PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2017

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $(A+B)$

b) Calcula el determinante de $2A^{-1}(A+B)^t$ **, siendo** $(A+B)^t$ **la matriz traspuesta de** $(A+B)$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos *A*+*B*

$$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$\left(A+B\right)^{-1}=\frac{((A+B)^d)^t}{|A+B|}=\frac{\begin{pmatrix} -10 & 20 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t}{24}=\frac{\begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}{24}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

b) Sabemos que:

- Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A|=k^n\cdot|A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A^{-1}|=2^3|A^{-1}|$
- $A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=|I|=1\Rightarrow|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{4}$
- $|(A+B)^t|=|(A+B)|$

Por lo tanto:

$$|2A^{-1}(A+B)^t|=|2A^{-1}|\cdot|(A+B)^t|=2^3|A^{-1}|\cdot|(A+B)^t|=2^3\cdot\frac{1}{|A|}\cdot|(A+B)|=8\cdot\frac{1}{4}\cdot 24=48$$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz *X* que verifica que $ABX-2C=CX$.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$ABX-2C=CX \Rightarrow ABX-CX=2C \Rightarrow (AB-C)X=2C \Rightarrow (AB-C)^{-1}(AB-C)X=(AB-C)^{-1}2C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=(AB-C)^{-1}2C$$

$$AB-C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa:

$$\left(AB-C\right)^{-1}=\frac{((AB-C)^d)^t}{|AB-C|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 15 & 12 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=(AB-C)^{-1}2C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A\cdot A^t-2A=I$ (A^t denota la traspuesta de A e I la matriz identidad).
b) Calcula A^{-1}.
c) Determina, si existe, la matriz X que verifica $XA+I=3A$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $A\cdot A^t-2A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$

b) Calculamos la inversa .

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz *X*.

$$XA+I=3A\Rightarrow XX=A=3A-I\Rightarrow XA\cdot A^{-1}=(3A-I)\cdot A^{-1}\Rightarrow X=(3A-I)\cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz *X*.

$$X=(3A-I)\cdot A^{-1}=\left[\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz $3\text{x}3$ tal que $\det(2A)=8$.

a) ¿Cuánto vale $\det(A)$?

b) Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale $\det(B)$?

c) Determina los valores de x para los que la siguiente matriz A verifica que $\det(2A)=8$,

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $|k\cdot A|=k^n\cdot|A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A|=(2)^3\cdot|A|=8\Rightarrow|A|=1$

b) $|B|=3\cdot(-1)\cdot|A|=3\cdot(-1)\cdot1=-3$

c) Calculamos el determinante de la matriz $2A$

$$|2A|=2\begin{vmatrix} 2x & 2 & 2 \\ 2x+2 & 4 & 4 \\ 2x & -2x+4 & 2 \end{vmatrix}=2^3\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{vmatrix}=8\Rightarrow x^2-2x+1=1\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

Considera las matrices: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{m-1} & \boldsymbol{2-m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{2-m} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de *m* para los que la matriz *A* no tiene inversa.

b) Para $\boldsymbol{m=1}$, calcula, si existe, la matriz *X* que verifica la igualdad $\boldsymbol{A^{-1}XA+I=B}$, siendo *I* la matriz identidad.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{vmatrix}=-m^2+2m=0\Rightarrow m=0\ ;\ m=2$$

Luego, no tiene inversa para los valores de $m=0\ y\ m=2$

b) Calculamos la inversa de *A* para $m=1$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz *X*.

$$A^{-1}XA+I=B\Rightarrow A^{-1}XA=B-I\Rightarrow A\cdot A^{-1}XA\cdot A^{-1}=A\cdot(B-I)\cdot A^{-1}\Rightarrow X=A\cdot(B-I)\cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz *X*.

$$X=A\cdot(B-I)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Considera $A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de *A* según los valores de *k*.

b) Para $k=1$, calcula el determinante de $2\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de *A*.

MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = 2k^3+3k^2+k=0 \Rightarrow k=0\ ;\ k=-1\ ;\ k=-\frac{1}{2}$$

Calculamos el rango de la matriz para cada caso.

$$\text{Para } k=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

$$\text{Para } k=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

$$\text{Para } k=-\frac{1}{2} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

b) Calculamos el determinante que nos piden

Sabemos que: $|A^t|=|A|$; $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$; $|m\cdot A|=m^n|A|$ siendo *n* el orden de la matriz.

Por lo tanto:

$$\left|2\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^{2017}\right| = \left|(2\cdot A^t)\cdot(A^{-1})\cdot(A^t\cdot A^{-1})^{2016}\right| = 2^3\cdot|A|\cdot\frac{1}{|A|}\cdot\left(|A|\cdot\frac{1}{|A|}\right)^{2016}=8$$