Coordenadas Curvilíneas y Aplicaciones a la Teoría de Campos

Índice General

1. Coordenadas curvilíneas ortogonales.

1.1. Coordenadas polares.

- Se definen

$$x = x(\rho, \theta) = \rho \cos\theta, \quad y = y(\rho, \theta) = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

donde $\rho \in [0, +\infty[$ y $\theta \in [0, 2\pi[$.

- El vector de posición es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta).$$

- Al mantener ρ fijo y variar θ en sentido positivo se obtienen circunferencias concéntricas de centro el origen. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-\rho \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\theta).$$

- Al mantener θ fijo y variar ρ se obtienen semirrectas que parten del origen. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).$$

- Los vectores $\left\{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right\}$ forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

1.2. Coordenadas cilíndricas.

- Se definen

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z,$$

donde $\rho \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ y $z \in \mathbb{R}$.

- El vector de posición es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z).$$

- Al mantener z y θ constantes y variar ρ se obtienen semirrectas que empiezan en el eje Z. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0).$$

- Al mantener ρ y z constantes y variar θ se obtienen circunferencias horizontales. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\theta, 0).$$

- Al mantener ρ y θ constantes y variar z se obtienen rectas verticales. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

- Los vectores $\left\{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right\}$ forman una base ortogonal orientada positivamente de $\mathbb{R}^3$.

1.3. Coordenadas esféricas.

- Se definen

$$x = \rho \cos\phi \cos\lambda, \quad y = \rho\cos\phi \operatorname{sen}\lambda, \quad z = \rho \operatorname{sen}\phi,$$

donde $\rho \in [0, +\infty[$, $\lambda \in [0, 2\pi[$ y $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

- El vector de posición es

$$\mathbf{r}(\rho, \lambda, \phi) = \rho(\cos\phi\cos\lambda, \cos\phi \operatorname{sen}\lambda, \operatorname{sen}\phi).$$

- Si fijamos ρ obtenemos una esfera centrada en el origen. λ corresponde a la **longitud** y ϕ es la **latitud**.

- Al variar ρ y fijar las otras dos variables obtenemos semirrectas que parten del origen. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos\phi\cos\lambda, \cos\phi \operatorname{sen}\lambda, \operatorname{sen}\phi).$$

- Al variar ϕ y fijar las otras dos variables obtenemos meridianos. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \rho(-\operatorname{sen}\phi\cos\lambda, -\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\lambda, \cos\phi).$$

- Al variar λ manteniendo fijas las demás obtenemos paralelos. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \rho(-\cos\phi\operatorname{sen}\lambda, \cos\phi\cos\lambda, 0)$$

- Los vectores $\left\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right\}$ forman una base orientada positivamente de $\mathbb{R}^3$.

1.4. Definición de las coordenadas curvilíneas ortogonales.

Un cambio de coordenadas cartesianas (x, y, z) a otras diferentes (u, v, w) es especificar 3 funciones:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

tales que existen

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z),$$

donde además supondremos que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

El vector de posición se denotará

$$\mathbf{r}(u,v,w) := (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$

Definición: Las coordenadas u, v, w forman un **sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal** si la base $\left\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right\}$ es ortogonal y orientada positivamente.

Los **factores de escala** son

$$h_u := \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right\|, \quad h_v := \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|, \quad h_w := \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right\|.$$

Denotemos

$$\mathbf{e}_u := \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v := \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_w := \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}.$$

Los vectores $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ forman una base ortonormal orientada positivamente.

Ejercicio 1. Hállense los factores de escala en los siguientes sistemas de coordenadas ortogonales:

i) Polares.

ii) Cilíndricas.

iii) Esféricas.

Solución.

Ejercicio 2. Compruébese que mediante la siguiente transformación se define un sistema de coordenadas ortogonales y calcúlense los factores de escala.

$$x = \cosh u \cos v, \qquad y = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \qquad (u,v) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[.$$

Dibújense las curvas correspondientes a $u =$ constante y a $v =$ constante. Exclúyanse los casos $u = 0$, $v = 0, \pi/2, 3\pi/2$.

Solución.

1.5. El gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales.

1.5.1. El gradiente

Sea f un campo escalar. El gradiente de f en coordenadas cartesianas es

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Se puede comprobar que la expresión del gradiente de f en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\boxed{\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\mathbf{e}_w}$$

Demostración.

Ejercicio 3. Pruébese $\nabla u = \dfrac{\mathbf{e}_u}{h_u}$, $\nabla v = \dfrac{\mathbf{e}_v}{h_v}$ y $\nabla w = \dfrac{\mathbf{e}_w}{h_w}$.

Solución.

De donde se deduce en particular

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{e}_u}{h_u} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \frac{\mathbf{e}_v}{h_v} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \frac{\mathbf{e}_w}{h_w} = \mathbf{0}.$$

Pues $\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$ para cualquier campo escalar f de clase $\mathcal{C}^2$.
Una expresión usando sumatorios para el gradiente es

$$\nabla f = \sum \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \mathbf{e}_i.$$

1.5.2. La divergencia.

La divergencia del campo vectorial $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ en cartesianas es el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Se puede comprobar que la divergencia del campo vectorial

$$\mathbf{F} = F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_u \mathbf{e}_v$$

en un sistema de coordenadas ortogonales curvilíneas es

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial(h_v h_w F_u)}{\partial u} + \frac{\partial(h_w h_u F_v)}{\partial v} + \frac{\partial(h_u h_v F_w)}{\partial w} \right)}$$

Demostración.

Ejercicio 4. Compruébese $\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}[\log(h_u h_v h_w)].$

Solución.

Una expresión para la divergencia usando sumatorios es

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{H} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{H F_i}{h_i} \right),$$

donde $H = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$. Observemos que esta expresión tiene sentido en $\mathbb{R}^2$, siendo en este caso $H = h_1 \cdot h_2$.

1.5.3. El rotacional.

El rotacional del campo vectorial $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ en cartesianas es el campo vectorial

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Sea $\mathbf{F} = F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w$ un campo vectorial. Se puede comprobar que la expresión del rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}}$$

Demostración.

Ejercicio 5. Compruébese, usando esta expresión, que $\operatorname{rot} \dfrac{\mathbf{e}_u}{h_u} = \mathbf{0}$.

Solución.

1.5.4. El laplaciano.

Sea f un campo escalar, la expresión del laplaciano de f en cartesianas es

$$\nabla^2 f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Se puede demostrar que la expresión del laplaciano en coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{H} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{H}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right)}$$

Ejercicio 6. Aplicando las fórmulas para la divergencia y el gradiente, demuéstrese la expresión anterior.

Solución.

1.6. Ejercicios.

Ejercicio 7. Hállese el gradiente de $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{n/2}$ en polares.

Solución.

Ejercicio 8. Escríbase la ecuación de Laplace, $\nabla^2 f = 0$, para un campo escalar f definido en $\mathbb{R}^2$ en coordenadas polares. Lo mismo para un campo f definido en $\mathbb{R}^3$; pero en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Solución.

Ejercicio 9. Hállese el laplaciano de una función $f(\mathbf{x})$ que depende sólo de $\rho = \|\mathbf{x}\|$ en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Ejercicio 10. Hállese, usando coordenadas esféricas, la divergencia y el rotacional de $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$. (Este ejercicio es trivial usando coordenadas cartesianas).

Solución.

Ejercicio 11. Hállese la divergencia del campo vectorial $\mathbf{F} = r\mathbf{r}$ en $\mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Solución.

Ejercicio 12. Compruébese que el campo vectorial con simetría radial definido en $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{V} = f(\rho)\mathbf{e}_\rho$ tiene rotacional nulo.

Solución.

2. El campo gravitatorio y electrostático.

2.1. Potencial.

La fuerza con que una partícula de masa 1 es atraída hacia otra partícula de masa M situada en el origen es

$$\mathbf{F} = -GM\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \qquad \mathbf{F}(x,y,z) = \frac{-GM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z).$$

La expresión de esta fuerza en coordenadas esféricas es más sencilla:

$$\mathbf{F} = \frac{-GM}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho.$$

La expresión para el campo eléctrostático es similar, ya que la ley de Coulomb es casi la misma que la de Newton, salvo que hay cargas de diferentes signos que se pueden atraer o repeler y que la constante de gravitación universal G se substituye por $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$, donde ϵ_0 es una constante llamada **permitividad** y su valor en el S.I. es $8.85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$.

Por el ejercicio 12, el campo $\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$, pues $\operatorname{rot}\mathbf{F}=\mathbf{0}$ y $\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$ es simplemente conexo. Por lo que existe una función potencial U tal que $\nabla U=-\mathbf{F}$. Calculémosla usando coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi+\frac{1}{\rho\cos\phi}\frac{\partial U}{\partial \lambda}\mathbf{e}_\lambda=\frac{GM}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho.$$

Igualando componentes:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}=\frac{GM}{\rho^2},\qquad \frac{\partial U}{\partial \phi}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial \lambda}=0.$$

Luego $U=-\dfrac{GM}{\rho}+C$. Si imponemos la condición de que U se anule en el infinito, tenemos

$$U=-\frac{GM}{\rho}.$$

El trabajo realizado por una partícula de masa 1 entre dos puntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es

$$W=\int_{\mathbf{AB}}\mathbf{F}\,\mathrm{d}\alpha=U(\mathbf{A})-U(\mathbf{B})=GM\left(\frac{1}{\mathrm{d}(\mathbf{O},\mathbf{B})}-\frac{1}{\mathrm{d}(\mathbf{O},\mathbf{A})}\right).$$

Si hubieran n masas $M_1, \cdots, M_n$ situadas en $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_n$, entonces el **principio de superposición** dice que la fuerza que crean estas n masas es igual a la suma de las fuerzas que originan por separado. Luego el potencial en $\mathbf{A}$ es

$$U(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-GM_i}{\mathrm{d}(\mathbf{A}, \mathbf{P}_i)}.$$

Si la distribución de masas fuera continua ocupando una región R, entonces el sumatorio anterior se reemplaza por una integral:

$$U(\mathbf{A}) = \int_R \frac{-G\delta(\mathbf{X})}{\mathrm{d}(\mathbf{A}, \mathbf{X})} \, \mathrm{d}\mathbf{X}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{X} \in R$, $\delta(\mathbf{X})$ es la densidad en $\mathbf{X}$ y la integral puede ser de línea, superficie o de volumen dependiendo de la distribución de masa que ocupa la región R.

Ejercicio 13. Calcúlese el potencial debido a una varilla recta de longitud L sobre un punto de la misma recta situado a distancia d del centro ($d > L/2$). Compruébese que si el punto se halla suficientemente lejos de la varilla, ésta se comporta como si la masa estuviese concentrada en el centro de ésta.

Solución.

Ejercicio 14. Calcúlese el potencial creado por un disco de radio R sobre un punto situado sobre el centro a una altura h. Compruébese que si el punto se halla suficientemente lejos del disco, éste se comporta como si la masa estuviese concentrada en el centro del disco:

Solución.

Ejercicio 15. Compruébese que el potencial originado por una esfera hueca de radio R y masa M sobre un punto $\mathbf{A}$ situado a una distancia h del centro $(h \neq R)$ es.

- $-\dfrac{GM}{R}$ si el punto es interior.
- $-\dfrac{GM}{h}$ si el punto es exterior.

Dedúzcase que los puntos interiores a una esfera hueca no sufren fuerza de atracción o repulsión.

Solución.

2.2. Campo gravitatorio terrestre.

Calculemos el potencial originado por una esfera maciza de radio R sobre un punto $\mathbf{A}$ situado a una distancia h del centro ($h > R$).

Situamos el centro de la esfera en el origen de coordenadas y el punto $\mathbf{P}$ en $(0, 0, h)$. Sea $\mathbf{X}$ un punto arbitrario de la esfera. Usando coordenadas esféricas:

$$\mathbf{X} = \rho(\cos\phi \operatorname{sen}\lambda, \cos\phi \operatorname{sen}\lambda, \operatorname{sen}\phi),$$

donde $\rho \in [0, R]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Es fácil comprobar

$$\mathrm{d}(\mathbf{A}, \mathbf{X})^2 = \rho^2 + h^2 - 2h\rho \operatorname{sen}\phi,$$

El potencial en $\mathbf{A}$ es

$$\begin{aligned} U(\mathbf{A}) &= -G\delta \iiint_V \frac{1}{\mathrm{d}(\mathbf{A}, \mathbf{X})} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= -G\delta \iiint_T \frac{\rho^2 \cos\phi}{\sqrt{\rho^2 + h^2 - 2h\rho \operatorname{sen}\phi}} \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\lambda = \\ &= -G\delta 2\pi \int_0^R \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\rho^2 + h^2 - 2h\rho \operatorname{sen}\phi}} \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

La integral interna está resuelta en el ejercicio 15, notemos que $\rho < R < h$.

$$U(\mathbf{A}) = -G\delta 2\pi \int_0^R \frac{2\rho^2}{h}\,\mathrm{d}\rho = -\frac{G\delta 4\pi R^3}{3h} = -\frac{GM}{h},$$

siendo M la masa de la esfera, ya que $\frac{4}{3}\pi R^3$ es su volumen y δ su densidad. Resultado que nos dice que la fuerza que ejerce una esfera maciza es como si toda su masa estuviese concentrada en el centro; resultado debido a Newton.

Ejercicio 16. Experimentalmente Galileo observó que todos los cuerpos caen con la misma aceleración. En este ejercicio veremos que esto es compatible con la expresión anterior.

(a) Dos puntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ distan del centro de la Tierra R y $R+h$ respectivamente. Pruébese que la diferencia de potencial entre estos dos puntos es $\Delta U = U(\mathbf{B}) - U(\mathbf{A}) = \dfrac{GMh}{(R+h)R}$.

(b) Si $R \gg h$ (lo cual para alturas pequeñas es cierto), pruébese que $\Delta U = gh$, donde $g := \dfrac{GM}{R^2}$ (la famosa aceleración gravitatoria, cuyo valor es aproximadamente $9.8ms^{-2}$).

(c) Supóngase que la superficie de la Tierra es plana (en las direcciones x e y), y la perpendicular es la dirección al centro de la Tierra (dirección z). Pruébese $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y} = 0$ y $\dfrac{\partial U}{\partial z} = g$.

(d) Conclúyase que $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$. Es decir, un cuerpo de masa 1 sufre una fuerza hacia el centro de la Tierra de g. Un cuerpo de masa m sufrirá una fuerza similar; pero de magnitud mg. Por la segunda ley de Newton, la aceleración de un cuerpo que cae es constante y vale g, independientemente del valor de la masa, como anticipó Galileo.

Solución.

Ejercicio 17. **La ley de conservación de la energía.** Una partícula de masa m describe una trayectoria α en un campo de fuerzas conservativo $\mathbf{F}$ (por ejemplo el gravitatorio) cuyo potencial es U. Utilícese la segunda ley de Newton, $\mathbf{F}(\alpha(t)) = m\alpha''(t)$ para comprobar que la función

$$E(t) = \frac{1}{2}m\|\alpha'(t)\|^2 + U(\alpha(t)).$$

es constante. Esta función se llama **energía**. El primer sumando es la **energía cinética** y el segundo es la **energía potencial**.

Solución.

Ejercicio 18. **Velocidad de escape.** ¿Cuál es la velocidad necesaria para lanzar un cuerpo de masa m al espacio? (Ignorando la resistencia del aire y la influencia de los cuerpos celestes a excepción de la Tierra).

(a) Utilícese el principio de conservación de la energía para probar

$$\frac{1}{2}mv_{\mathbf{A}}^2 - m\frac{GM}{\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{O})} = \frac{1}{2}mv_{\mathbf{B}}^2 - m\frac{GM}{\mathrm{d}(\mathbf{B},\mathbf{O})},$$

donde $v_{\mathbf{A}}$ y $v_{\mathbf{B}}$ son las velocidades de un móvil en los puntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

(b) Pruébese que la velocidad de escape es $v_e = \sqrt{2gR}$.

Solución.

2.3. La ley de Gauss.

Sea S una superficie cerrada que encierra un volumen V. Calculemos $\iint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\vec{S}$, donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico creado por una carga puntual positiva situada en el origen; es decir $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$. El convenio en física es que si la carga es positiva, el campo apunta hacia fuera; de ahí la diferencia de signos con el campo gravitatorio.

Para calcular el flujo utilizamos coordenadas esféricas:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho^2}\mathbf{e}_\rho.$$

Como hay que hallar la integral de flujo sobre una superficie cerrada utilizamos el teorema de la divergencia. Denotemos $K := \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}$.

Ejercicio 19. Compruébese, usando coordenadas esféricas, que la divergencia de $\mathbf{E}$ es nula.

Solución.

Hay que tener cuidado en la siguiente igualdad:

$$\iint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{E}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0,$$

pues el teorema de la divergencia no es cierto si el campo $\mathbf{E}$ no es diferenciable en el interior de S. Y en este caso si el origen está dentro de S, $\mathbf{E}$ no es diferenciable en el origen. Sin embargo podemos decir que si $0 \notin \text{interior}(S)$, entonces $\iint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$.

Si $\mathbf{0}$ estuviese en el interior de S, encerramos el origen dentro de una esfera B de radio δ suficientemente pequeño tal que $B \subset V$ y aplicamos el teorema de la divergencia en $V \setminus B$: Sea S^* la frontera de $V \setminus B$. El flujo a través de S^* es 0 (según acabamos de probar), por lo que el flujo a través de S coincide con el flujo a través de B; pero la integral de flujo sobre B es muy fácil de calcular pues B es una esfera.

Ejercicio 20. En B el vector normal exterior es $\mathbf{N} = \mathbf{e}_\rho$. Pruébense las siguientes afirmaciones:

(a) que $\langle \mathbf{E}, \mathbf{N} \rangle$ es constante y vale $\dfrac{K}{\delta^2}$.

(b) $\iint_B \langle \mathbf{E}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}S = \dfrac{Q}{\epsilon_0}$.

Solución.

Acabamos de probar

$$\iint_S \mathbf{E} \, \mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{0} \notin \operatorname{interior}(S), \\ \dfrac{Q}{\epsilon_0} & \text{si } \mathbf{0} \in \operatorname{interior}(S). \end{cases}$$

Si la superficie S encierra una carga Q, (causada por una distribución discreta o continua de cargas), por el principio de superposición, se tiene la llamada **ley de Gauss:**

$$\boxed{\iint_S \mathbf{E} \, \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

La ley de Gauss permite enunciar una ley fundamental de la electrostática. Sea Ω una región de $\mathbb{R}^3$ en la que no hay cargas.

Tomamos $V \subset \Omega$ arbitrario, y sea S la superficie frontera de S. Entonces, por la ley de Gauss, junto con el teorema de la divergencia,

$$0 = \iint_S \mathbf{E}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\mathbf{E})\, \mathrm{d}V,$$

como esto es cierto para cualquier $V \subset \Omega$, entonces $\mathrm{div}(\mathbf{E}) = 0$ en Ω. Como $\mathbf{E}$ es conservativo, su potencial U cumple $\mathrm{div}(\nabla U) = 0$ en Ω; es decir U cumple la **ecuación de Laplace**:

$$\boxed{\nabla^2 U = 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \qquad (x, y, z) \in \Omega}$$

Los campos escalares con divergencia nula se llaman **armónicos**.

2.4. Ejercicios.

La ley de Gauss permite hallar de manera cómoda campos (o potenciales) de cuerpos cargados con simetrías, veámoslo en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 21. ¿Cuál es el potencial creado por una esfera maciza de carga total Q? Procédase de la manera siguiente: Por simetría el campo es de la forma $\mathbf{E} = f(\rho)\mathbf{e}_\rho$. Enciérrese la carga en una esfera de radio ρ y aplíquese la ley de Gauss para demostrar

$$\frac{Q}{4\pi\rho^2\epsilon_0} = f(\rho).$$

Solución.

Ejercicio 22. Dígase por qué el siguiente razonamiento no es riguroso:

Sea V un volumen arbitrario de $\mathbb{R}^3$, conteniendo una distribución continua de cargas, cuya superficie frontera es S. Sea δ la densidad de carga y Q la carga total. Entonces, por la ley de Gauss,

$$\iint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Ahora, por el teorema de la divergencia

$$\iint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{E}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Como es para todo V, entonces $\operatorname{div}\mathbf{E} = \dfrac{\delta}{\epsilon_0}$. Como además $\mathbf{E} = -\nabla U$, entonces el potencial eléctrico U satisface la **ecuación de Poisson**[1]:

$$\boxed{\nabla^2 U = -\frac{\delta}{\epsilon_0}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\delta}{\epsilon_0}.}$$

Solución.

[1]Se puede demostrar rigurosamente que esta ecuación es válida, ¡además de muy importante!

Ejercicio 23. Determínense los campos escalares en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ que dependen sólo de ρ que son armónicos.

Solución.

Ejercicio 24. **Momento dipolar.** Una distribución continua de carga en la región Ω con densidad de carga $\delta(\mathbf{X})$ crea un potencial en el punto $\mathbf{A}$

$$U(\mathbf{A}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\Omega \frac{\delta(\mathbf{X})}{\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{X})}\,\mathrm{d}\mathbf{X}.$$

En este problema estudiaremos el comportamiento de esta expresión cuando $\mathbf{A}$ está lejos de la carga que causa el campo. Sean $r = \|\mathbf{X}\|$, $a = \|\mathbf{A}\|$ y ψ el ángulo que forman los vectores de posición de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{A}$. Obsérvese que por el teorema del coseno de trigonometría plana

$$\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{X})^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\psi.$$

(a) Úsese la aproximación $(1+x)^{-1/2} \simeq 1 - \dfrac{x}{2}$ para $x \simeq 0$ para demostrar

$$\frac{1}{\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{X})} \simeq \frac{1}{a}\left(1 + \frac{r}{a}\cos\psi\right).$$

(b) Demuéstrese que el potencial en el punto $\mathbf{A}$ se puede aproximar

$$U(\mathbf{A}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a} + \frac{1}{a^3}\int_\Omega \langle \mathbf{X}, \mathbf{A}\rangle \delta(\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{X}\right],$$

donde Q es la carga total. El vector $\mathbf{P} := \int_\Omega \mathbf{X}\delta(\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{X}$ se llama **momento dipolar**, y la expresión anterior queda

$$U(\mathbf{A}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a} + \frac{1}{a^3}\langle \mathbf{P}, \mathbf{A}\rangle\right].$$

(c) En la naturaleza hay muchas fuentes de campos que se caracterizan por tener $Q = 0$. Demuéstrese que si $Q = 0$, el momento dipolar no depende del origen elegido para $\mathbf{X}$.

(d) El nombre de **dipolo** viene motivado por la siguiente construcción: Considérense dos cargas iguales $+q$ y $-q$ situadas en los puntos $(0, d/2)$ y $(0, -d/2)$ respectivamente. Sea $\mathbf{A}$ un punto suficientemente lejos de las cargas y r^+, r^- las distancias de $\mathbf{A}$ a las cargas positiva y negativa. Usando que el potencial en el punto $\mathbf{A}$ es

$$U(\mathbf{A}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-}\right),$$

junto con alguna ideas precedentes, demuéstrese que el potencial en $\mathbf{A}$ se puede aproximar mediante

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^3}\langle q\mathbf{d}, \mathbf{A}\rangle,$$

donde $\mathbf{d}$ es el vector de posición de la carga q.

Solución.

Demostración:
Hallemos ∇f en la base $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$. Si

$$\nabla f = f_u \mathbf{e}_u + f_v \mathbf{e}_v + f_w \mathbf{e}_w,$$

tenemos que encontrar f_u, f_v, f_w. Por ser la base $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$ ortonormal:

$$\begin{aligned} f_u &= \langle \nabla f, \mathbf{e}_u \rangle \\ &= \frac{1}{h_u} \left\langle \nabla f, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\rangle \\ &= \frac{1}{h_u} \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right] \\ &= \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}. \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos

$$f_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}, \quad f_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

$\Longleftarrow$ ■

Demostración:

Sea $\mathbf{F} = F_u\mathbf{e}_u + F_v\mathbf{e}_v + F_w\mathbf{e}_w$. Calculamos sólo $\operatorname{div}(F_u\mathbf{e}_u)$:

$$\operatorname{div}(F_u\mathbf{e}_u) = \operatorname{div}[F_u(\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w)] = \langle \nabla F_u, \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w\rangle + F_u \operatorname{div}(\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w).$$

Debido a la expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales y la ortonormalidad de la base $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$ se tiene

$$\langle \nabla F_u, \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w\rangle = \frac{1}{h_u}\frac{\partial F_u}{\partial u},$$

y

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w) &= \operatorname{div}\left((h_v h_w)\frac{\mathbf{e}_v}{h_v} \times \frac{\mathbf{e}_w}{h_w}\right) \\
&= \left\langle \nabla(h_v h_w), \frac{\mathbf{e}_v}{h_v} \times \frac{\mathbf{e}_w}{h_w}\right\rangle + h_v h_w \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{e}_v}{h_v} \times \frac{\mathbf{e}_w}{h_w}\right) \\
&= \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial(h_v h_w)}{\partial u}.
\end{aligned}$$

Ya que

$$\operatorname{div}(\nabla v \times \nabla w) = \langle \operatorname{rot}(\nabla v), \nabla w\rangle - \langle \operatorname{rot}(\nabla w), \nabla u\rangle = 0$$

por el ejercicio 3. Ahora

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(F_u\mathbf{e}_u) &= \frac{1}{h_u}\frac{\partial F_u}{\partial u} + \frac{F_u}{h_u h_v h_w}\frac{\partial (h_v h_w)}{\partial u}\\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[h_v h_w \frac{\partial F_u}{\partial u} + F_u \frac{\partial (h_v h_w)}{\partial u}\right]\\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u}.\end{aligned}$$

El resto de las componentes se calculan de forma similar. ■

$\Longleftarrow$

Demostración:
Sólo calcularemos $\operatorname{rot}(F_u\mathbf{e}_u)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(F_u\mathbf{e}_u) &= \operatorname{rot}(F_u h_u \frac{\mathbf{e}_u}{h_u}) \\ &= F_u h_u \operatorname{rot}\frac{\mathbf{e}_u}{h_u} + \nabla(F_u h_u) \times \frac{\mathbf{e}_u}{h_u} \\ &= \mathbf{0} + [\lambda_u\mathbf{e}_u + \lambda_v\mathbf{e}_v + \lambda_w\mathbf{e}_w] \times \frac{\mathbf{e}_u}{h_u} \\ &= -\frac{\lambda_v}{h_u}\mathbf{e}_w + \frac{\lambda_w}{h_u}\mathbf{e}_v,\end{aligned}$$

donde $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$ son las componentes de $\nabla(F_u h_u)$ en la base ortonormal $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$, es decir,

$$\lambda_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial(F_u h_u)}{\partial v}, \qquad \lambda_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial(F_u h_u)}{\partial w}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(F_u\mathbf{e}_u) &= -\frac{1}{h_u h_v}\frac{\partial(F_u h_u)}{\partial v}\mathbf{e}_w + \frac{1}{h_u h_w}\frac{\partial(F_u h_u)}{\partial w}\mathbf{e}_v \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[-\frac{\partial(F_u h_u)}{\partial v}h_w\mathbf{e}_w + \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial w}h_v\mathbf{e}_v\right].\end{aligned}$$

Análogamente se obtienen $\operatorname{rot}(F_v \mathbf{e}_v)$ y $\operatorname{rot}(F_w \mathbf{e}_w)$. Como

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot}(F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w),$$

la expresión del rotacional queda de forma simbólica:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}.$$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 1:

Polares:

$$h_\rho = 1, \qquad h_\theta = \rho.$$

Cilíndricas:

$$h_\rho = 1, \qquad h_\theta = \rho, \qquad h_z = 1.$$

Esféricas:

$$h_\rho = 1, \qquad h_\phi = \rho, \qquad h_\lambda = \rho \cos \phi.$$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 2:

- Los factores de escala son

$$h_u = h_v = \sqrt{\operatorname{senh}^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \operatorname{sen}^2 v}.$$

- Si u es constante, como

$$1 = \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v = \frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{senh}^2 u},$$

se obtienen elipses. Y si v es constante, como

$$1 = \cosh^2 u - \sinh^2 u = \frac{x^2}{\cos^2 v} + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 v}$$

se obtienen hipérbolas.

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 3:

$$\nabla u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial u}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial u}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial u}{\partial w}\mathbf{e}_w = \frac{1}{h_u}\mathbf{e}_u.$$

Ya que $\dfrac{\partial u}{\partial u} = 1$ y $\dfrac{\partial u}{\partial v} = \dfrac{\partial u}{\partial w} = 0.$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 4:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = \operatorname{div}(h_u \mathbf{e}_u) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial (h_v h_w h_u)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}[\log(h_u h_v h_w)].$$

$\Longleftarrow$ ■

Solución del Ejercicio 5:

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{e}_u}{h_u} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u \dfrac{1}{h_u} & h_v \cdot 0 & h_w \cdot 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

pues todas las parciales que aparecen actúan sobre constantes.

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 6:

Aplicando las fórmulas del gradiente y divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \operatorname{div}(\nabla f) \\
&= \operatorname{div}\left(\sum \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i}\mathbf{e}_i\right) \\
&= \frac{1}{H}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right).
\end{aligned}
$$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 7:
Puesto que en coordenadas polares

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

y

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{n/2},$$

la expresión de f en coordenadas polares es $f(\rho, \theta) = \rho^n$. Ahora

$$\nabla f = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta = n\rho^{n-1}\mathbf{e}_\rho.$$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 8:
Coordenadas polares.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 f = \frac{1}{H}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) \\ &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 f = \frac{1}{H}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) \\ &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla^2 f = \frac{1}{H}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\\
&= \frac{1}{\rho^2\cos\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\cos\phi\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\rho^2\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)+\right.\\
&\qquad \left.+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\rho^2\cos\phi}{\rho^2\cos^2\phi}\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)\right]\\
&= \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}\right].
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$

■

Web Asignatura

Inicio

Página 53 de 73

Regresar

Pantalla Completa

Imprimir

Cerrar

Abandonar

Solución del Ejercicio 9:

En $\mathbb{R}^2$: Usaremos coordenadas polares. Notemos que $f = f(\rho)$. Denotaremos f' la derivada de f respecto de ρ.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{H}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho}{1^2}\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) = \frac{1}{\rho}(\rho f')' = \frac{1}{\rho}(f' + \rho f'').
\end{aligned}$$

En $\mathbb{R}^3$: Usamos coordenadas esféricas. Igual que antes $f = f(\rho)$ y f' es la derivada de f respecto de ρ.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{H}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) \\
&= \frac{1}{\rho^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho^2\cos\phi}{1^2}\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \\
&= \frac{1}{\rho^2}(\rho^2 f')' = \frac{1}{\rho^2}(2\rho f' + \rho^2 f'').
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 10:
Como $\mathbf{V}(\rho,\phi,\lambda) = \rho\mathbf{e}_\rho$, entonces,

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{H}\sum\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{HV_i}{h_i}\right) = \frac{1}{\rho^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^3\cos\phi) = 3,$$

y

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} h_\rho\mathbf{e}_\rho & h_\lambda\mathbf{e}_\lambda & h_\phi\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ h_\rho V_\rho & h_\lambda V_\lambda & h_\phi V_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} h_\rho\mathbf{e}_\rho & h_\lambda\mathbf{e}_\lambda & h_\phi\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 11:
Como $\mathbf{F} = \rho^2 \mathbf{e}_\rho$, entonces,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{H} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{H F_i}{h_i} = \frac{1}{\rho^2 \cos\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^4 \cos\phi\right) = 4\rho.$$

$\Longleftarrow$ ■

Solución del Ejercicio 12:

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} h_\rho \mathbf{e}_\rho & h_\lambda \mathbf{e}_\lambda & h_\phi \mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ h_\rho V_\rho & h_\lambda V_\lambda & h_\phi V_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} h_\rho \mathbf{e}_\rho & h_\lambda \mathbf{e}_\lambda & h_\phi \mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ f(\rho) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 13:

Situamos el centro de la varilla en el origen de coordenadas y usamos la ecuación 1. Si no se dice nada se supone que la densidad δ es constante.

$$U = -G\delta \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}x}{d-x} = -G\delta \left[-\log(d-x)\right]_{-L/2}^{L/2} = -G\delta \log \frac{d+\frac{L}{2}}{d-\frac{L}{2}}.$$

Si el punto está lejos de la varilla, $d \gg L$. Sea $\alpha := L/d \simeq 0$. La expresión anterior queda

$$U = -G\delta \log \frac{1+\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}} = -G\delta \left(\log(1+\frac{\alpha}{2}) - \log(1-\frac{\alpha}{2})\right),$$

usamos el hecho que $\log(1+x) \simeq x$ para $x \simeq 0$,

$$U \simeq -G\delta \left(\frac{\alpha}{2} - (-\frac{\alpha}{2})\right) = -G\delta\alpha = -G\frac{L\delta}{d} = -\frac{GM}{d},$$

donde M es la masa de la varilla.

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 14:

Sea D el disco, con su centro situado en el origen de coordenadas y el punto donde se calcula el potencial en $(0,0,h)$:

$$
\begin{aligned}
U &= \iint_D \frac{-G\delta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} \\
&= -G\delta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}} \, \mathrm{d}\rho \\
&= -2\pi G\delta \left(\sqrt{R^2+h^2} - h \right) \\
&= -2\pi G\delta h \left(\sqrt{1+(R/h)^2} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

Si el punto donde calculamos el potencial está suficientemente alejado del disco, $h \gg R$. Usamos el hecho que $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$ para $x \simeq 0$,

$$
U \simeq -2\pi G\delta h \left(1 + \frac{R^2}{2h^2} - 1 \right) = -\frac{G\pi R^2 \delta}{h} = -\frac{GM}{h},
$$

donde M es la masa del disco.

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 15:

Situamos la esfera en el origen de coordenadas y el punto $\mathbf{A}$ en $(0,0,h)$. Sea $\mathbf{X} = R(\cos\phi \operatorname{sen}\lambda, \cos\phi \operatorname{sen}\lambda, \operatorname{sen}\phi)$ un punto arbitrario de la esfera, con $\lambda \in [0,2\pi]$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Es fácil comprobar

$$\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{X})^2 = R^2 + h^2 - 2hR \operatorname{sen}\phi.$$

El potencial en $\mathbf{A}$ es (T es el dominio de variación de λ y ϕ).

$$\begin{aligned} U(\mathbf{A}) &= -G\delta \iint_S \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{X})} \\ &= -G\delta \iint_T \frac{R^2\cos\phi}{\sqrt{R^2+h^2-2hR\operatorname{sen}\phi}}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\lambda = \\ &= -G\delta R^2 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\phi}{\sqrt{R^2+h^2-2hR\operatorname{sen}\phi}}\,\mathrm{d}\phi. \end{aligned}$$

Esta integral se resuelve con el cambio $R^2+h^2-2hR\operatorname{sen}\phi = t$:

$$\int_{(R-h)^2}^{(R+h)^2} \frac{\mathrm{d}t}{2hR\sqrt{t}} = \frac{1}{hR}\left[\sqrt{t}\right]_{(R-h)^2}^{(R+h)^2} = \frac{1}{hR}(R+h-|R-h|).$$

Expresión en la que hay que distinguir si $R > h$ (el punto es interior a la esfera) o si $R < h$ (el punto es exterior).

- $h < R$:

$$U(\mathbf{A}) = -G\delta R^2 2\pi \frac{1}{hR} 2h = -G\delta 4\pi R = -G\delta \frac{4\pi R^2}{R} = -\frac{GM}{R}.$$

- $h > R$:

$$U(\mathbf{A}) = -G\delta R^2 2\pi \frac{1}{hR} 2R = \frac{-G\delta 4\pi R^2}{h} = -\frac{GM}{h}.$$

Siendo M la masa de la esfera hueca, ya que $4\pi R^2$ es el área y δ su densidad superficial.

Si el punto está dentro de la esfera hueca, entonces, al ser el potencial U constante, y $\mathbf{F} = -\nabla U$, se tiene que $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

$\blacksquare$

Solución del Ejercicio 16:

(a) Debido al potencial causado por una esfera maciza

$$\Delta U = U(\mathbf{B}) - U(\mathbf{A}) = -GM\left(\frac{1}{\mathrm{d}(\mathbf{O},\mathbf{B})} - \frac{1}{\mathrm{d}(\mathbf{O},\mathbf{A})}\right),$$

donde $\mathbf{O}$ es el centro de la Tierra. Si $\mathbf{B}$ está a una altura h de la superficie terrestre y si R es el radio de la Tierra,

$$\Delta U = -GM\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = GM\frac{(R+h)-R}{(R+h)R} = \frac{GMh}{(R+h)R}.$$

(b) Si h es despreciable frente a R, $(R+h)R \simeq R^2$, y por tanto

$$\Delta U \simeq \frac{GM}{R^2}h = gh.$$

(c) Como los puntos de la superficie terrestre tienen el mismo potencial, entonces entonces $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y} = 0$. Y si $\mathbf{A} = (x,y,z)$, $\mathbf{B} = (x,y,z+h)$, por (b)

$$U(x,y,z+h) - U(x,y,z) = gh,$$

de donde

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \lim_{h \to 0} \frac{U(x, y, z+h) - U(x, y, z)}{h} = g.$$

(d) Ya que $\mathbf{F} = -\nabla U = (0, 0, -g)$.

$\Longleftarrow$ ■

Solución del Ejercicio 17:

Para demostrar que $E(t)$ es constante, hemos de comprobar que $E'(t) = 0$:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \left(\frac{1}{2}m\|\alpha'(t)\|^2 + U(\alpha(t))\right)' \\ &= \frac{m}{2}\langle\alpha',\alpha'\rangle' + (U\circ\alpha)' \\ &= m\langle\alpha',\alpha''\rangle + \langle\nabla U\circ\alpha,\alpha'\rangle, \end{aligned}$$

(gracias a la regla de la cadena $(U\circ\alpha)' = \langle\nabla U\circ\alpha,\alpha'\rangle$). Como $m\alpha'' = \mathbf{F}\circ\alpha$ y $\nabla U = -\mathbf{F}$, entonces $E' = 0$.

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 18:

(a) La energía total (cinética + potencial) ha de permancer constante: Para cualquier par de puntos **A** y **B**,

$$\frac{1}{2}mv_{\mathbf{A}}^2 - m\frac{GM}{\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{O})} = \frac{1}{2}mv_{\mathbf{B}}^2 - m\frac{GM}{\mathrm{d}(\mathbf{B},\mathbf{O})},$$

donde **O** denota el centro de la Tierra

(b) Si **A** es un punto en la superficie terrestre entonces $\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{O}) = R$, el radio de la Tierra. Y si v_e es la velocidad de escape, entonces el móvil puede alcanzar puntos **B** arbitrariamente lejanos de la Tierra. En la igualdad previa, hacemos tender $\mathrm{d}(\mathbf{O},\mathbf{B})$ a ∞, llegando el móvil al infinito con velocidad nula.

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - m\frac{GM}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}.$$

$\Longleftarrow$ ■

Solución del Ejercicio 19:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{H} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{H E_i}{h_i} \right) = \frac{1}{\rho^2 \cos\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \cos\phi \frac{K}{\rho^2} \right) = 0.$$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 20:

(a) Como en la superficie de la esfera se tiene $\rho = \delta$, y $\mathbf{e}_\rho$ es un vector unitario,

$$\langle \mathbf{E}, \mathbf{N} \rangle = \langle \frac{K}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\rho \rangle = \frac{K}{\delta^2}.$$

(b) Por el apartado previo,

$$\iint_B \langle \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}S = \frac{K}{\delta^2} \iint_B \mathrm{d}S = \frac{K}{\delta^2} \text{Área}(B) = \frac{K}{\delta^2} 4\pi\delta^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 21:

Sea S la superficie de una esfera de radio ρ que encierra a la carga dada. Por la ley de Gauss

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \iint_S \mathbf{E}\, d\vec{S} = f(\rho) \iint_S \langle \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\rho \rangle \, dS = f(\rho) 4\pi\rho^2.$$

Se puede despejar $f(\rho)$ y el campo es $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho^2}\mathbf{e}_\rho$.

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 22:
En primer lugar
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho^2}\mathbf{e}_\rho$$
es el campo creado por una partícula en el origen. El campo creado por una distribución continua de cargas con densidad δ ocupando una región Ω en un punto $\mathbf{A}$ es
$$\mathbf{E}(\mathbf{A}) = \iiint_\Omega \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{XA}}}{\mathrm{d}(\mathbf{X},\mathbf{A})^3}\,\mathrm{d}\mathbf{X}$$
El campo $\mathbf{E}$ puede ser discontinuo si $\mathbf{A} \in \Omega$, ya que el denominador del integrando se anula. Y por lo tanto no se puede aplicar el teorema de la divergencia.

Por otra parte, la ley de Gauss afirma que el flujo de $\mathbf{E}$ a través de una superficie cerrada S es igual a toda la carga contenida en S, siempre que la carga no ocupe el lugar de la superficie; pues si no, la demostración usada en en la ley de Gauss deja de ser válida.

Nota: Para una demostración rigurosa, se tendría que considerar expresiones del tipo

$$\iint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \left(\iiint_\Omega \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{XA}}}{\mathrm{d}(\mathbf{X},\mathbf{A})^3}\,\mathrm{d}\mathbf{X} \right) \mathrm{d}\vec{S},$$

y usar el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración. Se puede consultar el libro *Cálculo Vectorial: J. Marsden, A. Tromba. Editorial Addison Wesley, Cap. 8.*

$\Longleftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 23:
En $\mathbb{R}^2$: Si $f = f(\rho)$, lo más cómodo es usar coordenadas polares:

$$\nabla^2 f = 0 \Rightarrow f'' + \frac{1}{\rho} f' = 0 \Rightarrow f(\rho) = C \log \rho + K.$$

En $\mathbb{R}^3$: Si $f = f(\rho)$, es mejor es usar coordenadas esféricas: Por el ejercicio 9:

$$0 = \frac{1}{\rho^2}(2\rho f' + \rho^2 f''),$$

luego $2f' + \rho f'' = 0$, llamando $g = f'$, se tiene $2g + \rho \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\rho} = 0$, ecuación diferencial fácil de resolver separando las variables. La solución final para f es

$$f(\rho) = \frac{A}{\rho} + B.$$

$\Leftarrow$ $\blacksquare$

Solución del Ejercicio 24:

(a) Aproximamos $\dfrac{1}{\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{X})}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{X})} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\psi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1+\left(\frac{r}{a}\right)^2-2\frac{r}{a}\cos\psi\right)}} \\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2-2\frac{r}{a}\cos\psi}} \\
&\simeq \frac{1}{a}\left[1-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^2-2\frac{r}{a}\cos\psi\right)\right].
\end{aligned}$$

Si despreciamos potencias de $\dfrac{r}{a}$ superiores a 1:

$$\frac{1}{\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{X})} \simeq \frac{1}{a}\left[1+\frac{r}{a}\cos\psi\right].$$

(b) Por lo que

$$\begin{aligned} U(\mathbf{A}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\Omega \frac{\delta(\mathbf{X})}{\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{X})}\,\mathrm{d}\mathbf{X} \\ &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\Omega \frac{\delta(\mathbf{X})}{a}\left(1+\frac{r}{a}\cos\psi\right)\mathrm{d}\mathbf{X} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a}\int_\Omega \delta(\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{X} + \frac{1}{a^2}\int_\Omega \delta(\mathbf{X}) r\cos\psi\,\mathrm{d}\mathbf{X}\right]. \end{aligned}$$

Téngase en cuenta que tanto r como ψ son funciones de $\mathbf{X}$ y no pueden salir fuera de la integral. Pero $Q = \int_\Omega \delta(\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{X}$ y $ar\cos\psi = \langle \mathbf{A}, \mathbf{X}\rangle$. Por lo que

$$U(\mathbf{A}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a} + \frac{1}{a^3}\int_\Omega \langle \mathbf{X}, \mathbf{A}\rangle \delta(\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{X}\right],$$

(c) Si fijamos $\mathbf{B}$ como origen, el momento dipolar respecto a este origen es

$$\mathbf{P}_\mathbf{B} = \int_\Omega (\mathbf{X}-\mathbf{B})\delta(\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{X}.$$

Pero operando esta integral se obtiene fácilmente

$$\mathbf{P_B} = \int_\Omega \mathbf{X}\delta(\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{X} - Q\mathbf{B}.$$

Si $Q = 0$, el momento dipolar es invariante.

(d) Si ψ es el ángulo que forman los vectores de posición de q y $\mathbf{A}$, se obtiene (usando $(1+x)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{x}{2}$ para $x \simeq 0$)

$$\frac{1}{r^+} \simeq \frac{1}{a}\left(1 + \frac{d}{2a}\cos\psi\right), \qquad \frac{1}{r^-} \simeq \frac{1}{a}\left(1 - \frac{d}{2a}\cos\psi\right).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} U(\mathbf{A}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-}\right) \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{a^2}\cos\psi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^3}\langle q\mathbf{d}, \mathbf{A}\rangle. \end{aligned}$$