PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2016

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned}(3\alpha-1)x+2y&=5-\alpha\\ \alpha x+\ \ y&=\ \ 2\\ 3\alpha x+3y&=\alpha+5\end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro α.
b) Resuélvelo para $\alpha=1$ y determina en dicho caso, si existe, alguna solución donde $x=4$.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz ampliada y lo igualamos a cero

$$|M|=\begin{vmatrix}3\alpha-1 & 2 & 5-\alpha\\ \alpha & 1 & 2\\ 3\alpha & 3 & \alpha+5\end{vmatrix}=\alpha^2-2\alpha+1=0\Rightarrow \alpha=1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Si $\alpha=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\\3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=1$

Si $\alpha=1\Rightarrow M=\begin{pmatrix}2&2&4\\1&1&2\\3&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=1$

	R(A)	R(M)	
$\alpha=1$	1	1	S. Compatible indeterminado
$\alpha\neq 1$	2	3	S. Incompatible

b) Resolvemos el sistema para $\alpha=1$:

$$\left.x+y=2\right\}\Rightarrow x=x\ ;\ y=2-x$$

Calculamos la solución para $x=4$: $x=4$; $y=-2$

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+\lambda y+z=\lambda \\ \lambda x+y+z=1 \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases}$

a) Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene infinitas soluciones
b) Resuelve el sistema para $\lambda=-2$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+3\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=1\ ;\ \lambda=-2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $\lambda=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1\ ;\ F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$

Para $\lambda=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1\ ;\ F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=1$

Para $\lambda=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_1\ ;\ F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda=-2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_1\ ;\ F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

	R(A)	R(M)	
$\lambda=1$	1	1	S. compatible indeterminado
$\lambda=-2$	2	2	S. compatible indeterminado
$\lambda\neq 1\ y\ -2$	3	3	S. compatible determinado

Luego, para $\lambda=1$ y $\lambda=-2$ el sistema tiene infinitas soluciones

b) Para $\lambda=-2$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{matrix} x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz $A-\lambda I$, siendo *I* la matriz identidad de orden tres.

b) Resuelve el sistema dado por $(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (A − 2I)

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A-\lambda I$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+7\lambda^2-16\lambda+12=0\Rightarrow \lambda=2\ ;\ \lambda=3$$

Para $\lambda=2\Rightarrow A-2I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+2F_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A-2I)=2$

Para $\lambda=3\Rightarrow A-3I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+F_2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A-3I)=2$

Si $\lambda\neq 2\ y\ 3\Rightarrow Rango(A-\lambda I)=3$.

b) Resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ -y-z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases}\Rightarrow x=t\ ;\ y=0\ ;\ z=0$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{aligned} x+(\lambda+1)y+z&=1\\ \lambda y+z&=0\\ \lambda y+\lambda z&=\lambda\end{aligned}\right.$

a) Discútelo según los valores de λ. b) Resuélvelo para $\lambda=0$. c) Determina, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que $z=2$. Calcula esa solución.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \lambda+1 & 1\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\ ;\ \lambda=1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $\lambda=0\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda=0\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=2$

Para $\lambda=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-F_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda=1\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-F_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=3$

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda=0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\lambda=1$	2	3	Sistema incompatible
$\lambda\neq 0\ y\ 1$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $\lambda=0$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{aligned}x+y+z&=1\\ z&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}x&=1-t\\ y&=t\\ z&=0\end{aligned}\right.$

c) Si $z=2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned}x+(\lambda+1)y+2&=1\\ \lambda y+2&=0\\ \lambda y+2\lambda&=\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x+(\lambda+1)y&=-1\\ \lambda y&=-2\\ \lambda y&=-\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lambda=2\ ;\ x=2\ ;\ y=-1\ ;\ z=2$$

Considera el sistema de ecuaciones dado en forma matricial mediante $AX = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1-m \\ m \\ 7 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*.

b) Resuelve el sistema para $m = -3$ y determina en dicho caso, si existe, una solución en la que $x = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 + 3m = 0 \Rightarrow m = 0 \; ; \; m = -3$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$

Para $m = -3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = -3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m = -3$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m = 0$	2	3	Sistema incompatible
$m \neq 0 \; y \; -3$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m = -3$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left. \begin{array}{r} x + y + 2z = 4 \\ -x - y - 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$

Si $x = 2$, la solución del sistema sería: $x = 2$; $y = 4$; $z = -1$

De los datos recabados en un informe sobre los beneficios obtenidos por las empresas *A*, *B* y *C* el pasado año, se desprende lo siguiente:

- **la empresa *B* obtiene el mismo beneficio que las empresas *A* y *C* juntas.**
- **el beneficio de la empresa *A* es la media aritmética del de las otras dos.**

a) Determina si se puede hallar el beneficio de cada empresa sabiendo que *A* ha obtenido el doble que *C*.

b) Calcula el beneficio de cada empresa sabiendo que entre las tres han obtenido 210 millones de euros.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema de ecuaciones con los datos del problema

$$\left.\begin{array}{l} B=A+C \\ A=\dfrac{B+C}{2} \\ A=2C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A-B+C=0 \\ 2A-B-C=0 \\ A-2C=0 \end{array}\right\}.$$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A-B+C=0 \\ B-3C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=2C \\ B=3C \\ C=C \end{array}\right.$$

No se puede hallar el beneficio de cada empresa ya que es un sistema compatible indeterminado.

b) Planteamos el nuevo sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} A-B+C=0 \\ 2A-B-C=0 \\ A+B+C=210 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 210 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 210 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A-B+C=0 \\ B-3C=0 \\ 2B=210 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=70 \\ B=105 \\ C=35 \end{array}\right.$$

Luego: $A=70$ *millones de* € ; $B=105$ *millones de* € ; $C=35$ *millones de* €

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{aligned} 2x-4y+2z &= 1 \\ 5x-11y+9z &= \lambda \\ x-3y+5z &= 2 \end{aligned}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores de λ
b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 4$.
MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -110-36-30+22+100+54=0$$

Como vale cero, el rango de A es 2. Calculamos el determinante de la ampliada y lo igualamos a cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -11 & \lambda \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -44-4\lambda-15+11+40+6\lambda = 2\lambda-8=0 \Rightarrow \lambda = 4$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda = 4$	2	2	S. compatible indeterminado
$\lambda \neq 4$	2	3	S. Incompatible

b) Para $\lambda = 4$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} 2x-4y+2z &= 1 \\ 5x-11y+9z &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-4y &= 1-2z \\ 5x-11y &= 4-9z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-2z & -4 \\ 4-9z & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}} = \dfrac{5-14z}{-2} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1-2z \\ 5 & 4-9z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}} = \dfrac{3-8z}{-2} \\ z = z \end{cases}$$