx$

Por tanto:



$$\Delta U = Qgx - Pg(\sqrt{f} - a)$$

La velocidad de P es:

$$v_P = dy/dt = x\, f^{-½}\, dx/dt = x\, f^{-½}\, v_Q.$$

Como $\Delta U = \Delta Ec$:

$$Qgx - Pg(\sqrt{f} - a) = ½\, Q\, v_Q^2 + ½\, Px^2 f^{-1} v_Q^2$$

Deducimos que:

Resp: $v_Q = \sqrt{2gf \dfrac{Qx - P(\sqrt{f} - a)}{Px^2 + Qf}}$

44. La cantidad de energía que un cierto sistema pierde por unidad de tiempo en un instante determinado es directamente proporcional a la energía total del sistema en ese instante. a) Determinar una ecuación diferencial que relacione la energía E con su variación por unidad de tiempo según la hipótesis del enunciado; b) resolver la ecuación diferencial para obtener una ecuación general correspondiente a la energía del sistema en función del tiempo; c) hallar la constante de integración sabiendo que se pierde el 10% de energía en 10 segundos; d) en estas condiciones, ¿cuánto tiempo necesitará el sistema para perder la mitad de su energía?

a)

$$\frac{dE}{dt} = -C\cdot E$$

Resp.: $\dfrac{dE}{dt} = -C\cdot E$

b)

Separando variables:

$$\frac{dE}{E} = -C\cdot dt$$

Integrando entre E_o y E y entre 0 y t:

$$\ln(E/E_0) = -C\cdot t.$$

Por tanto:

Resp.: $E = E_0 \exp(-C\cdot t)$

c)

$$0.9\, E_0 = E_0 \exp(-C\cdot 10)$$

Por tanto:

Resp.: $C = 0.0105\ s^{-1}$

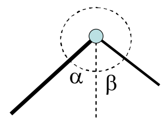
d)

$$0.5\ E_0 = E_0 \exp(-\ 0.0105\ t)$$

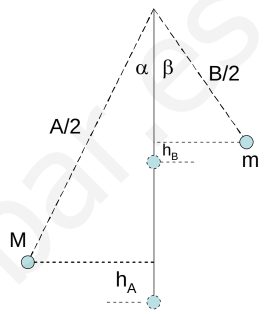
Por tanto:

Resp.: t = 65.79 s

45. Dos varillas homogéneas de masas M y m y longitudes A y B, que pueden girar independientemente alrededor de la misma articulación, caen desde su posiciones iniciales de reposo α y β. Determinar la relación que debe existir entre estos ángulos para que ambas lleguen a la posición inferior con la misma energía cinética.



Situamos en ½A y ½B los cdm de cada varilla. Las alturas h_A y h_B de M y N son:



$$h_A = ½A - ½A \cos\alpha = A\ \text{sen}^2\ ½\ \alpha$$

$$h_B = B\ \text{sen}^2\ ½\ \beta$$

Como

$$Mgh_A = ½\ M\ v_A^2$$

$$mgh_B = ½\ m\ v_B^2$$

pero las energías cinéticas, según el enunciado, han de ser iguales. Por tanto:

$$Mgh_A = mgh_B$$

$$Mh_A = mh_B$$

de donde deducimos que la relación que debe existir entre los ángulos es:

Resp.: $\dfrac{\text{sen}\,\alpha/2}{\text{sen}\,\beta/2} = \sqrt{\dfrac{mB}{mA}}$

46. Un móvil de 2 kg sigue una trayectoria horizontal merced a una fuerza horizontal dirigida siempre en la dirección de la velocidad, con una potencia constante de 1 W. Calcular: a) la ecuación del movimiento si el móvil inicia el movimiento en t = 0; b) la velocidad, la aceleración y el tiempo invertido a los 144 m de recorrido.

a)

$$P = F\cdot v = m\ \frac{dv}{dt}\ v.$$

Separando variables, integrando entre 0 y v y entre 0 y t, y despejando v:

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^t \frac{P}{m}dt \qquad v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = k\sqrt{t} \qquad \text{con } k = \sqrt{\frac{2P}{m}}$$

Como dx = v dt. Ahora integramos entre 0 y x y entre 0 y t y despejamos x:

Resp.: $x = \frac{2kt}{3}\sqrt{t}$

b)

Con P = 1 W, m = 2 kg y x =144 m determinamos el tiempo:

Resp.: t = 36 s

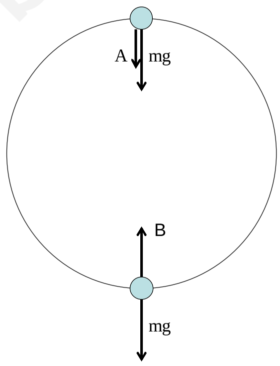
Como $v = k\sqrt{t}$ obtenemos a los 36 segundos:

Resp.: v(36) = 6 m/s

Para calcular la aceleración derivamos v respecto al tiempo y sustituimos t = 36:

Resp.: a(36)= $\frac{1}{12}$ m/s^2

47. **Una pelota de peso P atada a una cuerda se pone en rotación en una circunferencia vertical, manteniendo constante su energía mecánica. Si A es la tensión de la cuerda en el punto más alto y B en el más bajo, demostrar que B = A + 6P.**



$$B - mg = m\frac{v_B^2}{R}$$

$$A + mg = m\frac{v_A^2}{R}$$

Restando miembro a miembro:

$$B - A - 2mg = m\frac{v_B^2 - v_A^2}{R}$$

La igualdad de la energía mecánica implica que, tomando como nivel de referencia el punto más bajo:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2R) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

de donde se deduce que

$$\frac{v_B^2 - v_A^2}{R} = 4g$$

es decir

$$B - A - 2mg = m(4g)$$

de donde

$$B = A + 6mg$$

como queríamos demostrar.

TEMA VI

DINÁMICA DE ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO

1. **Si el momento cinético respecto a un punto es $5t^2$ k (S.I.), ¿cuál es el momento resultante de las fuerzas que actúan respecto al mismo punto en el instante t = 3?**

$$\vec{M}(t) = \frac{d\vec{L}}{dt} = 10t\,\vec{k}\ ;\ \text{para } t = 3$$

Resp.: $\vec{M}(3) = 30\vec{k}$

2. **Un cilindro y una esfera de masas iguales y del mismo radio ruedan sin deslizar con velocidades iguales, calcular la relación entre la energía cinética del cilindro E y la de la esfera E_1.**

$$Ec = ½\,mv^2 + ½\,I\omega^2 = ½\,mv^2 + ½\,I(v/R)^2 = ½\,v^2\,(m + I/R^2)$$

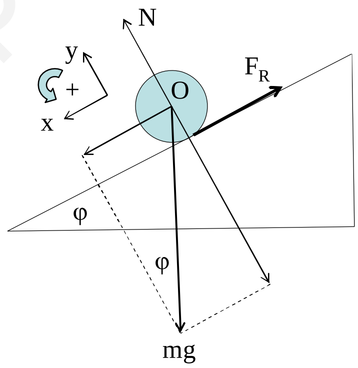
$$E = ½\,v^2(m + ½\,m);\ \ E_1 = ½\,v^2(m + {}^2\!/\!_5\ m).$$

Por tanto:

Resp.: $\frac{E_1}{E} = \frac{14}{15}$

3. **Rueda sin deslizar una bola maciza de 1 kg por un plano inclinado 30º. El coeficiente de rozamiento estático es 0.4. Calcular la fuerza de rozamiento.**

Tanto en el caso de una rueda como en el de un cilindro y una esfera que rueden *sin deslizar*, su superficie y la del plano de contacto están instantáneamente en reposo una con respecto a la otra; por tanto, el *rozamiento es de tipo estático* y, para que no haya deslizamiento, ha de ser menor o igual que su valor límite máximo $\mu_e N$.



$\Sigma F_x = ma_x$ $\qquad$ $mg\ \text{sen}\ \varphi - F_R = ma$

$\Sigma M_o = I\alpha$ $\qquad$ $F_R{\cdot}R = {}^2\!/\!_5\ mR^2\ \frac{a}{R}$

Por tanto $a = \frac{5F_R}{2m}$, que sustituimos en la ecuación de las fuerzas:

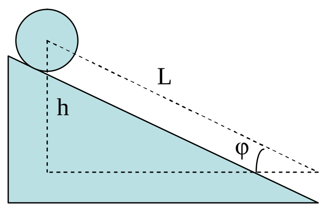
$$F_R = \frac{2}{7}\,mg\ \text{sen}\ \alpha$$

Resp.: 1.4 N

4. **En lo alto de un plano inclinado 30º de 15 m se coloca un cilindro que baja rodando sin deslizar. Calcular la velocidad de llegada al suelo con g = 10 m/s^2.**

$$mgh = ½\,mv^2 + ½\,I\omega^2$$

$$mgL\ \text{sen}\ \varphi = ½\,mv^2 + ½\,½\,mR^2\,(v/R)^2$$



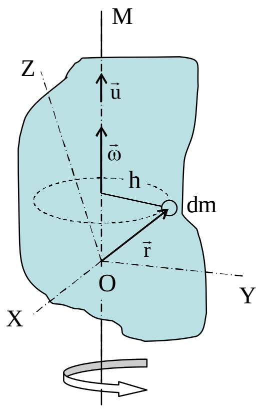
de donde:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gL\ \text{sen}\varphi}$$

Resp.: 10 m/s

5. **Un cuerpo tiene los tres momentos principales de inercia iguales de valor I, ¿cuánto vale el momento de inercia respecto a un eje que, pasando por el cdm, forma ángulos α, β y γ con los ejes principales?**

Consideremos el momento de inercia I_M de un cuerpo rígido respecto a una recta M cualquiera (ver figura) que pase por el origen de coordenadas. Si los cosenos directores de M son: α = cos α, β = cos β, γ = cos γ (es una manera de economizar su escritura), y el vector unitario $\vec{u}$ dirigido a los largo de M es: $\vec{u} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$. El momento de inercia respecto a M es:



$$I_M = \int h^2 dm = \int (\vec{r} \times \vec{u})\cdot(\vec{r} \times \vec{u})dm$$

donde el módulo de $\vec{r} \times \vec{u}$ es precisamente h, de manera que realizando el producto escalar del integrando, resulta:

$$h^2 = (y^2 + z^2)\,\alpha^2 + (x^2 + z^2)\,\beta^2 + (x^2 + y^2)\,\gamma^2 - 2xy\alpha\beta - 2xz\alpha\gamma - 2yz\beta\gamma$$

Si ahora integramos ambos miembros:

$$I_M = I_X\,\alpha^2 + I_Y\,\beta^2 + I_Z\,\gamma^2 - 2I_{XY}\alpha\beta - 2I_{XZ}\alpha\gamma - 2I_{YZ}\beta\gamma$$

donde aparecen los momentos de inercia I_X, I_Y e I_Z respecto a los ejes XYZ; y los llamados *productos de inercia* I_{XY}, I_{XZ} e I_{YZ} (con $I_{XY} = \int xydm$, análogamente I_{XZ} e I_{YZ}).

Cuando los ejes XYZ son los *principales de inercia, los productos de inercia se anulan* y el valor del momento de inercia respecto al eje M es:

$$I_M = I_X\,\alpha^2 + I_Y\,\beta^2 + I_Z\,\gamma^2$$

Como en nuestro caso $I_X = I_Y = I_Z = I$, entonces $I_M = I\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$. Pero $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.
Por tanto:

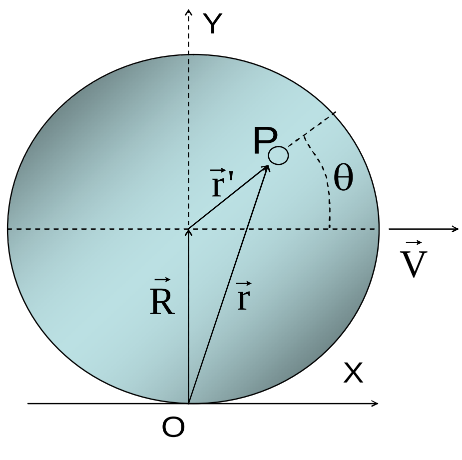
Resp.: $I_M = I$

6. Un disco de radio R y masa m rueda sin deslizar sobre un plano horizontal con velocidad $\vec{V}$; a) calcular $\vec{r}$, el vector de posición del punto P de la figura respecto al punto de contacto O; b) calcular $\vec{v}_P$, el vector velocidad de P; c) demostrar que el ángulo formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}_P$ es 90º; d) demostrar que si $\omega = \frac{V}{R}$ es el módulo de la velocidad angular *del disco*, también resulta ser $\omega = \frac{v_P}{r}$, donde v_P es el módulo de la velocidad de P y r el del vector de posición de P; e) los cálculos anteriores demuestran que en el caso de rodar sin deslizar, el movimiento es el mismo que si el disco estuviese girando *instantáneamente* alrededor del punto de contacto O con velocidad angular $\omega = \frac{V}{R}$. Calcular la energía cinética del disco suponiendo que el giro instantáneo se realiza en torno a O; f) calcular la energía cinética del disco sumando la energía cinética de traslación del cdm y la de rotación alrededor del cdm y comparar el resultado con el del apartado anterior.

a)

Resp.: $\vec{r} = (x, y) = (r'\cos\theta,\ R + r'\,\text{sen}\,\theta)$

b)



$v_{Px} = V + \frac{dx}{dt} = V + r'\,(-\,\text{sen}\,\theta)\frac{d\theta}{dt}$, pues r' es constante.

$$v_{Py} = \frac{dy}{dt} = r'\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

pero

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega = -\frac{V}{R}$$

por tanto:

Resp.: $\vec{v}_P = (V + r'\frac{V}{R}\operatorname{sen}\theta, -r'\frac{V}{R}\cos\theta)$

c)

Efectuando el producto escalar del vector velocidad de P por el vector de posición: $\vec{v}_P \cdot \vec{r} = 0$.

Resp.: $\vec{v}_P \perp \vec{r}$

d)

Calculamos el módulo de la velocidad de P:

$$v_P = \sqrt{v_{Px}^2 + v_{Py}^2} = \frac{V}{R}\sqrt{R^2 + r'^2 + 2Rr'\operatorname{sen}\theta}$$

Asimismo calculamos el módulo del vector de posición de P:

$$r = \sqrt{R^2 + r'^2 + 2Rr'\operatorname{sen}\theta}$$

Y si tenemos en cuenta que $\omega = \frac{V}{R}$, hemos demostrado que:

Resp.: $\omega = \frac{v_P}{r}$

e)

$$Ec = ½\, I_o\, \omega^2$$

Aplicamos el teorema de Steiner:

$$Ec = ½\,(½\, mR^2 + mR^2)\,\frac{V^2}{R^2}$$

Resp.: ¾ mV^2

f)

$$Ec = ½\, m\, (v_{cdm})^2 + ½\, I_{cdm}\, \omega^2 = ½\, mV^2 + ½\,(½\, mR^2)\,\frac{V^2}{R^2}$$

Resp.: ¾ mV^2

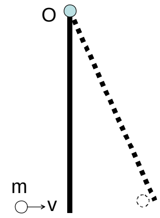
El mismo resultado que en e), como cabía esperar, según lo demostrado en d).

7. Un disco homogéneo de 12 cm de radio y 30 kg está rodando sin deslizar sobre una superficie horizontal con una velocidad del cdm de 2 m/s. Calcular el trabajo necesario para detenerlo.

$$W = \Delta Ec = ½\, mv^2 + ½\, I\omega^2 = ½\, mv^2 + ½\, ½\, mR^2\, (v/R)^2 = ¾\, mv^2 = ¾ \cdot 30 \cdot 2^2$$

Resp.: W = 90 J

8. **Un pegote de masa m y velocidad v choca inelástica y perpendicularmente con el extremo de una barra de masa 6m y longitud L, colgada verticalmente por el otro extremo alrededor del cual puede girar. Después del choque el pegote se adhiere a la barra. Hallar la velocidad angular del conjunto barra-pegote tras el choque.**



Considerando los momentos de inercia con respecto a O:

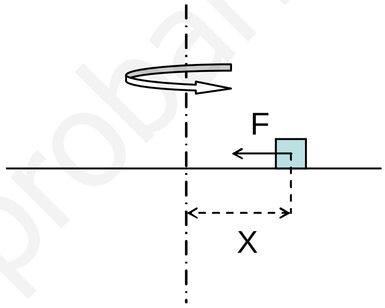
$$I\omega_{(antes)} = I'\omega'_{(después)}$$

$$mL^2\,(v/L) = (\tfrac{1}{3}\,6mL^2 + mL^2)\,\omega'$$

de donde se deduce:

Resp.: $\omega' = \dfrac{v}{3L}$

9. **Sobre un plataforma horizontal, que gira a** ω rad/s **alrededor de su eje vertical, se coloca un objeto cuyo coeficiente estático de rozamiento es** μ**. Calcular la máxima distancia al eje a la que se debe situar para que gire sin ser lanzado hacia el exterior.**



$\Sigma F = m\,a$: $\quad F = m\,a_c$

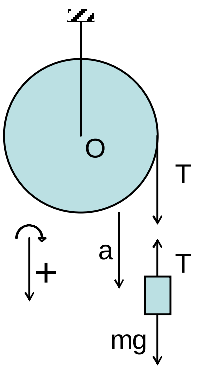
con

$F = \mu mg \qquad a_c = m\,\omega^2 x$

de donde:

Resp.: $x = \mu g/\omega^2$

10. **Una polea de momento de inercia I y radio r, está colgada del techo y gira alrededor de su eje. Tiene enrollada una cuerda sin masa de la que cuelga un cuerpo de masa m. Hallar la aceleración con la que desciende el cuerpo al desenrollarse la cuerda.**

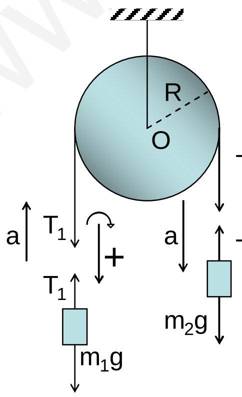


$\Sigma F = m\,a \qquad mg - T = m\,a$

$\Sigma M_o = I\alpha \qquad T\cdot r = I\,(a/r)$

Resp: $a = g\dfrac{mr^2}{I + mr^2}$

11. **Dos pesas de 1 y 2 kg cuelgan de los extremos de un hilo que laborea a través de una polea cilíndrica de 1 kg que cuelga del techo. Hallar la aceleración de las pesas.**



$m_1 = 1$ kg; $m_2 = 2$ kg; $m_{polea} = m = 1$ kg

$\Sigma F = m\,a$

Para la masa m_1: $m_1g - T_1 = -\,m_1a$

Para la masa m_2: $m_2g - T_2 = m_2a$

$\Sigma M_o = I\alpha$

Para la polea: $T_2\cdot R - T_1\cdot R = \tfrac{1}{2}\,m\,R^2\,a/R$

Resp.: $a = \dfrac{2}{7}g$

12. **a) Un cilindro, una esfera y un aro de la misma masa y radio parten del reposo y desde la misma altura sobre un plano inclinado rodando sin deslizar, ¿cuál llega al pie del plano en último lugar?; b) ahora se lanzan desde el extremo inferior del plano con la misma**

velocidad de sus cdm, ¿cuál llega más alto?; c) por último, se lanzan desde el pie del plano con la misma energía cinética, ¿cuál llega más alto?

$$mgh = ½\, mv^2 + ½\, I\omega^2$$

$$mgh = ½\, mv^2 + ½\, AmR^2\, (v/R)^2$$

donde A es 0.5 en el cilindro, 0.4 en la esfera y 1 en el aro.

a)

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+A}}$$

Como el valor de A es el mayor en el aro, la velocidad de su cdm es la menor. Por tanto:

Resp.: el aro llega el último

b)

$$h = \frac{(1+A)v^2}{2g}$$

Como el valor de A es el mayor en el aro, para la misma v:

Resp.: el aro llega más alto

c)

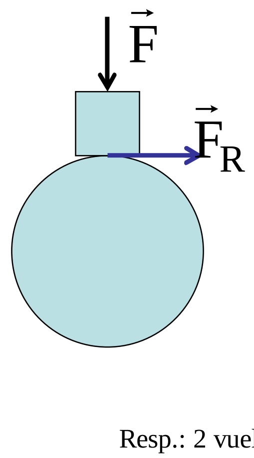
$$h = \frac{\frac{1}{2}m(1+A)v^2}{mg}$$

Como el numerador es el mismo para los tres:

Resp.: alcanzan la misma altura

13. Un disco macizo de 1 kg y 0.1 m de radio gira a razón de 10 r.p.s. Mediante una zapata de frenado le aplicamos una fuerza de 10 π N. El coeficiente de rozamiento entre la zapata y el disco es 0.25. ¿Cuántas vueltas da el disco hasta pararse?

$\Sigma M = I\alpha$ $\qquad$ $-F_R \cdot R = ½\, mR^2\, \alpha$



Pero,

$$F_R = \mu F$$

Con la anterior, permite calcular α.

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta\text{: con } \omega = 0,\ \theta = \omega_o^2/2\alpha.$$

Sustituyendo α:

$$\theta = \frac{\omega_o^2 mR}{4\mu F} = \frac{(10\cdot 2\pi)^2\cdot 1\cdot 0.1}{4\cdot 0.25\cdot 10\pi} = 4\pi \text{ rad}$$

Resp.: 2 vueltas

14. Un disco metálico de M = 100 gramos gira alrededor de su eje a 360 rpm. Le adosamos en un punto de su periferia un imán, considerado puntual, y el conjunto pasa a girar a 2 rps. ¿Cuál es la masa m del imán?

$$I\omega_{(antes)} = I'\omega'_{(después)}$$

$$\tfrac{1}{2} MR^2\omega = (\tfrac{1}{2} MR^2 + mR^2)\omega'$$

$$m = M\frac{\omega - \omega'}{2\omega'} = 100\ \frac{360/60 - 2}{2\cdot 2}$$

Resp.: 100 gramos

15. Una persona de m = 75 kg se encuentra en el borde de un disco circular de M = 200 kg y 2 m de radio que gira alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro a 4 rpm. Se pone a caminar hacia el centro y se detiene. ¿Cuál es la nueva velocidad de la plataforma?

$$I\omega_{(antes)} = I'\omega'_{(después)}$$

$$(\tfrac{1}{2} MR^2 + mR^2)\,\omega = \tfrac{1}{2} MR^2\omega'$$

$$\omega' = \omega\frac{M + 2m}{M} = 4\frac{200 + 2\cdot 75}{200}$$

Resp.: 7 rpm

16. Suponiendo que la contracción que experimenta la Tierra (supuesta esférica) a causa de un enfriamiento global, provoca un acortamiento de un radio en un valor nR, tal que 0>n>1. Calcular la nueva velocidad angular de rotación.

$$I\omega = I'\omega'$$

$$I = {}^{2}\!/_{5}\, mR^2 \quad I' = {}^{2}\!/_{5}\, m(R–nR)^2$$

Resp.: $\omega' = \omega\ \dfrac{1}{(1-n)^2} \approx \omega\ (1 + 2n)$

Supongamos que el radio se acorta un 1 por mil, entonces n = 0.001 y ω' = 1.002003004 ω. Lo que supondría que un día durase 24 horas 2 minutos 53 segundos.

17. Un tiovivo de 2 m de radio está girando sin rozamientos a π rad/s. Un muchacho de m = 60 kg da un salto radial y se sitúa en su borde, con lo que el tiovivo reduce su velocidad a 2π/3 rad/s. Determinar el momento de inercia.

Sea I el momento de inercia del tiovivo:

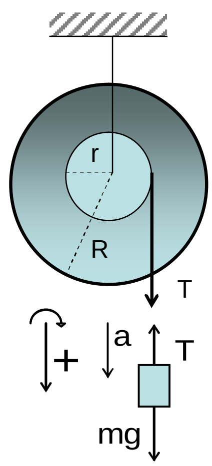
$$I\omega_{(antes)} = I'\omega'_{(después)}$$

$$I\omega = (I + mR^2)\omega'$$

$$I = mR^2\ \frac{\omega'}{\omega - \omega'} = 60\cdot 2^2\ \frac{2\pi/3}{\pi - 2\pi/3}$$

Resp.: I = 480 kg m²

18. Una rueda de masa M y radio R gira alrededor de un eje de radio r, sin masa, que pasa por su centro. En el eje se arrolla un hilo del que pende una masa m que en su descenso hace girar al sistema. Suponiendo que la masa de la rueda está concentrada en su periferia. ¿Cuál es el espacio recorrido por m al cabo de t segundos de iniciarse el movimiento?



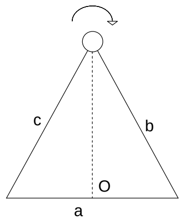
$\Sigma F = m\,a$	$mg – T = ma$
$\Sigma M = I\alpha$	$T\cdot r = MR^2\ (a/r)$

$$a = mgr^2/(mr^2 + MR^2)$$

Como el camino recorrido es $s = \tfrac{1}{2}\, at^2$, entonces:

$$\text{Resp.: } s = \frac{1}{2}\frac{mgr^2}{mr^2 + MR^2}t^2$$

19. Un triángulo equilátero de lado L está formado por tres varillas de densidad lineal λ. Tiene un momento de inercia, respecto a un eje perpendicular al plano del triángulo que pasa por un vértice, cuyo valor es $k\lambda L^3$. Calcular k.



$$I = I(a) + I(b) + I(c)$$

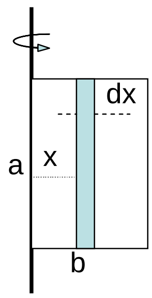
Aplicando el teorema de Steiner calculamos $I(a) = I_o + mh^2$, con $h^2 = ¾\ L^2$ y $I_o = \frac{1}{12}\ mL^2$, siendo $m = \lambda L$.

Además, $I(b) = I\ (c) = ⅓\ mL^2$

Por tanto: $I = (\frac{1}{12} + ¾ + 2·⅓)\ mL^3 = 1.5\ \lambda L^3$

Resp.: k = 1.5

20. La hoja de una bisagra de medidas a y b y espesor despreciable gira alrededor del gozne a. Calcular su radio de giro.



$$I = \int_0^b x^2 dm$$

La densidad superficial es

$$\rho = \frac{m}{ab} = \frac{dm}{a\,dx}$$

por tanto:

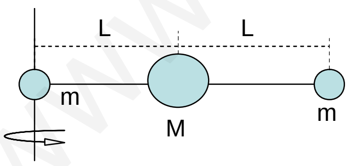
$$dm = \frac{m}{b}dx$$

de donde

$$I = \int_0^b x^2\frac{m}{b}dx = \frac{1}{3}mb^2;\ \frac{1}{3}b^2 = k^2$$

$$\text{Resp.: } k = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

21. Una varilla de $\sqrt{3}$ metros de longitud y masa despreciable lleva soldadas en sus extremos dos esferas de 1 kg y otra de 4 kg en el centro, todas puntuales. Calcular el radio de giro respecto al eje perpendicular a la varilla que pasa por uno de sus extremos.



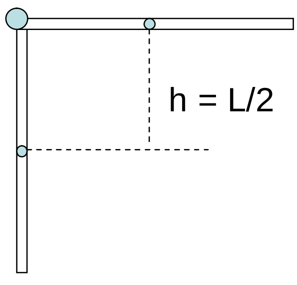
La bola de la izquierda no contribuye al valor de I:

$$I = ML^2 + m(2L)^2 = (M + 4m)L^2 = (M + 2m)k^2$$

Resp.: k = 2

22. Una varilla de masa m y longitud L cuelga verticalmente, suspendida por un extremo, de un eje horizontal sobre el que puede girar libremente. a) Calcular la velocidad con la que se debe impulsar el extremo inferior para que la varilla alcance la posición horizontal; b) si ahora se deja caer libremente partiendo de la posición horizontal, determinar la velocidad angular cuando pasa por la vertical.

a)



$$½\ I\omega^2 = mgh$$

$$½\ ⅓\ mL^2\ (V/L)^2 = mg\ ½\ L$$

$$\text{Resp.: } V = \sqrt{3gL}$$

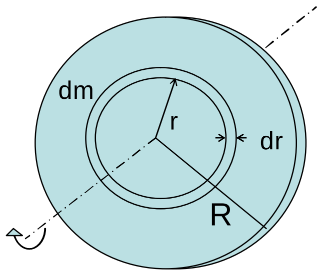
b)

$$mgh = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$mg \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} \frac{1}{3} mL^2 \omega^2$$

Resp.: $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{L}}$

23. a) Determinar el momento de inercia de un disco respecto a un eje que pase por su centro y sea perpendicular a su plano. b) Calcular el de un cilindro que gira en torno a su eje.



a)

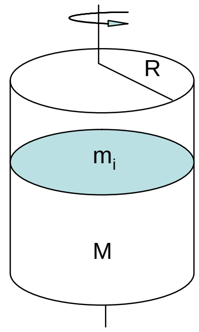
Cada elemento diferencial de masa es un anillo cuyo momento de inercia es r^2dm, pero $dm = \rho dA$, siendo ρ la densidad superficial.

Como el anillo es homogéneo $\rho = M/A$, siendo M la masa total y A el área total de valor πR^2. Además, $dA = 2\pi r dr$. Por tanto:

$$I = \int r^2\, dm = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

Resp.: $I = \frac{1}{2} MR^2$

b)



Podemos considerar al cilindro formado por una serie de discos homogéneos de masa m_i.

El momento de inercia de cada uno de estos discos es

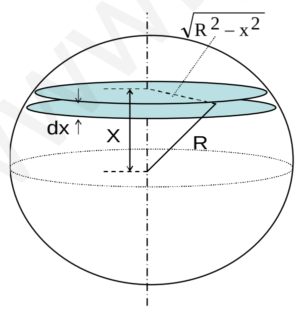
$$\frac{1}{2} m_i R^2$$

Si $M = \Sigma m_i$, el momento de inercia del cilindro completo es:

$$I = \Sigma \frac{1}{2} m_i R^2 = \frac{1}{2} R^2 \Sigma m_i$$

Resp.: $I = \frac{1}{2} MR^2$

24. Calcular momento de inercia de una esfera respecto a un eje diametral.

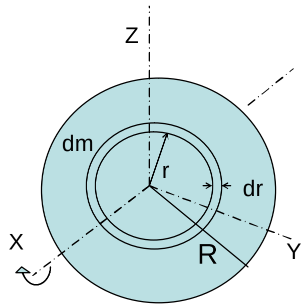


Primer método: consideramos a la esfera formada por una serie de discos de espesor dx y radio $\sqrt{R^2 - x^2}$, situados a una altura x. La masa de un disco es: $dm = (m/V)\ \pi r^2\ dx$, donde m es la masa total de la esfera y V su volumen. El momento de inercia de este disco es:

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} (m/V)\pi(R^2 - x^2)^2\ dx$$

Si integramos entre –R y R y sustituimos $V = 4/3\ \pi\ R^3$ obtenemos el momento de inercia de la esfera:

Resp.: $I = \dfrac{2}{5} mR^2$



Segundo método: empleemos el **momento de inercia respecto a un punto (o momento polar de inercia)**. Si el momento de inercia respecto al eje X de cualquier sólido es $I_X = \int(y^2 + z^2)dm$, respecto al eje Y es $I_Y = \int(x^2 + z^2)dm$ y respecto al eje Z es $I_Z = \int(x^2 + y^2)\ dm$, y los sumamos:

$$I_X + I_Y + I_Z = 2\int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

pero $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, es decir el cuadrado de la distancia al origen de coordenadas del elemento infinitesimal dm. Si definimos I_o como el momento de inercia respecto al origen: $I_o = \int r^2\, dm$, resulta:

$$2I_o = I_X + I_Y + I_Z$$

Apliquémoslo a la esfera. Tomamos un volumen elemental esférico de espesor dr, situado a una distancia r del centro: $dV = 4\pi r^2 dr$; y $dm = (m/V)\, 4\pi r^2 dr$:

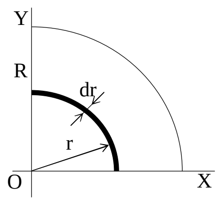
$$I_o = \int_0^R r^2 dm = 4\pi \frac{m}{V}\int_0^R r^4 dr$$

Sustituyendo $V = 4/3\ \pi\ R^3$, obtenemos $I_o = 3/5\ mR^2$.

Como en la esfera $I_X = I_Y = I_Z$, entonces $2I_o = 3\ I_X$, de donde:

Resp.: $I = \frac{2}{5} mR^2$

25. Calcular el momento de inercia de una lámina de espesor despreciable en forma de sector circular de 90º, con respecto a uno de los lados rectos.

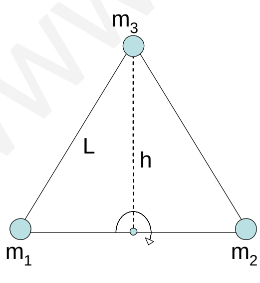


Calculamos el momento respecto al eje perpendicular al plano XY que pasa por O: $I_Z = \int_0^R r^2 dm$, donde $dm = \rho\ ½\pi\ r\ dr$, siendo ρ la densidad superficial, de valor $\frac{m}{\frac{1}{4}\pi R^2}$.

Si integramos, obtenemos: $I_Z = ½\ mR^2$. Pero, según el teorema de las figuras planas $I_Z = I_X + I_Y$, siendo $I_X = I_Y$, debido a la simetría de la figura. Por tanto:

Resp.: $I_X = I_Y = ¼\ mR^2$

26. Tres masas de 4 kg están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de 1 metro de lado. Calcular el momento de inercia del sistema respecto a un eje perpendicular al plano del triángulo, que pase por el punto medio de un lado.



$$I = m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_3h^2$$

pero $h^2 = ¾\ L$ y las tres masas son iguales a m:

$$I = \frac{5}{4} mL^2 = \frac{5}{4}\cdot 4\cdot 1^2$$

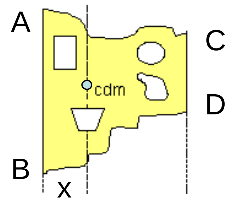
Resp.: 5 kg m^2

27. Una obra de arte de 10 kg está hecha con una plancha metálica que tiene un perfil aleatorio salvo dos bordes rectos AB y CD, paralelos, separados L = 1 m. También está perforada por muchos orificios de formas arbitrarias. Se desea colgar de una pared, de manera que los bordes paralelos queden verticales. Si los momentos de inercia respecto a AB y CD son respectivamente 16 y 21 kg m^2. ¿A qué distancia del borde AB debemos colgarla?

Debe colgarse de cualquier punto situado en la vertical del cdm.

Supongamos que la recta que, pasa por la vertical del cdm, se encuentra a una distancia x del canto AB (al cual es paralelo).

Aplicamos el teorema de Steiner a los ejes AB y CD:

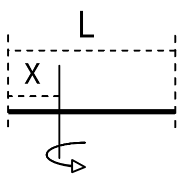


$I_{AB} = I_{cdm} + mx^2$ $\qquad$ $16 = I_{cdm} + 10x^2$

$I_{CD} = I_{cdm} + m(L - x)^2$ $\qquad$ $21 = = I_{cdm} + 10(1 - x)^2$

Resp.: x = 25 cm

28. El momento de inercia de una varilla delgada uniforme de masa m y longitud L respecto a un eje perpendicular a ella es $I = m(\tfrac{1}{3}L)^2$. Determinar la posición del eje.



Aplicamos el teorema de Steiner:

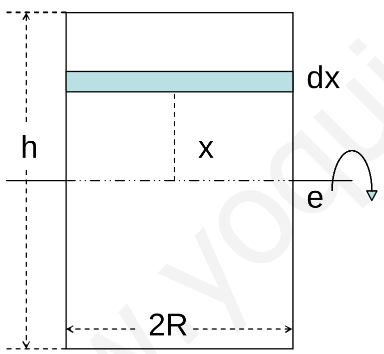
$$I = I_{cdm} + m(\tfrac{1}{2}L - x)^2$$

$$m(\tfrac{1}{3}L)^2 = \tfrac{1}{12}\,mL^2 + m(\tfrac{1}{2}L - x)^2$$

Se obtiene: $9x^2 - 9Lx + 4L^2 = 0$, cuyas soluciones son:

Resp.: $x_1 = \tfrac{1}{3}L \quad x_2 = \tfrac{2}{3}L$

29. Calcular el momento de inercia de un cilindro de masa m y radio R con respecto a un eje perpendicular a su eje geométrico que pase por el centro de su altura h.



En un disco homogéneo, como el de la figura, el momento de inercia diametral $I = I_X = I_Y$, se puede calcular a expensas de $I_Z = \tfrac{1}{2}\,mR^2$ aplicando el teorema de las figuras planas: $I_Z = I_X + I_Y$:

$$\tfrac{1}{2}\,mR^2 = 2I$$

Por tanto:

$$I = \tfrac{1}{4}\,mR^2$$

El momento de inercia de un disco de espesor dx y densidad ρ, respecto al eje e, se calcula aplicando el teorema de Steiner:

$$dI_{e(disco)} = I + x^2dm$$

con

$$dm = \rho\pi R^2dx$$

$$dI_{e(disco)} = \tfrac{1}{4}\,\rho\pi R^4dx + \rho\pi R^2x\,dx$$

Para calcular el momento de inercia del cilindro completo respecto al eje e, integramos la expresión anterior entre $-\tfrac{1}{2}$ h y $\tfrac{1}{2}$ h y sustituimos $m = \rho\pi R^2h$:

Resp.: $I_e = \tfrac{1}{4}\,m\,(R^2 + \tfrac{1}{3}\,h^2)$

30. Un motor de 0.5 CV se acopla durante 20 segundos a una rueda cuyo momento de inercia es 147 kg m^2. Calcular la velocidad angular de la rueda.

$$W = P\cdot t\ ;\ W = \Delta Ec = ½\ I\omega^2$$

por tanto

$$P\cdot t = ½\ I\omega^2 \qquad 0.5\cdot 735\cdot 20 = ½\cdot 147\cdot\omega^2$$

Resp.: $\omega = 10$ rad/s

31. Con seis varillas delgadas y homogéneas de masa m y longitud L se construye un hexágono regular. Calcular su momento de inercia respecto a un eje perpendicular a su plano y que pase por el centro.

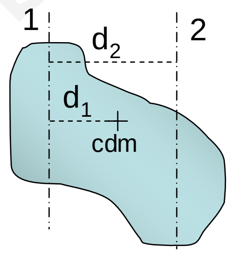
La distancia del centro del hexágono al cdm de cada varilla es la altura h de un triángulo equilátero de lado L, tal que $h^2 = ¾L^2$. Aplicando el teorema de Steiner a una varilla:

$$I_1 = I_{cdm} + mh^2 = \tfrac{1}{12}\, mL^2 + m\cdot ¾L^2 = \frac{5}{6}\, mL^2$$

El momento de inercia del hexágono es $I = 6I_1$.

Resp.: $I = 5mL^2$

32. En un cuerpo de masa m y forma arbitraria se conoce el momento de inercia I_1 respecto al eje 1, que dista d_1 metros del cdm y está situado a su izquierda. Calcular el momento de inercia I_2 respecto a un eje paralelo al anterior, situado a la derecha del cdm y que dista d_2 del eje 1.



Aplicando el teorema de Steiner a los ejes 1 y 2:

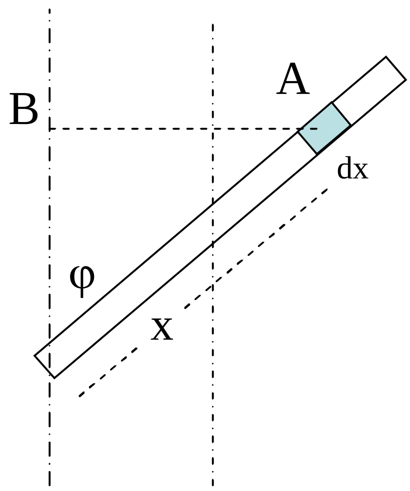
$$I_1 = I_{cdm} + md_1^2$$

$$I_2 = I_{cdm} + m(d_2 - d_1)^2$$

de donde:

Resp.: $I_2 = I_1 + m(d_2^2 - 2d_1d_2)$

33. a) Hallar el momento de inercia de una varilla homogénea de longitud L y masa m, respecto a un eje que forma un ángulo φ con ella y que pasa por uno de sus extremos. b) Calcular el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior que pase por su cdm.



a)

$$I = \int r^2 dm = \int \overline{AB}^2 dm$$

pero

$$\frac{dm}{dx} = \frac{m}{L}$$

de donde

$$dm = \frac{m}{L}\, dx$$

además, $AB = x \operatorname{sen}\varphi$; por tanto

$$I = \int_0^L (x \operatorname{sen}\varphi)^2\, \frac{m}{L}\, dx$$

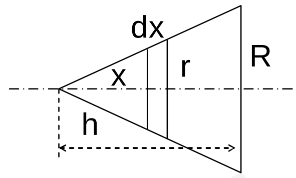
Resp.: $I = ⅓\ m\ L^2 \operatorname{sen}^2\varphi$

Y aplicando el teorema de Steiner: $I = I_{cdm} + m\ (½\ L \operatorname{sen}\varphi)^2$; de donde obtenemos:

Resp.: $I_{cdm} = \frac{1}{12}\ m\,L^2\ sen^2\ \varphi$

34. Calcular el momento de inercia de un cono respecto a su eje de simetría.

Consideramos el “cilindro” de espesor infinitesimal dx, cuyo momento de inercia es $dI = ½\ r^2\ dm$. La densidad volumétrica del cono es:



$$\rho = dm/dV = m/V$$

con $V = ⅓\ \pi R^2 h$, $dV = \pi r^2 dx$. Además, $r/x = R/h$, por tanto,

$$r = xR/h$$

de donde deducimos que:

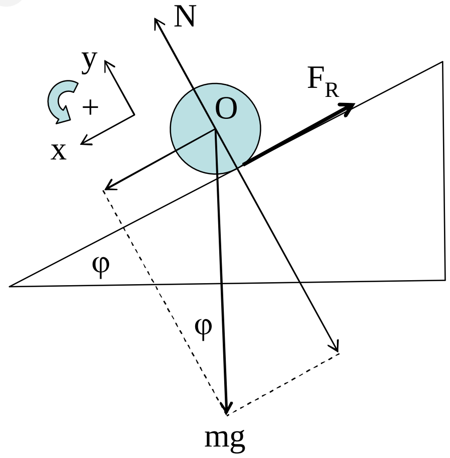
$$dI = \frac{3}{2} m \frac{R^2}{h^5} x^4 dx$$

E integrando entre 0 y h resulta :

Resp.: $I = \dfrac{3}{10} mR^2$

35. Calcular el valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre un plano inclinado 30º y un cilindro para que ruede sin deslizar.

$\Sigma F = ma \qquad mg\ sen\ \varphi - F_R = ma$
$\Sigma M = I\alpha \qquad F_R\, R = ½\ mR^2\ a/R$



De donde deducimos que

$$F_R = \frac{1}{3} mg\ sen\ \varphi$$

Para que *ruede sin deslizar*:

$$F_R \le \mu_e\ N$$

Es decir

$$\frac{1}{3} mg\ sen\ \varphi \le \mu_e mg\ cos\ \varphi$$

Por tanto

Resp.: $\mu_e \ge \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

36. Una bola homogénea de masa m y radio r rueda sin deslizar por un plano inclinado φ grados con la horizontal. Hallar a) los valores del coeficiente de rozamiento que permiten que no haya deslizamiento; b) la energía cinética después de t segundos.

La figura es análoga a la del ejercicio anterior:

$\Sigma F = ma \qquad mg\ sen\ \varphi - F_R = ma$
$\Sigma M = I\alpha \qquad F_R\, R = \frac{2}{5}\ mR^2\ a/R$

$$F_R = \frac{2}{7} mg\ sen\ \varphi;\quad a = \frac{5}{7}\ g\ sen\ \varphi$$

a)

$$\frac{2}{7} \text{ mg sen } \varphi \leq \mu_e \text{ mg cos } \varphi$$

por tanto:

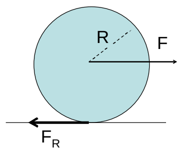
Resp.: $\mu_e \geq \frac{2}{7}$ tagφ

b)

$$Ec = ½\, m(v^2 + ½\, I\, \omega^2) = ½\, m\, (a^2t^2 + ½\, ½\, mR^2\, a^2t^2/R^2)$$

Resp.: $Ec = \frac{5}{14}\, m(gt\, sen\varphi)^2$

37. Un cilindro de masa m = 30 kg y radio R = 60 cm parte del reposo sobre un plano horizontal (coeficiente de rozamiento 0.3) tras aplicarle en su cdm y horizontalmente una fuerza variable con el tiempo F = ⅓ gt². Calcular a) el tiempo al cabo del cual empieza a deslizar; b) la aceleración del cdm cuando empieza a deslizar; c) la aceleración del cdm y la aceleración angular al cabo de 4 segundos.



Al aplicarle una fuerza creciente, al principio empieza a rodar sin deslizar:

$\Sigma F = ma$	$⅓\, gt^2 – F_R = ma$	}	Ec. 1
		} $9\, F_R = gt^2$	Ec. 2
$\Sigma M = I\alpha$	$F_R\, R = ½\, mR^2\, a/R \Rightarrow F_R = ½\, ma$	}	Ec. 3

a)

Cuando empieza a deslizar F_R es máxima: $F_R = \mu mg$. Por tanto: $t^2 = 9\mu m$

Resp.: t = 9 s

b)

En $F_R = ½\, ma$ sustituimos $F_R = \mu mg$. Por tanto, $a = 2\mu g$

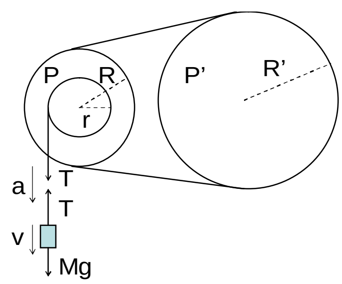
Resp.: $a = 5.88\ m/s^2$

c)

Según a), a los 4 segundos el cilindro todavía gira *sin deslizar*. Por tanto, sustituimos el valor de F_R de la Ec. 2 en la Ec. 1. Obtenemos:

Resp.: $a = 1.1615\ m/s^2$ $\alpha = a/R = 1.9358\ rad/s^2$

38. Un sistema está constituido por: una polea doble P, cuyo diámetro mayor mide 2R y el menor 2r, de momento de inercia respecto a su eje de giro I; una polea P' de diámetro 2R' y momento de inercia I'; una correa de transmisión de masa m que une ambas poleas, montada sobre el diámetro mayor de P; un cable sin masa, que se enrolla un número suficiente de veces sobre el diámetro menor de P, del que cuelga una masa M. Calcular a) la energía cinética del sistema cuando la velocidad de descenso de la masa M es v; b) la aceleración de descenso de M; c) la tensión del cable; d) la potencia que recibe P' cuando la velocidad de descenso es v.



a)

$$Ec = ½\, Mv^2 + ½\, I\omega^2 + ½\, mv_c^2 + ½\, I'\omega'^2$$

Cuando la velocidad de M sea v, la velocidad angular de P será

$$\omega = v/r$$

la velocidad lineal de la correa será

$$v_c = (v/r)R$$

y la velocidad angular de P’ será

$$\omega' = (v/r)\,(R/R')$$

Por tanto:

$$\text{Resp.:}\quad Ec = \tfrac{1}{2}\,v^2N\;;\quad \text{con } N = M + I\frac{1}{r^2} + m\frac{R^2}{r^2} + I'\frac{R^2}{r^2R'^2}$$

b)

La variación de energía potencial de M se invierte en variar la energía cinética del sistema:

$$\Delta Ep = \Delta Ec$$

Si el sistema parte del reposo:

$$\Delta Ec = Ec$$

por tanto

$$Mgh = \tfrac{1}{2}\,v^2N$$

pero, si a es la aceleración de M

$$v^2 = 2ah$$

de donde resulta:

Resp : $a = Mg/N$

c)

$$Mg - T = Ma$$

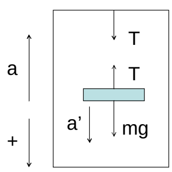
Resp : $T = M(g - a)$

d)

$$P' = I'\alpha'\omega';\ \text{con } \alpha' = (a/r)(R/R')$$

$$\text{Resp.: } P' = I'v\frac{Mg}{N}\left(\frac{R}{rR'}\right)^2$$

39. En un cilindro macizo homogéneo de masa m y radio r se enrollan unos hilos finos. Los extremos libres de los hilos se fijan al techo de un ascensor que empieza a ascender con una aceleración a, al mismo tiempo que los hilos se desenrollan. Hallar a) la aceleración a’ del cilindro con respecto al ascensor; b) la fuerza que ejerce el cilindro sobre el techo a través de los hilos.



La aceleración absoluta de descenso del cilindro es $a_c = a' - a$. Pero la responsable del giro es a’, tal que $a' = \alpha r$.

$$\Sigma F = ma \qquad mg - T = ma_c \qquad (1)$$

$$\Sigma M = I\alpha \qquad T\,r = \tfrac{1}{2}\,mr^2\,a'/r \quad (2)$$

Con (1) y (2):

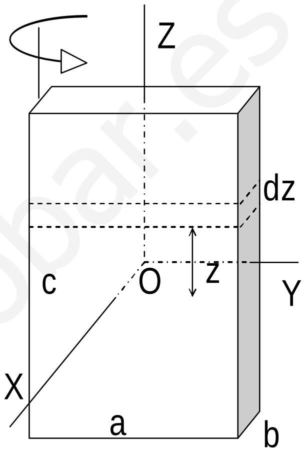
a)

Resp : a’ = ⅔ (g + a)

b)

Resp.: T = ⅓ m (g + a)

40. Calcular el momento de inercia, respecto al eje que pasa por las bisagras, de una puerta prismática de m = 50 kg, cuyas medidas son: a = 0.75 m, b = 1.95 m y c = 0.05 m.



El masa de la puerta es m = ρabc, siendo ρ la densidad.

El diferencial de masa de espesor dz es:

$$dm = \rho abdz.$$

El momento de inercia *respecto al plano* XOY es:

$I_{XOY} = \int z^2\, dm = \int \rho abz^2\, dz$, que integramos entre –½ c y ½ c:

$$I_{XOY} = \tfrac{1}{12}\, mc^2$$

Análogamente:

$$I_{YOZ} = \tfrac{1}{12}\, ma^2$$

Pero, el momento polar es:

$$I_Z = I_O = I_{XOY} + I_{YOZ} = \tfrac{1}{12}\, m(a^2 + b^2).$$

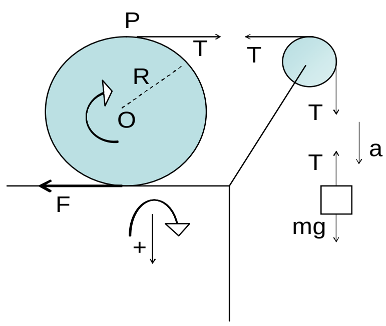
Aplicando el teorema de Steiner:

$$I = I_O + m(\tfrac{1}{2}\, a)^2 = \tfrac{1}{12}\, m(4a^2 + b^2)$$

Resp.: I = 25.22 kg m^2

41. Una masa m = 1Kg cuelga del extremo de una cuerda sin masa, que pasa por una polea sin rozamiento, después se enrola en un cilindro de masa M = 8 kg y radio R = 10 cm, que rueda sobre un plano horizontal. Calcular a) la aceleración de m; b) la tensión de la cuerda; c) la aceleración angular del cilindro

La aceleración “a” de la cuerda es la que tiene el punto P del cilindro. Pero en P se conjugan dos aceleraciones: la del cdm del cilindro a_o y la correspondiente al giro de P en torno a O; es decir:



$$a = a_o + \alpha R,$$

pero

$$a_o = \alpha R$$

por tanto

$$a = 2\alpha R$$

A la misma conclusión hubiésemos llegado aplicando el concepto de centro instantáneo del ejercicio nº 6.

Para la masa m:

$$\Sigma F = ma \qquad mg - T = ma \qquad (1)$$

$$a = 2\alpha R \qquad (2)$$

Para el cilindro:

$$\Sigma F = ma \qquad T - F = M(\alpha R) \qquad (3)$$

$$\Sigma M = I\alpha \qquad T R + FR = \tfrac{1}{2}\, mr^2\, \alpha \qquad (4)$$

Con (1), (2), (3) y (4) calculamos a, T y α:

Resp.: $a = 2.45$ m/s^2; $T = 7.35$ N; $\alpha = 12.25$ rad/s^2

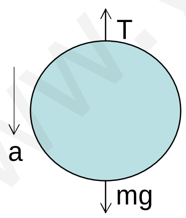
42. Dos discos inicialmente en reposo, cuyas periferias rugosas son tangentes entre sí, giran rodando uno sobre otro sin deslizamiento. Sus masas son m = 30 kg y M = 120 kg, y sus radios son r = 1 m y R = 2 m. Después de haber absorbido un trabajo W = 50π^2 J, calcular las revoluciones de cada disco.

$$W = \Delta Ec = \tfrac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2} I_2\omega_2^2$$

$I_1 = \frac{1}{2} mr^2$, $I_2 = \frac{1}{2} MR^2$, $\omega_1 = \pi n_1/30$, $\omega_2 = \pi n_2/30$, siendo n_1 y n_2 las RPM de cada disco que, al estar rodando sin deslizar uno sobre otro, cumplen la relación $n_1 r = n_2 R$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación del trabajo y despejando, obtenemos:

Resp.: $n_1 = \frac{1}{2}\, n_2 = 20\cdot\sqrt{3}$ RPM

43. Un yo-yo tiene dos discos de diámetro 2R = 6 cm y anchura h = 2 mm, unidos por otro de diámetro 2r = 1 cm y de la misma anchura. Los tres son coaxiales, homogéneos y de la misma materia. La masa del conjunto es m = 73 gramos. Se enrolla en el menor un hilo ideal que se fija por un extremo a un punto inmóvil. Calcular a) la velocidad lineal cuando el yo-yo ha descendido 60 cm partiendo del reposo; b) la tensión que tiene entonces el hilo.



$$2m_1 + m_2 = 73 \qquad m_1 = \pi R^2 h\rho \qquad m_2 = \pi r^2 h\rho$$

$$\frac{m_1}{R^2} = \frac{m_2}{r^2} = \frac{2m_1 + m_2}{R^2 + r^2} = \frac{73}{18 + 0.25}\,;\ m_1 = 36;\ m_2 = 1 \text{ (gramos)}$$

a)

$$I = 2\,\tfrac{1}{2}\, m_1R^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2r^2$$

$$mgL = \tfrac{1}{2}\, mv^2 + \tfrac{1}{2}\, I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\, v^2(m + I/r^2)$$

Resp.: v = 0.793 m/s

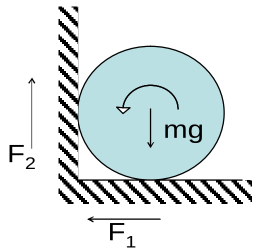
b)

$$v^2 = 2aL$$

$$\Sigma F = ma \qquad mg - T = ma$$

Resp.: T = 0.677 N

44. Un cilindro homogéneo de radio r y masa m gira alrededor de su eje hasta alcanzar una velocidad angular ω. Después de coloca dentro de un ángulo recto. El coeficiente de rozamiento con las paredes es μ. ¿Cuántas vueltas da el cilindro antes de detenerse?



La fuerza de rozamiento en cada pared es μN, siendo N la normal en cada caso.

Así, en la pared vertical la normal vale $mg - F_2$, mientras que en la horizontal es F_1. Por tanto:

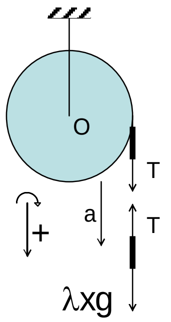
$$F_1 = \mu\,(mg - F_2) \qquad\qquad F_2 = \mu F_1$$

Calculados F_1 y F_2, con $(F_1 + F_2)r = I\alpha$, e $I = ½\ mr^2$, determinamos α.

Con $\omega^2 = 2\alpha\varphi$, y $\varphi = 2\pi n$, siendo n el número de vueltas, obtenemos:

Resp.: $n = \dfrac{\omega^2 r(1+\mu^2)}{8\pi g\mu(1+\mu)}$

45. Un cilindro macizo homogéneo de radio r y masa M puede girar alrededor de un eje horizontal fijo O. Se le enrolla un cordón fino de longitud L y masa m. Determinar la aceleración angular del cilindro en función de la longitud x de la parte del cordón que cuelga, considerando que el cdm de la parte enrollada se encuentra en el eje del cilindro.



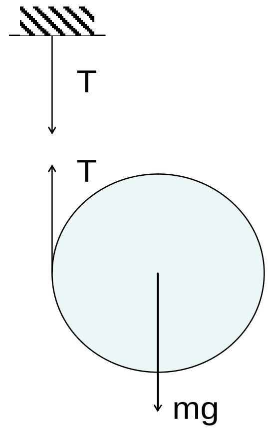
La densidad lineal de la cuerda es $\lambda = m/L$. La masa de cuerda que cuelga es λx; y la enrollada en el cilindro $\lambda(L - x)$.

$\Sigma F = ma \qquad \lambda xg - T = \lambda xa$

$\Sigma M = I\alpha \qquad T\,r = [½\ Mr^2 + \lambda(L - x)r^2]\,\alpha$

Resp.: $\alpha = \dfrac{2mgx}{rL(M+2m)}$

46. Un disco homogéneo de masa m = 2 kg y radio r = 10 cm, lleva enrollada una cuerda que cuelga del techo por un extremo. Si el sistema parte del reposo, calcular a) la aceleración del cdm del disco; b) la tensión de la cuerda; c) la velocidad angular cuando se hayan desenrollado L = 2 metros de cuerda.



$\Sigma F = ma \qquad mg - T = ma$

$\Sigma M = I\alpha \qquad T\,r = ½\ mr^2\ \dfrac{a}{r}$

a)

Resp.: $a = ⅔\ g = 6.53\ m/s^2$

b)

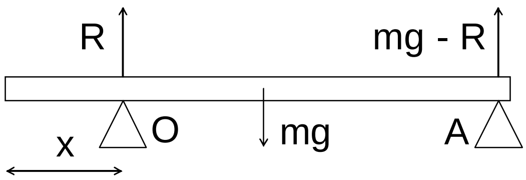
Resp.: $T = ⅓\ mg = 6.53\ N$

c)

$$\alpha = \frac{a}{r} \qquad \varphi = \frac{L}{r} \qquad \omega^2 = 2\alpha\varphi$$

Resp.: $\omega = 51.12$ rad/s

47. Una barra homogénea de longitud L, está apoyada en su extremo A y articulada en un punto O respecto al que puede girar sin rozamiento. En un cierto instante se suprime el apoyo A. Calcular a) la posición de O, de manera que la reacción en O al iniciar el giro sea la misma que la que existía en dicho punto antes de desaparecer el apoyo A; b) la velocidad alcanzada por el extremo que estaba apoyado en A, cuando la barra pase por la vertical.



a)

Antes de retirar el apoyo tomamos momentos con respecto a O:

$$mg\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{L} - x\right) - (mg - R)(L - x) = 0$$

Así obtenemos R en función de x:

$$R = \tfrac{1}{2}\, mg \frac{L}{L - x} \qquad (1)$$

Al quitar el apoyo A desaparece la reacción (mg – R):

$$\Sigma F = ma: \; mg - R = ma \qquad (2)$$

$$\Sigma M = I\alpha: \; mg\left(\tfrac{1}{2} L - x\right) = \left[I_{cdm} + m\left(\tfrac{1}{2} L - x\right)^2\right] \frac{a}{\tfrac{1}{2} L - x} \qquad (3)$$

Donde hemos aplicado el teorema de Steiner con $I_{cdm} = \tfrac{1}{12} mL^2$. De las ecuaciones 2 y 3 deducimos otra expresión de R en función de x:

$$R = \frac{mgL^2}{L^2 + 12\left(\frac{L}{2} - x\right)^2} \qquad (4)$$

Igualando (1) (4) obtenemos: $6x^2 - 5Lx + L^2 = 0$, cuyas soluciones son ½ L y ⅓ L. La primera se descarta porque el apoyo O estaría en el cdm. Por tanto:

Resp.: x = ⅓ L

b)

$$mgh = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

con h = ½ L – x = ½ L – ⅓ L

$$I = \tfrac{1}{12} mL^2 + m\left(\tfrac{1}{2} L - x\right)^2 = \tfrac{1}{12} mL^2 + m\left(\tfrac{1}{2} L - \tfrac{1}{3} L\right)^2$$

de donde deducimos que $\omega^2 = 3g/L$. Pero

$$v_A = \omega\left(\tfrac{2}{3} L\right):$$

Resp.: $v_A = 2\sqrt{\frac{gL}{3}}$

TEMA VII

TERMODINÁMICA

- Sistemas termodinámicos. Paredes
- Variables o coordenadas termodinámicas
  - Presión
  - Volumen
  - Temperatura
- Ecuación de estado. Equilibrio. Procesos reversibles
- Gases ideales. Leyes y ecuación de estado de los gases ideales
- Calor. Calor específico. Calor latente
- Trabajo termodinámico. Diagramas p–V
- Primer principio de la Termodinámica. Aplicaciones
  - Procesos cíclicos
  - Proceso isócoro
  - Proceso isóbaro. Entalpía
  - Proceso adiabático
  - Procesos en gases ideales
    - Energía interna de un gas ideal
    - Procesos isóbaros en gases ideales. Fórmula de Meyer
    - Procesos adiabáticos en gases ideales. Ecuaciones de Poisson
- Segundo principio de la Termodinámica. Máquina térmica. Entropía
  - Necesidad del segundo principio de la termodinámica
  - Conversión de calor en trabajo
  - Enunciado del segundo principio de la termodinámica
  - Máquina térmica
    - Rendimiento
  - Entropía S
    - Cálculo de las variaciones de entropía en procesos reversibles
      - Proceso reversible y adiabático
      - Proceso reversible e isotermo
      - Proceso reversible no isotermo
    - Cálculo de las variaciones de entropía en procesos irreversibles
    - Cálculo de las variaciones de entropía en los cambios de fase. Medida del desorden
      - Entropía de fusión
      - Entropía de vaporización
      - La entropía como medida del desorden
- Ciclo de Carnot
  - Rendimiento del ciclo de Carnot
- Máquinas frigoríficas y bombas térmicas
  - Eficiencia de una máquina frigorífica
  - Eficiencia de una bomba térmica

1. Un calorímetro de latón (calor específico 0.09 cal/ºC/g) de 125 gramos contiene 250 gramos de hielo (calor específico 0.5 cal/ºC/g) a – 15 ºC. Calcular la cantidad de vapor de agua, a 100 ºC y a la presión normal, que es necesaria para que todo el sistema llegue a la temperatura de 15 ºC.

$$\Delta Q = m\ c\ \Delta T$$

$$\Delta Q = m\ L \text{ (en los cambios de fase)}$$

Se entiende que el calorímetro está a la misma temperatura que el hielo que contiene. Por tanto, el latón debe pasar de –15 ºC a 15 ºC:

$$\Delta Q \text{ (latón)} = 125 \cdot 0.09 \cdot 30.$$

El hielo debe pasar de hielo a –15 ºC a hielo a 0 ºC, de hielo a 0 ºC a agua a 0 ºC, y de agua a 0 ºC a agua a 15 ºC :

$$\Delta Q \text{ (hielo)} = 250 \cdot 0.5 \cdot 15 + 250 \cdot 80 + 250 \cdot 1 \cdot 15$$

Una cantidad x de vapor debe primero licuarse pasando de vapor a agua a 100 ºC. Después debe pasar de agua a 100 ºC a agua a 15ºC:

$$\Delta Q \text{ (vapor)} = x \cdot 540 + x \cdot 1 \cdot 85$$

$$\Delta Q \text{ (latón)} + \Delta Q \text{ (hielo)} = \Delta Q \text{ (vapor)}$$

$$125 \cdot 0.09 \cdot 30 + 250 \cdot 0.5 \cdot 15 + 250 \cdot 80 + 250 \cdot 1 \cdot 15 = x \cdot 540 + x \cdot 1 \cdot 85$$

Resp.: 41.54 gramos

2. Un mol de un gas ideal sufre un calentamiento isobárico de 72 ºK comunicándole 1.6 KJ de calor. Determinar: a) el trabajo realizado por el gas; b) el incremento de su energía interna y c) la magnitud γ.

a)

Al ser un calentamiento isobárico p es constante, por tanto: $\Delta W = p\ \Delta V = n\ R\ \Delta T$:

$$\Delta W = 1 \cdot 8.3149 \cdot 72$$

Resp.: 598.67 J

b)

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 1600 - 598.67$$

Resp.: 1001.33 J

c)

Al ser un gas ideal $\Delta U = n\ C_v\ \Delta T$. Como $\Delta Q = n\ C_p\ \Delta T$:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{1600}{1001.33}$$

Resp: 1.5978

3. ¿Cuántas calorías se necesitan o se desprenden al comprimir isotérmicamente 10 litros de un gas ideal a 27 ºC y 1 atm hasta reducir su volumen a la décima parte?

Al ser $\Delta T = 0$, por tratarse de un gas ideal, entonces $\Delta U = 0$. De donde:

$$\Delta Q = \Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln (V_2/V_1) = p_1V_1 \ln (V_2/V_1)$$

$$\Delta Q = 101325 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \ln (1/10) = -2333.09 \text{ J} = -557.24 \text{ cal.}$$

Resp: Se desprenden 557.24 cal

4. Un mol de un gas ideal monoatómico se encuentra a 273 ºK y 1 atm. Calcular la variación de energía interna y el trabajo realizado cuando absorbe 500 J a) a presión constante y b) a volumen constante.

Gas monoatómico: $C_p = \frac{5}{2}R$, $C_v = \frac{3}{2}R$

a)

$$\Delta Q = n\, C_p\, \Delta T \qquad 500 = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.3149 \cdot (T-273) \qquad T = 297.20\ ºK$$

$$\Delta U = n\, C_v \Delta T = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.3149 \cdot (297.20 - 273)$$

Resp.: $\Delta U = 301.87$ J

$$\Delta W = \Delta Q - \Delta U = 500 - 301.89$$

Resp.: $\Delta W = 198.13$ J

b)

$$\Delta Q = \Delta U, \text{ porque } \Delta W = 0$$

Resp.: $\Delta U = 500$ J
Resp.: $\Delta W = 0$ J

5. Una máquina de vapor trabaja entre la temperatura de la caldera a 250 ºC y la del condensador a 50 ºC y desarrolla una potencia de 8 CV. Sabiendo que el rendimiento es del 30% respecto al de una máquina ideal que trabaje entre las mismas temperaturas, hallar la cantidad de calor que debe aportar la caldera en la unidad de tiempo.

$$\eta_{Carnot} = \frac{\Delta W}{\Delta Q_a} = 1 - \frac{T_f}{T_h} = 1 - \frac{50 + 273.15}{250 + 273.15} = 0.3823$$

$$\eta = 0.3\ \eta_{Carnot} = 0.1147$$

$$\Delta Q_a = \Delta W/\eta = 8/0.1147 = 69.7533 \text{ CV} = 69.7533 \cdot 735 \text{ J/s} = 12245 \text{ cal/s}$$

Resp.: 12245 cal/s

6. En un recipiente de 5 litros, cerrado, se encuentra hidrógeno en condiciones normales. Se enfría 55 ºK. Hallar la variación de energía interna del gas y la cantidad de calor transmitido.

Tratando el hidrógeno como gas biatómico ideal:

$$\Delta U = n\, C_v\, \Delta T$$

$$n = \frac{pV}{RT}$$

$$C_v = \frac{5}{2}R$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{pV}{T}\;\Delta T = \frac{5}{2}\frac{101325{\cdot}5{\cdot}10^{-3}}{273.15}(-55)$$

Resp.: $\Delta U = -255.03$ J

Como el proceso se realiza a volumen constante, el trabajo es nulo. Por tanto:

Resp.: $\Delta Q = \Delta U$

7. En un recinto de 1 m^3 se han introducido 224 gramos de hidrógeno, 224 gramos de helio, 224 gramos de nitrógeno y también 224 gramos de oxígeno. La temperatura es de 17 ºC. Suponiéndolos gases ideales, calcular la presión de la mezcla.

Todos los gases son biatómicos. El número de moles de cada uno es:

$$n\,(H_2) = 224/2;\; n\,(He) = 224/4;\; n\,(N_2) = 224/28;\; n\,(O_2) = 224/32$$

El número total de moles es la suma: n = 112 + 56 + 8 + 7 = 183.

$$p = n\,R\,T/V = 183{\cdot}0.082{\cdot}(273.15 + 17)/1000$$

Resp.: 4.354 atm

8. Un recipiente de 1 m^3 contiene 1 kg de oxígeno a 100 ºC. Otro igual tiene 1 kg de hidrógeno a la misma temperatura. Estando el conjunto aislado del exterior, se comunican entre sí los dos recipientes de modo que ambos gases se mezclan por completo. Luego se introduce en el interior una mezcla de 4 kg de agua y 200 gramos de hielo fundente, volviendo a aislar el conjunto. Sabiendo que el calor específico molar a volumen constante de la mezcla de oxígeno e hidrógeno es 5 cal/mol, ¿cuál es la temperatura de equilibrio?

El número de moles de oxígeno es 1000/32. El de hidrógeno 1000/2.

El proceso se realiza a volumen constante.

Los 200 gramos de hielo fundente necesitan 200·80 cal para convertirse en agua a 0 ºC. Por tanto, una vez fundido el hielo, disponemos de (4000 + 200) gramos de agua a 0 ºC.

$$\Delta Q_a = n\,C_v\,\Delta T = 5\,(1000/32 + 1000/2)\,(100 - T)$$

$$\Delta Q_c = 200{\cdot}80 + (4000 + 200)\,(T - 0)$$

E igualando los calores absorbidos y cedidos, y despejando T:

Resp.: 36.41 ºC

9. En un calorímetro, cuyo equivalente es agua es 50 gramos, hay 200 gramos de agua y 20 gramos de hielo, todo a 0 ºC. Si se introducen 100 gramos de agua a 50 ºC, ¿cuál es la temperatura final?

$$(200 + 50){\cdot}(T - 0) + 20 \cdot 80 + 20{\cdot}(T - 0) = 100{\cdot}(50 - T)$$

Resp.: T = 9.189 ºC

10. Una masa de agua cae desde una altura de 854 m. Si toda la energía desarrollada se invirtiera en calentar el agua, hallar la temperatura que adquiriría si estaba a 20 ºC.

$$mgh = 4.1869\,m\,c\,\Delta T \qquad \Delta T = \frac{gh}{4.1869{\cdot}c} = \frac{9.8{\cdot}854}{4.1869{\cdot}1000}$$

Resp.: 2 ºC

11. Se colocan en el interior de un calorímetro, dotado con un termómetro y un agitador, 50 gramos de agua que se agita hasta que adquiere una temperatura estable de 15.2 ºC. Entonces se introducen 250 gramos de agua a 22.62 ºC. Se agita de nuevo hasta que se

alcanza la temperatura de equilibrio de 20.5 ºC. Las pérdidas de calor son despreciables. Determinar el equivalente en agua del calorímetro.

Los 250 gramos de agua a 22.62 ºC ceden calor a los 50 gramos de agua y a la masa m_e equivalente en agua del calorímetro:

$$250\,(22.62 - 20.5) = (50 + m_e)\,(20.5 - 15.2) \qquad \text{Resp.: } m_e = 50 \text{ gramos}$$

12. **Un montacargas sube 427 kg a una altura de 36 m a 0.6 m/s. La energía perdida por resistencias pasivas en el motor que lo acciona se transforma en calor, y su valor es tal que 100 ascensiones elevan la temperatura de una mezcla de 5 kg de hielo y 5 kg de agua a 0 ºC hasta 122 ºF. Calcular el rendimiento y la potencia en CV del motor.**

El trabajo en las 100 ascensiones es:

$$\Delta W = m_1 gh \cdot 100 = 427 \cdot 9.8 \cdot 36 \cdot 100 = 15064560 \text{ J}$$

La temperatura en ºC es:

$$(ºF - 32)\cdot 100 = ºC \cdot 180 \qquad (122 - 32)\cdot 100 = ºC \cdot 180 \qquad T = 50\ ºC$$

El calor perdido en rozamientos es:

$$\Delta Q = m_2\, L_f + (m_2 + m_3)\, c\, \Delta T = 5000\cdot 80 + (5000 + 5000)\cdot 1\cdot(50 - 0)$$
$$\Delta Q = 900000 \text{ cal} = 3768210 \text{ J}$$

El rendimiento es:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta W + \Delta Q} = \frac{15064560}{15064560 + 3768210}$$

Resp.: $\eta = 80\%$

El tiempo invertido por el montacargas en cada ascensión es el cociente entre la altura y la velocidad. El tiempo en las 100 ascensiones es 100 veces más: $\Delta t = 100\cdot 36/0.6 = 6000$ s. Y la potencia es:

$$P = \frac{\Delta W + \Delta Q}{\Delta t} = \frac{15064560 + 3768210}{6000} = 3138.795/735 \text{ CV}$$

Resp.: 4.27 CV

13. **¿Qué variación de entropía experimenta 1 gramo de hielo a 0 ºC cuando a presión normal se convierte en vapor de agua a 100 ºC?**

Durante la fusión:

$$\Delta s_f = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{4.1869 \cdot m \cdot L_f}{T} = \frac{4.1869 \cdot 1 \cdot 80}{273.15} = 1.226 \text{ J/ºK.}$$

Durante el calentamiento de 0 a 100 ºC:

$$\Delta s_c = 4.1869\, m\, c \ln (T_2/T_1) = 4.1869\cdot 1\cdot \ln(373.15/373.15) = 1.306 \text{ J/ºK}$$

Durante la vaporización:

$$\Delta s_v = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{4.1869 \cdot m \cdot L_v}{T} = \frac{4.1869 \cdot 1 \cdot 540}{373.15} = 6.059 \text{ J/ºK}$$

$$\Delta s = \Delta s_f + \Delta s_c + \Delta s_v$$

Resp: $\Delta s = 8.591$ J/ºK

14. Cinco moles de nitrógeno se comprimen desde 1 a 100 atm a la vez que su temperatura crece de –20 ºC a 200 ºC. Calcular la variación de entropía.

Considerando al nitrógeno como un gas biatómico ideal, calculamos la variación de entropía sumando la de un proceso a presión constante con la de otro a temperatura constante:

$$\Delta s = \Delta s_p + \Delta s_T = (\Delta Q/T)_p + (\Delta Q/T)_T$$

A presión constante, el calor absorbido es

$$\delta Q_p = n\, C_p\, dT.$$

A temperatura constante, la variación de energía interna es cero por tratarse se un gas ideal; por tanto, el calor es igual al trabajo:

$$\delta Q_T = \delta W = p\, dV$$

Diferenciando la ecuación de estado:

$$d(pV) = d(nRT)$$

como T es constante:

$$Vdp + pdV = 0$$

Por tanto:

$$\delta Q_T = -Vdp.$$

Sustituyendo V:

$$\delta Q_T = -nRT\, dp/p.$$

$$ds = ds_p + ds_T = nC_p\, dT/T - nR\, dp/p$$

Integrando:

$$\Delta s = n\left(C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}\right) = 5\cdot R\cdot\left(\frac{7}{2}\ln\frac{473.15}{253.15} - \ln\frac{100}{1}\right)$$

Resp.: $\Delta s = -100.45$ J/ºK

15. Un gas ideal con valores iniciales p_1 y V_1 se expande adiabática y cuasiestáticamente hasta alcanzar los valores p_2 y V_2. Calcular el trabajo y la variación de energía interna.

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{k}{V^\gamma}dV = \frac{k}{1-\gamma}\left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right) = \frac{k}{1-\gamma}\left(V_2\frac{p_2}{k} - V_1\frac{p_1}{k}\right) = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$$

Sabemos que al ser un proceso adiabático

$$\Delta W = -\Delta U$$

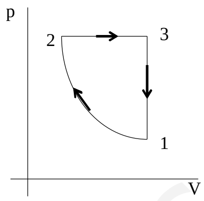
pero podemos corroborarlo a través de la última expresión calculada:

$$\Delta W = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1} = \frac{nRT_1 - nRT_2}{\frac{C_p}{C_v} - 1} = \frac{nR(T_1 - T_2)}{C_p - C_v}C_v = \frac{nR(T_1 - T_2)}{R}C_v = -nC_v\Delta T = -\Delta U$$

16. Un mol de un gas ideal cuyo C_v es 3 cal/mol/ºK, que inicialmente está a 1 atm, describe el siguiente ciclo reversible: partiendo del estado inicial, experimenta una compresión

adiabática hasta duplicar su temperatura; a continuación se calienta a presión constante y por último sufre un enfriamiento a volumen constante hasta alcanzar el estado inicial. Calcular: a) el rendimiento y b) la variación de entropía de cada una de las transformaciones.

De la relación de Meyer: $C_p - C_v = R$, con R = 2 cal/mol/ºK, deducimos que $C_p = 5$. Por tanto, el coeficiente adiabático es:



$$\gamma = C_p/C_v = 5/3$$

En el proceso 1–2:

$$T_1 \cdot V_1^{\,\gamma - 1} = T_2 \cdot V_2^{\,\gamma - 1}$$

pero

$$T_2 = 2T_1$$

por tanto

$$V_2 = \frac{V_1}{2\sqrt{2}}$$

Como

$$p_3 = p_2$$

entonces

$$T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2$$

pero

$$V_1 = V_3$$

de donde deducimos que

$$T_3 = 4\sqrt{2}\ T_1$$

a)

Para calcular el rendimiento efectuamos el cociente:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{23}} = \frac{\Delta Q_{23} - |\Delta Q_{31}|}{\Delta Q_{23}} = 1 - \frac{|\Delta Q_{31}|}{\Delta Q_{23}}$$

donde empleamos el signo negativo si, como se expresa, calculamos el valor absoluto de ΔQ_{31}. El resultado sería el mismo si pusiésemos un signo positivo, pero aplicásemos el convenio de signos, pues ΔQ_{31} es un calor "cedido".

$$\Delta Q_{23} = n\ C_p\ (T_3 - T_2) = \frac{nC_p}{nR}\ (p_3V_3 - p_2V_2),$$

Pero

$$p_3V_3 = p_1V_1 \frac{T_3}{T_1} = 4\sqrt{2}\ p_1V_1$$

$$p_2V_2 = p_1V_1\frac{T_2}{T_1} = 2\ p_1V_1$$

por tanto:

$$\Delta Q_{23} = \frac{C_p}{R}(4\sqrt{2} - 2)\ p_1V_1$$

$$\Delta Q_{31} = nC_v\,(T_1 - T_3) = \frac{nC_v}{nR}\,(p_1V_1 - p_3V_3)$$

$$\Delta Q_{31} = \frac{C_v}{R}(1 - 4\sqrt{2})\ p_1V_1$$

$$\eta = 1 - \frac{|\Delta Q_{31}|}{\Delta Q_{23}} = 1 - \frac{C_v\left|(1-4\sqrt{2})\right|}{C_p(4\sqrt{2}-2)}$$

y recordando que $C_p/C_v = 5/3$

Resp.: $\eta = 0.236$

b)

En la transformación adiabática 1–2 no se produce variación de entropía.

Resp.: $\Delta s_{12} = 0$

En el proceso 2–3:

$$\Delta s_{23} = nC_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = 1{\cdot}5{\cdot}\ln\left(\frac{4\sqrt{2}T_1}{2T_1}\right)$$

Resp.: $\Delta s_{23} = 7.5 \ln 2$

En el proceso 3–1:

$$ds_{31} = \frac{\delta Q_{31}}{T} = nC_v\frac{dT}{T}$$

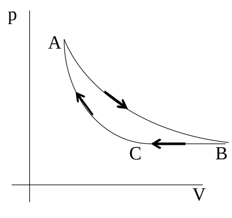
e integrando:

$$\Delta s_{31} = nC_v \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$$

$$\Delta s_{31} = 1{\cdot}3{\cdot}\ln\left(\frac{4\sqrt{2}T_1}{T_1}\right)$$

Resp.: $\Delta s_{31} = 9 \ln 2$

17. 8 kg de O_2 a 2 atm y 400 ºK se expansionan isotérmicamente hasta un estado B a 1 atm. Luego lo enfriamos a presión constante hasta un estado C y, por último se comprime adiabáticamente hasta el estado inicial A. Determinar: a) el calor que absorbe o cede en cada transformación; b) el trabajo realizado, y c) el rendimiento.



$$n = 8000/32 = 250 \text{ moles}$$

$V_A = n\,R\,T_A/p_A = 250{\cdot}0.082{\cdot}400/2 = 4100$ litros

$T_B = T_A$, $p_B = 1$ atm, por tanto $V_B = n\,R\,T_B/p_B = 8200$ litros

Consideramos un gas ideal biatómico: $\gamma = C_P/C_v = 7/5 = 1.4$

En $p_A V_A^{\gamma} = p_C V_C^{\gamma}$, como $p_C = p_B$, calculamos $V_C = 6725.75$ litros.

a)

Como el proceso AB es isotermo $\Delta U = 0$, por tanto:

$$\Delta Q_{AB} = \Delta W = \int_A^B p dV = \int_A^B nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} = 250 \cdot 8.3149 \cdot 400 \cdot \ln 2$$

Resp.: $\Delta Q_{AB} = 576344.95$ J

$$\Delta Q_{BC} = nC_p(T_C - T_B) = n\frac{7}{2}R\left(\frac{p_C V_C}{nR} - T_B\right) = 3.5(p_C V_C - n\ R\ T_B) = 3.5(p_C V_C - p_B V_B)$$

$$\Delta Q_{BC} = 3.5\ p_B\ (V_C - V_B) = 3.5 \cdot 101325(6.72575 - 8.200)$$

Resp.: $\Delta Q_{BC} = -522824.33$ J

El proceso CA es adiabático, por tanto:

Resp.: $\Delta Q_{CA} = 0$

b)

$$\Delta W_{AB} = \Delta Q_{AB}$$

Resp.: $\Delta W_{AB} = 576344.95$ J

$$\Delta W_{BC} = p_B\ (V_C - V_B) = 101325(6.72575 - 8.200)$$

Resp.: $\Delta W_{BC} = -\ 149378.38$ J

$$\Delta W_{CA} = -\ \Delta U_{CA} = -\ n\ C_v(T_A - T_C) = -\ n\frac{5}{2}R\left(T_A - \frac{p_C V_C}{nR}\right) = -\ 2.5(nRT_A - p_C V_C)$$

$$\Delta W_{CA} = -\ 2.5(250 \cdot 8.3149 \cdot 400 - 101325 \cdot 6.72575)$$

Resp.: $\Delta W_{CA} = -\ 375008.45$ J

c)

El rendimiento es:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_a} = \frac{\Delta W_{AB} + \Delta W_{BC} + \Delta W_{CA}}{\Delta Q_{AB}} = \frac{576344.95 - 149378.38 - 375008.45}{576344.95}$$

Resp.: $\eta = 9$ %

18. Un cilindro de 10 cm^2 de sección y 20 cm de altura, tapado por un émbolo, contiene un gas ideal biatómico a 1 atm y 27 ºC. Sobre el émbolo apoyamos una pesa de 10 kg que comprime el gas rápidamente; luego dejamos el tiempo suficiente para que el gas recupere la temperatura inicial; entonces se quita la pesa y el gas se expande rápidamente; y dejamos de nuevo que el gas recupere su temperatura inicial. a) Representar los procesos en el diagrama p–V, calculando los valores p, V, T de los extremos de cada proceso, y b) hallar los calores absorbidos y cedidos por el gas.

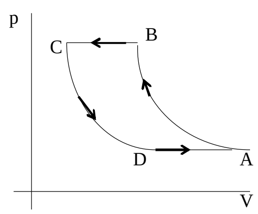
a)

En los procesos A–B y C–D, al comprimir/expandir el gas rápidamente, suponemos que no existe intercambio de calor con el entorno; es decir, se producen dos transformaciones adiabáticas. Los procesos B–C y D–A son isóbaros.

$V_A = 10 \cdot 20 = 200$ cm^3 = 0.2 litros.

$p_B = 1$ atm + mg/S = 101325 + 10·9.8/0.001 = 199325 Pa.

Consideramos un gas ideal biatómico: $\gamma = C_P/C_v = 7/5 = 1.4$.



En $p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$, calculamos $V_B = 0.12335$ litros

$$T_B = T_A \frac{p_B V_B}{p_A V_A} = 300.15 \frac{199325 \cdot 0.12335}{101325 \cdot 0.2} = 364.16 \text{ ºK}$$

$$p_C = p_B = 199325 \text{ Pa}$$

$$T_C = T_A = 300.15 \text{ ºK}$$

$$V_C = V_A \frac{P_A T_C}{P_C T_A}$$

por tanto:

$$V_C = 0.10167 \text{ litros}$$

$$p_D = p_A = 101325 \text{ Pa}$$

En $p_C V_C^\gamma = p_D V_D^\gamma$, calculamos $V_D = 0.16484$ litros

$$T_D = T_A \frac{p_D V_D}{p_A V_A} = 300.15 \frac{0.16484}{0.2} = 247.39 \text{ ºK}$$

Escribiendo la respuesta en coordenadas (p, V, T) (Pa, litros, ºK):

Resp.: A (101325, 0.20000, 300.15); B (199325, 0.12335, 364.16)
C (199325, 0.10167, 300.15); D (101325, 0.16484, 247.38)

b)

En los procesos A–B y C–D no se absorbe ni se suministra calor.

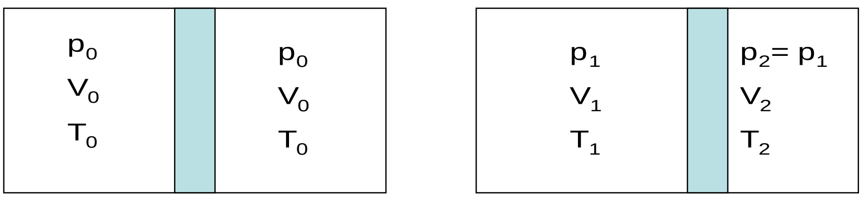
$$\Delta Q_{BC} = n\, C_p\, \Delta T = \frac{p_A V_A}{R T_A}\; C_p\, \Delta T = \frac{101325 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}}{R \cdot 300.15}\; \frac{7}{2} R\, (300.15 - 364.16)$$

Resp.: $\Delta Q_{BC} = -15{,}126$ J

Análogamente: $\Delta Q_{DA} = n\, C_p\, \Delta T$

Resp.: $\Delta Q_{DA} = 12.47$ J

19. Un cilindro cerrado con paredes térmicamente aislantes tiene un émbolo en la parte central que se puede mover sin rozamiento. A cada lado del émbolo hay 54 litros de un gas ideal a 1 atm y 0 ºC, cuyo C_p es 4 cal/mol/ºK. Se suministra calor al lado izquierdo, esta porción de gas se expande y comprime la del lado derecho hasta 7.29 atm. Calcular: a) la temperatura final del gas en ambos partes; b) el trabajo realizado sobre el gas de la derecha, teniendo en cuenta que este gas, por estar totalmente aislado, no puede intercambiar calor, y c) calor suministrado al gas de la izquierda.



Para que el pistón deje de desplazarse: $p_2 = p_1 = 7.29$ atm.

Si $C_p = 4$ cal/mol/ºK, con $R = 2$ cal/mol/ºK, de $C_p - C_v = R$ deducimos $C_v = 2$. Por tanto:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 2$$

a)

El proceso es adiabático porque las paredes son térmicamente aislantes.

En $p_0 V_0^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$, calculamos V_2 = 20 litros

$$V_1 = 2V_0 – V_2 = 88 \text{ litros}$$

En $\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$ calculamos T_1:

Resp.: T_1 = 3245.022 ºK

En $\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ calculamos T_2:

Resp.: T_2 = 737.505 ºK

b)

Del problema 15:

$$\Delta W_D = \frac{p_0 V_0 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{101325(1{\cdot}54{\cdot}10^{-3} - 7.29{\cdot}20{\cdot}10^{-3})}{2-1}$$

Resp: ΔW_D = – 9301.635 J

c)

El trabajo anterior lo realiza el gas de la izquierda. Para este gas el trabajo es positivo.

La variación de la energía interna en el gas de la izquierda es:

$$\Delta U = n\, C_v (T_1 – T_0) = \frac{p_0 V_0}{R T_0} C_v (T_1 – T_0) = 59530.464 \text{ J}$$

$$\Delta Q = \Delta W_D + \Delta U = 9301.635 + 59530.464$$

Resp.: ΔQ = 68832.099 J

20. Calcular la variación de entropía que se produce cuando se mezclan 200 gramos de agua a 30 ºC con 400 gramos de agua a 0 ºC.

Calculamos la temperatura de equilibrio:

$$200{\cdot}1{\cdot}(30 – T) = 400{\cdot}1{\cdot}(T – 0)\, T = 10 \text{ C}$$

Tanto el enfriamiento como el calentamiento se producen a presión constante:

$$\Delta s \text{ (enfriamiento)} = m_1 c \ln (T/T_1) = 200{\cdot}1{\cdot}\ln (283.15/303.15) = – 13.65 \text{ cal/ºK}$$

$$\Delta s \text{ (calentamiento)} = m_2\, c \ln (T/T_2) = 400{\cdot}1{\cdot}\ln (283.15/273.15) = 14.38 \text{ cal/ºK}$$

$$\Delta s = \Delta s \text{ (enfriamiento)} + \Delta s \text{ (calentamiento)}$$

Resp.: Δs = 0.73 cal/ºK

21. Una bomba térmica funciona entre dos focos a 5 ºC y 25 ºC. El trabajo aportado al ciclo es 1 Kw–h. Determinar: a) el coeficiente de eficacia o eficiencia de la termobomba

funcionando como máquina calorífica; b) la cantidad de calor comunicado al foco caliente, y c) el coeficiente de la termobomba funcionando como máquina frigorífica.

Consideremos que desarrolla un ciclo de Carnot en ambos casos:

a)

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_c}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_c}{\Delta Q_c - \Delta Q_a} = \frac{T_h}{T_h - T_f} = \frac{298.15}{20}$$

Resp.: $\varepsilon = 14.9$

b)

$$\Delta Q_c = \varepsilon\ \Delta W = 14.9 \cdot 3.6{\cdot}10^6$$

Resp.: $\Delta Q_c = 5.37{\cdot}10^7$ J

c)

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_a}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_a}{\Delta Q_c - \Delta Q_a} = \frac{T_f}{T_h - T_f} = \frac{278.15}{20}$$

Resp.: $\varepsilon = 13.9$

22. Una máquina frigorífica produce 12 kg de hielo cada minuto y trabaja entre 0 ºC y 37 ºC según un ciclo reversible de Carnot. Calcular: a) el factor de eficiencia; b) el trabajo que consume la máquina por cada kilo de hielo, y c) su potencia en CV.

Suponiendo que trabaja según el ciclo invertido de Carnot:

a)

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_a}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_a}{\Delta Q_c - \Delta Q_a} = \frac{T_f}{T_h - T_f} = \frac{273.15}{37}$$

Resp.: $\varepsilon = 7.382$

b)

El calor absorbido ΔQ_a por cada kg de hielo es:

$$\Delta Q_a = 1000{\cdot}80{\cdot}4.1869 \text{ J}$$

Por tanto, el trabajo consumido será:

$$\Delta W = \Delta Q_a / \varepsilon$$

Resp.: 45371.5 J

c)

$$P = \Delta W/\Delta t = 12{\cdot}45371.5/60 = 9074.3/735 \text{ CV}$$

Resp.: 12.346 CV

23. Una máquina térmica que realiza trabajo para hinchar un globo, extrae 4 kJ de un foco caliente a 120 ºC. El volumen del globo aumenta en 4 litros y el calor se cede a un foco frío a temperatura T. Si su rendimiento es la mitad del de una máquina de Carnot que trabajase entre los dos mismos focos, calcular T.

Suponiendo que el globo se infla a la presión atmosférica:

$$\eta = ½\left(1 - \frac{T_f}{T_h}\right) = ½\left(1 - \frac{T}{393.15}\right) = \frac{\Delta W}{\Delta Q_a} = \frac{p\Delta V}{\Delta Q_a} = \frac{101325 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{4000000} = 0.101325$$

Resp.: T = 313.48 ºK

24. Una máquina de Carnot cuyo rendimiento es del 40% está conectada a su foco frío a 7 ºC. Calcular: a) temperatura del foco caliente, y b) ¿en cuántos grados debe aumentarse la temperatura del foco caliente para que el rendimiento sea del 50%?

a)

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_h} \qquad 0.4 = 1 - \frac{280.15}{T_h}$$

Resp.: T_h = 466.92 ºK

b)

$$0.5 = 1 - \frac{280.15}{466.92 + \Delta T_h}$$

Resp.: ΔT_h = 93.38 ºK

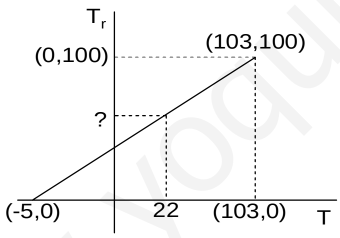
25. Una bañera contiene 50 litros de agua a 25º C, ¿cuánto tiempo será preciso abrir el grifo de agua caliente para que la temperatura final sea 40º C? Temperatura del agua caliente 80º C. Caudal del grifo 5 litros/segundo.

$$\Delta Q = m\ c\ \Delta T$$

$$50 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot (40 - 25) = 5 \cdot 10^3 \cdot \Delta t \cdot (80 - 40)$$

Resp.: 3.75 s

26. Al comprobar un termómetro, colocado en hielo fundente, marca – 5º C, y a la temperatura de ebullición del agua 103º C, ¿a qué temperatura verdadera está cuando marca 22º C?



$$\frac{T_r - 0}{100 - 0} = \frac{T + 5}{103 + 5} \qquad T_r = \frac{100}{108}(T + 5)$$

$$T_r = \frac{100}{108}(22 + 5)$$

Resp.: T_r = 25 ºC

27. La masa de un gas que ocupa 3 litros a 20º C y 10 atm es 55 g. ¿De qué gas se trata? ¿Nitrógeno, vapor de agua, amoniaco o dióxido de carbono? (N=14, H=1, O=16, C=12).

p V = n R T = (m/M) RT, por tanto el peso molecular es:

$$M = \frac{mRT}{pV} = \frac{55 \cdot 0.082 \cdot 293.15}{10 \cdot 3} = 44$$

que se corresponde con el del CO_2.

Resp.: CO_2

28. Una bola de acero cuyo calor específico es 0.11 cal/g ºC se deja caer desde una altura de 2 m sobre un plano horizontal que ni se mueve ni se calienta, la bola rebota y se eleva 1.5 m. ¿Cuál es el incremento de temperatura experimentado por la bola?

$$mgh = \Delta Q + mgh'$$

siendo

$$\Delta Q = 4186.9\ m\ c\ \Delta T$$

con m en kg y c en cal/g/ºK.

Por tanto:

$$\Delta T = \frac{g(h-h')}{4186.9 \cdot c} = \frac{9.8(2-1.5)}{4186.9 \cdot 0.11}$$

Resp.: ΔT = 0.01064 ºC

29. Una máquina frigorífica realiza un ciclo de Carnot invertido entre dos fuentes a 37º C y –13º C. Extrae 1000 J de la fuente fría, ¿qué trabajo es necesario comunicarle?

$$\varepsilon = \frac{T_f}{T_h - T_f} = \frac{\Delta Q_a}{\Delta W} \qquad \frac{273.15-13}{37+13} = \frac{1000}{\Delta W}$$

Resp.: ΔW = 192.2 J

30. En un tubo de vidrio vertical de sección uniforme, cerrado por su extremo inferior hay aire encerrado bajo una gota de mercurio. A 20º C el aire alcanza en el tubo 25 cm de altura. ¿Qué altura alcanzará a 80º C?

La presión se mantiene constante.

La sección del tubo es S y la altura h. Por tanto, el volumen de aire es V = Sh.

Sustituyendo en la ecuación de estado:

$$pV = nRT \qquad pSh = nRT$$

$$pV' = nRT' \qquad pSh' = nRT'$$

y dividiendo miembro a miembro

$$\frac{h}{h'} = \frac{T}{T'}$$

$$\frac{25}{h'} = \frac{20+273.15}{80+273.15}$$

Resp.: 30.12 cm

31. El sol manda a la alta atmósfera una potencia de 1.4 KW/m^2. A la superficie de la Tierra llega aproximadamente 1 KW/m^2. La central solar de Almería tiene instalados 11980 m^2 de colectores y produce 1.2 MW de potencia eléctrica. ¿Qué eficiencia de conversión tiene?

Produce 1.2 MW = 1200 KW

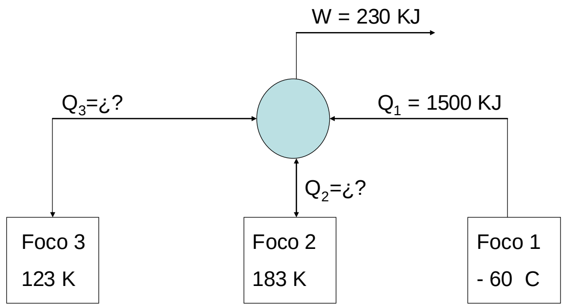
Pero, recibe 1 KW/m^2 · 11980 m^2 = 11980 KW

Por tanto

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_a} = \frac{1200}{11980}$$

Resp.: η = 10%

32. La figura muestra una máquina reversible que opera cíclicamente absorbiendo 1500 KJ de la fuente térmica a – 60º C y realizando un trabajo de 230 KJ. Supóngase que todos los focos mantienen su temperatura constante. Se desconoce el sentido de los flujos de calor Q_2 y Q_3. Determine: a) la magnitud y el sentido de las interacciones energéticas con las otras dos fuentes; b) las variaciones de entropía originadas, y c) el aumento de entropía que tiene lugar en el ciclo.



El foco 1 es un foco *caliente* a 213.15 ºK, pues de él se extrae calor.

a)

<u>Hipótesis nº 1</u>: Supongamos que *los focos 2 y 3 son fríos*.

Como la máquina opera cíclicamente, en cada ciclo completo la variación de energía interna es cero. Por tanto $\Delta Q - \Delta W = 0$. Es decir: $\Delta Q = \Delta W$

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 - Q_3 = 1500 - Q_2 - Q_3$$

$$\Delta W = W = 230$$

Por tanto

$$Q_2 + Q_3 = 1270 \qquad (1)$$

Al ser la máquina reversible, su rendimiento es el de Carnot para cada pareja de focos. Sea W_2 el trabajo desarrollado entre el foco 1 y el 2. Análogamente, sea W_3 el que se realiza entre el foco 1 y el 3:

$$\text{(foco 1, foco 2):}\ \eta_2 = 1 - \frac{T_{f2}}{T_h} = \frac{W_2}{W_2 + Q_2}$$

$$1 - \frac{183}{213.15} = \frac{W_2}{W_2 + Q_2} \qquad (2)$$

$$\text{(foco 1, foco 3):}\ \eta_3 = 1 - \frac{T_{f3}}{T_h} = \frac{W_3}{W_3 + Q_3}$$

$$1 - \frac{123}{213.15} = \frac{W_3}{W_3 + Q_3} \qquad (3)$$

Pero:

$$W = W_2 + W_3$$

$$230 = W_2 + W_3 \qquad (4)$$

Las expresiones (1), (2), (3) y (4) constituyen un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, cuya solución es:

$$Q_2 = 1233.45 \text{ KJ};\ Q_3 = 36.5433 \text{ KJ};\ W_2 = 203.217 \text{ KJ};\ W_3 = 26.7827 \text{ KJ}$$

Todas los valores son positivos.

Hipótesis nº 2: Supongamos que *los focos 1 y 2 son calientes* y el único foco frío es el 3.

El rendimiento de Carnot entre los focos 1 y 3 es:

$$\text{(foco 1, foco 3):}\ \eta_1 = 1 - \frac{T_f}{T_{h1}} = \frac{W_1}{Q_1}$$

$$1 - \frac{123}{213.15} = \frac{W_1}{1500} \qquad W_1 = 585 \text{ KJ}$$

pero, con ese valor de W_1:

$$W_2 = W - W_1 = 230 - 585 < 0.$$

Al ser W_2 negativo, la hipótesis nº 2 es incorrecta. Por tanto:

Resp.:
Los focos 2 y 3 son *fríos.*
$Q_2 = 1233.45$ KJ; $W_2 = 203.217$ KJ
$Q_3 = 36.5433$ KJ; $W_3 = 26.7827$ KJ

b)

La variación de entropía en el foco caliente es $\Delta Q_a/T_h$ y en cada foco frío $-\Delta Q_c/T_f$.

Por tanto, como el foco 1 es el caliente y los 2 y 3 son fríos, las variaciones de entropía de cada foco son:

$\Delta s_1 = Q_1/T_1 = 1500/213.15$; $\Delta s_2 = -Q_2/T_2 = -1233.45/183$; $\Delta s_3 = -Q_3/T_3 = -36.5433/123$

Resp.: $\Delta s_1 = +7.0373$ KJ/ºK; $\Delta s_2 = -6.7401$ KJ/ºK; $\Delta s_3 = -0.2971$ KJ/ºK

c)

Por tratarse de una máquina reversible, el aumento de entropía del ciclo es:

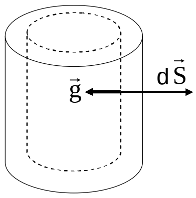
$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 = 0$$

Resp.: $\Delta s = 0$

TEMA VIII

CAMPO GRAVITATORIO Y ELECTROSTÁTICO

1. Calcular el campo debido a una masa cilíndrica muy larga y homogénea de densidad ρ y radio R en el interior, en el exterior y en la superficie.



Interior:

Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie de integración un cilindro de radio r menor que R. Como el valor de g es el mismo para toda la superficie de integración y en las bases del cilindro el vector g es perpendicular al vector superficie:

$$\Phi = \int \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM \qquad -gS = -4\pi GM$$

$$M = \text{densidad} \cdot \text{volumen} \qquad -g \cdot 2\pi rh = -4\pi G\rho\pi r^2 h$$

Resp.: $g = 2\pi\rho Gr$

Exterior:

Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie de integración un cilindro de radio r *mayor* que R:

$$\Phi = \int \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM$$

$$-gS = -4\pi GM \qquad -g \cdot 2\pi rh = -4\pi G\rho\pi R^2 h$$

Resp.: $g = \dfrac{2\pi\rho GR^2}{r}$

En la superficie:

Podemos emplear cualquiera de las dos expresiones calculadas y sustituir r por R.

Resp.: $g = 2\pi\rho GR$

Obsérvese que el campo es *cero en el centro del cilindro, crece linealmente hasta la superficie donde es máximo, y decrece desde la superficie hasta el infinito donde vuelve a anularse.*

2. Calcular el campo gravitatorio en el interior, en el exterior y en la superficie de la Tierra supuesta esférica, homogénea, de densidad constante y el único astro del Universo.

Interior:

Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie de integración una esfera de radio r menor que el radio de la Tierra R. Como el valor de g es el mismo para toda la superficie de integración:

$$\Phi = \int \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM \qquad -gS = -4\pi GM$$

$$M = \text{densidad} \cdot \text{volumen} \quad -g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G\rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Resp.: $g = \dfrac{4}{3}\pi\rho Gr$

Exterior:

Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie de integración un esfera de radio r *mayor* que R. Como el valor de g es el mismo para toda la superficie de integración:

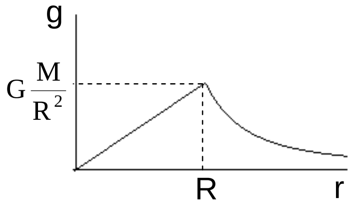
$$\Phi = \int \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM \qquad -gS = -4\pi GM$$

$$-g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi GM$$

Resp.: $g = G\dfrac{M}{r^2}$

¡El mismo valor que el obtenido supuesta la Tierra una masa puntual!

En la superficie:

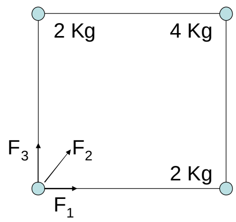


Podemos emplear cualquiera de las dos expresiones calculadas y sustituir r por R.

Resp.: $g = G\frac{M}{R^2}$

Obsérvese que el campo *es cero en el centro de la tierra, crece linealmente hasta la superficie donde es máximo, y decrece desde la superficie hasta el infinito donde vuelve a anularse.*

3. **En el espacio, fuera de la influencia de los cuerpos celestes, tres masas puntuales de 2, 4 y 2 Kg se encuentran en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado, ¿cuál es la fuerza que ejercen sobre una partícula de 1 gramo colocada en el cuarto vértice?**



Los módulos de F_1 y F_3 son iguales: $F_1 = F_3 = G\,\frac{2\cdot 1\cdot 10^{-3}}{1^2} = 2G10^{-3}$ N

$$\vec{F}_1 = 2G\cdot 10^{-3}\,\vec{i} \qquad \vec{F}_2 = 2G\cdot 10^{-3}\,\vec{j}$$

El módulo de F_2 es $F_2 = G\frac{4\cdot 1\cdot 10^{-3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2G\cdot 10^{-3}$ N

El vector unitario según la dirección y el sentido de $\vec{F}_2$ es $\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$. Por tanto:

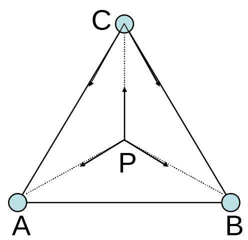
$$\vec{F}_2 = \sqrt{2}G\cdot 10^{-3}(\vec{i} + \vec{j})$$

La fuerza resultante es la suma vectorial de las tres:

Resp.: $\vec{F} = (2+\sqrt{2})G\cdot 10^{-3}(\vec{i} + \vec{j})$N
$F = 3.222\cdot 10^{-13}$ N

4. **Tres cuerpos de la misma masa se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de lado L. Calcular: a) la intensidad del campo creado en el centro del triángulo; b) la fuerza que ejercen dos masas sobre la tercera, y c) la velocidad a la que debería girar el sistema alrededor de su centro para que las distancias permanezcan fijas.**

a)



El punto P se encuentra en el cdm de la figura. Dada la simetría del problema, el campo creado por C es igual y de signo contrario al creado por A y B. Por tanto:

Resp.: $\vec{g}_P = 0$

b)

Calculemos la fuerza ejercida sobre C. El módulo de la ejercida por A es el mismo que el de la ejercida por B:

$$F = F_A = F_B = G\frac{m\cdot m}{L^2}$$

Pero las componentes horizontales se cancelan entre sí, mientras que las componentes verticales se suman algebraicamente. La resultante es vertical de módulo: 2Fcos 30:

Resp.: $F = \sqrt{3}G\frac{m^2}{L^2}$

c)

Para que las distancias permanezcan constantes, la fuerza del apartado b) debe provocar la aceleración centrípeta con la que esté dotada la masa de C, cuya distancia a P es ⅔ de la altura, es decir $L\frac{\sqrt{3}}{3}$. Análogamente con A y B:

F = m a_c: $$\sqrt{3}G\frac{m^2}{L^2} = m\frac{v^2}{L\frac{\sqrt{3}}{3}}$$ Resp.: $v = \sqrt{\frac{Gm}{L}}$

5. Un satélite de 50 kg orbita a 500 km de altura sobre la Tierra (R = 6370 Km, g = 9.8 m/s^2 en la superficie). Calcular: a) la velocidad que posee; b) su energía cinética; c) la energía que hubo que comunicarle para situarlo a esa altura, y d) la energía total comunicada al satélite.

a)

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

pero

$$GM = gR^2$$

por tanto

$$v_o = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

Resp.: 7608.06 m/s

b)

$$Ec = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R+h} = \frac{1}{2}g\frac{mR^2}{R+h}$$

Resp.: 1.447·10^9 J

c)

El satélite tiene una energía potencial en la superficie de la Tierra $U(R) = -G\frac{Mm}{R}$ y necesita tener una energía potencial mayor, de valor: $U(R + H) = -G\frac{Mm}{R+h}$, por tanto, habremos de aportarle la diferencia entre esas dos energías:

$$E = U(R + H) - U(R) = G\,Mm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right)$$
$$E = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right)$$

Resp.: 2.2717·10^8 J

d)

$$E_T = Ec + E$$ Resp.: 1.674·10^9 J

6. Un satélite de masa m describe órbitas circulares de radio 2R en torno a un planeta aislado de radio R. Con una energía igual a la utilizada para ponerlo en órbita partiendo de la

superficie del planeta, se pretende elevar otro satélite de masa 2m, ¿a qué distancia del centro del planeta orbitará?

La energía mecánica (cinética + potencial) que tiene el satélite de masa m a una distancia 2R del centro del planeta es:

$$E = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{2R}$$

Pero en la superficie del planeta tiene una energía potencial

$$U = -G\frac{Mm}{R}$$

Por tanto, la energía que hubo que aportarle para ponerlo en órbita a 2R del centro del planeta es:

$$E_a = E - U = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{2R} + G\frac{Mm}{R} = \frac{3}{4}G\frac{Mm}{R}$$

La energía mecánica (cinética + potencial) que tiene el satélite de masa 2m a una distancia r del centro del planeta es:

$$E' = -\frac{1}{2}G\frac{M2m}{r}$$

Pero en la superficie del planeta tiene una energía potencial

$$U' = -G\frac{M2m}{R}$$

Por tanto, la energía que hay que aportarle para ponerlo en órbita a r del centro del planeta es:

$$E' - U' = -\frac{1}{2}G\frac{M2m}{r} + G\frac{M2m}{R}$$

que, según el enunciado, debe ser igual a E_a:

$$-\frac{1}{2}G\frac{M2m}{r} + G\frac{M2m}{R} = \frac{3}{4}G\frac{Mm}{R}$$

Resp.: $r = \frac{4}{5}R$

¡No puede ponerse en órbita!

7. **Desde la superficie de la Tierra, cuya masa es $6\cdot10^{24}$ Kg, se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba; a) si se le comunica una velocidad de 8 Km/s, ¿qué distancia al centro de la Tierra alcanzaría si no existiese atmósfera?; b) ¿qué velocidad necesita para alcanzar, en ausencia de atmósfera, una altura igual al radio de la Tierra r = 6370 km?**

a)

Llega, sin velocidad, a una distancia R del centro de la Tierra, partiendo de su superficie con una velocidad v:

$$Ec + U(r) = 0 + U(R)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{R}$$

$$R = \frac{GM}{\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}v^2}$$

Resp.: $12.97\cdot10^6$ m

b)

$$\frac{1}{2}mv'^2 - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r}$$

$$v' = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Resp.: 7927.45 m/s

8. Se lanza un cohete desde la Tierra (masa $6\cdot10^{24}$ Kg, radio 6370 Km, G = $6.67\cdot10^{-11}$ SI), supuesta aislada en el universo, en dirección radial. Queremos que se aleje infinitamente, ¿cuál sería la velocidad que tendría que llevar a 10000 km sobre la superficie de la Tierra?

En el infinito la energía potencial es cero y suponemos que el cohete llega sin velocidad. Por tanto, su energía mecánica es cero; energía mecánica que tiene que conservarse en cualquier punto de la trayectoria. Luego, si a una distancia R + h del centro de la Tierra tiene una velocidad v, se cumple:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R+h} = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

Resp.: 6992.44 m/s

9. El satélite mayor de Saturno, Titán, describe una órbita de radio medio r = $1.222\cdot10^6$ Km y su periodo es de T = 15.945 días. Determinar la masa de Saturno y su densidad si su radio medio es de 58545 Km (G = $6.67\cdot10^{-11}$ SI).

$$F = m\,a_c: \qquad G\frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Resp.: $5.689\cdot10^{26}$ kg

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\pi}{GT^2}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

Resp.: 676.83 kg/m^3

10. Calcular la velocidad que hay que comunicar a un cuerpo en la superficie de la Tierra en dirección horizontal para que se mueva en torno a la Tierra describiendo una trayectoria circular. (R = 6370 km; g = 9.8 m/s)

$$F = ma_c \qquad mg = m\,\frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{gR}$$

Resp.: 7901 m/s = 28443.6 km/h

11. Suponiendo la Tierra esférica y homogénea (R = 6370 Km), calcular la profundidad de un pozo sabiendo que un péndulo que bate segundos en la boca, se retrasa 3 segundos por día en el fondo.

El periodo de oscilación de un péndulo es $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ donde L es su longitud. Por tanto:

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{g'}{g}}$$

Aplicamos el teorema de Gauss, tomando como superficie de integración una esfera situada a la profundidad del pozo y otra en la superficie:

$$\Phi = -4\pi GM = gS \qquad \Phi' = -4\pi GM' = g'S'$$

con

$$M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad M' = \rho\frac{4}{3}\pi R'^3$$
$$S = 4\pi R^2 \qquad S' = 4\pi R^2$$

de donde deducimos que:

$$\frac{g}{g'} = \frac{R}{R-h}$$

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{R-h}{R}}\ ; \qquad h = R\left[1-\left(\frac{T}{T'}\right)^2\right] = 6370000\left[1-\left(\frac{86400}{86403}\right)^2\right]$$

Resp.: 442.3 m

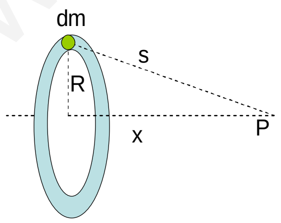
12. Se define un campo de fuerzas $\vec{A} = \frac{3r^2-6}{r}\vec{r}$ en unidades del SI. Calcular la diferencia de potencial entre dos puntos P y Q situados a 1 m y 2 m del punto central del campo.

$$\vec{A}\cdot d\vec{r} = -dV$$

$$\int_P^Q dV = -\int_1^2 \frac{3r^2-6}{r}dr$$

Resp.: $V_Q - V_P = -0.3411$ J

13. Calcular el potencial producido por un anillo de masa M y radio R en los puntos situados a lo largo del eje perpendicular al anillo que pasa por su centro. Calcular a) el potencial en el punto P y en el centro del anillo, y b) el campo.



a)

Obsérvese que cada elemento diferencial de masa dm se encuentra a la misma distancia s del punto P. Cada uno de estos elementos contribuye a crear un potencial dV en el punto P cuyo valor es:

$$dV = -G\frac{dm}{s}$$

El potencial creado por la totalidad del anillo será la suma de todos los potenciales infinitesimales anteriores:

$$V = -G\frac{M}{s}$$

Pero

$$s = \sqrt{R^2 + x^2}$$

por tanto:

$$\text{Resp.: } V(x) = -G \frac{M}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Para calcular el potencial en el centro del anillo basta hacer x = 0:

$$\text{Resp.: } V(0) = -G \frac{M}{R}$$

b)

Para calcular el campo podemos derivar el potencial con respecto a x:

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = GM \frac{d(R^2 + x^2)^{-1/2}}{dx} = -G \frac{Mx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

O calcularlo directamente. El módulo del campo creado por el elemento dm es:

$$dE = -G \frac{dm}{s^2}$$

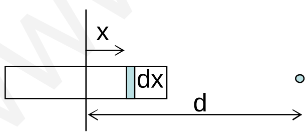
Pero la simetría de la figura establece que el campo total en P sea horizontal, perpendicular al anillo, pues las contribuciones verticales se cancelan entre sí. La componente horizontal de dE se calcula proyectando sobre el eje x:

$$dE_x = -G \frac{dm}{s^2} \frac{x}{s} = -G \frac{x dm}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

El campo total será el provocado por la suma de todos los elementos dm:

$$\text{Resp.: } E(x) = -G \frac{Mx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

14. Calcular el campo y el potencial gravitatorio creado por una barra homogénea de masa m y longitud L a una distancia d de su centro y en su prolongación.



$$dm = \rho dx = \frac{m}{L} dx$$

$$dg = -G \frac{dm}{(d - x)^2} = -G \frac{m}{L} \frac{dx}{(d - x)^2}$$

$$g = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} -G \frac{m}{L} \frac{dx}{(d - x)^2}$$

$$\text{Resp.: } g = -G \frac{m}{d^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$dV = -G\frac{dm}{d-x} = -G\frac{m}{L}\frac{dx}{d-x}$$

$$V = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} -G\frac{m}{L}\frac{dx}{d-x}$$

Resp.: $V = G\frac{m}{L}\ln\frac{d-\frac{L}{2}}{d+\frac{L}{2}}$

Si efectuamos la derivada del potencial respecto a "d", cambiándola de signo obtenemos el valor del campo g.

15. Una carga positiva Q está distribuida uniformemente en un volumen esférico de radio R, con una densidad volumétrica ρ. Calcular el campo y en potencial: a) en el interior; b) en la superficie de la esfera, y c) en el exterior.

Campo:

Interior:

Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie de integración una esfera de radio r menor que R. Como el valor de E es el mismo para toda la superficie de integración:

$$\Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi kQ \qquad ES = 4\pi kQ$$

$$Q = \text{densidad}\cdot\text{volumen} \qquad E\cdot 4\pi r^2 = 4\pi k\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

Resp.: $E = \frac{4}{3}\pi\rho kr$

Exterior:

Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie de integración un esfera de radio r *mayor* que R. Como el valor de E es el mismo para toda la superficie de integración:

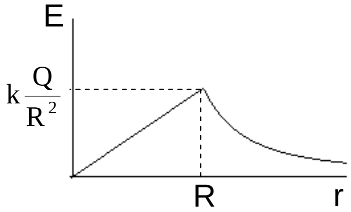
$$\Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi kQ \qquad ES = 4\pi kQ$$

$$E\cdot 4\pi r^2 = 4\pi kQ$$

Resp.: $E = k\frac{Q}{r^2}$

¡El mismo valor que el obtenido supuesta la carga puntual!

En la superficie:



Podemos emplear cualquiera de las dos expresiones calculadas y sustituir r por R.

Resp.: $E = k\frac{Q}{R^2}$

Obsérvese que el campo *es cero en el centro de la esfera, crece linealmente hasta la superficie donde es máximo, y decrece desde la superficie hasta el infinito donde vuelve a anularse.*

Potencial:

En el infinito el potencial es cero: $V_e(\infty) = 0$. Además $\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV_e$. Calculemos primero el potencial en el exterior y en la superficie, para después, con esos datos, calcularlo en el interior:

Exterior:

$$\int_0^{V_e(r)} dV_e = -\int_\infty^r k\frac{Q}{r^2}dr$$

Resp.: $V_e(r) = k\frac{Q}{r}$

Superficie:

Basta sustituir r por R en la expresión anterior.

Resp.: $V_e(R) = k\frac{Q}{R}$

Interior:

$$\int_{V_e(R)}^{V_e(r)} dV_e = -\int_R^r \frac{4}{3}\pi\rho k r dr$$

Resp.: $V_e(r) = \frac{1}{2}k\frac{Q}{R^3}(3R^2 - r^2)$

16. Una esfera conductora de 8 cm de radio posee una carga de 0.3 μC. Calcular: a) la densidad de carga; b) el campo y el potencial en su superficie; c) el campo y el potencial en un punto a 12 cm del centro, y d) ídem, a 4 cm del centro.

a)

Como se trata de una esfera *conductora*, toda la carga se encuentra en su superficie. Por tanto su densidad *superficial* de carga es:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{0.3\cdot 10^{-6}}{4\pi\cdot 0.08^2}$$

Resp.: $3.73\cdot 10^{-6}$ C/m^2

b)

Para calcular el campo en la superficie aplicamos el teorema de Gauss, empleando como superficie de integración la de la propia esfera. Obtenemos el mismo resultado que el del ejercicio anterior. Por tanto:

$$E = k\frac{Q}{R^2} = 9\cdot 10^9\frac{0.3\cdot 10^{-6}}{0.08^2}$$

Resp.: E(0.08) = 421875 N/C

$$V_e(R) = k\frac{Q}{R} = 9\cdot 10^9\frac{0.3\cdot 10^{-6}}{0.08}$$

Resp.: $V_e(0.08)$ = 33750 V

c)

Para calcular el campo a una distancia mayor que R aplicamos el teorema de Gauss. Obtenemos el mismo resultado que el del ejercicio anterior. Por tanto:

$$E = k\frac{Q}{r^2} = 9{\cdot}10^9\,\frac{0.3{\cdot}10^{-6}}{0.2^2}$$

Resp.: E(0.2) = 67500 N/C

$$V_e(R) = k\frac{Q}{r} = 9{\cdot}10^9\,\frac{0.3{\cdot}10^{-6}}{0.2}$$

Resp.: $V_e(0.2)$ = 13500 V

d)

El campo en el interior es nulo. El potencial es el mismo que en la superficie.

Resp.: E (0.04) = 0

Resp.: V(0.04) = 33750 V

17. Hallar el campo en los puntos interiores y exteriores de una esfera de radio R cuya carga está distribuida con una densidad radial $\rho = \rho_o/r^2$, con ρ_o constante.

Primero calculamos la carga que existe en una esfera de radio r ≤ R.

$$dq = \rho\, dv = \frac{\rho_o}{r^2} d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{\rho_o}{r^2} 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_o dr$$

$$\int_0^{q(r)} dq = \int_0^r 4\pi\rho_o dr \qquad q(r) = 4\pi\rho_o r$$

Interior:

Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie de integración una esfera de radio r menor que R. Como el valor de E es el mismo para toda la superficie de integración:

$$\Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi k q(r) \qquad ES = 4\pi k 4\pi\rho_o r$$

$$E\cdot 4\pi r^2 = 4\pi k 4\pi\rho_o r$$

Resp.: $E = \dfrac{4\pi k\rho_o}{r}$

Exterior:

Aplicamos el teorema de Gauss utilizando como superficie de integración un esfera de radio r *mayor* que R. Como el valor de E es el mismo para toda la superficie de integración:

$$\Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi k q(R) \qquad ES = 4\pi k 4\pi\rho_o R$$

$$E\cdot 4\pi r^2 = 4\pi k 4\pi\rho_o R$$

Resp.: $E = \dfrac{4\pi k\rho_o R}{r^2}$

18. Una carga Q = + 10^{-10} C está repartida uniformemente en una esfera dieléctrica (ε_r = 8, R= 30 cm). Calcular el campo dentro y fuera de la esfera en función de la distancia al centro.

Aplicamos los resultados obtenidos en el ejercicio 14, con $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r} = \dfrac{9{\cdot}10^9}{8}$

Interior:

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho k r = \frac{4}{3}\pi \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3} = k\frac{q}{r^2}$$

pero

$$\frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

por tanto

$$E = k\frac{Qr}{R^3}$$

$$E = \frac{9{\cdot}10^9}{8}\frac{10^{-10} r}{0.3^3}$$

Resp.: $E = \frac{25}{6}$ r N/C

Exterior:

En el exterior aplicamos el valor de k para el vacío:

$$E = k_o\frac{Q}{r^2} = 9{\cdot}10^9\frac{10^{-10}}{r^2}$$

Resp.: $E = \frac{9}{10}\frac{1}{r^2}$ N/C

19. En una esfera conductora maciza, descargada de radio R, se hace un hueco esférico en su centro de radio r, y se coloca en el centro del hueco una carga puntual + q. Determinar: a) las densidades de carga en las superficies interna y externa; b)¿cómo se verá influida la densidad de carga en la superficie interior si la carga se desplaza del centro del hueco?; c) el campo en todas las regiones, y d) el potencial en todas las regiones.

a)

La inducción electrostática provoca que se induzca una carga –q en la superficie del hueco y otra carga +q en la superficie exterior del conductor. Por tanto las densidades superficiales son:

Resp.: En la superficie interna: $\sigma_1 = \frac{-q}{4\pi r^2}$

En la superficie externa: $\sigma_2 = \frac{q}{4\pi R^2}$

b)

No se ve influida.

c)

Cálculo del campo

En el exterior:

Aplicamos el teorema de Gauss para una superficie de integración esférica de radio a ≥ R, teniendo en cuenta que la carga *neta* que existe dentro de la superficie de Gauss es q:

Resp.: $E(a) = k\dfrac{q}{a^2}$; para $a \geq R$

En el conductor:

Resp.: El campo es nulo en el conductor.

En el interior del hueco:

Aplicamos el teorema de Gauss para una superficie de integración esférica de radio a < r:

Resp.: $E(a) = k\dfrac{q}{a^2}$; para $a < r$

d)

Cálculo del potencial: $\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV$, con $V(\infty) = 0$

En el exterior:

$$\int_0^{V(a)} dV = -\int_\infty^r k\frac{q}{a^2}\,da$$

Resp.: $V(a) = k\dfrac{q}{a}$; para $a \geq R$

En el conductor:

Basta aplicar la expresión anterior para a = R. Además, el potencial es el mismo para *todos* los puntos del conductor.

Resp.: $V(a) = k\dfrac{q}{R}$; para $r \leq a \leq R$

En el interior del hueco:

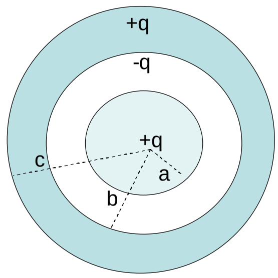
$$\int_{V(r)}^{V(a)} dV = -\int_r^a k\frac{q}{a^2}\,da$$

con

$$V(r) = k\frac{q}{R}$$

Resp.: $V(a) = kq\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}\right)$; para $a < r$

20. Una esfera maciza aislante de radio a está situada concéntrica en el interior de otra esfera conductora, hueca de radios interior y exterior b y c. La esfera aislante tiene una densidad uniforme de carga positiva ρ, y la esfera hueca no tiene carga neta. La constante dieléctrica relativa del aislante es ε_r. Calcular: a) la densidad de carga superficial inducida en la superficie interior de la esfera hueca; b) Ídem en la superficie exterior; c) la intensidad del campo a una distancia r > c; d) Ídem para c > r > b; e) Ídem para b > r > a; f) Ídem para r < a; g) el potencial a una distancia r > c, y h) el potencial para c > r > b.



La carga que posee la esfera aislante es $q = \dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$.

El valor de k es $k = \dfrac{k_o}{\varepsilon_r}$; con $k_o = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9\cdot 10^9$ en el SI.

a)

La densidad superficial en la superficie interior es:

Resp.: $\sigma_b = \frac{-q}{4\pi b^2}$

b)

La densidad superficial en la superficie exterior es:

Resp.: $\sigma_c = \frac{q}{4\pi c^2}$

c)

El campo para r > c (en el vacío) es:

Resp.: $E(r) = k_o \frac{q}{r^2}$; para r > c

d)

El campo para c > r > b es:

Resp.: E(r) = 0; para c > r > b

e)

El campo para b > r > a (en el vacío) es:

Resp.: $E(r) = k_o \frac{q}{r^2}$; para b > r > a

f)

El campo para r < a (en el aislante) es:

Resp.: $E(r) = k \frac{q}{r^2}$; para r < a

g)

El potencial para r > c (en el vacío) es:

Resp.: $V_e(r) = k_o \frac{q}{r}$; para r > c

h)

El potencial para c > r > b es constante de valor:

Resp.: $V_e(r) = k_o \frac{q}{c}$; para c > r > b

21. Una corteza esférica no conductora, de radio interior r y exterior R, posee una densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Calcular: a) la carga total; b) el campo a una distancia del centro z > R; para r < z < R; para z > R, y c) el potencial para z > R y para r < z < R.

a)

$$Q = \rho v = \rho \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

Resp.: $Q = \rho \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

b)

Para un radio z menor que r el campo es nulo, pues si aplicamos el teorema de Gauss, la esfera de integración no contiene carga en su interior.

Resp.: E = 0; para r > z

Si r < z < R:

$$E(z) = k\frac{Q(z)}{z^2} = k\frac{\frac{4}{3}\pi(z^3 - r^3)\rho}{z^2}$$

Resp.: $E(z) = k\frac{4\pi\rho(z^3 - r^3)}{3z^2}$; para $r < z < R$

Si $z > R$:

$$E(z) = k\frac{Q}{z^2}$$

Resp.: $E(z) = k\frac{Q}{z^2}$; para $z > R$

c)

$$\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV$$

con

$$V(\infty) = 0$$

En el exterior:

$$\int_0^{V(z)} dV = -\int_\infty^z k\frac{Q}{z^2}dz$$

Resp.: $V(z) = k\frac{Q}{z}$; para $z > R$

Entre $r < z < R$:

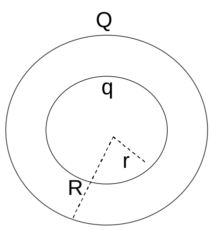
$$\int_{V(R)}^{V(z)} dV = -\int_R^z k\frac{4\pi\rho(z^3 - r^3)}{3z^2}dz$$

con

$$V(R) = k\frac{Q}{R}$$

Resp.: $V(z) = k\frac{2\pi\rho(3R^2z - 2r^3 - z^3)}{z}$; para $r < z < R$

22. Una corteza esférica de radio r posee una carga q uniformemente distribuida en su superficie. Una segunda corteza esférica, mayor, de radio R, concéntrica con la anterior posee una carga Q también uniformemente distribuida. Calcular: a) el campo a las distancias z < r; r < z < R, y z > R; b) el cociente q/Q y su signo relativo para que el campo sea cero en el exterior de la corteza mayor, y c) el potencial a las distancias z < r; r < z < R, y z > R.



a)

Aplicamos el teorema de Gauss a superficies esféricas concéntricas de distintos radios. Obtenemos:

Resp.: $E(z) = k\frac{q+Q}{z^2}$; para $z > R$

$$E(z) = k\frac{q}{z^2}\ ;\ \text{para } r < z < R$$
$$E(z) = 0;\ \text{para } z < r$$

b)

Si q + Q = 0 el campo E(z) = 0 para z > R. Por tanto:

Resp.: q/Q = – 1

c)

$$\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV$$

con

$$V(\infty) = 0$$

En el exterior:

$$\int_0^{V(z)} dV = -\int_\infty^z k\frac{q+Q}{z^2}dz$$

Resp.: $V(z) = k\frac{q+Q}{z}$; para z > R

Entre r < z < R:

$$\int_{V(R)}^{V(z)} dV = -\int_R^z k\frac{q}{z^2}dz$$

con

$$V(R) = k\frac{q+Q}{R}$$

Resp.: $V(z) = k\left(\frac{Q}{R} + \frac{q}{z}\right)$; para r < z < R

Para z < r:

$$\int_{V(r)}^{V(z)} dV = 0 \qquad V(z) = V(r)$$

con V(r) calculado a expensas de la expresión anterior para z = r.

Resp.: $V(z) = k\left(\frac{Q}{R} + \frac{q}{r}\right)$; para z < R

23. Una esfera metálica aislada se 10 cm de radio se carga a 5000 V. Calcular: a) su carga en columbios. Se pone en contacto con otra descargada y aislada de 8 cm de radio; determinar: b) carga de cada esfera, y c) potencial de ambas.

a)

$$V = k\frac{q_1}{r_1} \qquad q_1 = \frac{Vr_1}{k} = \frac{5000\cdot 0.1}{9\cdot 10^9}$$

Resp.: $q_1 = 5.55\cdot 10^{-8}$ C

b)

Al ponerse en contacto se quedan al mismo potencial:

$$k\frac{q}{r_1} = k\frac{q_2}{r_2} \qquad 8\,q = 10\,q_2$$

además:

$$q + q_2 = q_1$$

Resp.: $q = 3.086\cdot 10^{-8}$ C; $q_2 = 2.469\cdot 10^{-8}$ C

c)

$$V = k\frac{q}{r_1}$$

Resp.: $V = 2.77\cdot 10^{4}$ V

24. Una esfera de 20 cm de radio estada cargada a 10000 V. Otra esfera de 4 cm está inicialmente descargada. Se ponen en contacto y después se separan. Se descarga la esfera de 4 cm. Se repite el proceso 7 veces en total, ¿cuál es el voltaje final de la esfera de 20 cm?

Sea Q_i y q_i la carga que tienen las esferas en cada proceso.

El voltaje inicial de la esfera es

$$V_0 = k\frac{Q}{R}$$

siendo Q su carga inicial.

Al ponerse en contacto con la esfera pequeña se quedan al mismo potencial:

$$k\frac{Q_1}{R} = k\frac{q_1}{r} \qquad rQ_1 = Rq_1$$

además

$$Q_1 + q_1 = Q$$

de donde

$$Q_1 = \frac{Q}{1+\frac{r}{R}}$$

Al descargar la esfera pequeña y repetir el proceso obtendríamos:

$$Q_2 = \frac{Q}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}$$

Y así sucesivamente, de manera que:

$$Q_7 = \frac{Q}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^7}$$

El voltaje será:

$$V_7 = k\frac{Q_7}{R} = \frac{V_0}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^7} = \frac{10000}{\left(1+\frac{4}{20}\right)^7}$$

Resp.: 2790.81 V

25. Una esfera conductora tiene una densidad superficial de carga de $8.85{\cdot}10^{-8}$ C/m^2. Calcular su radio sabiendo que el campo creado por ella, en un punto situado exteriormente a 2 m de su superficie, es 3600 N/C.

$$E = k\frac{Q}{(R+2)^2} = k\frac{4\pi R^2\sigma}{(R+2)^2}$$

Resp.: R = 3 m

26. Dos esferas metálicas de radios r_1 = 6 y r_2 = 9 cm de radio se cargan con 1μC cada una. Luego se unen con un hilo conductor. Calcular: a) el potencial de cada esfera aislada; b) el potencial después de la unión y la carga de cada esfera después de la unión, y c) la carga que circuló.

a)

$$V = k\frac{q}{r}$$

$$V_1 = 9{\cdot}10^9\frac{10^{-6}}{0.06} = 150000\text{ V}$$

análogamente V_2.

Resp.: V_1 = 150000 V; V_2 = 100000 V

b)

$$V_f = k\frac{q_1}{r_1} = k\frac{q_2}{r_2} \qquad r_2\,q_1 = r_1\,q_2$$

además

$$q_1 + q_2 = q$$

de donde obtenemos:

Resp.: V_f = 120000 V; q_1 = 0.8 μC; q_2 = 1.2 μC

c)

Circularon 1μC – 0.8 μC

Resp.: 0.2 μC

27. El potencial a 20 cm de una esfera conductora cargada de 10 cm de radio es 800 V. Calcular: a) el potencial de la esfera, y b) el número de electrones que se han extraído del material.

a)

$$V = k\frac{q}{r} \qquad q = r\frac{V}{k}$$

$$V(R) = k\frac{q}{R} = V\frac{r}{R} = 800\frac{20}{10}$$

Resp.: 1600 V

b)

$$n = \frac{q}{e} = \frac{r}{e}\frac{V}{k} = \frac{0.2}{1.6{\cdot}10^{-19}}\frac{800}{9{\cdot}10^{9}}$$

Resp.: $\frac{1}{9}10^{12}$

28. Un conductor rectilíneo indefinido, cargado uniformemente crea un potencial de 20 V en los puntos situados a 2 m de él, y de 10 V en los situados a 4 m. Calcular su densidad lineal de carga λ.

Aplicamos el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica de integración que rodee al conductor:

$$\Phi_e = \int \vec{E}{\cdot}d\vec{S} = 4\pi kQ \qquad ES = 4\pi kQ$$

$$E{\cdot}2\pi rL = 4\pi kL\lambda \qquad E = \frac{2k\lambda}{r}$$

Como

$$\vec{E}{\cdot}d\vec{r} = -dV$$

con

$$V(2) = 20 \qquad V(4) = 10$$

$$\int_{20}^{10} dV = -\int_{2}^{4} 2k\lambda\frac{1}{z}dz$$

Resp.: $\lambda = \frac{5}{9\ln 2}10^{-9}$ C/m

29. Un cilindro infinitamente largo de radio R tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Calcular el campo en el interior y en el exterior.

Aplicamos el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica de integración de radio r:

$$\Phi_e = \int \vec{E}{\cdot}d\vec{S} = 4\pi kQ \quad ES = 4\pi kQ$$

Para r < R:

$$E{\cdot}2\pi rL = 4\pi k\,\pi r^2 L\rho$$

Resp.: $E = 2\pi rk\rho$

Para r > R:

$$E{\cdot}2\pi rL = 4\pi k\,\pi R^2 L\rho$$

Resp.: $E = \frac{2\pi R^2 k\rho}{r}$

30. Una corteza cilíndrica de gran longitud, de radios r y R, transporta una densidad de carga uniforme ρ. Calcular el campo a unas distancias z < r; r < z < R, y z > R.

Aplicamos el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica de integración de radio z:

$$\Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi kQ \qquad ES = 4\pi kQ$$

Para z < r:

Al no existir carga en el interior, el campo es cero:

Resp: E = 0; para z < r

Para r < z < R:

$$E\cdot 2\pi zL = 4\pi k\,\pi(z^2 - r^2)L\rho$$

$$\text{Resp.: } E(z) = \frac{2k\pi(z^2 - r^2)\rho}{z}; \text{ para } r < z < R$$

Para z > R:

$$E\cdot 2\pi zL = 4\pi k\,\pi(R^2 - r^2)L\rho$$

$$\text{Resp.: } E(z) = \frac{2k\pi(R^2 - r^2)\rho}{z}; \text{ para } z > R$$

31. Dos cortezas cilíndricas concéntricas, infinitamente largas, tienen radios r y R y poseen densidades superficiales uniformes de carga m y n. Calcular: a) el campo para z < r; r < z < R, y z > R; b) ¿cuál debe ser el cociente m/n y el signo relativo de ambas para que el campo sea nulo en el exterior?

a)

Aplicamos el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica de integración de radio z:

$$\Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi kQ \qquad ES = 4\pi kQ$$

Para z < r:

Al no existir carga en el interior, el campo es cero:

Resp: E = 0; para z < r

Para r < z < R:

$$E\cdot 2\pi zL = 4\pi k\,2\pi rLm$$

$$\text{Resp.: } E(z) = \frac{4k\pi rm}{z}; \text{ para } r < z < R$$

Para z > R:

$$E\cdot 2\pi zL = 4\pi k\,(2\pi rLm + 2\pi RLn)$$

$$\text{Resp.: } E(z) = \frac{4\pi k(Rm + rn)}{z}; \text{ para } z > R$$

b)

Si

$$Rm + rn = 0$$

el campo en el exterior es nulo. Por tanto:

Resp.: $\frac{m}{n} = -\frac{r}{R}$

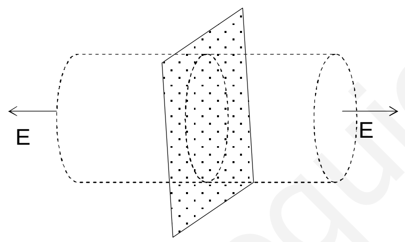
32. Dos conductores en forma de corteza cilíndrica, coaxiales, de longitud L poseen cargas iguales y opuestas. En la corteza interior de radio r hay una carga +q, y en la exterior de radio R, de –q. Hallar la diferencia de potencial entre las cortezas.

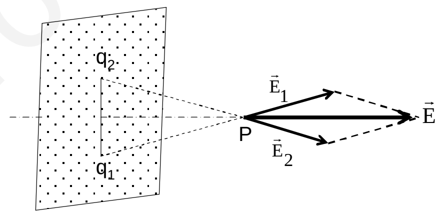
El campo entre cortezas sería el calculado en el apartado a) del ejercicio anterior, para r < z < R, con $m = \frac{+q}{2\pi rL}$; es decir: $E(z) = 2k\frac{q}{L}\frac{1}{z}$. Como $\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV$, integramos entre z = r y z = R:

$$\int_{V(r)}^{V(R)} -dV = \int_{r}^{R} 2k\frac{q}{L}\frac{1}{z}dz$$

Resp.: $V(r) - V(R) = 2k\frac{q}{L}\ln\frac{R}{r}$

33. a) Calcular el campo eléctrico creado por una superficie plana infinita, cargada uniformemente con una densidad superficial σ. b) Colocamos esta superficie verticalmente y colgamos de un hilo, de peso despreciable y sin carga, una esfera puntual cargada con $\sqrt{3}\cdot 10^{-9}$ C de 1 gramo. El ángulo que forma el hilo con la vertical es de 30º, ¿cuál es la densidad superficial de carga de la superficie plana?





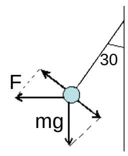
a)

Tomamos como superficie de integración el cilindro representado en la figura de la izquierda. El campo resultante es el representado en la figura de la derecha; por tanto, sólo existe flujo a través de las *dos* bases del cilindro ya que el vector superficie es perpendicular al vector campo en el resto de la superficie del cilindro. Aplicamos el teorema de Gauss:

$$\Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi kQ \qquad 2ES = 4\pi k\,\sigma S$$

Resp.: $E = 2k\pi\sigma$

b)



$$F = Eq = 2k\pi\sigma\, q \qquad F \cos 30 = mg \text{ sen } 30$$

$$\sigma = \frac{mg}{2k\pi q} \text{ tag } 30$$

Resp.: $5.77\cdot 10^{-5}$ C/m^2

34. Dos planos infinitos paralelos están separados una distancia d. Hallar el campo en todas las regiones si ambos están uniformemente cargados a) con la misma densidad de carga

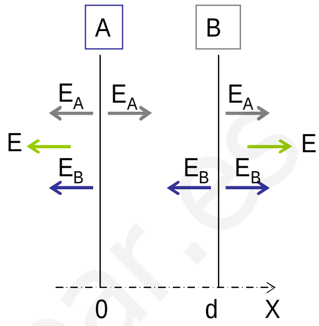
positiva, y b) con la misma densidad de carga, pero de signo contrario. Calcular el potencial en todas las regiones y la diferencia de potencial entre los planos en ambos casos.

<u>Campo</u>

Del ejercicio anterior: el módulo del campo creado por cada plana es $E_i = 2k\pi\sigma$.

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

a)



Si las dos densidades de carga son positivas, los campos creados por las placas A y B son los representados en la figura.

x < 0:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_B = -2k\pi\sigma\vec{i}$$

por tanto:

Resp.: $\vec{E} = -4k\pi\vec{i}$; para $x < 0$

0 < x < d:

$$\vec{E}_A = -\vec{E}_B$$

Resp.: $\vec{E} = 0$; para $0 < x < d$

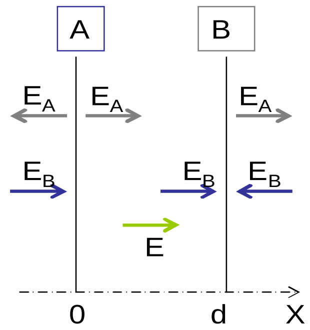
x > d:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_B = 2k\pi\sigma\vec{i}$$

Resp.: $\vec{E} = 4k\pi\vec{i}$; para $x > d$

b)

Sea la densidad de carga del plano B negativa, los campos creados por las placas A y B son los representados en la figura.



x < 0:

$$\vec{E}_A = -\vec{E}_B$$

Resp.: $\vec{E} = 0$; para $x < 0$

0 < x < d:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_B = 2k\pi\sigma\vec{i}$$

Resp.: $\vec{E} = 4k\pi\sigma\vec{i}$; para $0 < x < d$

x > d:

$$\vec{E}_A = -\vec{E}_B$$

Resp.: $\vec{E} = 0$; para $x > d$

<u>Diferencia de potencial</u>

Si

$$\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV$$

entonces

$$\int E dx = -\int dV$$

a)

x < 0:

$$-4k\pi\int_0^x dx = -\int_{V_A}^{V(x)} dV$$

Resp.: $V(x) = V_A + 4k\pi x$; para $x < 0$

0 < x < d:

$$-\int_0^x 0dx = -\int_{V_A}^{V(x)} dV$$

Resp.: $V(x) = V_A$; para $0 < x < d$

x > d:

$$4k\pi\int_d^x dx = -\int_{V_D}^{V(x)} dV$$

Resp.: $V(x) = V_D - 4k\pi(x - d)$; para $x > d$

Para calcular la ddp entre las placas $V_A - V_D$ empleamos el valor del campo entre placas. Como en este caso es cero, entonces:

Resp.: $V_A - V_D = 0$

b)

x < 0:

$$\int_0^x 0dx = -\int_{V_A}^{V(x)} dV$$

Resp.: $V(x) = V_A$; para $x < 0$

0 < x < d:

$$4k\pi\int_0^x dx = -\int_{V_A}^{V(x)} dV$$

Resp.: $V(x) = V_A - 4k\pi x$; para $0 < x < d$

x > d:

$$\int_d^x 0dx = -\int_{V_D}^{V(x)} dV$$

Resp.: $V(x) = V_D$; para $x > d$

Para calcular la ddp entre las placas $V_A - V_D$ empleamos la ecuación del potencial para $0 < x < d$, dándole a x el valor d:

Resp.: $V_A - V_D = 4k\pi d = Ed$

Donde hemos aplicado el valor de E en la misma zona. De esta manera hemos encontrado la relación que existe entre el campo y la ddp en un **condensador** formado por placas planas y paralelas:

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta V = Ed \\ \text{(condensador plano)}\end{array}}$$

Un condensador es un dispositivo que permite almacenar carga entre sus placas (también llamadas armaduras). El campo eléctrico generado entre las armaduras de un condensador plano es prácticamente uniforme y constante. La capacidad C de un condensador es la carga q que adquiere por unidad de potencial. Es decir:

$$\boxed{C = \frac{q}{\Delta V}}$$

La unidad de capacidad en el S. I. es el **Faradio (F)**, el cociente entre un columbio (C) y un voltio (V). Se puede demostrar que la capacidad de cualquier condensador depende sólo de su geometría y del dieléctrico que exista entre sus armaduras. Concretamente, en un condensador plano es:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

donde S es la superficie de cada placa.

La energía eléctrica E_e, almacenada en un condensador cualquiera, se mide mediante el trabajo que hay que realizar para llevar de una a otra armadura la carga necesaria para conseguir que en una placa haya una carga +q y en la otra –q. Como ΔV es el trabajo por unidad de carga, E_e es:

$$E_e = \int_0^q \Delta V\, dq = \int_0^q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{C}\int_0^q q\, dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q\cdot\Delta V = \frac{1}{2} C\cdot\Delta V^2$$

Si calculamos dicha energía para el condensador plano, sustituimos los valores de C y ΔV:

$$E_e = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{S}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 (S\cdot d)$$

El producto S·d es el volumen del condensador en cuyo interior está confinado el campo eléctrico. Podemos decir, por tanto, que en dicha zona del espacio existe una densidad de energía eléctrica (energía por unidad de volumen)

$$\in_e = \frac{E_e}{S\cdot d}$$

$$\in_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Para calcular la densidad de energía eléctrica se ha empleado el caso particular de un condensador plano; pero, puede demostrase que la expresión obtenida es válida para cualquier campo eléctrico que exista en una región del espacio.

35. Un electrón ($m = 9.11\cdot10^{-31}$ Kg; $e = -1.6\cdot10^{-19}$ C) se dispara a $2\cdot10^6$ m/s contra una placa cargada con una densidad superficial de carga de $-3\cdot10^{-9}$ C/m^2. Calcular la distancia máxima desde la que puede dispararse para que llegue a la placa.

La fuerza de repulsión de la placa provoca la aceleración de frenado del electrón. El valor absoluto del campo creado por la placa es, según el ejercicio nº 33, $E = 2k\pi\sigma$.

$$F = ma \qquad |E \cdot e| = ma$$

$$a = \frac{|E \cdot e|}{m} = 2k\pi \frac{|\sigma \cdot e|}{m}$$

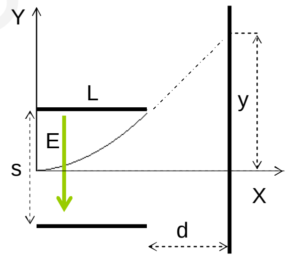
La distancia máxima d será aquella que detenga al electrón justo al lado de la placa:

$$v = \sqrt{2ad}$$

$$d = \frac{1}{4k\pi} \frac{mv^2}{|\sigma e|}$$

Resp.: d = 6.71 cm

36. En un tubo de rayos catódicos (TRC) un electrón (de masa m y carga q) se dispara a velocidad v por el centro del campo eléctrico uniforme E creado por un condensador plano de longitud L, cuyas armaduras están separadas una distancia s. El campo está dirigido verticalmente hacia abajo y es nulo excepto en el espacio comprendido entre las armaduras. El electrón sale del condensador casi rozando el borde de la armadura superior. Calcular: a) el valor del campo; b) la dirección de salida del campo, y c) ¿a qué distancia vertical impacta en una pantalla situada a una distancia d del borde de salida? Se desprecian los efectos gravitatorios.



a)

Se trata de un "disparo" sometido al efecto producido por el campo eléctrico E.

La fuerza eléctrica

$$F = Eq$$

genera en el eje Y una aceleración a, hacia arriba, que impulsa al electrón en sentido contrario al campo, de manera que:

$$F = ma$$

por tanto

$$Eq = ma$$

De donde deducimos que:

$$a = \frac{q}{m} E$$

El electrón realiza *dentro del condensador* un movimiento rectilíneo y uniforme en el eje X y otro rectilíneo y uniformemente acelerado según el eje Y. Las ecuaciones son:

$$x = vt$$

para $x = L$ resulta

$$t = \frac{L}{v}$$

además

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2$$

para x = L, según el enunciado:

$$y = \frac{s}{2}$$

con lo que:

Resp.: $E = s\frac{m}{q}\left(\frac{v}{L}\right)^2$

b)

La componente según el eje X de la velocidad con la que sale el electrón del condensador es v. La componente según el eje Y es $v_y = at = \frac{q}{m}E\frac{L}{v} = \frac{s}{L}v$. El ángulo α con el que sale del condensador, medido respecto a la horizontal es el arco cuya tangente es el cociente entre v_y y v:

Resp.: $\alpha = \text{arctg}\frac{s}{L}$

c)

Cuando el electrón sale del condensador mantiene constantes sus velocidades según ambos ejes. Para recorrer una distancia d hasta llegar a la pantalla invierte un tiempo $t = \frac{d}{v}$. La distancia vertical que recorre es $y = v_y t$, siendo $v_y = \frac{s}{L}v$. Por tanto:

Resp.: $y = \frac{s}{L}d$

37. Una partícula alfa (q = 3.2·10^{-19} C) se acelera mediante una ddp de 100000 V, ¿qué energía cinética adquiere?

El trabajo desarrollado por la fuerza eléctrica se invierte en aumentar la energía cinética de la partícula:

$$\Delta Ec = q\Delta V = 3.2 \cdot 10^{-19} \cdot 100000$$

Resp.: $3.2 \cdot 10^{-14}$ J

38. Un péndulo eléctrico está constituido por una esferita metálica de 1 gramo, colgada de un hilo despreciable de 150 cm, cargada con 1.3·10^{-8} C. Se le hace oscilar en una región donde existe un campo eléctrico vertical. Cuando el campo es vertical, de abajo a arriba, la esferita efectúa 100 oscilaciones en 316 segundos, y si el campo se orienta de arriba a abajo, tarda 208 segundos en realizar las 100 oscilaciones. Calcular: a) el campo eléctrico, y b) el valor de la intensidad de la gravedad.

Se trata de un péndulo simple en el que la gravedad se ve minorada en primer lugar por el campo eléctrico cuando efectúa 100 oscilaciones en 316 segundos; después se incrementa al realizar las mismas oscilaciones 208 segundos.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g - E\frac{q}{m}}} \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + E\frac{q}{m}}}$$

con

$$T=\frac{316}{100}=3.16 \qquad T'=\frac{208}{100}=2.08$$

$$mg-qE=\frac{4\pi^2 mL}{T^2} \qquad mg+qE=\frac{4\pi^2 mL}{T'^2}$$

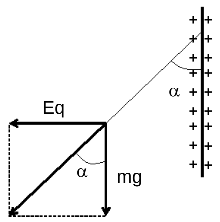
$$g=2\pi^2 L\left(\frac{1}{T^2}+\frac{1}{T'^2}\right)=2\pi^2 1.5\left(\frac{1}{3.16^2}+\frac{1}{2.08^2}\right)$$

Resp.: $g = 9.81\ m/s^2$

$$E=2\pi^2 L\frac{m}{q}\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T}\right)=2\pi^2 1.5\frac{10^{-3}}{1.3\cdot 10^{-8}}\left(\frac{1}{2.08^2}-\frac{1}{3.16^2}\right)$$

Resp.: $E = 2.98\cdot 10^5$ N/C

39. Una esfera puntual de 0.1 gramos está cargada con $3\cdot 10^{-9}$ C y atada a un hilo despreciable de 5 cm. El otro extremo del hilo está unido a la superficie de un conductor vertical, plano e indefinido, cargado con $25\cdot 10^{-7}$ C/m^2. Hallar el ángulo que forma el hilo con la vertical.

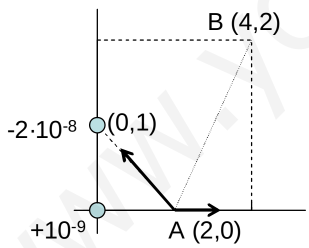


Al tratarse de un *conductor* plano indefinido, su densidad superficial de carga se concentra en las *dos* superficies del conductor. La superficie que actúa sobre la carga es sólo la de una cara. El valor del campo calculado en el ejercicio 33 es $2k\pi\sigma$; pero allí consideramos las dos bases del cilindro de integración. Aquí debemos contabilizar sólo una. Por tanto, el campo es $E = 4k\pi\sigma$:

$$\text{tag}\ \alpha=\frac{Eq}{mg}=\frac{4k\pi\sigma q}{mg}=\frac{4\cdot 9\cdot 10^9\ \pi\cdot 25\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 10^{-9}}{0.1\cdot 10^{-3}\cdot 9.8}$$

Resp.: 40º 52’ 39.09”

40. Una carga puntual de $+10^{-9}$ C está situada en el origen de coordenadas. Otra de $-2\cdot 10^{-8}$ C está sobre el eje Y a 1 m del origen. Determinar: a) el campo en el punto (2,0), y b) el trabajo que es necesario realizar para trasladar 3 C desde (2,0) hasta (4,2).



a)

$$\vec{E}_1=k\frac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1=9\cdot 10^9\frac{10^{-9}}{4}\vec{u}_1=2.25\vec{u}_1\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_2=k\frac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2=9\cdot 10^9\frac{2\cdot 10^{-8}}{5}\vec{u}_2=36\vec{u}_2\ \text{N/C}$$

con $\vec{u}_1=\vec{i}$; $\vec{u}_2=\dfrac{(-2,1)}{\sqrt{5}}$

Resp.: $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\left(2.25-\dfrac{72}{\sqrt{5}}\right)\vec{i}+\dfrac{36}{\sqrt{5}}\vec{j}$

b)

Los potenciales en A y en B son:

$$V_A=k\frac{q_1}{r_1}+k\frac{q_2}{r_2}=9\cdot 10^9\left(\frac{10^{-9}}{2}+\frac{-2\cdot 10^{-8}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$V_B = k\frac{q_1}{r'_1} + k\frac{q_2}{r'_2} = 9{\cdot}10^9\left(\frac{10^{-9}}{\sqrt{4^2+2^2}} + \frac{-2{\cdot}10^{-8}}{\sqrt{4^2+1^2}}\right)$$

$$W_{A\to B} = q(V_A - V_B) = 3(V_A - V_B)$$

Resp.: –103.063 J

El *signo menos* indica que el trabajo se debe realizar *contra el campo.*

41. a) Calcular el campo eléctrico necesario para equilibrar la fuerza gravitatoria ejercida sobre un electrón ($m = 9.11{\cdot}10^{-31}$ Kg; $q = -1.6{\cdot}10^{-19}$ C). b) Si el campo eléctrico fuese producido por otro electrón, ¿cuál debería ser la distancia entre ambos?

a)

$$F = ma \qquad Eq = mg$$

$$E = g\frac{m}{q} = 9.8\frac{9.11{\cdot}10^{-31}}{1.6{\cdot}10^{-19}}$$

Resp.: $E = 5.58{\cdot}10^{-11}$ N/C

b)

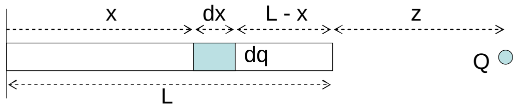
El campo creado por otro electrón es

$$E = k\frac{q}{r^2}$$

$$Eq = mg \qquad r = q\sqrt{\frac{k}{mg}}$$

Resp.: r = 5.08 m

42. Sobre un hilo de longitud L se distribuye uniformemente una carga q. Calcular la fuerza ejercida sobre una carga puntual Q situada en su prolongación a una distancia z del extremo.



$$dF = k\frac{Qdq}{(L - x + z)^2}$$

pero

$$dq = \lambda dx$$

con

$$\lambda = \frac{q}{L}$$

por tanto

$$dq = \frac{q}{L}dx$$

$$dF = k\frac{Qq}{L}\frac{dx}{(L - x + z)^2}$$

$$F = \int_{x=0}^{x=L} k\frac{Qq}{L}\frac{dx}{(L - x + z)^2}$$

Resp.: $F = k\frac{Qq}{z(z+L)}$

43. Se tienen dos esferas puntuales cargadas positivamente. La suma de sus cargas es $5{\cdot}10^{-5}$ C. Si la fuerza de repulsión es de 1 N cuando están separadas 2 m, ¿cómo está distribuida la carga entre ellas?

$$F = k\frac{Qq}{d^2} \qquad Qq = \frac{Fd^2}{k}$$

$$Qq = \frac{4}{9{\cdot}10^9}$$

y con

$$Q + q = 5{\cdot}10^{-5}$$

obtenemos:

Resp.: $3.844{\cdot}10^{-5}$ y $1.156{\cdot}10^{-5}$ C

44. Ciento veinticinco gotas idénticas de mercurio se cargan simultáneamente al mismo potencial de 100 V, ¿cuál es el potencial de la gota formada por la aglomeración de aquéllas?

$$V = k\frac{q}{r}$$

$$100 = k\frac{q}{r}$$

q es la carga de una gota y r su radio.

El volumen de las 125 gotas (supuestas esféricas) es

$$125\frac{4}{3}\pi r^3$$

que debe ser igual al volumen de una sola gota esférica de radio R:

$$125\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

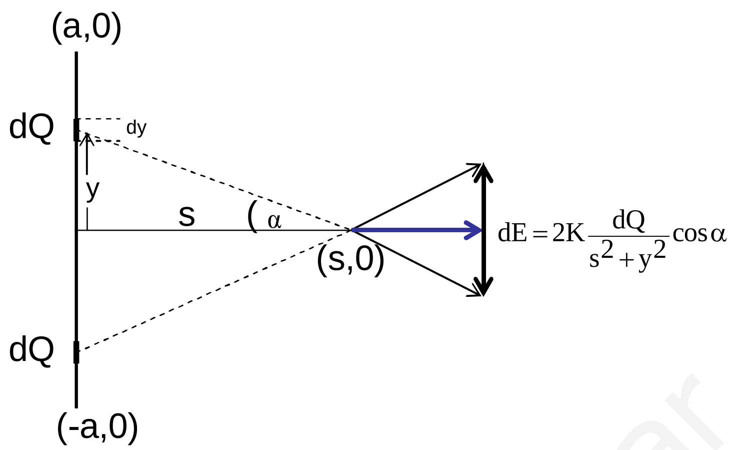
$$R = 5r$$

La carga de las 125 gotas será 125 veces la carga de una: 125q. El potencial V' será:

$$V' = k\frac{125q}{5r} = V\frac{125}{5}$$

Resp.: 2500 V

45. Calcular el campo eléctrico generado por una carga Q distribuida uniformemente a lo largo de una línea localizada en el eje Y entre los puntos (0, –a) y (0, a) sobre un punto situado en la posición (s, 0) del eje X.



Obsérvese que la *componente vertical* del campo creado en el punto (s,0) por un elemento infinitesimal de carga dQ, situado en la posición (y,0), se cancela con la componente vertical de otro elemento simétrico dQ, situado en la posición (–y,0). Mientras que las componentes horizontales del campo se suman, de manera que el módulo del campo infinitesimal, creado por los *dos* elementos infinitesimales dQ, es:

$$dE = 2K\frac{dQ}{s^2+y^2}\cos\alpha \qquad (1)$$

pero

$$\cos\alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2+y^2}}$$

y la densidad lineal de carga es

$$\lambda = \frac{Q}{2a} = \frac{dQ}{dy} \qquad dQ = \frac{Q}{2a}dy$$

sustituyendo en dE:

$$dE = kQ\frac{s}{a}\frac{dy}{\left(s^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

El campo total es la integral entre y = 0 e y = a de la expresión anterior. No se debe integrar entre –a y a porque ya se han considerado los dos elementos infinitesimales dQ ó dy al introducir el factor 2 en la expresión (1).

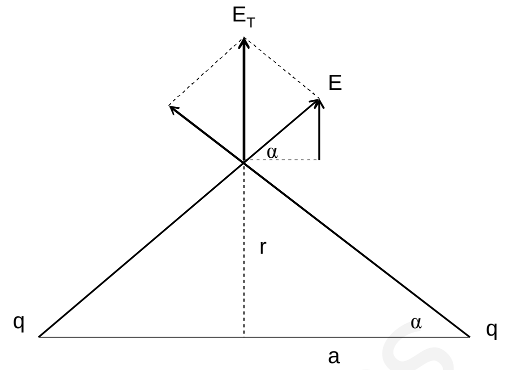
$$E = kQ\frac{s}{a}\int_0^a \frac{dy}{\left(s^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{kQ}{s}\frac{1}{\sqrt{a^2+s^2}}$$

Resp.: $E = \frac{kQ}{s}\frac{1}{\sqrt{a^2+s^2}}$

46. Dos cargas puntuales positivas están separadas una distancia 2a. Por el punto medio del segmento que las une se traza un plano perpendicular a dicho segmento. El lugar

geométrico de los puntos de ese plano, donde la intensidad del campo es máxima, por razón de simetría, es una circunferencia. Calcular su radio.

Como se aprecia en la figura, el módulo del campo total es:



$$E_T = 2E\,\text{sen}\,\alpha = 2\frac{kq}{a^2 + r^2}\,\text{sen}\,\alpha$$

pero

$$a = \sqrt{a^2 + r^2}\,\cos\alpha$$

por tanto:

$$a^2 + r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$$

de donde

$$E_T = \frac{2kq}{a^2}\cos^2\alpha\ \text{sen}\ \alpha = \frac{2kq}{a^2}(1 - \text{sen}^2\alpha)\ \text{sen}\ \alpha = \frac{2kq}{a^2}(\text{sen}\ \alpha - \text{sen}^3\alpha)$$

derivando respecto a α e igualando a cero:

$$\frac{dE_T}{d\alpha} = \frac{2kq}{a^2}(\cos\alpha - 3\text{sen}^2\alpha\cos\alpha) = \frac{2kq}{a^2}\cos\alpha(1 - 3\text{sen}^2\alpha) = 0$$

La identidad anterior tiene dos soluciones:

a) $\cos\alpha = 0$

es decir

$$\alpha = 90^\circ$$

o sea, en el infinito, que se corresponde con un mínimo.

b) $1 - 3\text{sen}^2\alpha = 0$

es decir

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

despejando r:

Resp.: $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$

TEMA IX

ELECTROMAGNETISMO

EJERCICIOS

1. **Demostrar que: a) el módulo del campo magnético creado en el centro de una espira circular de radio R, por la que circula una corriente I, es** $B=\frac{\mu I}{2R}$; **y b) el módulo del campo en un punto del eje a una distancia d del centro de la espira, es** $B=\frac{\mu I R^2}{2\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}$

a)

En la ley de Biot y Sabart aplicada a la espira circular de radio R, el ángulo φ es de 90º.

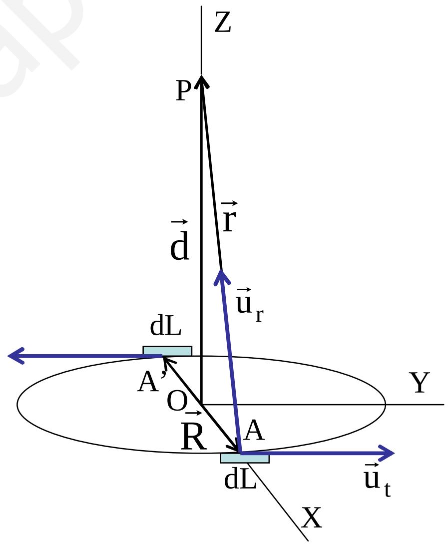
$$dB=\frac{\mu}{4\pi}\frac{IdL}{r^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi=\frac{\mu}{4\pi}\frac{IdL}{R^2}$$

$$B=\int_L\frac{\mu}{4\pi}\frac{IdL}{R^2}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_L dL=\frac{\mu}{4\pi}\frac{I}{R^2}2\pi R=\frac{\mu I}{2R}$$

b)

Como

$$\overrightarrow{dB}=\frac{\mu I}{4\pi}\frac{dL}{r^2}\vec{u}_t x\vec{u}_r$$



pero, en la figura:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}$$

es decir

$$\vec{R}+\vec{r}=\vec{d}$$

o sea

$$R\vec{i}+\vec{r}=d\vec{k}$$

por tanto

$$\vec{r}=-R\vec{i}+d\vec{k}$$

de donde deducimos:

$$\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{r}=\frac{-R\vec{i}+d\vec{k}}{\sqrt{R^2+d^2}}$$

en la figura se aprecia que:

$$\vec{u}_t=\vec{j}$$

efectuando el producto vectorial $\vec{u}_t x\vec{u}_r$ resulta:

$$\vec{u}_t x \vec{u}_r = \frac{d\vec{i} + R\vec{k}}{\sqrt{R^2 + d^2}}$$

Como $r^2 = R^2 + d^2$, entonces, la contribución del elemento diferencial dL situado en A es:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{dL}{\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}} \left(d\vec{i} + R\vec{k}\right)$$

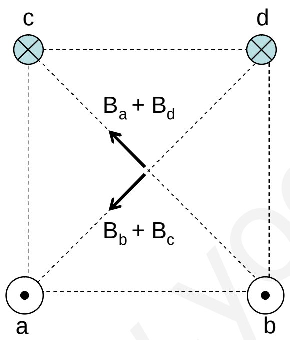
Pero, procediendo de manera análoga, podemos comprobar que la contribución del elemento diferencial dL situado en A' genera un vector $\overrightarrow{dB'}$:

$$\overrightarrow{dB'} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{dL}{\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}} \left(-d\vec{i} + R\vec{k}\right)$$

Es decir, las componentes del campo según el eje X se cancelan. Por tanto, el módulo de B es:

$$B = \int_L \frac{\mu IR}{4\pi} \frac{dL}{\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu IR}{4\pi\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}} \int_L dL = \frac{\mu IR}{4\pi\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu IR^2}{2\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

2. **La figura representa cuatro conductores rectilíneos, muy largos y paralelos, por los que circulan 5 A (en a y b la corriente sale del papel, y en c y d entra). Calcular el vector inducción magnética en el centro del cuadrado de lado 10 cm.**



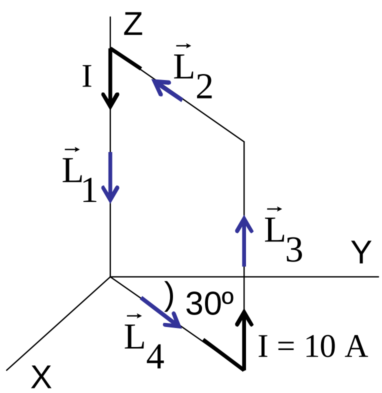
$$|B_a| = |B_b| = |B_c| = |B_d| = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{4\pi 10^{-7} \cdot 5}{2\pi 5\sqrt{2}\,10^{-2}} = 10^{-5}\sqrt{2}\ T$$

El campo resultante será paralelo a los lados ab y cd y dirigido hacia la izquierda en la figura. Su módulo será:

$$B = \left[2(B_a + B_d) + 2(B_b + B_c)\right]\cos 45 = 4\sqrt{2}\,10^{-5}\ T$$

Resp: $B = 4\sqrt{2}\ 10^{-5}$ T

3. **La espira de la figura puede girar alrededor del eje Z. Circulan 10 A en el sentido señalado. L_1 y L_3 miden 0.08 m; L_2 y L_4 0.06 m. Calcular: a) la fuerza sobre cada lado y el momento para mantener la espira en la posición indicada, si está sometida a un campo de 0.2 T paralelo al eje Y; b) Ídem si el campo es paralelo al eje X.**



$$\vec{F}_i = I(\vec{L}_i \ x\ \vec{B}) \qquad \vec{M} = I(\vec{S}\ x\ \vec{B})$$

a)

$\vec{F}_1 = 10(-0.08\vec{k}\ x\ 0.2\vec{j})$ Resp.: $\vec{F}_1 = 0.16\,\vec{i}$ N

$\vec{F}_2 = 10\{0.06(-\cos 30\,\vec{j} - \text{sen}\ 30\,\vec{i})\ x\ 0.2\,\vec{j}\}$ Resp.: $\vec{F}_2 = -\,0.06\,\vec{k}$ N

$\vec{F}_3 = 10(0.08\vec{k} \text{ x } 0.2\vec{j})$ Resp.: $\vec{F}_3 = -0.16\,\vec{i}$ N

$\vec{F}_4 = 10\{0.06(\cos 30\,\vec{j} + \text{sen}\,30\,\vec{i}) \text{ x } 0.2\,\vec{j}\}$ Resp.: $\vec{F}_4 = 0.06\,\vec{k}$ N

El momento provocado por el campo es:

$$\vec{M} = I(\vec{S} \text{ x } \vec{B}) = I(\vec{L}_1 \text{ x } \vec{L}_4) \text{ x } \vec{B} = 0.0048\sqrt{3}\vec{k} \text{ Nm}$$

por tanto el que debemos hacer nosotros es: Resp.: $-\,0.0048\sqrt{3}\vec{k}$ Nm

b)

$\vec{F}_1 = 10(-0.08\vec{k} \text{ x } 0.2\vec{i})$ Resp.: $\vec{F}_1 = -\,0.16\,\vec{j}$ N

$\vec{F}_2 = 10\{0.06(-\cos 30\,\vec{j} - \text{sen}\,30\,\vec{i}) \text{ x } 0.2\,\vec{i}\}$ Resp.: $\vec{F}_2 = 0.06\sqrt{3}\,\vec{k}$ N

$\vec{F}_3 = 10(0.08\vec{k} \text{ x } 0.2\vec{i})$ Resp.: $\vec{F}_3 = 0.16\,\vec{j}$ N

$\vec{F}_4 = 10\{0.06(\cos 30\,\vec{j} + \text{sen}\,30\,\vec{i}) \text{ x } 0.2\,\vec{i}\}$ Resp.: $\vec{F}_4 = -0.06\sqrt{3}\;\vec{k}$ N

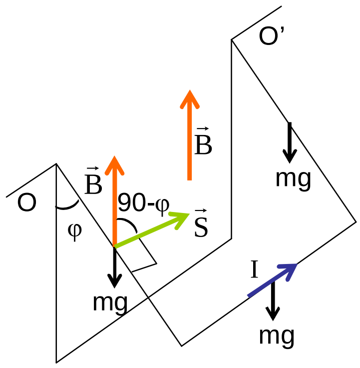
El momento provocado por el campo es:

$$\vec{M} = I(\vec{S} \text{ x } \vec{B}) = I(\vec{L}_1 \text{ x } \vec{L}_4) \text{ x } \vec{B} = 0.0048\,\vec{k} \text{ Nm}$$

por tanto el que debemos hacer nosotros es:

Resp.: $-\,0.0048\,\vec{k}$ Nm

4. Un alambre de cobre, de A = 2.5 mm^2 de sección y de densidad ρ = 8.9 g/cm^3, doblado en forma de π, con los tres lados iguales, puede girar alrededor de OO'. Está en un campo magnético dirigido verticalmente. Calcular el campo si al circular I = 16 A el ángulo que forma con la vertical es φ = 20º.



Tomando momentos respecto al eje que pasa por los puntos de apoyo OO', el momento mecánico es:

$$M_{mec} = 2LA\rho g\frac{L}{2}\ \text{sen}\ \varphi + LA\rho gL\ \text{sen}\ \varphi$$

El módulo del momento magnético es:

$$M_{mag} = ISB\ \text{sen}\ (90 - \varphi) \qquad \text{siendo} \qquad S = L^2$$

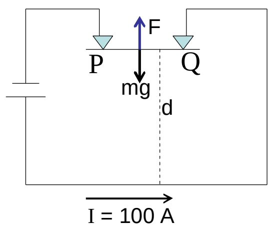
$$M_{mag} = IL^2 \cos \varphi$$

Igualando ambos momentos y despejando B:

$$B = \frac{2A\rho g}{I}\ \text{tg}\ \varphi = \frac{2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot 8.9 \cdot 10^3 \cdot 9.8}{16}\ \text{tg}\ 20$$

Resp.: $9.92 \cdot 10^{-3}$ T

5. Calcular la distancia d necesaria para que el conductor PQ de 20 cm y 0.08 gramos se mantenga en equilibrio si por el circuito circulan 100 A.

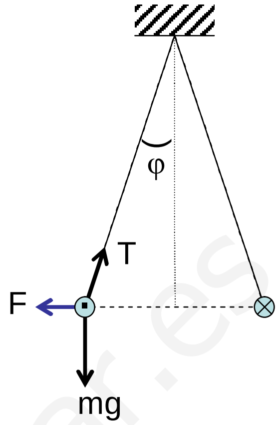


$$mg = BIL = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} IL$$

$$d = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi mg} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2 \cdot 0.2}{2\pi \cdot 0.08 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}$$

Resp.: 51 cm

6. Dos conductores rectilíneos, muy largos y paralelos de λ = 20 gramos por metro de longitud, por los que circula la misma corriente I, pero en sentido contrario, están suspendidos de un eje común mediante dos cuerdas inextensibles y sin peso de a = 5 cm de longitud, que forman con la vertical un ángulo de 30º. Determinar el valor de I.



$$T \operatorname{sen} \varphi = F \qquad T \cos \varphi = mg \quad m = \lambda L$$

por tanto

$$F = \lambda L g \operatorname{tg} \varphi$$

con

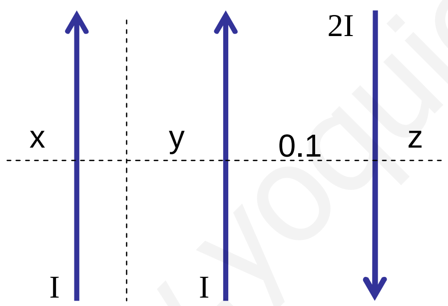
$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} I^2}{2\pi \cdot 2(a \operatorname{sen} \varphi)} L = \frac{10^{-7} I^2}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{L}{a}$$

de donde

$$I = \sqrt{10^7 \lambda a g \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi} = \sqrt{10^7 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 9.8 \cdot \operatorname{sen} 30 \operatorname{tg} 30}$$

Resp.: 168.2 A

7. Tres conductores rectilíneos, muy largos y paralelos a, b y c están separados entre sí 10 cm sobre el mismo plano. Por a y b circulan 10 A en el mismo sentido, y por c circulan 20 A en sentido contrario. Determinar el lugar geométrico del plano en el que el campo magnético se anula.



Calculemos el campo en los tres puntos posibles x, y, z situados en la figura.

$$\frac{\mu I}{2\pi x} + \frac{\mu I}{2\pi(x+0.1)} - \frac{\mu 2I}{2\pi(x+0.2)} = 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+0.1} - \frac{2}{x+0.2} = 0$$

de donde:

$$x = -\frac{20}{3} \text{ cm}$$

Análogamente:

$$\frac{1}{0.1-y} - \frac{1}{y} + \frac{2}{0.1+y} = 0$$

de donde:

$$y = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

y

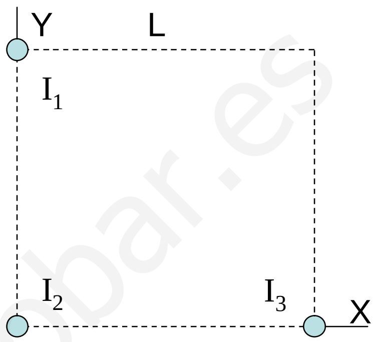
$$\frac{1}{0.2+z} + \frac{1}{0.1+z} - \frac{2}{z} = 0$$

de donde

$$z = -\frac{40}{3}\ \text{cm}$$

Si comparamos las soluciones, vemos que en realidad las tres se corresponden con la misma recta. Resp.: $y = \frac{10}{3}$ cm

8. Tres conductores rectilíneos, muy largos y paralelos pasan por tres vértices de un cuadrado. Calcular el campo magnético en el vértice no ocupado si el sentido de todas las corrientes es clavándose en el papel.



$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi d}(\vec{u}_t \text{ x } \vec{u}_r)$$

$$\vec{u}_{t1} = \vec{u}_{t2} = \vec{u}_{t3} = -\vec{k}$$

$$\vec{u}_{r1} = \vec{i};\vec{u}_{r2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j});\vec{u}_{r3} = \vec{j}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu I_1}{2\pi L}(\vec{u}_{t1} \text{ x } \vec{u}_{r1}) + \frac{\mu I_2}{2\pi L\sqrt{2}}(\vec{u}_{t2} \text{ x } \vec{u}_{r2}) + \frac{\mu I_3}{2\pi L}(\vec{u}_{t3} \text{ x } \vec{u}_{r3})$$

Resp.: $\frac{\mu}{4\pi L}\left[(I_2 + 2I_3)\vec{i} - (2I_1 + I_2)\vec{j}\right]$

9. La bobina de un galvanómetro tiene 50 vueltas y una superficie de $6{\cdot}10^{-4}$ m^2. El campo magnético es de 0.01 T y la constante de recuperación de l resorte es 10^{-8} N.m/grado. Determinar la desviación de la bobina para una corriente de 10^{-3} A.

$$M = nBIS = 50{\cdot}0.01{\cdot}10^{-3}{\cdot}6{\cdot}10^{-4} = 3{\cdot}10^{-7}\ \text{N}{\cdot}\text{m}$$

$$M = k\theta;\ \text{por tanto}\ \theta = \frac{M}{k} = \frac{3{\cdot}10^{-7}}{10^{-8}}$$

Resp.: 30º

10. La bobina de un galvanómetro tiene 400 espiras y una superficie de 6 cm^2. Se suspende de un hilo en un campo de 1000 gauss. Por la bobina circula una corriente de 10^{-7} A. Hallar el momento de rotación si el plano de la bobina forma 60º con el campo magnético.

$$M = nBIS\ \text{sen}\ \alpha$$

siendo α el ángulo que forma el campo con la normal a la bobina. En este caso es de 30º.

$$M = 400{\cdot}1000{\cdot}10^{-4}{\cdot}10^{-7}{\cdot}6{\cdot}10^{-4}{\cdot}0.5$$

Resp.: $1.2{\cdot}10^{-9}$ N.m

11. Por una bobina circular grande de 60 vueltas y 10 cm de longitud, circula una corriente de 2 A. En el centro de ella hay otra pequeña, de 30 vueltas y 0.5 cm de radio, por la que circula una corriente de 0.5 A. Los planos de las dos bobinas son perpendiculares entre sí; ¿qué momento ejerce la bobina grande sobre la pequeña, admitiéndose que no hay alteración en el campo magnético producido por la bobina grande?

El módulo del campo creado por la bobina grande es:

$$B = \mu I \frac{n}{s} = 4\pi 10^{-7} \cdot 2 \cdot \frac{60}{0.01} = 1.50796 \cdot 10^{-2}\ T$$

Y el valor del momento es:

$$\vec{M} = I'\vec{S} x \vec{B}$$

donde I' es la corriente que circula por la bobina pequeña. El módulo del momento es:

$$M = I'SB$$

pues la superficie de la bobina pequeña es perpendicular al campo creado por la grande.

$$M = 0.5 \cdot 30 \cdot \pi \cdot (0.5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1.50796 \cdot 10^{-2}$$

Resp.: $1.78 \cdot 10^{-5}$ N.m

12. Un solenoide de 0.25 m de diámetro y 0.3 m de longitud está formado por dos capas; la interna tiene 300 vueltas y la externa 250. Por ambas circulan 3 A en el mismo sentido. Calcular: a) el campo en el interior, y b) el flujo magnético que lo atraviesa.

a)

$$B = \mu \frac{nI}{s} = 4\pi 10^{-7} \frac{(300+250) \cdot 3}{0.3}$$

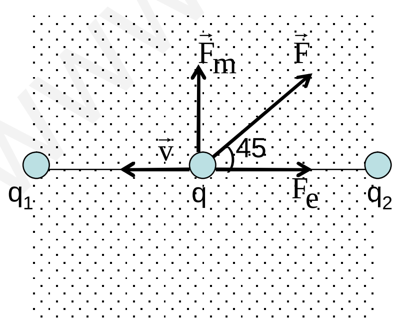
Resp.: $6.91 \cdot 10^{-3}$ T

b)

$$\Phi_m = BS = B\pi r^2 = 6.91 \cdot 10^{-3} \pi \cdot \left(\frac{0.25}{2}\right)^2$$

Resp.: $3.392 \cdot 10^{-4}$ Wb

13. Dos cargas fijas de q_1 = 3 μC y q_2 = –7 μC están separadas 2 m. En un cierto instante, en el punto medio entre las dos, se mueve una carga +q con una velocidad $\vec{v}$ dirigida hacia q_1. El conjunto está sometido a un campo magnético de 2 T perpendicular al plano de la figura y hacia fuera. La fuerza resultante $\vec{F}$ tiene la dirección y el sentido representados. Calcular la velocidad en ese instante.



La carga q está sometida a un campo eléctrico y a un campo magnético. El campo eléctrico es:

$$\vec{E} = k\left(\frac{q_1}{d_1^2} + \frac{q_2}{d_2^2}\right)\vec{i} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{3 \cdot 10^{-6}}{1^2} + \frac{7 \cdot 10^{-6}}{1^2}\right) = 9 \cdot 10^4\, \vec{i}$$

$$\vec{F}_e = \vec{E}q = 9 \cdot 10^4 q\vec{i}\ \ N$$

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q\left(v(-\vec{i}) x 2\vec{k}\right) = 2qv\vec{j}$$

Como los módulos de ambas fuerzas deben ser iguales: $9 \cdot 10^4$ q = 2 qv

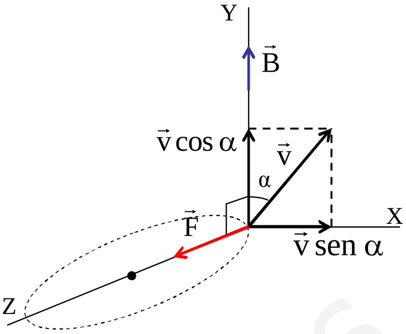
Resp.: v = $4.5 \cdot 10^4$ m/s

14. Un protón (m = $1.673 \cdot 10^{-27}$ Kg; q = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C) se mueve con una velocidad de 10^7 m/s que forma 30º con un campo de 1.5 T. Calcular: a) el radio de la hélice descrita; b) la distancia que avanza por revolución, y c) la frecuencia de rotación.

a)

$$\vec{v} = v(\text{sen}\,\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}) \qquad \vec{B} = B\vec{j}$$

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = v(\text{sen}\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}) \times B\,\vec{j} = qvB\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{k}$$



El módulo de esta fuerza debe ser igual al producto de la masa por la aceleración centrípeta que produce:

$$qvB\,\text{sen}\,\alpha = m\frac{(v\,\text{sen}\,\alpha)^2}{R}$$

de donde

$$R = \frac{mv\,\text{sen}\,\alpha}{qB}$$

Resp.: 0.034854 m

b)

El protón gira describiendo una circunferencia a una velocidad v sen α. Por tanto, el tiempo que invierte en hacerlo es: $t = \frac{2\pi R}{v\,\text{sen}\,\alpha}$. Este mismo tiempo es el que necesita para desplazarse según el eje Y a una velocidad v cos α:

$$t = \frac{2\pi R}{v\,\text{sen}\,\alpha} = \frac{y}{v\cos\alpha}$$

por tanto

$$y = 2\pi R\,\text{ctg}\,\alpha$$

Resp.: y = 0.3793 m

c)

$$\omega = \frac{v\,\text{sen}\,\alpha}{R} = \frac{qB}{m} = 2\pi f$$

por tanto:

$$f = \frac{qB}{2\pi m}$$

Resp.: f = $2.283 \cdot 10^{7}$ Hz

15. Calcular: a) el radio de la trayectoria y el semiperiodo de un electrón (m = $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg; q = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C) que se mueve a 10^7 m/s perpendicularmente a un campo de 0.02 T; b) el número de vueltas que da en 0.01 segundos; c) la ddp necesaria para adquirir esa velocidad, y d) el radio de la órbita descrita si está dotado de una energía de 1000 electrón-voltios (eV) al desplazarse en un plano perpendicular a un campo de 100 gauss. Nota: Un eV es la energía que adquiere un electrón al estar sometido a la diferencia de potencial de un voltio. 1 eV= $1.6 \cdot 10^{-19}$ Julios.

a)

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Resp.: R = $2.847 \cdot 10^{-3}$ m

$$\frac{T}{2}=\frac{\pi R}{v}=\frac{\pi m}{qB}$$

Resp.: $\frac{T}{2}=8.94{\cdot}10^{-10}$ s

b)

$$n=\frac{t}{T}=\frac{0.01}{2{\cdot}8.94{\cdot}10^{-10}}$$

Resp.: n = $5.59{\cdot}10^{6}$ vueltas

c)

$$\frac{1}{2}mv^2=q\Delta V \qquad\qquad \Delta V=\frac{mv^2}{2q}$$

Resp.: $\Delta V = 287.7$ V

d)

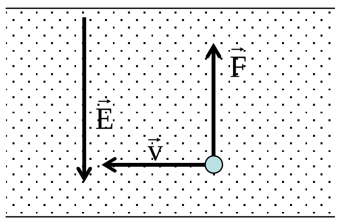
$$\frac{1}{2}mv^2=q\Delta V=1000{\cdot}1.6{\cdot}10^{-19}=E$$

$$R=\frac{mv}{qB}=\frac{m\sqrt{\frac{2E}{m}}}{qB}$$

Resp.: $1.067{\cdot}10^{-2}$ m

16. Se aplica una ddp de 100 V a las armaduras de un condensador de placas paralelas horizontales, separadas 1 cm en el vacío. Se lanza horizontalmente un protón (m = $1.673{\cdot}10^{-27}$ kg; q = $1.6{\cdot}10^{-19}$ C) entre las placas a 10^7 m/s y se aplica un campo magnético perpendicular a esta velocidad. Calcular: a) la intensidad del campo eléctrico entre las armaduras; b) la inducción magnética para que el electrón no se desvíe, y c) la órbita descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico.

a)



$$E=\frac{\Delta V}{d}=\frac{100}{0.01}$$

Resp.: 10000 N/C

b)

$$qE = qvB \qquad\qquad B=\frac{E}{v}=\frac{10000}{10^7}$$

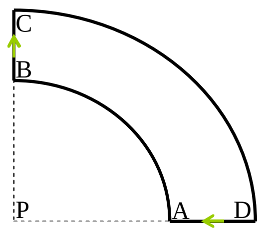
Resp.: 10^{-3} T

c)

$$R=\frac{mv}{qB}$$

Resp.: 104.56 m

17. Por el conductor de la figura pasa una corriente de 5 A. Calcular el campo magnético creado en el punto P por los arcos de circunferencia 4 y 2 cm de radio y los segmentos AD y BC, si φ = 90º.



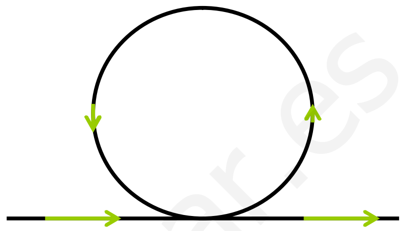
En el ejercicio nº 1 calculamos el campo creado por una espira circular. De aquel resultado deducimos que el campo creado por un sector circular de 90º es la cuarta parte. Los tramos BC y AD no generan campo porque están orientados en la dirección de P según el vector $\vec{u}_r$. Además, el arco CD crea un campo perpendicular el plano del papel de sentido contrario al generado por el tramo AB y de menor valor porque está más alejado. Por tanto:

$$B = B_{AB} - B_{CD} = \frac{1}{4}\left(\frac{\mu I}{2R_{AB}}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\mu I}{2R_{CD}}\right) = \frac{1}{8}\mu I\left(\frac{1}{R_{AB}} - \frac{1}{R_{CD}}\right)$$

Resp.: $1.96 \cdot 10^{-5}$ T

18. Por un conductor rectilíneo, largo, pasan 10 A. Forma un bucle circular de radio R y continúa de nuevo en línea recta. Calcular el radio del bucle si en su centro el campo vale 0.004 T.

El campo es la suma del creado por un conductor rectilíneo y una espira circular:

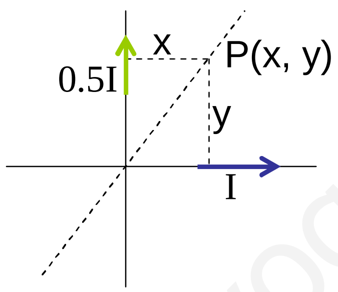


$$B = \frac{\mu I}{2\pi R} + \frac{\mu I}{2R}$$

$$R = \frac{\mu I}{2B}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)$$

Resp.: $2.07 \cdot 10^{-3}$ m

19. Por eje X, en el sentido positivo, circula una corriente I. Por el eje Y, también en el sentido positivo circula una corriente 0.5 I. Determinar el lugar geométrico de los puntos del plano XY donde el campo magnético se anula.



Los únicos puntos posibles deben pertenecer al primer o tercer cuadrante. Sea P(x, y) un punto posible:

$$\vec{B}_I = \frac{\mu I}{2\pi y}\vec{k}$$

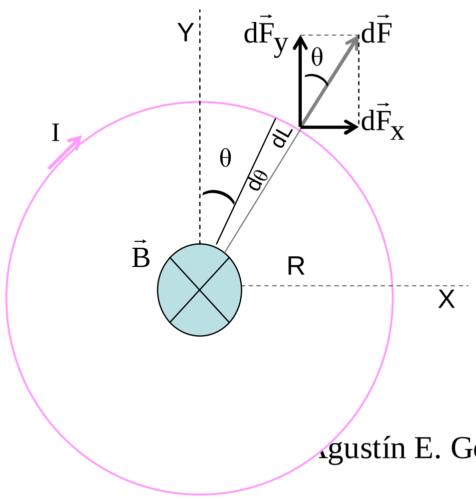
$$\vec{B}_{0.5I} = \frac{\mu 0.5 I}{2\pi x}(-\vec{k})$$

$$\vec{B}_I + \vec{B}_{0.5I} = 0$$

$$\frac{1}{y} = \frac{0.5}{x}$$

Resp.: y = 2x

20. Un campo magnético uniforme de 0.02 T penetra perpendicularmente por la cara Sur de una espira de 0.04 m de radio por la que circula una corriente de 0.5 A. Calcular la fuerza ejercida sobre un cuadrante de la espira.



La fuerza ejercida sobre un elemento $d\vec{L}$ de la espira es radial y dirigida hacia el exterior de la espira.

Su componente según el eje X es:

$$F_x = \int dF_x = \int dF \,\text{sen}\,\theta = \int_L BIdL \,\text{sen}\,\theta$$

pero

$$dL = Rd\theta$$

por tanto

$$F_x = \int_0^{\pi/2} BIR \,\text{sen}\, \theta \, d\theta = BIR$$

análogamente, su componente según el eje Y es:

$$F_y = \int_0^{\pi/2} BIR \cos \theta \, d\theta = BIR$$

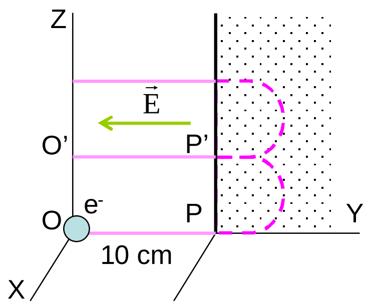
y la fuerza total ejercida sobre un cuadrante de espira es

$$\vec{F} = BIR(\vec{i} + \vec{j})$$

Resp.: $\vec{F} = 4 \cdot 10^{-4}(\vec{i} + \vec{j})$

21. En la región limitada por los planos y = 0, y = 10 cm existe un campo eléctrico de –1000 $\vec{j}$ V/m. En la región comprendida entre y =10 cm y el infinito existe una campo magnético uniforme de 10^{-4} $\vec{i}$ T. Se abandona un electrón (m = $9.11 \cdot 10^{-31}$ Kg; q = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C) en el origen de coordenadas sin velocidad inicial. Calcular: a) la velocidad del electrón en el punto (0,10,0), y b) el periodo del movimiento que describe.

La trayectoria descrita por el electrón es la siguiente: sale de O sin velocidad, acelerado por $\vec{E}$; llega a P con una velocidad v donde el campo magnético (representado por la zona de puntos) le obliga a describir una semicircunferencia hasta P'; entonces $\vec{E}$ lo va frenando hasta que llega a O' sin velocidad; pero de nuevo $\vec{E}$ lo empuja hacia P'. Y así sucesivamente.



a)

$$F = eE = ma\,; \; a = \frac{eE}{m}$$

la velocidad con la que llega a P es:

$$v = \sqrt{2ay_p} = \sqrt{2\frac{eE}{m}y_p}$$

Resp.: $5.93 \cdot 10^6$ m/s

b)

El periodo del movimiento descrito por el electrón es el correspondiente a la suma de los tiempos invertidos en recorrer el segmento OP, a continuación la semicircunferencia PP' y, por último, el segmento P'O'.

$$OP = \frac{1}{2}at_{op}^2\,; \; t_{op} = \sqrt{\frac{2OP}{a}}$$

además los tiempos invertidos en los tramo OP y P'O' son iguales.

El radio de la semicircunferencia es:

$$R = \frac{mv}{eB}$$

y el electrón la recorre a velocidad v; por tanto:

$$t_{pp'} = \frac{\pi R}{v}$$

$$T = 2t_{op} + t_{pp'}$$

Resp.: 24.6 μs

22. Un toroide de 20 cm de radio medio está constituido por un núcleo de material ferromagnético cuya permeabilidad relativa es 8000, y tiene arrolladas 1500 vueltas de un conductor por el que circulan 0.2 A. Calcular el campo magnético en el interior y en el exterior del toroide.

$$B_{int} = \mu\frac{nI}{s} = \mu_0\mu_r\frac{nI}{2\pi r} = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 8000\cdot\frac{1500\cdot 0.2}{2\pi\cdot 20\cdot 10^{-2}}$$

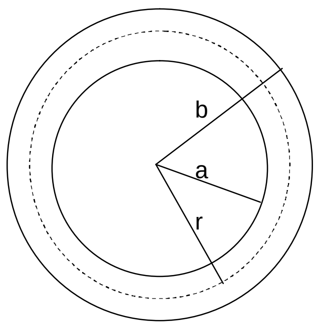
Resp.: 2.4 T

En el exterior del toroide el campo magnético es nulo.

23. Por un tubo conductor recto, de radios interior y exterior a y b, circula una corriente I en dirección axial distribuida uniformemente por toda su sección recta. Calcular la inducción magnética en un punto que dista r, cuando a) 0 < r < a; b) a < r < b, y c) r > b

Aplicamos la ley de Ampère:

$$\int_L \vec{B}\cdot d\vec{L} = \mu I$$



Procedemos de manera similar a como lo hacíamos con el teorema de Gauss para el cálculo de campos:

a)

Para 0 < r < a la corriente I = 0

Resp.: B = 0; para 0 < r < a

b)

Para a < r < b la densidad de corriente J es:

$$J = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

y la corriente I_r que circula por el interior del tubo comprendido entre a y r es:

$$I_r = \pi(r^2 - a^2)\cdot J = I\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

Por tanto:

$$\int_L B\cdot dL = \mu I_r \qquad B\cdot 2\pi r = \mu I\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

Resp.: $B = \frac{\mu I}{2\pi r}\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$; para a < r < b

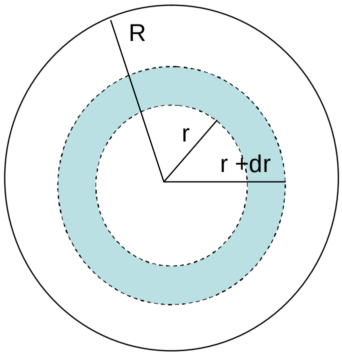
c)

Para r > b la ley de Ampère establece que:

Resp.: $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$; para r > b

Obsérvese que este resultado es el mismo que el obtenido para un conductor rectilíneo indefinido.

24. Un disco de radio 2π cm está cargado uniformemente con 5 μC. Calcular la inducción magnética en el centro del disco si lo hacemos girar a n = 200 revoluciones por segundo.



La densidad de carga es:

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{dq}{dS} = \frac{dq}{2\pi r dr}$$

de donde:

$$dq = \frac{2qr}{R^2} dr$$

Y la velocidad es:

$$v = \omega r = 2\pi n r$$

$$dB = \frac{\mu}{4\pi}\frac{v dq}{r^2} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{2\pi n r \frac{2qr}{R^2} dr}{r^2} = \frac{\mu}{R^2} qn\, dr$$

$$B = \frac{\mu}{R^2} qn \int_0^R dr = \frac{\mu}{R} qn = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot 10^{-2}} 5 \cdot 10^{-6} 200$$

Resp.: $2 \cdot 10^{-8}$ T

25. El campo magnético de un ciclotrón es de 0.3 T. El radio de la última trayectoria descrita por un protón (m = $1.673 \cdot 10^{-27}$ kg; q = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C) antes de salir del ciclotrón es 70 cm. Calcular: a) la energía cinética del protón al abandonar el ciclotrón; b) la ddp necesaria para dotar a un protón que parte del reposo con la misma velocidad; c) el número de vueltas que da en el ciclotrón suponiendo que se inyecta en el eje del aparato con velocidad nula cuando la ddp entre las *des* alcanza su valor máximo de V = 30000 V, y d) la duración del recorrido.

a)

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{(qRB)^2}{2m}$$

Resp.: $3.37 \cdot 10^{-13}$ J

b)

$$Ec = q\Delta V$$

$$\Delta V = \frac{Ec}{q}$$

Resp.:$2.11 \cdot 10^{6}$ V

c)

En cada vuelta el protón está sometido a la ddp de V = 30000 V dos veces. Por tanto, adquiere una energía cinética $E = 2 \cdot 30000 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}$ J. Como necesita la energía calculada en el apartado a), tendrá que dar n vueltas:

$$n = \frac{Ec}{E} = \frac{qR^2B^2}{4mV}$$

Resp.: 35 vueltas

d)

$$T = \frac{2\pi m}{Bq}$$

$$t = nT = \frac{\pi R^2 B}{4V}$$

Resp.: 7.7 μs

26. El diámetro de un ciclotrón es 1.04 m. La frecuencia del oscilador es f = 12 MHz. Calcular la energía en mega electrón–voltios (MeV) de un protón acelerado (masa: $1.673 \cdot 10^{-27}$ kg; carga: $1.6 \cdot 10^{-19}$ C). Nota: Un eV es la energía que adquiere un electrón al estar sometido a la diferencia de potencial de un voltio. 1 eV= $1.6 \cdot 10^{-19}$ Julios.

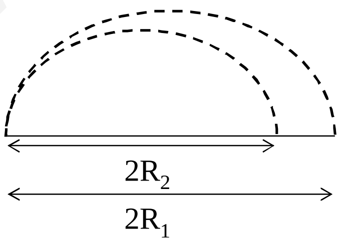
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 = \frac{1}{2}m(2\pi f R)^2 = 2m(\pi f R)^2$$

$$Ec = 2 \cdot 1.673 \cdot 10^{-27}(\pi \cdot 12 \cdot 10^{6} \cdot 0.52)^2 = 1.286 \cdot 10^{-12}\text{ J} = \frac{1.286 \cdot 10^{-12}}{1.6 \cdot 10^{-19}}\text{ ev}$$

Resp.: 8.0366 MeV

27. En un espectrógrafo de masas se separan dos isótopos. Uno de ellos es el isótopo 16 de O_2 y el otro desconocido. Ambos penetran en la cámara, donde hay un campo de 0.3 Wb/m^2, con una velocidad de 200 km/s. El desconocido describe una órbita más corta que el otro. La distancia que separa los puntos de impacto en la placa es de 1.38 cm. Calcular la masa atómica del ión desconocido (unidad de masa atómica u = $1.66 \cdot 10^{-27}$ Kg).



$$R_1 = \frac{m_1 v}{qB} = \frac{16u \cdot 2 \cdot 10^{5}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.3}$$

$$R_2 = \frac{m_2 v}{qB} = \frac{m_2 u \cdot 2 \cdot 10^{5}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.3}$$

$$2R_1 - 2R_2 = 1.38 \cdot 10^{-2} \qquad R_1 - R_2 = 0.69 \cdot 10^{-2}$$

Resp.: $m_2 = 15$

28. En un espectrógrafo de masas los campos del selector de velocidades son 200 V/cm y 500 gauss, y el campo que desvía los iones es de 15000 gauss. Calcular la separación que se

observará en la placa para los iones C^{12} (m_{12} = 12.00368 u) y C^{13} (m_{13} = 13.00761 u) (unidad de masa atómica u = $1.66\cdot10^{-27}$ Kg).

En el selector de velocidades los campos eléctrico y magnético deben ser iguales (ver apartado b del ejercicio 16):

$$qvB' = qE$$

$$v = \frac{E}{B'} = \frac{20000}{500\cdot10^{-4}} = 400000 \text{ m/s}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$2R_{13} = \frac{2v}{qB} m_{13} \qquad\qquad 2R_{12} = \frac{2v}{qB} m_{12}$$

$$d = 2R_{13} - 2R_{12} = \frac{2v}{qB}(m_{13} - m_{12}) = \frac{2\cdot400000}{1.6\cdot10^{-19}15000\cdot10^{-4}} 1.66\cdot10^{-27}(13.00761 - 12.00368)$$

Resp.: d = 5.555 mm

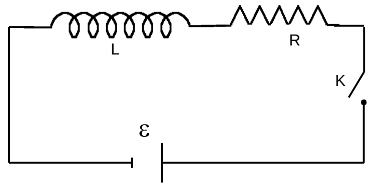
TEMA X

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Flujo magnético a través de una superficie cerrada
Experiencias de Faraday–Henry
Fuerzas electromotriz inducida. Ley de Faraday–Henry. Corriente inducida. Carga inducida
Ley de Lenz
Generalización de la Ley de Faraday–Henry
Autoinducción
- Coeficiente de autoinducción L. Inductancia de una bobina de n espiras
- F.e.m. de autoinducción
- Caía de tensión en una bobina
- Corrientes de cierre y apertura

Energía magnética almacenada en una bobina. Densidad de energía de un campo electromagnético
Inducción mutua
Transformadores
- Fundamentos de la generación de la corriente alterna

1. **Un solenoide de 0.1 H se conecta en serie con una resistencia de 10 Ω y un generador de 10 V. Calcular: a) la corriente en función del tiempo hasta que se alcanza el régimen estacionario al cerrar el interruptor K; b) la constante de tiempo del circuito; c) la corriente en régimen estacionario; d) la energía de la bobina cuando se alcanza el régimen estacionario; e) el tiempo necesario para que la corriente alcance la mitad del valor del apartado c); f) el tiempo necesario para que la corriente difiera en una milésima parte del valor final; g) la corriente en función del tiempo al desconectar el generador. h) Representar en una sola gráfica los apartados a) y g).**



a)

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{10}{10}\left(1 - e^{-\frac{10}{0.1}t}\right)$$

Resp.: $I(t) = 1 - e^{-100\,t}$ A

b)

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.1}{10}$$

Resp.: $\tau = 0.01\,s^{-1}$

c)

Con $t \to \infty$ la corriente tiende a 1 A pues $e^{-\infty} = 0$.

Resp.: $I_\infty = 1\,A$

d)

$$E_m = \frac{1}{2}LI_\infty^2 = \frac{1}{2}0.1\cdot 1^2$$

Resp.: E_m = 0.05 J

e)

$$I(t) = \frac{1}{2}$$

$$1 - e^{-100t} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\ln 2}{100}$$

Resp.: $t = \frac{\ln 2}{100} = 0.00693\,s$

f)

$$I(t) = 0.999$$

$$1 - e^{-100t} = 0.999$$

$$t = \frac{\ln 1000}{100}$$

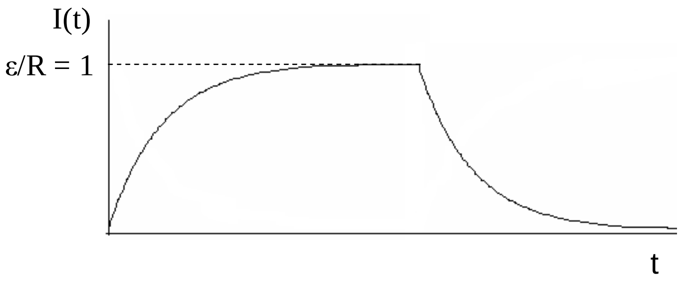
Resp.: $t = \frac{\ln 1000}{100} = 0.0691\,s$

g)

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{10}{10} e^{-\frac{10}{01}t}$$

$$I(t) = e^{-100t}$$

h)



2. **Calcular: a) la autoinducción de un solenoide de 10 cm de longitud, formado por 800 espiras de 5 cm^2 de sección; b) la energía almacenada cuando circulan 20 A; c) el flujo magnético que lo atraviesa; d) la inductancia si las espiras están enrolladas en un núcleo de hierro dulce de permeabilidad relativa 5000, y e) la f.e.m autoinducida si la corriente aumenta uniformemente desde 0 a 20 A en 0.1 s, sin y con el núcleo de hierro.**

a)

$$L = \mu n^2 \frac{S}{s} = 4\pi \cdot 10^{-7} 800^2 \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0.1}$$

Resp.: $4.02 \cdot 10^{-3}$ H

b)

$$E_m = ½\, LI^2 = ½\; 4.02 \cdot 10^{-3} \cdot 20^2$$

Resp.: 0.804 W

c)

$$\Phi_m = LI = 4.02 \cdot 10^{-3} \cdot 20$$

Resp.: 0.0804 Wb

d)

$$L' = 5000\, L = 5000 \cdot 4.02 \cdot 10^{-3}$$

Resp.: 20.106 H

e)

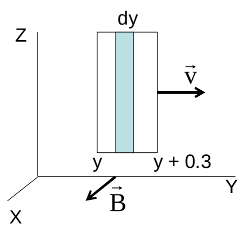
$$\varepsilon = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -4.02 \cdot 10^{-3}\,\frac{20}{0.1}$$

$$\varepsilon' = -L'\frac{\Delta I}{\Delta t} = -20.106 \cdot \frac{20}{0.1}$$

Resp.: $\varepsilon = -0.804$ V; $\varepsilon' = -4021.2$ V

3. **Un conductor rectangular de 0.6x0.3 m y 2.7 Ω. Está situado en el plano YZ en el seno de un campo $\vec{B} = (5 - y)\vec{i}$ T. Se desplaza en el sentido positivo del eje OY. En el instante inicial el lado izquierdo está sobre el eje OZ, calcular la corriente: a) si se desplaza con velocidad constante de 1.5 m/s, y b) al cabo de 20 s de comenzar el movimiento, partiendo del reposo con una aceleración de 3 m/s^2.**

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = (5 - y)\vec{i} \cdot 0.6\, dy\vec{i} = (5 - y)0.6\, dy$$



$$\Phi_m = \int_y^{y+0.3} (5-y)0.6\,dy = 0.873 - 0.18y$$

a)

$$y = vt = 1.5\,t$$

$$\Phi_m = 0.873 - 0.18 \cdot 1.5t = 0.873 - 0.27t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 0.27$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0.27}{2.7}$$

Resp.: 0.1 A

b)

$$y = ½\,a\,t^2 = 1.5\,t^2$$

$$\Phi_m = 0.873 - 0.18 \cdot 1.5t^2 = 0.873 - 0.27t^2$$

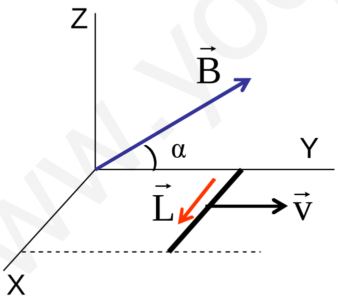
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 0.54t$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0.54t}{2.7}$$

$$I(20) = \frac{0.54 \cdot 20}{2.7}$$

Resp.: 4 A

4. Un alambre de 10 cm se desplaza a 0.5 m/s en una dirección que forma 60º con un campo de 0.2 T. Calcular: a) la f.e.m. inducida en él, e indicar qué parte del alambre está a más potencial; b) la potencia disipada en el movimiento si tiene una resistencia de 10 Ω, y c) la fuerza necesaria para mantenerlo en movimiento.



a)

$$\vec{v} = v\vec{j}$$

$$\vec{L} = L\vec{i}$$

$$\vec{B} = B(\cos\alpha\,\vec{j} + \text{sen}\,\alpha\,\vec{k})$$

$$\varepsilon = \vec{v} \cdot (\vec{L} \times \vec{B}) = -vBL\,\text{sen}\,\alpha = -0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.1\,\text{sen}\,60$$

Resp.: $-8.66 \cdot 10^{-3}$ V.

El flujo magnético aumenta al desplazarse la barra, por tanto la corriente inducida tiene que circular en el sentido del vector $\vec{L}$ para contrarrestar este incremento de flujo, de ahí que

Resp.: la parte a mayor potencial sea la más cercana al eje Y.

b)

$$P = I^2R = \frac{\varepsilon^2}{R^2}R = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{(8.66 \cdot 10^{-3})^2}{10}$$

Resp.: $7.5 \cdot 10^{-6}$ W

c)

La potencia disipada del apartado anterior es una consecuencia de la velocidad conseguida a expensas de la fuerza que lo empuja: P = F v

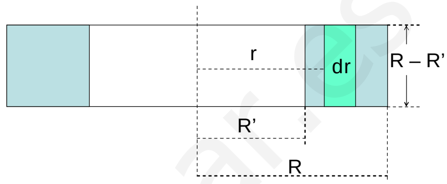
$$F = \frac{P}{v} = \frac{7.5 \cdot 10^{-6}}{0.5}$$

Resp.: $15 \cdot 10^{-6}$ N

También podríamos haber hecho: $\vec{F} = I(\vec{L} x \vec{B}) = \frac{\varepsilon}{R}(\vec{L} x \vec{B}) = \frac{\vec{v} \cdot (\vec{L} x \vec{B})^2}{R}$

5. Determinar el flujo magnético que atraviesa la sección cuadrada de un toroide de hierro (permeabilidad relativa: 1200), de radios 10 y 15 cm, cuando lleva arrolladas 1000 vueltas de un cable por el que circula 1 A.

El flujo que atraviesa la sección del toroide es:



$$\Phi = \int_{R'}^{R} B dS$$

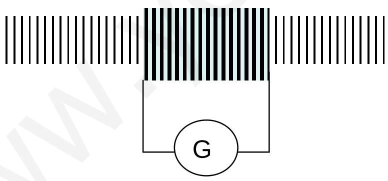
El módulo del campo magnético confinado en el toroide es $B = \mu I n / s$, con s = 2πr. La sección dS es: dS = (R – R') dr. Por tanto:

$$\Phi = \mu I \frac{n}{2\pi}(R - R')\int_{R'}^{R} \frac{dr}{r} = \mu I \frac{n}{2\pi}(R - R')\ln\frac{R}{R'} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1200 \frac{1000}{2\pi}(0.15 - 0.10)\ln\frac{0.15}{0.10}$$

Resp.: $4.865 \cdot 10^{-2}$ Wb

Se puede calcular un resultado aproximado si suponemos que la longitud media es $s = 2\pi \frac{R + R'}{2} = \pi(R + R')$ y la sección es S = $(R – R')^2$. Así, se obtiene el valor $4.8 \cdot 10^{-3}$ Wb.

6. Un solenoide de 50 cm y 5 cm de diámetro tiene n = 10000 espiras. Una bobina de n' = 10 espiras, de hilo aislado, rodea la sección central del solenoide y se conecta a un galvanómetro, de manera que la resistencia total de la bobina, el galvanómetro y los conductores es 25 Ω. Calcular la corriente que pasa por el aparato de medida cuando la intensidad que circula por el solenoide disminuye linealmente de 3 a 1 A en 0.5 s.



$$B = \mu I n / s$$

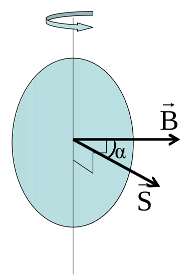
$$\Phi_m = BS = \mu I \frac{n}{s}\pi r^2 n'$$

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} = -\mu \frac{n}{s}\pi r^2 n' \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\mu \frac{n}{s}\pi r^2 n' \frac{\Delta I}{\Delta t}}{R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10000}{0.5}\pi \cdot 0.025^2 \cdot 10 \frac{3-1}{0.5}}{25}$$

Resp.: $7.896 \cdot 10^{-5}$ A

7. Una bobina de 10 espiras y 100 cm² de área gira a 10 RPM respecto a un eje de su plano en el seno de un campo magnético, uniforme y perpendicular, de 0.5 T. Hallar la f.e.m. inducida y su valor máximo.



$$\Phi_m(t) = n\vec{B} \cdot \vec{S} = nBS\cos\alpha = nBS\cos\omega t$$

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi_m}{dt} = nBS\omega \,\text{sen}\, \omega t = 10\cdot 0.5\cdot 100\cdot 10^{-4}\cdot 10\frac{2\pi}{60}\cos 10\frac{2\pi}{60}t$$

Resp.: $\varepsilon(t) = \frac{\pi}{60}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}t;\ \ \varepsilon_{max} = \frac{\pi}{60}\,V$

8. Una bobina rectangular plana, tiene 200 espiras de 2x1 metros cada espira. Está en el seno de un campo magnético uniforme, perpendicular a su plano. Si el campo varía de B' = 0.6 T a B= 0.3 T en 0.1 s, calcular la f.e.m. inducida.

La variación que experimenta el flujo en 0.1 s es:

$$\Delta\Phi_m = nBS - nB'S = nS(B - B') = 200\cdot 2(0.3 - 0.6) = -120 \text{ Wb}$$

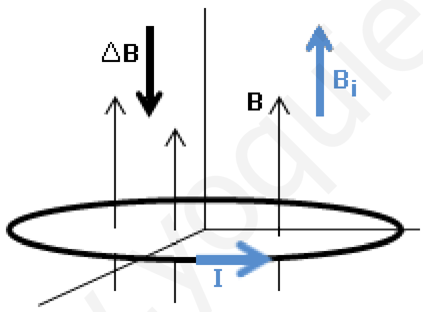
Por tanto:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} = -\frac{-120}{0.1}$$

Resp.: 1200 V

9. Una bobina circular de 4 cm de radio tiene de 200 espiras y una resistencia de 20 Ω. Está situada en el plano XY en el seno de un campo magnético dirigido en el sentido positivo del eje Z, cuyo módulo es B = 0.5 exp (–½ t). Determinar el valor de la intensidad de la corriente inducida en cualquier instante y su sentido de circulación.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -S\frac{dB}{dt} = -n\cdot\pi r^2\frac{dB}{dt} = -200\cdot\pi\cdot 0.04^2\cdot 0.5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)$$



$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}$$

Resp.: $12.56\cdot 10^{-3}\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)$ A

Como B = 0.5 exp (–½ t) es decreciente, el flujo disminuye con el tiempo: $\Delta B < 0$; por tanto, la corriente I debe recorrer la espira en el sentido contrario a las agujas del reloj para crear un campo inducido B_i que contrarreste a ΔB, como se aprecia en la figura.

10. Una bobina circular de 200 espiras y 0.1 m de radio se coloca perpendicularmente a un campo uniforme de 0.2 T. Hallar la f.e.m. inducida si en 0.1 s se realizan las siguientes operaciones: a) se duplica el campo; b) se anula el campo; c) se invierte el sentido del campo; d) se gira la bobina 90º respecto al eje paralelo al campo, y e) se gira la bobina 90º respecto al eje perpendicular al campo.

El flujo magnético inicial es $\Phi_0 = nBS = 200\cdot 0.2\cdot\pi\cdot 0.1^2 = 0.4\pi$ T.

La f.e.m inducida es $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t}$

a)

$$\varepsilon = -\frac{2\Phi_0 - \Phi_0}{\Delta t} = -\frac{\Phi_0}{\Delta t} = -\frac{0.4\pi}{0.1}$$

Resp.: – 4π V

b)

$$\varepsilon = -\frac{0-\Phi_0}{\Delta t} = \frac{\Phi_0}{\Delta t} = \frac{0.4\pi}{0.1}$$

Resp.: 4π V

c)

$$\varepsilon = -\frac{-\Phi_0-\Phi_0}{\Delta t} = \frac{2\Phi_0}{\Delta t} = \frac{2\cdot 0.4\pi}{0.1}$$

Resp.: 8π V

d)

No existe variación de flujo

Resp.: 0 V

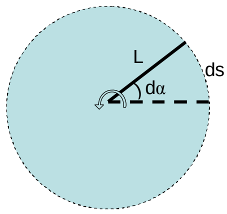
e)

$$\varepsilon = -\frac{0-\Phi_0}{\Delta t} = \frac{\Phi_0}{\Delta t} = \frac{0.4\pi}{0.1}$$

Resp.: 4π V

11. En un campo magnético uniforme y constante, de módulo B, gira una varilla de longitud L, a velocidad angular ω constante, en torno a un eje perpendicular a ella por uno de sus extremos y paralelo a las líneas de campo. Calcular la f.e.m. inducida entre los extremos de la varilla.

En el tiempo dt, la varilla gira un ángulo dα, y su extremo recorre un arco ds. El área barrida por la varilla en ese tiempo es dS = ½ L ds. Pero, ds = L dα = L ω dt. Por tanto,



$$dS = ½\, L^2\omega\, dt$$

La variación de flujo en la varilla es el número de líneas de fuerza que abarca el área dS:

$$d\Phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\, dS \quad \text{pues } \vec{B} \text{ y } \vec{S} \text{ son paralelos}$$

La f.e.m. inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -½\, BL^2\omega$$

Resp.: $\varepsilon = -½\, BL^2\omega$

12. Acercando un imán a una bobina de 2000 espiras y 20 Ω de resistencia, se incrementa linealmente el flujo magnético que la corta de 0 a $1.5\cdot 10^{-5}$ Wb en 0.1 s. Calcular la corriente media de inducción.

Sea $\Phi_m(t) = at + b$; con $\Phi_m(0) = 0$ y $\Phi_m(0.1) = 1.5\cdot 10^{-5}$; entonces $a = 1.5\cdot 10^{-4}$ y b = 0. O sea:

$$\Phi_m(t) = 1.5\cdot 10^{-4}\, t$$

$$\varepsilon = -n\frac{d\Phi_m}{dt} = -2000\frac{d(1.5\cdot 10^{-5}\, t)}{dt} = -0.3 \text{ V}$$

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{0.3}{20}$$

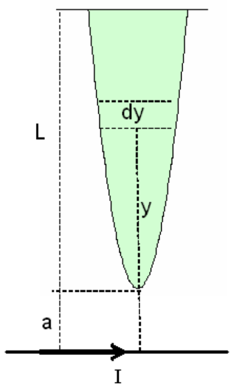
Resp.: 0.015 A

13. Un avión totalmente metálico, cuya ala mide L = 18 m, vuela a 900 km/h en el mismo plano horizontal y paralelamente a un conductor por el que circula una corriente de 100 A. El extremo del ala más próximo al conductor dista 2 metros de él. Calcular la d.d.p. entre los extremos del ala si su permeabilidad relativa es 200.

El módulo del campo creado por I a una distancia y es:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi y}$$

El elemento dy barre un área $dS = v \cdot \Delta t \cdot dy$, siendo v la velocidad del avión y Δt el intervalo de tiempo considerado. Como



$$d\Phi_m = B \cdot dS = \frac{\mu I}{2\pi y} v \cdot \Delta t \cdot dy$$

Integrando entre y = a e y = L:

$$\Delta\Phi_m = \frac{\mu I v \Delta t}{2\pi} \int_a^L \frac{dy}{y} = \frac{\mu I v \Delta t}{2\pi} \ln \frac{L}{a}$$

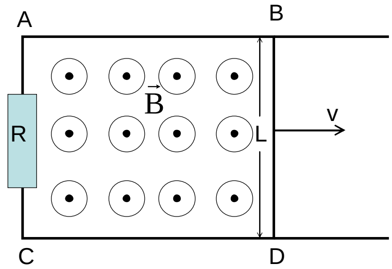
$$\Delta\Phi_m = \frac{200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 900 \frac{1000}{3600} \Delta t}{2\pi} \ln \frac{20}{2} = 2.302 \cdot \Delta t$$

Y la d.d.p. será:

$$\varepsilon = \left| -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} \right| = \frac{2.302 \cdot \Delta t}{\Delta t}$$

Resp.: 2.302 V

14. Por dos raíles metálicos, cerrados por la resistencia R, se mueve un conductor de longitud L con velocidad v como se representa en la figura. El conjunto se encuentra en un campo magnético, perpendicular al plano del papel, de módulo $B = B_0 + kt$, con B_0 y k constantes. En el momento inicial el área ABCD es S_0. Determinar la intensidad de la corriente.



El flujo es:

$$\Phi_m(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = (B_0 + kt)(S_0 + Lvt)$$

La corriente I(t) es el cociente entre la f.e.m. inducida y la resistencia R:

$$I(t) = \frac{1}{R}\varepsilon(t) = \frac{1}{R}\left(-\frac{d\Phi_m(t)}{dt} \right)$$

Resp.: $I(t) = -\frac{1}{R}\left[kS_0 + vL(B_0 + 2kt)\right]$

15. En una bobina de 600 espiras y 10 cm de longitud, por la que circulan 2 A, se origina un flujo de $3 \cdot 10^{-4}$ Wb. Calcular: a) la f.e.m. inducida al interrumpir la corriente en 0.4 s; b) la inductancia; c) la superficie de la bobina, y d) la energía almacenada en ella.

a)

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} = -\frac{600 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{0.4}$$

Resp.: 0.45 V

b)

$$\varepsilon = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \text{ por tanto } L = -\frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta I} = \frac{0.45 \cdot 0.4}{2}$$

Resp.: 0.09 H

c)

$$L = \mu n^2 \frac{S}{s}, \text{por tanto } S = \frac{sL}{\mu n^2} = \frac{0.1 \cdot 0.09}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 600^2}$$

Resp.: $1.989 \cdot 10^{-2}$ m^2

d)

$$E_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}0.09 \cdot 2^2$$

Resp.: 0.18 J

16. Por un hilo largo circula una corriente variable I(t) = 4 – 0.2t, tal como se representa en la figura. Calcular: a) la f.e.m. inducida en una espira rectangular indeformable de 5x10 cm, si el lado mayor, paralelo al hilo de corriente, dista de éste 10 cm; b) si por la espira, a su vez, circula una corriente de 5 A en sentido contrario a las agujas del reloj, calcular la fuerza neta ejercida sobre la espira en t = 2 para la primera corriente.

a)

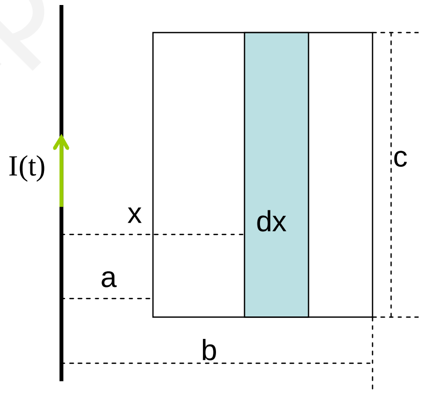
$$B_x = \frac{\mu I}{2\pi x}$$

$$d\Phi_m = B \cdot c dx = \frac{\mu I}{2\pi x} c \cdot dx$$

$$\Phi_m = \int_a^b \frac{\mu I}{2\pi x} c \cdot dx = I\frac{\mu c}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu c}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.1}{2\pi}\ln\frac{0.1+0.05}{0.1}(-0.2)$$



Resp.: $1.62 \cdot 10^{-9}$ V

b)

En t = 2, por el hilo circula I(2) = 4 – 0.2·2 = 3.6 A. Por el lado de la espira más próximo al hilo conductor circula la corriente de 5 A en sentido contrario a los 3.6 A, mientras que por el lado más alejado lo hace en el mismo sentido.

En el tema IX vimos que dos corrientes paralelas, separadas una distancia d, que circulan en el mismo/distinto sentido se atraen/repelen con una fuerza cuyo módulo es:

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d}L$$

La fuerza ejercida sobre el lado más cercano es de repulsión, de valor:

$$F_r = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 3.6}{2\pi \cdot 0.1} \cdot 0.1 = 3.6 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Mientras que sobre el lado más alejado es de atracción:

$$F_a = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 3.6}{2\pi \cdot 0.15} \cdot 0.1 = 2.4 \cdot 10^{-6}\ \text{N}$$

Por tanto, la fuerza neta es repulsiva, de valor: $F_r - F_a$

Resp.: $1.2 \cdot 10^{-6}$ N (repulsiva)

17. El primario de un transformador está alimentado con 220 V. Del secundario se desean extraer 30 mA a 5 V con 100 espiras. Determinar en el primario a) la corriente; b) el número de espiras.

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{I_s}{I_p} = \frac{n_p}{n_s}$$

$$\frac{220}{5} = \frac{30}{I_p} = \frac{n_p}{100}$$

Resp.: I_p = 0.682 mA; n_p = 4400

18. La entrada de un transformador está conectada a una corriente alterna de intensidad máxima 10 A y 20000 V, ¿cuál es la intensidad máxima a la salida con 100 V si su rendimiento es del 90%?

La potencia del primario es $P_p = V_p I_p$. La del secundario es $P_s = V_s I_s$. Como el rendimiento es del 90%:

$$P_s = 0.9 P_p$$

$$100 \cdot I_s = 0.9 \cdot 20000 \cdot 10$$

Resp.: I_s = 1800 A

19. En una bobina se inducen 5· 10^{-3} V cuando en otra cercana a ella la corriente varía a razón de 4 A/s. Determinar el coeficiente de inducción mutua.

$$\varepsilon_S = -L_{PS}\frac{dI_P}{dt}\ ;\ L_{PS} = -\frac{\varepsilon_S}{\frac{dI_P}{dt}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4}$$

Resp.: 1.25 mH

20. Un solenoide de 1 m de longitud y 8 cm² de sección consta de 5000 espiras. En su centro se enrollan 200 espiras. Calcular el coeficiente de inducción mutua.

El flujo del primario es $\Phi_{mP} = L_P I_P$ con $L_P = \mu n_p^2 \frac{S}{s}$. Además: $\Phi_{mP} = n_p BS.$ Por tanto:

$$I_P = \frac{Bs}{\mu n_p}$$

El flujo magnético en el secundario es $\Phi_{mS} = L_{PS} I_P$, donde L_{PS} es el coeficiente de inducción mutua:

$$L_{PS} = \frac{\Phi_{mS}}{I_P}$$

Pero el secundario tiene la misma sección S que el primario, y está afectado por el mismo campo magnético, aunque con n_s espiras. Por tanto, $\Phi_{mS} = n_s BS.$ De donde:

$$L_{PS} = \mu n_p n_s \frac{S}{s} = 4\pi 10^{-7} \cdot 5000 \cdot 200 \frac{8 \cdot 10^{-4}}{1}$$

Resp.: 0.001 H

21. Si por un solenoide de 1000 espiras circulan 10 A cuando el flujo es de 10 Wb, calcular la energía magnética que encierra.

La densidad de energía magnética es $\in_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$. Para calcular la energía total basta multiplicar por el volumen del solenoide S·s, con S superficie de las espiras y s longitud del solenoide.

$$E_m = \in_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \cdot S \cdot s$$

Sustituyendo $B = \mu I \frac{n}{s}$:

$$E_m = \frac{1}{2}\mu S I^2 \frac{n^2}{s}$$

A la misma expresión se llega si en $E_m = \frac{1}{2} L I^2$ sustituimos el valor de $L = \mu n^2 \frac{S}{s}$.

El flujo magnético es:

$$\Phi_m = BS = \mu n I \frac{S}{s}$$

$$\frac{S}{s} = \frac{\Phi_m}{\mu n I}$$

que sustituimos en la expresión anterior:

$$E_m = \frac{1}{2} n I \Phi_m = \frac{1}{2} 1000 \cdot 10 \cdot 10$$

Resp.: 50 kJ

22. ¿Cuántos metros de alambre fino se necesitan para construir un solenoide de 1 m de longitud y 1 mH, si el diámetro del alambre es despreciable frente a su longitud?

$$L = \mu n^2 \frac{S}{s}$$

Si x es la longitud pedida, el número de vueltas n es:

$$n = \frac{x}{2\pi r}$$

$$L = \mu \frac{x^2}{4\pi^2 r^2} \frac{\pi r^2}{s}$$

$$10^{-3} = 4\pi 10^{-7} \frac{x^2}{4\pi^2 r^2} \frac{\pi r^2}{1}$$

Resp.: 100 m

23. En las bobinas de los superconductores se obtienen densidades de energía magnética del orden de 10^6 J/m^3. Determinar el campo magnético en su interior.

$$\in_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \qquad\qquad B = \sqrt{2 \in \mu} = \sqrt{2{\cdot}10^6{\cdot}4\pi{\cdot}10^{-7}}$$

Resp.: 1.585 T

Nótese que la intensidad del campo magnético es muy elevada.

24. Un carrete plano, de espesor despreciable, tiene 100 espiras y 100 cm^2 de sección por espira. Está situado inicialmente de forma que su plano es normal a un campo uniforme y estático de 0.2 T. Gira después a 100 r.p.s. alrededor de un eje contenido en su plano y perpendicular al campo. Calcular: a) la f.e.m inducida en función del tiempo; b) la intensidad máxima si se conecta a una resistencia de 10π Ω.

a)

En la expresión $\varepsilon(t) = BS\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ el ángulo φ es cero y la superficie S es la correspondiente a una espira; por tanto, para n espiras:

$$\varepsilon(t) = nBS\omega \operatorname{sen} \omega t = 100{\cdot}0.2{\cdot}100{\cdot}10^{-4}{\cdot}2\pi{\cdot}100{\cdot}\operatorname{sen} 2\pi{\cdot}100t$$

Resp.: $\varepsilon(t) = 40\pi$ sen $400\pi t$

b)

$$I_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{R} = \frac{nBS\omega}{R} = \frac{100{\cdot}0.2{\cdot}100{\cdot}10^{-4}{\cdot}2\pi{\cdot}100}{10\pi}$$

Resp.: I_{max} = 4 A

25. En Europa la frecuencia de la corriente alterna doméstica es de 50 Hz. a) ¿A qué revoluciones deben girar los alternadores que la producen?; b) los transformadores, ¿pueden modificar dicha frecuencia?

a)

En $f = p\dfrac{\omega}{2\pi}$ deducimos que $\omega = \dfrac{2\pi f}{p}$, siendo p el número de parejas de polos que tenga el alternador, con ω en rad/s. Si expresamos el resultado en RPM:

$$\omega(RPM) = \frac{2\pi f}{p}\frac{60}{2\pi} = \frac{60\nu}{p} = \frac{60{\cdot}50}{p} = \frac{3000}{p}$$

Resp.: 3000/p RPM

b)

No es posible modificar la frecuencia exclusivamente con transformadores.

TEMA XI

ONDAS

Movimiento vibratorio armónico
Energías potencial y cinética en el M.V.A.
Movimiento ondulatorio
Tipos de ondas
Ecuación del movimiento ondulatorio
- Fase
- Periodicidad
- Ecuación general de ondas

Velocidad de propagación de las ondas
Energía asociada al movimiento ondulatorio
Intensidad del movimiento ondulatorio
Atenuación de las ondas armónicas mecánicas esféricas
Absorción de ondas
Principio de Huygens
Reflexión
Refracción
Interferencias
Ondas estacionarias
Difracción
Polarización
Intensidad sonora. Tono. Timbre
Efecto Doppler
Características y espectro de las ondas electromagnéticas

PROBLEMAS

1. **Comprobar que las ondas armónicas satisfacen la siguiente ecuación diferencial:**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Sea $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx + \varphi)$. Para calcular $\frac{\partial y}{\partial t}$ se deriva y con respecto a t, manteniendo x constante.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \mathrm{sen}(\omega t - kx + \varphi) \qquad \text{(a)}$$

Análogamente, para calcular $\frac{\partial y}{\partial x}$ se deriva y con respecto a x, manteniendo t constante.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -Ak\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \mathrm{sen}(\omega t - kx + \varphi) \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo (a) y (b) en la ecuación diferencial:

$$-A\omega^2 \mathrm{sen}(\omega t - kx + \varphi) = v^2 \left\{-Ak^2 \mathrm{sen}(\omega t - kx + \varphi)\right\}$$

Y simplificando, resulta:

$$\omega = vk$$

Pero, $v = \frac{\lambda}{T}$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, por tanto: $vk = \frac{\lambda}{T}\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$ que es precisamente ω.

2. **Uno objeto cuya masa se desconoce está suspendido de un muelle vertical de constante k. Cuando se estira el resorte una longitud A y se suelta, la masa oscila con una frecuencia f. Calcular: a) la masa; b) el alargamiento correspondiente a la posición de equilibrio del muelle; c) la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en cada instante.**

a)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{4\pi^2 f^2}$$

Resp.: $m = \frac{k}{4\pi^2 f^2}$

b)

En la posición de equilibrio y_0 aplicamos la segunda ley de Newton, sabiendo que la aceleración es nula:

$$mg - ky_0 = 0$$

Resp.: $y_0 = \frac{mg}{k}$

c)

Supongamos que t = 0 es el instante en el que se suelta el muelle. Sea y = A sen (ωt + φ) la ecuación de la posición, en la que conocemos A y ω = 2πf, pero desconocemos φ. Si derivamos con respecto al tiempo obtenemos la velocidad:

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Pero v(0) = 0. Por tanto, $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

Resp.: x(t) = A sen (2πft)
v(t) = 2πfA cos (2πft + π/2)
a(t) = $-4\pi^2 f^2 A$ sen (2πft)

3. Un bloque de 2 kg está unido a un resorte horizontal cuya constante k vale 0.01 N/m. Si en el instante inicial el resorte no está deformado y la velocidad del bloque es 10 m/s. Calcular: a) La máxima deformación; b) la fuerza que ejerce el resorte en la posición de deformación máxima; c) el trabajo de la fuerza elástica entre las posiciones x = 0 y x = 0.1 m; d) el periodo del movimiento; e) si se separa el bloque del resorte cuando se mueve a 5 m/s y fricciona con una superficie horizontal de coeficiente de rozamiento 0.2, calcular la distancia que recorre hasta pararse.

a)

La energía cinética máxima tiene que ser igual a la energía potencial máxima, por tanto:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad A = v_o\sqrt{\frac{m}{k}} = 10\sqrt{\frac{2}{0.01}}$$

Resp: A = $100\sqrt{2}$ m

b)

$$F = -kA = -0.01 \cdot 100\sqrt{2}$$

Resp.: F = $-\sqrt{2}$ N

c)

$$W = -\Delta Ep_e = \frac{1}{2}kx_o^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{0.01}{2}(0^2 - 0.1^2)$$

Resp.: $-5 \cdot 10^{-5}$ J

d)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{0.01}}$$

Resp: T = $20\sqrt{2}\pi$ s

e)

La energía cinética que posee el bloque tiene que invertirse en el trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento:

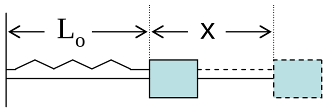
$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu mgx$$

$$x = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{5^2}{2\cdot 0.2\cdot 9.8}$$

Resp.: 6.38 m

4. Una barra horizontal AB, de masa despreciable, puede girar alrededor de un eje vertical que pasa por el extremo A. En la barra se encuentra un manguito de masa m, unido a un resorte de longitud L_o y rigidez k. El rozamiento del manguito con la barra es despreciable. ¿Qué energía hay que comunicarle al sistema para conseguir que gire lentamente hasta alcanzar la velocidad angular ω?

La energía mecánica del sistema en la posición de equilibrio es nula. Mientras que en la posición (L_o + x) es la suma de la energía potencial elástica y de la energía cinética de rotación:



$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$
$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m(L_o + x)^2\omega^2$$

donde hemos supuesto que, a los efectos de calcular el momento de inercia, el manguito es una masa puntual.

Esta energía E es la que debemos aportar al sistema. Para calcular x la segunda ley de Newton establece que la fuerza recuperadora del resorte es igual al producto de la masa del manguito por la aceleración centrípeta que tiene en esa posición:

$$kx = m\omega^2(L_o + x)$$

$$x = \frac{m\omega^2 L_o}{k - m\omega^2}$$

Sustituyendo en la expresión de E:

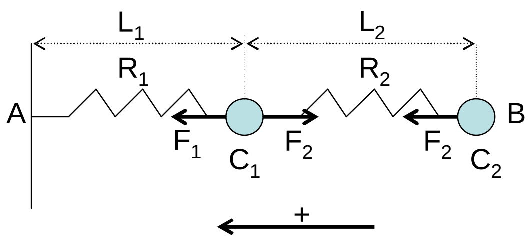
Resp.: $E = \frac{1}{2}mk\omega^2 L_o^2 \frac{k + m\omega^2}{\left(k - m\omega^2\right)^2}$

5. Una varilla horizontal AB gira alrededor de un eje vertical que pasa por A con una velocidad angular ω = 10 rad/s. Dos bolitas C_1 y C_2, de m = 60 gramos cada una, resbalan sin rozamiento a lo largo de la varilla. Las longitudes en reposo de los resortes R_1 y R_2 son L_{10} = 50 cm y L_{20} = 60cm. La rigidez de los resortes es $k_1 = k_2$ = 156 N/m. Calcular la longitud final de ambos resortes y las tensiones que soportan.

En la figura se han representado los resortes cuando el sistema está girando en torno a A, de manera que, según la ley de Hooke, los módulos de F_1 y F_2 son:

$$F_1 = k_1(L_1 - L_{10}) \qquad (1)$$

$$F_2 = k_2(L_2 - L_{20}) \qquad (2)$$



Aplicando la segunda ley de Newton a C_1 y C_2, ambas sometidas a sus correspondientes aceleraciones centrípetas, según el sistema de referencia indicado en la figura:

Para C_1: $$F_1 - F_2 = m\omega^2 L_1 \qquad (3)$$

Para C_2: $$F_2 = m\omega^2 (L_1 + L_2) \qquad (4)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) y (4) e introduciendo los datos:

$$156(L_1 - 0.5) - 156(L_2 - 0.6) = 0.06 \cdot 10^2 L_1$$

$$156(L_2 - 0.6) = 0.06 \cdot 10^2 (L_1 + L_2)$$

Sistema de ecuaciones que permite calcular L_1 y L_2, y, en (3) y (4), F_1 y F_2.

Resp.: L_1 = 56.8 cm; L_2 = 64.6 cm
F_1 = 10.6 N; F_2 = 7.17 N

6. Un pistón se mueve verticalmente con un M.V.A. de amplitud A = 10 cm. Determinar el máximo número de oscilaciones por minuto que puede realizar, sin que se separe de él un cuerpo colocado encima.

Para que un cuerpo colocado encima del pistón no se separe nunca de él, el pistón tiene que adquirir una aceleración máxima igual a la de la gravedad g; pues, si fuese mayor, en el punto más alto el pistón se separaría del cuerpo, porque este último "caería" con la aceleración de la gravedad.

$$a_{max} = \omega^2 A = g$$

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \qquad \text{como} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{g}}$$

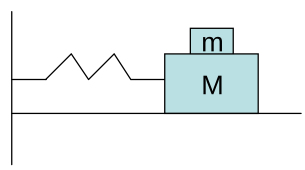
$$N = \frac{60}{T} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{A}} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{9.8}{0.1}}$$

Resp.: 94.53 oscilaciones por minuto

7. El coeficiente de rozamiento estático entre la masa m y el soporte de masa M es μ. Entre M y la superficie horizontal no hay rozamiento. Para determinar la constante k del resorte cuya longitud inicial es L_o, se coloca verticalmente y se cuelga de él una masa m_1, observándose que entonces su longitud es L_1. Calcular: a) La constante del resorte; b) la amplitud máxima puede tener un M.V.A. del sistema sin que deslice m?

a)

El valor absoluto de la fuerza elástica del resorte es kx, siendo x la deformación. Si lo sometemos al peso m_1g, la deformación que se produce es $L_1 - L_o$. Por tanto:



$$m_1 g = k(L_1 - L_o)$$

Resp.: $k = \dfrac{m_1 g}{L_1 - L_o}$

b)

Si m no desliza: $F_{max} - \mu m g = 0$; por tanto:

$$ma_{max} - \mu mg = 0$$
$$a_{max} = \mu g$$

Pero el valor absoluto de la aceleración máxima en un M.V.A. es:

$$a_{max} = \omega^2 A$$

Igualando y despejando A:

$$A = \frac{\mu g}{\omega^2}$$

Teniendo en cuenta que

$$\omega^2 = \frac{k}{M+m} = \frac{\dfrac{m_1 g}{L_1 - L_0}}{M+m}$$

Resp.: $A = \mu \dfrac{M+m}{m_1}(L_1 - L_o)$

8. La fase inicial de un M.V.A es cero. Cuando la elongación es 2.4 cm su velocidad es 3 cm/s, y cuando la elongación es 2.8 cm la velocidad es 2 cm/s. Calcular la amplitud y el periodo.

Como la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

con

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

obtenemos

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

introduciendo los datos:

$$9 = \omega^2(A^2 - 5.76)$$
$$4 = \omega^2(A^2 - 7.84)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones anterior obtenemos ω = 1.55 rad/s y A = 3.08 cm:

Resp.: A = 3.08 cm

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1.55}$$

Resp.: T = 4.03 s

9. Una bala de masa m choca contra un bloque de masa M, horizontal, unido a un resorte, en equilibrio, y se incrusta en él (se desprecian los rozamientos del bloque con el suelo donde se apoya). Si tras el choque el sistema se pone a vibrar a f Hz con una amplitud A. Calcular: a) la velocidad de la bala antes del choque; b) el trabajo efectuado por la bala para incrustarse.

a)

Según principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$mv_b = (M+m)v_{bb}$$

siendo v_b la velocidad de la bala y v_{bb} la velocidad que adquiere el bloque con la bala incrustada.

Sea la posición del bloque con la bala ya incrustada x = A sen ωt. Su velocidad es v = Aω cos ωt. En el instante t = 0, cuando se produce el impacto, el conjunto adquiere su máxima velocidad de valor Aω = A·2πf, que debe ser igual a v_{bb}. Por tanto:

$$mv_b = (M+m)A\cdot 2\pi f$$

Resp.: $v_b = 2\pi Af\,\dfrac{M+m}{m}$

b)

El trabajo efectuado por la bala para incrustarse será la diferencia entre la energía cinética que tiene el sistema antes del choque y la que tiene después del choque:

$$W = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}(M+m)v_{bb}^2 = \frac{1}{2}m\cdot 4\pi^2A^2f^2\,\frac{(M+m)^2}{m} - \frac{1}{2}(M+m)A^2 4\pi^2 f^2$$

Resp.: $W = 2\pi^2A^2f^2(M+m)(M+m-1)$

10. Dos ondas se rigen por las ecuaciones y_1 = 8 sen (1000t – 150x), y_2 = 8 sen (1000t + 150x). Calcular la ecuación de la onda resultante y la distancia entre dos vientres consecutivos.

La onda resultante es estacionaria.

$$y = y_1 + y_2 = 8\,\mathrm{sen}(1000t - 150x) + 8\,\mathrm{sen}(1000t + 150x)$$

Resp: y = 16 sen 1000t cos 150x

Los vientres se producen cuando $|\cos 150x| = 1$; es decir, 150x = nπ con n = 0,1,2… Por tanto:

$$x = \frac{n\pi}{150}$$

La distancia entre dos vientres consecutivos se calcula con n =1. Por tanto:

Resp.: $x = \dfrac{\pi}{150}$

11. Dos fuentes F_1 y F_2 que vibran con la misma fase producen en la superficie libre del agua ondas cuyas ecuaciones son $y_1 = 8\,\mathrm{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{0.01} - \frac{x}{10}\right)$; $y_2 = 4\,\mathrm{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{0.01} - \frac{x}{5}\right)$ con x e y en cm. Determinar la amplitud de la onda que se produce por interferencia en un punto P que dista 25 cm de F_1 y 15 cm de F_2.

No son ondas coherentes pues tienen distinto número de onda $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Operando tras introducir en y_1 el valor x = 25 y en y_2 el valor x = 15:

$$y_1(25,t) = 8\,(\mathrm{sen}\,200\pi t \cos 5\pi - \cos 200t\,\mathrm{sen}\,5\pi) = -8\,\mathrm{sen}\,200\pi t$$

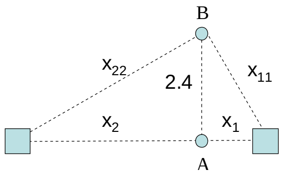
$$y_2(15,t) = 4\,(\mathrm{sen}\,200\pi t \cos 6\pi - \cos 200t\,\mathrm{sen}\,6\pi) = 4\,\mathrm{sen}\,200\pi t$$

$$y(P) = y_1(25,t) + y_2(15,t) = -4\,\mathrm{sen}\,200\pi t$$

Resp.: $y_{max}(P) = -4$ cm

12. Un hombre se encuentra en un punto A en el segmento que une dos altavoces que vibran en fase, a 1.8 m de uno y a 3.2 del otro. Si la frecuencia a la que se observa interferencia destructiva total es 122 Hz, ¿cuál es la velocidad de fase? El hombre se traslada al punto B, situado a 2,4 m del A, en la perpendicular del segmento que une los dos altavoces, ¿cuál es la mínima frecuencia para que en B haya interferencia destructiva total?

$$x_1 - x_2 = 1.4 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$



para n = 0 obtenemos λ = 2.8, de donde

$$v = \lambda f = 2.8 \cdot 122$$

Resp.: 341.6 m/s

$$x_{11} = \sqrt{1.8^2 + 2.4^2} = 3\,;\; x_{22} = \sqrt{3.2^2 + 2.4^2} = 4$$

$$x_{11} - x_{22} = 1 = \frac{\lambda}{2} \qquad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{341.6}{2}$$

Resp.: 170.8 Hz

13. Un instrumento produce un sonido cuya frecuencia varía desde 150 a 850 Hz. Este sonido se recoge en un tubo que se bifurca en otros dos, cuyas longitudes son 3.1 y 4.8 m, que se vuelven a juntar, provocando que interfieran las dos ondas sonoras. ¿A qué frecuencias se producen los máximos y mínimos de la intensidad del sonido resultante? Velocidad del sonido 340 m/s

Condición de máximo: $x_1 - x_2 = n\lambda = n\frac{v}{f}$:

$$4.8 - 3.1 = n\frac{340}{f}$$

Los valores de n que permiten obtener frecuencias situadas dentro de la banda de 150 a 850 Hz son: 1, 2, 3 y 4.

Condición de mínimo: $x_1 - x_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{2n+1}{2}\frac{v}{f}$:

$$4.8 - 3.1 = \frac{2n+1}{2}\frac{340}{f}$$

Los valores de n que permiten obtener frecuencias situadas dentro de la banda de 150 a 850 Hz son: 1, 2, y 3.

Resp.: Máximos para 200, 400, 600 y 800 Hz
Mínimos para 300, 500 y 700 Hz

14. Dos trenes de ondas de 36 cm de longitud de onda y 1 cm de amplitud, se propagan por la misma dirección con una diferencia de marcha de 12 cm. En el instante t = ½ T, ¿cuánto vale la elongación de un punto cuya distancia al origen de la primera onda es 3 cm?

$$y_1 = A\,\text{sen}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad y_2 = A\,\text{sen}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{\pi\delta}{\lambda}\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{\delta}{2}}{\lambda}\right) = 2\cos\frac{12\pi}{36}\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{\frac{T}{2}}{T} - \frac{3+\frac{12}{2}}{36}\right)$$

Resp.: y (½ T) = 1 cm

15. Una onda armónica de 100 Hz se propaga sin amortiguamiento en el sentido positivo del eje X, con una velocidad de 30 m/s. Si su amplitud es 5 cm, determinar su elongación 0.5 s después de pasar por un máximo.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{30}{100} = 0.3$$

$$y = 0.05\,\text{sen}\,2\pi\left(100t - \frac{x}{0.3}\right)$$

El primer valor y_{max} se consigue cuando

$$2\pi\left(100t - \frac{x}{0.3}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Y el valor para t + 0.5 es:

$$y(t+0.5) = 0.05\,\text{sen}\,2\pi\left(100(t+0.5) - \frac{x}{0.3}\right) = 0.05\,\text{sen}\,2\pi\left(100t - \frac{x}{0.3} + 50\right) = 0.05\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 100\pi\right)$$

Resp.: y (t + 0.5) = 0.05 m

16. Sometemos el extremo de una cuerda tensa a vibraciones sinusoidales de 10 Hz. Si 20 cm es la mínima distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase es $\frac{\pi}{5}$, calcular la longitud de onda y la velocidad de fase.

La diferencia de fase entre dos puntos, en el mismo instante t, es:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) + \varphi\right] - \left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) + \varphi\right] = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 20 \qquad \lambda = 200\text{ cm}$$

Resp.: λ = 2 m

$$v = \lambda f = 2\cdot 10$$

Resp.: v = 20 m/s

17. La cuerda SOL de un violín tiene 30 cm de longitud. Cuando se toca sin pulsar vibra a 196 Hz. Las notas próximas de la escala son LA (220 Hz), SI (247 Hz), DO (262 Hz) y RE (294 Hz). a) ¿A qué distancia del extremo de la cuerda debe colocarse un dedo para que se generen esas notas?; b) Si se tensa a 1500 N, ¿qué masa debe tener la cuerda?

a)

$$f = n\frac{v}{2L}$$

La frecuencia fundamental f_0 (para n = 1) es precisamente la de la nota SOL de 196 Hz. Con este dato determinamos la velocidad de propagación $v = 2Lf_0$.

Si en la expresión de f, para n = 1, sustituimos v y vamos modificando L para conseguir las demás notas:

$$f_i = 1\cdot\frac{2Lf_0}{2L_i} = f_0\,\frac{L}{L_i}$$

Despejando L_i:

$$L_i = L\,\frac{f_0}{f_i}$$

Por tanto:

$$L_{LA} = L\,\frac{f_0}{f_{LA}} = 30\,\frac{196}{220} = 26.73\,\text{cm}$$

Y la posición del dedo debe ser $x_{LA} = L - L_{LA} = 30 - 26.73 = 3.27$ cm

Resp: $x_{LA} = 3.27$ cm

Operando de manera similar con el resto de las notas:

Resp.: $x_{SI} = 6.19$ cm
$x_{DO} = 7.56$ cm
$x_{RE} = 10$ cm

b)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{T}{\frac{m}{L}}} = \lambda f_0 = 2Lf_0\,;\;\; m = \frac{T}{4Lf_0^2} = \frac{1500}{4\cdot 0.3\cdot 196^2}$$

Resp.: m = 32.54 gramos

18. Un alambre de 2 metros y 200 gramos, sujeto por ambos extremos, se tensa con 10 N. Calcular: a) la velocidad de fase que tiene una perturbación armónica que lo haga vibrar; b) la frecuencia fundamental; c) el tiempo que tarda un pulso en ir de un extremo a otro.

a)

$$v = \sqrt{\frac{F}{\sigma}} = \sqrt{\frac{F}{\frac{m}{L}}} = \sqrt{\frac{10}{\frac{0.2}{2}}}$$

Resp.: v = 10 m/s

b)

Para la frecuencia fundamental:

$$f_0 = \frac{v}{2L} = \frac{10}{2\cdot 2}$$

Resp.: $f_0 = 2.5$ Hz

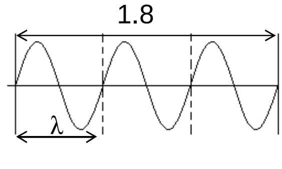
c)

$$t = \frac{L}{v} = \frac{2}{10}$$

Resp.: 0.2 s

19. Una cuerda de 1.8 m y 12 gramos, sujeta por ambos extremos, tiene 7 nodos (incluidos los de los extremos) y vibra a 100 Hz con vientres de 1 cm. Calcular la tensión a la que está sometida y la ecuación de la onda estacionaria.

Como se aprecia en la figura



$$\lambda = \frac{1.8}{3} = 0.6$$

La velocidad de fase es v = λf = 0.6·100 = 60 m/s.

Pero $v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$; por tanto:

$$T = \sigma v^2 = \frac{0.012}{1.8} \cdot 60^2$$

Resp.: T = 24 N

La ecuación de la onda estacionaria es y = 2A sen kx cos ωt = 0.01 sen $\frac{2\pi}{0.6}$ x cos 2π·100t .

Resp.: $y = 0.01 \, \text{sen} \, \frac{10\pi}{3} x \cos 200\pi t$

20. Una cuerda, sujeta por ambos extremos, tiene resonancias sucesivas con longitudes de onda de 0.54 m para el armónico n y 0.48 m para el armónico n + 1. Calcular la longitud de la cuerda, el valor de n y la longitud de onda del modo fundamental.

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = 0.54$$

$$\lambda_{n+1} = \frac{2L}{n+1} = 0.48$$

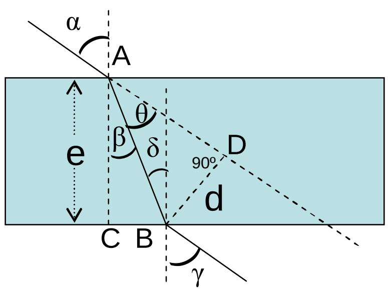
Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

Resp.: L = 2.16 m; n = 8

La longitud de onda del armónico fundamental (n = 1) es $\lambda_0 = 2L$

Resp.: $\lambda_0 = 4.32$ m

21. Una onda luminosa pasa a través de un prisma vidrio de caras planas y paralelas de espesor e, cuyo índice de refracción respecto al medio es n. Demostrar que la dirección de propagación del rayo emergente es paralela a la del rayo incidente y calcular el desplazamiento lateral existente entre ambos rayos para un ángulo de incidencia α.



Cuando la luz alcanza el punto A sufre una primera refracción. Según la ley de Snell:

$$\text{sen}\,\alpha = n\,\text{sen}\beta \qquad (1)$$

En el punto B se produce la segunda refracción:

$$n\,\text{sen}\,\delta = \text{sen}\,\gamma$$

como se aprecia en la figura

$$\beta = \delta$$

entonces $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\gamma$. Por tanto:

$$\alpha = \gamma$$

como queríamos demostrar.

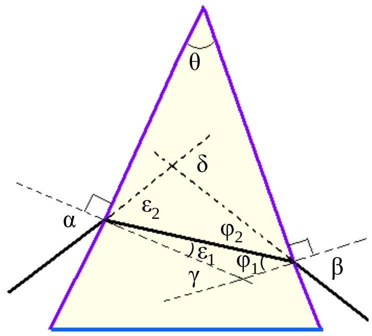
En el triángulo ABC: $e = AB \cos\beta$ (2)

En el triángulo ABD: $d = AB \operatorname{sen} \theta$ (3)
En la figura: $\theta = \alpha - \beta$ (4)

Operando con las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) obtenemos:

$$\text{Resp.: } d = e \operatorname{sen} \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha}} \right)$$

22. Se denomina prisma óptico al sistema formado por dos láminas planas unidas que forman un ángulo θ, como se representa en la figura. Calcular el valor del ángulo de desviación δ entre el rayo incidente α y el emergente β para θ = 30º, si α = 0º y el índice de refracción relativo al medio es n = 1.5.



De la figura se deduce que:

$\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (1)
$\beta = \varphi_1 + \varphi_2$ (2)
$\gamma = \varepsilon_1 + \varphi_1$ (3)
$\delta = \varepsilon_2 + \varphi_2$ (4)
$\gamma = \theta$ (5)

De la ley de Snell:

$\operatorname{sen} \alpha = n \operatorname{sen} \varepsilon_1$ (6)
$n \operatorname{sen} \varphi_1 = \operatorname{sen} \beta$ (7)

Disponemos de 7 ecuaciones y existen 10 magnitudes: α, β, θ, γ, δ, ε_1, ε_2, φ_1, φ_2, n. Para que el sistema esté determinado necesitamos 3 datos independientes. Según el enunciado:

$$\alpha = 0^\circ \quad \theta = 30^\circ \quad n = 1.5$$

La incógnita a calcular es δ. De las cinco primeras ecuaciones se deduce que:

$$\delta = \beta - 30$$

En (6) obtenemos $\varepsilon_1 = 0$, y con (3), (5) y (7) deducimos que $\beta = 48.6^\circ$. Por tanto:

Resp.: $\delta = 18.6^\circ$

23. Calcular el ángulo de Brewster para el vidrio (n = 1.5) y el aire (n = 1).

El ángulo de refracción debe ser 90º. Por tanto, según la ley de Snell:

$$1.5 \cdot \operatorname{sen} \alpha = 1 \cdot \operatorname{sen} 90$$

Resp.: $\alpha = 41.81^\circ$

24. Si el índice de refracción del vidrio respecto al medio es 1.5, determinar los ángulos de incidencia y de refracción que permiten que la luz reflejada por una superficie de vidrio esté completamente polarizada.

Para que la luz reflejada este completamente polarizada la suma de los ángulos de incidencia y refracción debe ser 90º.

$$\alpha + \beta = 90$$

Además, según la ley de Snell:

$$1 \cdot \operatorname{sen} \alpha = 1.5 \operatorname{sen} \beta$$

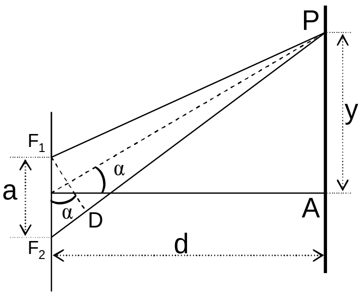
Y, resolviendo el sistema de ecuaciones:

Resp.: $\alpha = 56.3^{o}$ $\beta = 33.7^{o}$

25. Un foco de luz roja cuya longitud de onda es $0.7 \cdot 10^{-6}$ m, produce interferencias a través de dos rendijas estrechas separadas 0.01 cm, ¿a qué distancia debemos colocar una pantalla para que las primeras franjas estén separadas 1 cm?

La difracción producida por dos rendijas, seguida de interferencias, es el experimento de Young. En los puntos F_1 y F_2 de una red de difracción, separados una distancia a, se producen difracciones de luz procedentes de un solo foco. Las ondas secundarias que salen de F_1 y F_2 interfieren y se recogen en el punto P de una pantalla situada a una distancia d de la red. La interferencia en P depende de la diferencia de distancias $F_2P - F_1P$:

$$F_2P - F_1P = F_2D = a \operatorname{sen} \alpha \approx a \operatorname{tg} \alpha \approx a \frac{y}{d}$$



La aproximación es válida para $\alpha < 0.1$ radianes.

Si esta diferencia es $n\lambda$, en P hay luz (un máximo); pero, si es $(2n + 1)\ \frac{\lambda}{2}$, hay oscuridad (un mínimo). Por tanto, en el caso que nos ocupa: $a \frac{y}{d} = n\lambda$, de donde:

$$d = \frac{1}{n} \frac{y}{\lambda} a$$

y para n = 1:

$$d = \frac{0.01}{0.7 \cdot 10^{-6}} 0.0001$$

Resp.: 1.428 m

26. Una cuerda vibra según la ecuación $y = 5 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} x \cos 40\pi t$ (en el S.I.). Calcular: a) la amplitud y la velocidad de fase; b) la distancia entre un nodo y el vientre consecutivo; c) la velocidad de la partícula situada a 1.5 m del origen en el instante t = ¼ s.

a)

Comparando con la ecuación de la onda estacionaria $y = 2A \operatorname{sen} kx \cos \omega t$:

$$2A = 5 \qquad k = \frac{\pi}{3} \qquad \omega = 40\pi$$

pero

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$$

por tanto

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Resp: A = 2.5 m; v = 120 m/s

b)

La distancia entre un nodo y un vientre consecutivo es un cuarto de longitud de onda:

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{4} = \frac{\pi}{2k}$$

Resp.: 1.5 m

c)

En $v = \frac{\partial y}{\partial t} = -200\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} x \operatorname{sen} 40\pi t$, basta sustituir x = 1.5 y t = ¼.

Resp.: v = 0 m/s

27. Una onda plana penetra en un material cuyo coeficiente de absorción es 0.12 cm^{-1}. Determinar la anchura de la capa que reduce la intensidad al 30% del valor inicial.

$$I = I_0 e^{-\beta x} \qquad 0.3 I_0 = I_0 e^{0.12x} \qquad x = -\frac{\ln 0.3}{0.12}$$

Resp.: 10 cm

28. Una onda plana que penetra en un material reduce su intensidad en 6 dB cuando recorre 15 cm. ¿Qué distancia debe penetrar para reducir su nivel de intensidad en 10 dB?

Sean I_1 la intensidad tras la absorción de 6 dB, e I_2 la correspondiente a la absorción de 10 dB:

$$\left.\begin{aligned} -6 &= 10 \log \frac{I_1}{I_0} \\ -10 &= 10 \log \frac{I_2}{I_0} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Pero $I_1 = I_0 e^{-\beta \cdot 15}$; $I_2 = I_0 e^{-\beta x}$. Por tanto:

$$\frac{I_1}{I_0} = e^{-\beta \cdot 15} \qquad \frac{I_2}{I_0} = e^{-\beta x}$$

que sustituimos en (1):

$$-6 = 10 \log e^{-\beta \cdot 15}$$
$$-10 = 10 \log e^{-\beta x}$$

es decir

$$-0.6 = -\beta \cdot 15 \log e$$
$$-1 = -\beta x \log e$$

Dividiendo miembro a miembro y despejando x:

Resp.: 25 cm

29. Un automóvil produce un ruido de 0.1 W. Si el sonido se irradia isotrópicamente en el hemisferio superior, calcular: a) la intensidad a una distancia de 30 m; b) el nivel de intensidad sonora a esa distancia; c) la distancia a la que el nivel de intensidad es 40 dB.

a)

Suponemos que en el hemisferio inferior no se produce propagación. Por tanto, la potencia se reparte sólo en la superficie de media esfera.

$$I = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{0.1}{2\pi\cdot 30^2}$$

Resp.: $1.77\cdot 10^{-5}$ W/m^2

b)

$$n_{dB} = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{1.77\cdot 10^{-5}}{10^{-12}}$$

Resp.: 72.47 dB

c)

$$40 = 10\log\frac{I_1}{10^{-12}} \qquad I_1 = 10^{-8} = \frac{0.1}{2\pi r_1^2}$$

Resp.: 1261.56 m

30. Un altavoz de potencia constante se oye hasta una distancia de 240 metros. ¿Cuál es el nivel de intensidad a 60 metros?

Suponemos que el altavoz se oye a 240 m con el valor mínimo de la intensidad; es decir, la intensidad de referencia I_0.

$$\frac{I_{r_1}}{I_{r_2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad \frac{I_{240}}{I_{60}} = \frac{60^2}{240^2}$$

$$I_{60} = 16\cdot I_{240}$$

$$n_{dB} = 10\log\frac{16\cdot I_0}{I_0}$$

Resp.: 12 dB

31. La bocina de un coche se oye hasta una distancia de 1 km. Calcular: a) el nivel de la intensidad sonora a 100 m; b) el número de bocinas iguales para que a los 100 metros el nivel de intensidad sonora sea de 60 dB.

a)

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{r_0^2}{r_1^2} \qquad n_{dB1} = 10\log\frac{I_1}{I_0} = 10\log\frac{r_0^2}{r_1^2} = 20\log\frac{r_0}{r_1} = 20\log\frac{1000}{100}$$

Resp.: 20 dB

b)

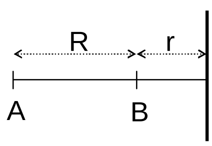
$$n_{dBn} = 10\log\frac{nI_1}{I_0} = 10\log\frac{I_1}{I_0} + 10\log n = n_{dB1} + 10\log n$$

$$60 = 20 + 10 \log n$$

Resp.:10000 bocinas

32. Dos personas A y B distantes entre sí 10 m, están alineadas normalmente a una pared. Si la persona A, más alejada del muro, llama a B y ésta percibe la llamada directa con un nivel de intensidad de 20 dB, ¿a qué distancia se encuentra B de la pared si está situada donde deja de percibir el sonido reflejado en el muro?

La intensidad que recibe B de manera directa es I_d:



$$20 = 10\log\frac{I_d}{I_0} = 10\log\frac{I_d}{10^{-12}} \qquad I_d = 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}$$

La intensidad que recibe B, reflejada por el muro I_r, tras recorrer una distancia R + 2r, debe ser igual a la de referencia I_0, considerando ésta como la mínima capaz de percibir:

$$\frac{I_d}{I_r} = \frac{(R+2r)^2}{R^2} \qquad \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = \frac{(10+2r)^2}{10^2}$$

Resp.: 45 m

33. Una onda armónica esférica tiene una intensidad de $6\cdot10^{-8}$ W/cm^2 y una amplitud de 4 mm a 20 metros del foco. Si no hay absorción, calcular la energía emitida por el foco en un minuto y la amplitud de la onda a 40 metros del foco.

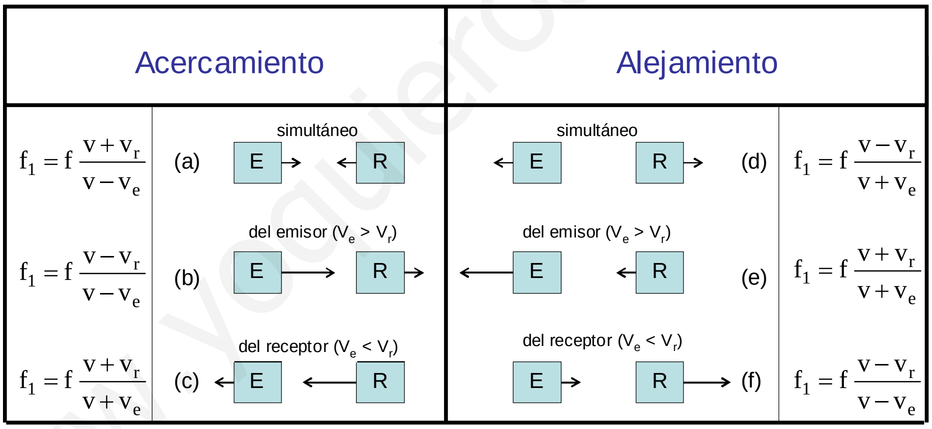
$$I = \frac{P}{S} = \frac{E}{St} \qquad E = I\,S\,t = 6\cdot10^{-4}\cdot4\pi\cdot20^2\cdot60$$

Resp.: E = 180.96 J

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \frac{A_2}{4} = \frac{20}{40}$$

Resp.: A_2 = 2 mm

34. Un coche se mueve a 17 m/s hacia una pared estacionaria. Su bocina emite ondas de 200 Hz que se propagan a 340 m/s. Calcular: a) la frecuencia con la que las ondas inciden en la pared; b) la longitud de onda del sonido delante del coche; c) la frecuencia de la onda reflejada en la pared que oirá el conductor del coche.



a)

La velocidad del receptor es nula y la situación es de acercamiento simultáneo; caso (a). Por tanto:

$$f_1 = f\frac{v}{v-v_e} = 200\frac{340}{340-17}$$

Resp: 210.53 Hz

b)

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{340}{210.53}$$

Resp.: 1.615 m

c)

Ahora suponemos que el emisor es un foco situado en la pared. La velocidad del emisor es nula, la velocidad del receptor es la del coche y la situación vuelve a ser de acercamiento simultáneo. Por tanto:

$$f_1 = f\,\frac{v + v_r}{v} = 210.53\,\frac{340 + 17}{340}$$

Resp.: 221.06 Hz

35. Un automóvil circula a 100 km/h perseguido por la policía a 120 km/h. La policía emplea su sirena que emite un sonido de 500 Hz, ¿qué frecuencia escuchará el automóvil si la temperatura del aire es 35 ºC?

La velocidad del sonido a esa temperatura es:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 8.3149 \cdot (273.15 + 35)}{28.88 \cdot 10^{-3}}} = 352.43$$

La situación es de acercamiento del emisor; caso (b):

$$f_1 = f\,\frac{v - v_r}{v - v_e} = 500\,\frac{352.43 - \frac{100}{3.6}}{352.43 - \frac{120}{3.6}}$$

Resp.: 508.705 Hz

36. Un buque se dirige perpendicularmente hacia la costa que supondremos plana y vertical. A una cierta distancia se emite con la sirena del barco un sonido a una frecuencia f_0, que se refleja en la costa y se percibe a bordo 5 segundos más tarde a una frecuencia $f_1 = 16/15\ f_0$. Calcular la velocidad del barco y la distancia a la costa si la temperatura ambiente es de 15º C.

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Con R = 8.3149, M = $28.88 \cdot 10^{-3}$ y γ = 1.4, calculamos la velocidad del sonido a 293.15 ºK:

$$v = 341 \text{ m/s}$$

La situación es de acercamiento simultáneo; caso (a). El emisor y el receptor son el propio barco, a velocidad v_b:

$$f_1 = f\,\frac{v + v_r}{v - v_e} \qquad \frac{16}{15} f_0 = f_0\,\frac{341 + v_b}{341 - v_b}$$

Resp.: v_b = 11 m/s

El sonido debe recorrer, en t = 5 segundos a velocidad v, dos veces la distancia x que existe entre el barco y la costa, menos el trayecto recorrido por el barco a velocidad v_b en los mismos t = 5 segundos.

$$vt = 2x - v_b t$$

$$x = \frac{v + v_b}{2}\,t = \frac{341 + 11}{2}\,5$$

Resp.: 880 m

37. Un tren se mueve a 20 m/s. La frecuencia emitida por su silbato es de 50 Hz. Calcular: a) la longitud de las ondas recibidas por un observador fijo situado delante de la locomotora; b)

ídem, detrás de la locomotora; c) la frecuencia recibida por un pasajero de otro tren que circula a 15 m/s, por delante, en una vía paralela, si se mueve en el mismo sentido; d) ídem, en sentido contrario. En todos los casos la velocidad del sonido es 340 m/s.

a)

La situación es de acercamiento simultáneo; caso (a). El receptor a velocidad nula:

$$f_1 = f\,\frac{v + v_r}{v - v_e} = 50\,\frac{340 + 0}{340 - 20} \qquad \lambda = \frac{v}{f_1} = \frac{340}{f_1}$$

Resp.: 6.4 m

b)

La situación es de alejamiento simultáneo; caso (d). El receptor a velocidad nula:

$$f_1 = f\,\frac{v - v_r}{v + v_e} = 50\,\frac{340 - 0}{340 + 20} \qquad \lambda = \frac{v}{f_1} = \frac{340}{f_1}$$

Resp.: 7.2 m

c)

La situación es de acercamiento del emisor; caso (b):

$$f_1 = f\,\frac{v - v_r}{v - v_e} = 50\,\frac{340 - 15}{340 - 20}$$

Resp.: 50.78 Hz

d)

La situación es de acercamiento simultáneo; caso (a):

$$f_1 = f\,\frac{v + v_r}{v - v_e} = 50\,\frac{340 + 15}{340 - 20}$$

Resp.: 55.47 Hz

38. Un coche se separa de una pared a 90 km/h y se dirige hacia un observador emitiendo un sonido de 600 Hz. Además sopla un viento de 30 m/s en la dirección y el sentido del movimiento del vehículo. Calcular las frecuencias que percibe el observador: a) directamente del coche; b) después de reflejarse en la pared. Velocidad del sonido: 340 m/s.

a)

Se trata de un acercamiento simultáneo con el receptor a velocidad nula; caso (a). La velocidad del sonido es 340 + 30 = 370 m/s.

$$f_1 = f\,\frac{v + v_r}{v - v_e} = 600\,\frac{370 + 0}{370 - 90/3.6}$$

Resp.: 643.48 Hz

b)

La onda le llega al receptor después de reflejarse en la pared, y proviene de un coche que se aleja de la pared. Se trata de un alejamiento simultáneo con el receptor a velocidad nula; caso (d). El observador del enunciado percibe la misma frecuencia que la que escucha un observador situado en la pared. La velocidad del sonido es ahora 340 – 30 = 310 m/s.

$$f_1 = f\,\frac{v - v_r}{v + v_e} = 600\,\frac{310 - 0}{310 + 90/3.6}$$

Resp.: 555.22 Hz