S E L E C T I V I D A D

MATEMÁTICAS II

2º BACHILLERATO

L.O.G.S.E.

2003 - 2014

FRANCISCO FERNÁNDEZ MORALES

Catedrático de Matemáticas

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 36 DE EXAMEN

Opción A

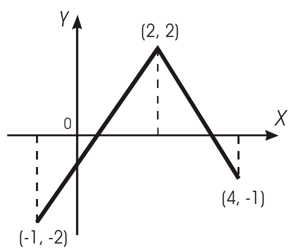
EJERCICIO 1. Sea $\mathrm{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x y sea $f:D\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\frac{1}{x(Ln(x))^2}.$$

(a) [1 PUNTO]. Determina el conjunto D sabiendo que está formado por todos los puntos $x\in\mathbb{R}$ para los que existe *f(x).*

(b) [1´5 PUNTOS]. Usa el cambio de variable $t=\mathrm{Ln}(x)$ para calcular una primitiva de f.

EJERCICIO 2. Sea $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$ una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura.



(a) [1´5 PUNTOS]. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f y determina los valores donde alcanza sus extremos relativos.

(b) [1 PUNTO]. Estudia la concavidad y la convexidad de f. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f?

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. En el sector de las aceitunas sin hueso, tres empresas A, B y C, se encuentran en competencia. Calcula el precio por unidad dado por cada empresa sabiendo que verifican las siguientes relaciones:

- El precio de la empresa A es 0´6 euros menos que la media de los precios establecidos por B y C.
- El precio dado por B es la media de los precios de A y C.
- El precio de la empresa C es igual a 2 euros mas 2/5 del precio dado por A mas 1/3 del precio dado por B.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(1,-3,2)$, $B(1,1,2)$ y $C(1,1,-1)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. ¿Pueden ser *A*, *B* y *C* vértices consecutivos de un rectángulo? Justifica la respuesta.
(b) [1´25 PUNTOS]. Halla si es posible, las coordenadas de un punto *D* para que el paralelogramo *ABCD* sea un rectángulo?

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Determina el valor de las constantes *c* y *d* sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y = 3x + 4$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula
$$\int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx.$$

EJERCICIO 3. Considera las matrices
$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}$$
(a) [1 PUNTO]. Calcula la matriz inversa de *A*.
(b) [1 PUNTO]. Calcula A^{127} y A^{128}.
(c) [0´5 PUNTOS]. Determina *x* e *y* tal que $AB = BA$.

EJERCICIO 4. Considera los puntos
$$A(1, 1, 1),\quad B(2, 2, 2),\quad C(1, 1, 0)\ \text{ y }\ D(1, 0, 0).$$
(a) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos *A* y *B* y no corta a la recta determinada por *C* y *D*.
(b) [1´25 PUNTOS]. Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) El conjunto D, que es el dominio de la función *f(x)*, estará formado por todos aquellos puntos $x \in \mathbb{R}$, tales que cumplan las siguientes condiciones:

$$x\,(\text{Ln}(x))^2 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x > 0$$

es decir, sólo pueden pertenecer al dominio los valores que no anulen al denominador y los que hagan que el argumento, *x*, del logaritmo neperiano sea mayor que cero.

Calculemos los valores que anulen al denominador, porque son, los que en principio, no pertenecerán al dominio.

$$x\ (\text{Ln}\,(x))^2 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (\text{Ln}\,(x))^2 = 0 \ \Rightarrow \ \text{Ln}\,(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 1 \end{cases}$$

luego el punto 0 y 1 no peretenecerán al dominio, y como los valores que debe tomar *x* son mayores que cero, el conjunto D estará formado por los intervalos:

$$\text{D} = (0,\,1) \cup (1,\,+\infty)$$

(b) Calculemos mediante el método de sustitución una primitiva de *f*.

$$\int \frac{1}{x\,(Ln(x))^2}\,dx$$

Hagamos el cambio de variable siguiente: $t = \text{Ln}\,(x)$

diferenciando la expresión anterior obtenemos: $dt = \dfrac{1}{x}\,dx$

la integral quedará así:

$$\int \frac{1}{x\,(Ln(x))^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{-1}{t} = \frac{-1}{\text{Ln}(x)} + k$$

hemos obtenido una primitiva de *f*, y donde en el último paso hemos deshecho el cambio inicial.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Sabemos que la función f es derivable y que por tanto es continua. De la observación de la gráfica de su función derivada no podemos obtener con total precisión los puntos donde ésta se anula, pero podemos calcularlos obteniendo la expresión matemática de dicha derivada ya que los dos trozos que la definen son rectas.

Ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1,\,-2)$ y $(2,\,2)$:

$$\frac{x-2}{2-(-1)} = \frac{y-2}{2-(-2)} \ \Rightarrow \ \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} \ \Rightarrow \ 4x - 8 = 3y - 6 \ \Rightarrow \ y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

Ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4,\,-1)$ y $(2,\,2)$:

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-2}{-1-2} \ \Rightarrow \ \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-3} \ \Rightarrow \ -3x + 6 = 2y - 4 \ \Rightarrow \ y = -\frac{3}{2}x + 5$$

luego la expresión matemática de la función derivada es:

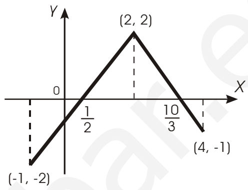
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}x - \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 2 \\[2mm] -\dfrac{3}{2}x + 5 & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Calculemos los puntos de corte de la función derivada con el eje de abscisas, es decir, resolvamos el sistema formado por cada trozo de recta con la ecuación de dicho eje, y=0:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{2}{3} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{3}{2}x + 5 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -\frac{3}{2}x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{10}{3}, 0\right)$$

Llevando estos dos puntos sobre la gráfica de la función derivada estaremos en condiciones de deducir lo siguiente:



* En el intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right)$, *f´(x)* es negativa $\Rightarrow$ *f(x)* es decreciente en $\left[-1, \frac{1}{2}\right)$

* En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)$, *f´(x)* es positiva $\Rightarrow$ *f(x)* es creciente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)$

* En el intervalo $\left(\frac{10}{3}, 4\right]$, *f´(x)* es negativa $\Rightarrow$ *f(x)* es decreciente en $\left(\frac{10}{3}, 4\right]$

En los puntos $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{10}{3}$, *f´(x)* = 0, por lo que teniendo en cuenta el estudio que se ha hecho de la monotonía así como de la continuidad, tendremos:

* En el punto $x = \frac{1}{2}$ la función *f(x)* pasa de decreciente a creciente por lo que presenta un mínimo relativo.

* En el punto $x = \frac{10}{3}$ la función *f(x)* pasa de creciente a decreciente por lo que presenta un máximo relativo.

(b) Estudiemos la curvatura de *f (x)*. Si observamos la gráfica de la función primera derivada, *f´(x)*, podemos deducir lo siguiente:

* En el intervalo [-1, 2) la función *f´(x)* es creciente lo que implica que su primera derivada, es decir, *f´´(x)* es positiva, > 0, luego *f(x)* es convexa en el intervalo [-1, 2).

* En el intervalo (2, 4] la función *f´(x)* es decreciente lo que implica que su primera derivada, es decir, *f´´(x)* es negativa, < 0, luego *f(x)* es cóncava en el intervalo (2, 4].

También podemos hacer el estudio sobre la expresión matemática de la segunda derivada. Para ello, a partir de la expresión matemática de la función primera derivada que es una función continua, según se deduce de su gráfica, y que ya habíamos calculado

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}x - \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad -1 \le x \le 2 \\ -\dfrac{3}{2}x + 5 & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

obtendremos la expresión de la segunda derivada.

* Para los valores de x comprendidos entre -1 y 2, $-1 \le x < 2$, se trata del trozo de una función polinómica que es derivable en todo $\mathbb{R}$, luego *f´(x)* lo es en dicho intervalo siendo la derivada, $\frac{4}{3}$.

* Para los valores de x comprendidos entre 2 y 4, $2 < x \le 4$, se trata del trozo de otra función polinómica, por lo que la derivada en este intervalo es $-\frac{3}{2}$.

Luego una primera aproximación de la segunda derivada es:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ -\frac{3}{2} & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

El problema está en el punto 2. Una función es derivable en un punto si siendo continua en él, en nuestro caso lo es, las derivadas laterales coinciden. Calculemos dichas derivadas:

$$f'(2^-) = \lim_{\substack{x \to 2^- \\ x<2}} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$f'(2^+) = \lim_{\substack{x \to 2^+ \\ x>2}} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

como las derivadas laterales no coinciden, la función *f ´(x)* no es derivable en 2, luego la derivada segunda de *f(x)* es:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ -\frac{3}{2} & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Estudiemos la curvatura de la gráfica de *f(x)*.

* En el intervalo $[-1, 2)$, $f''(x) = \frac{4}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es convexa en $[-1, 2)$.

* En el intervalo $(2, 4]$, $f''(x) = -\frac{3}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es cóncava en $(2, 4]$.

Estudiemos, por último, los puntos de inflexión.

Un punto de inflexión es un punto donde la gráfica de la función *f(x)* cambia de curvatura, en nuestro caso, el punto es el 2, ya que en él la función cambia de convexa a cóncava, aunque en dicho punto la función no admite derivada segunda y por tanto no puede anularse dicha derivada, no obstante, la función *f(x)* presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Llamemos x al precio por unidad de la empresa A, y al de la empresa B y z al de la C.

Teniendo en cuenta las relaciones que satisfacen, establecemos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{y+z}{2} - 0'6 \\ y &= \frac{x+z}{2} \\ z &= 2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x &= y + z - 1'2 \\ 2y &= x + z \\ 15z &= 30 + 6x + 5y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - y - z &= -\frac{12}{10} \\ x + z - 2y &= 0 \\ 6x + 5y - 15z &= -30 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 10x - 5y - 5z &= -6 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 6x + 5y - 15z &= -30 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos este sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -5 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & -15 & -30 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 2ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & -5 & -6 \\ 6 & 5 & -15 & -30 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 10 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 6 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & -6 \\ 0 & 17 & -21 & -30 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & 17 & -21 & -30 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 15 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 5 · [3ªf.] - 17 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -20 & -116 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por -4.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 29 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 5 · [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & 0 & -29 \\ 0 & 5 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 5 & 29 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 5 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 5 & 29 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$5x = 25 \quad ; \quad 5y = 27 \quad ; \quad 5z = 29$$

es decir:

$$x = 5 \quad ; \quad y = \frac{27}{5} \quad ; \quad z = \frac{29}{5}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Los puntos *A*, *B* y *C* serán vértices consecutivos de un rectángulo si se verifica que el vector que determinan *A* y *B*, $\overrightarrow{AB}$, y el vector que forman *B* y *C*, $\overrightarrow{BC}$, son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es cero:

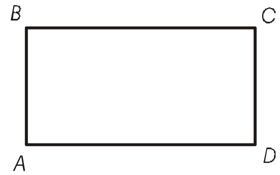
$$\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ 2) - (1, -3, 2) = (0,\ 4,\ 0) \qquad ; \qquad \overrightarrow{BC} = (1,\ 1, -1) - (1, 1, 2) = (0,\ 0,\ -3)$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 4, 0) \bullet (0, 0, -3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

luego los puntos *A*, *B* y *C* sí pueden ser vértices consecutivos de un rectángulo.

(b) Para calcular un punto *D* de manera que forme con los puntos *A*, *B* y *C* un rectángulo procederemos de la siguiente forma.

Calculemos la ecuación, en paramétricas, de la recta que pasa por A y es paralela al lado BC, dicha recta, que contiene al lado AD, tiene como vector de dirección al vector $\overrightarrow{BC}$:



$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Calculemos ahora la recta que pasa por C y es paralela al lado AB, recta que contendrá al lado CD y que tendrá como vector de dirección al vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

El punto D lo obtendremos a partir de la intersección de ambas rectas, para ello y en primer lugar, igualamos las x, las y y las z:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -3 = 1 + 4\lambda \\ 2 - 3t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Sustituyamos uno de estos valores, por ejemplo, el t, en la correspondiente recta, el punto D tendrá de coordenadas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 - 3 \times 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow D(1, -3, -1)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Sabemos que la función polinómica $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$ es una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Su primera, segunda y tercera derivada son:

$f'(x) = 3x^2 + 6x + c$

$f''(x) = 6x + 6$

$f'''(x) = 6$

El punto de inflexión de la función, al tener ésta derivada segunda, coincidirá con el valor que anule a la segunda derivada y no anule a la tercera, es decir:

$6x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \qquad ; \qquad f'''(-1) = 6 \neq 0$

luego en el punto $x = -1$ la función tiene un punto de inflexión.

Al tener como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y = 3x + 4$, significa que la primera derivada en el punto -1 es 3, es decir, la pendiente de la recta tangente:

$f'(x) = 3x^2 + 6x + c \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + c \quad \Rightarrow \quad 3 = 3 - 6 + c \quad \Rightarrow \quad c = 6.$

Hemos obtenido el valor de c, calculemos ahora el valor de d.

La ordenada del punto de inflexión $x = -1$ de la función, coincidirá con la ordenada de la recta tangente en dicho punto de inflexión, o sea:

$y = 3x + 4 \quad \Rightarrow \quad y = 3\cdot(-1) + 4 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = 1 \quad \Rightarrow$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + c(-1) + d \quad \Rightarrow$

$1 = -1 + 3 - c + d \quad \Rightarrow \quad 1 = 2 - 6 + d \quad \Rightarrow \quad d = 5.$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si observamos la integral racional vemos que se trata de una integral racional impropia debido a que el grado del polinomio del numerador es de grado mayor que el del denominador.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & -2x & +3 & x^2-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +x & & x+2 \\ \hline & 2x^2 & -x & +3 & \\ & -2x^2 & & +2 & \\ \cline{2-4} & & -x & +5 & \end{array}$$

La integral será:

$$\int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{-x+5}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{-x+5}{x^2-1}\,dx = \qquad [1]$$

Descompongamos el integrando de la integral racional propia en una suma de fracciones elementales, sabiendo que las raíces del denominador son 1 y -1:

$$\frac{-x+5}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{-x+5}{x^2-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \quad \Rightarrow$$

$$-x+5 = A(x-1) + B(x+1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = 2 \\ x = -1 \quad \Rightarrow \quad 6 = -2A \quad \Rightarrow \quad A = -3 \end{cases}$$

Continuando desde [1]

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{A}{x+1}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{-3}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - 3\,\mathrm{Ln}\,|x+1| + 2\,\mathrm{Ln}\,|x-1| + k$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para calcular la matriz inversa de una matriz *A*, lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz *A*, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, cuando se consiga esto, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}. En el caso de no ser posible que aparezca dicha matriz unidad a la izquierda, por ejemplo, que apareciese una fila de ceros, entonces la matriz *A* no tendría inversa.

Calculemos la inversa de *A*.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª con el fin de buscar un pivote distinto de cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz *A* tiene inversa, siendo la matriz inversa, A^{-1}, la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puede observarse que la matriz *A* y su inversa son iguales, es decir, $A = A^{-1}$.

(b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calculemos A^{127} y A^{128}.

$A^2 = A \cdot A = A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (I es la matriz unidad de orden 3)

$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

...

Observamos que si la matriz *A* está elevada a un número par el resultado es la matriz unidad I, y si es a un número impar el resultado es *A*, por tanto,

$A^{127} = A$

$A^{128} = I$

(c) Determinemos *x* e *y* tal que $AB = BA$.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

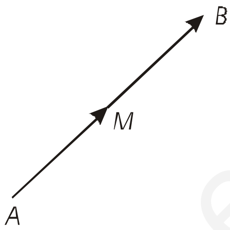
SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) El plano que nos piden es un plano que al pasar por los puntos *A* y *B*, tiene al vector $\vec{AB}$ como uno de sus vectores de dirección. Por otro lado, si este plano no corta a la recta determinada por *C* y *D*, significa que el plano es paralelo a la recta *CD*, y el vector $\vec{CD}$ será el otro vector de dirección del plano. Calculemos estos vectores de dirección:

$$\vec{AB} = (2,2,2) - (1,1,1) = (1,1,1) \quad ; \quad \vec{CD} = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0)$$

Luego la ecuación del plano que pasa, por ejemplo, por el punto *A* y tiene como vectores de dirección los anteriormente calculados es:

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda-\mu \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$



(b) Calculemos los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*.
Sea M el punto medio del segmento *AB*, se cumplirá que:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \quad \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (a, b, c)-(1,1,1) = (a-1,\ b-1,\ c-1) \\ \overrightarrow{MB} = (2,\ 2,\ 2)-(a,b,c) = (2-a,\ 2-b,\ 2-c) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1 = 2-a & \Rightarrow & a = \dfrac{3}{2} \\ b-1 = 2-b & \Rightarrow & b = \dfrac{3}{2} \\ c-1 = 2-c & \Rightarrow & c = \dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

Análogamente se cumplirá para el segmento *CD*, si *N* es el punto medio del mismo, que:

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND}$$

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND} \quad \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CN} = (m, n, p)-(1,1,0) = (m-1,\ n-1,\ p) \\ \overrightarrow{ND} = (1,\ 0,\ 0)-(m,n,p) = (1-m,\ -n,\ -p) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-1 = 1-m & \Rightarrow & m = 1 \\ n-1 = -n & \Rightarrow & n = \dfrac{1}{2} \\ p = -p & \Rightarrow & p = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

El vector $\overrightarrow{MN}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{MN} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(1-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2}\right)$$

La ecuación de la recta que pasa por estos puntos medios, *M* y *N*, y cuyo vector de dirección es el anteriormente calculado, es:

$$\begin{cases} x = 1-\dfrac{1}{2}\lambda \\ y = \dfrac{1}{2}-\lambda \\ z = -\dfrac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 37 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. **(a)** [1´5 PUNTOS]. Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ y que su valor mínimo es -12.
(b) [1 PUNTO]. Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de inflexión de su gráfica.

EJERCICIO 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x\,|\,x - 4\,|$.
(a) [0´75 PUNTOS]. Esboza la gráfica de f.
(b) [0´75 PUNTOS]. Estudia su derivabilidad en $x = 4$.
(c) [1 PUNTO]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Considera los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(1, 3, 0)$ y $C(0, 0, 1)$. Halla el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Sean:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

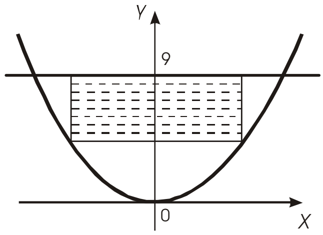
Determina α, si es posible, para que los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial)

$$AX = b, \qquad BX = c$$

tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Considera el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{3}x^2$ y la recta $y=9$.



De entre los rectángulos situados como el de la figura, determina el que tiene área máxima.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sea $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x. Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y=1$ e $y=\text{Ln}(x)$. Calcula su área.

EJERCICIO 3. Sea π el plano de ecuación $3x - y + 2z - 4 = 0$.

(a) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto $P(1, -2, 2)$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano π_2 perpendicular a ambos que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x-y+z = 1 \\ 2x+y-4z = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 4. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) [1 PUNTO]. Halla los valores de a para los que la matriz $3A$ tiene inversa.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula, si es posible, la inversa de la matriz A^2 para $a=0$.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función $f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es derivable, luego es continua en $\mathbb{R}$. Integrando su función derivada obtendremos la función f.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx = \int \left(2x^3-6x^2\right)dx = 2\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+C = \frac{x^4}{2}-2x^3+C$$

Como el valor mínimo es -12, tendremos que calcular el punto donde la función alcanza el mínimo absoluto. Estudiemos la monotonía y obtengamos los mínimos relativos de *f*.

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada:

$$2x^3-6x^2=0 \;\Rightarrow\; 2x^2(x-3)=0 \;\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3 \end{cases}$$

sustituyamos estos valores que anulan a la primera derivada en la segunda:

$$f''(x)=6x^2-12x \;\Rightarrow \begin{cases} f''(0)=0 \\ f''(3)=6\times 3^2-12\times 3=18>0 \end{cases} \Rightarrow \text{ mínimo relativo en } x=3.$$

El valor, 0, que anula a la segunda derivada sustituyámoslo en la tercera:

$$f'''(x)=12x-12 \;\Rightarrow\; f'''(0)=12\times 0-12=-12\neq 0 \;\Rightarrow\; \text{punto de inflexión en } x=0.$$

Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

Con los dos valores, 0 y 3, que anulan a la primera derivada, los ordenamos y construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -1, 1 y 4 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-1)=2(-1)^3-6(-1)^2=-8<0 \;\Rightarrow & \text{decreciente en } (-\infty, 0) \\ f'(1)=2\times 1^3-6\times 1^2=-4<0 \;\Rightarrow & \text{decreciente en } (0, 3) \\ f'(4)=2\times 4^3-6\times 4^2=32>0 \;\Rightarrow & \text{creciente en } (3, +\infty) \end{cases}$$

A la vista del estudio realizado, en el punto 3 que era donde había un mínimo relativo también es donde se da el mínimo absoluto. Por tanto, como el valor mínimo es -12, significa que en el punto $x=3$ la función alcanza el valor -12:

$$f(x)=\frac{x^4}{2}-2x^3+C \;\Rightarrow\; f(3)=\frac{3^4}{2}-2\times 3^3+C \;\Rightarrow\; -12=\frac{3^4}{2}-2\times 3^3+C \;\Rightarrow$$

$$-24=81-108+2C \;\Rightarrow\; 2C=3 \;\Rightarrow\; C=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{x^4}{2}-2x^3+\frac{3}{2}$$

(b) Los puntos de inflexión se obtienen, en las funciones que tienen derivada segunda, calculando los valores que anulan a la segunda derivada y no anulan a la tercera.

$$f''(x)=6x^2-12x \;\Rightarrow\; 6x^2-12x=0 \;\Rightarrow\; 6x(x-2)=0 \;\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \;\Rightarrow\; x=2 \end{cases}$$

Sustituyamos estos valores que hemos obtenido en la tercera derivada:

$$f'''(x)=12x-12 \;\Rightarrow \begin{cases} f'''(0)=12\times 0-12=-12\neq 0 \Rightarrow & \text{punto de inflexión en } x=0 \\ f'''(2)=12\times 2-12=12\neq 0 \;\Rightarrow & \text{punto de inflexión en } x=2 \end{cases}$$

Las coordenadas de estos puntos de inflexión son:

$$f(x)=\frac{x^4}{2}-2x^3+\frac{3}{2} \;\Rightarrow \begin{cases} f(0)=\frac{0^4}{2}-2\times 0^3+\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \;\Rightarrow & \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ f(2)=\frac{2^4}{2}-2\times 2^3+\frac{3}{2}=-\frac{13}{2} \;\Rightarrow & \left(2, -\frac{13}{2}\right) \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto x_0 es:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

Calculemos el valor de la primera derivada en cada uno de los puntos de inflexión:

$$f'(x)=2x^3-6x^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=2\times 0^3-6\times 0^2=0 \\ f'(2)=2\times 2^3-6\times 2^2=-8 \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto de inflexión $x = 0$ es:

$$y-\frac{3}{2}=0\times(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3}{2}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto de inflexión $x = 2$ es:

$$y+\frac{13}{2}=-8\times(x-2) \quad \Rightarrow \quad y+\frac{13}{2}=-8x+16 \quad \Rightarrow \quad y=-8x+\frac{19}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Expresemos la función $f(x)$ como una función a trozos.

$$f(x)=x|x-4|=\begin{cases} x\times[-(x-4)] & \text{si} \quad x-4\le 0 \\ x(x-4) & \text{si} \quad x-4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2+4x & \text{si} \quad x\le 4 \\ x^2-4x & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$$

Representemos la parábola $y = -x^2 + 4x$ correspondiente al primer trozo de la función.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$.

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

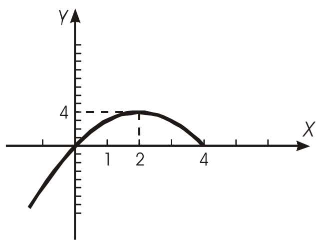
$$y=0 \Rightarrow -x^2+4x=0 \Rightarrow x(-x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -x+4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ y } (4,0).$$

3.- Coordenadas del vértice V:

$$x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=-\frac{4}{2\times(-1)}=2 \Rightarrow$$

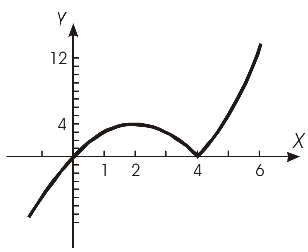
$$y=-2^2+4\times 2=4 \Rightarrow V(2,4)$$

La gráfica de la parábola para valores de $x \le 4$ está situada al lado.



Representemos la parábola $y = x^2 - 4x$ correspondiente al segundo trozo de la función.

Tendremos en cuenta que es casi la misma que la anterior, ya que corta a los ejes en los mismos puntos, el vértice es el punto (2, -4), y al ser el coeficiente del término en x^2 positivo, la parábola es convexa. La gráfica de este nuevo trozo, correspondiente a los valores de $x > 4$ es la situada al lado, y donde también se encuentra representada la que ya teníamos.



(b) Para estudiar la derivabilidad de la función f analicemos antes la continuidad, ya que si una función no es continua en un punto no será derivable en él.

- El trozo de función, $-x^2 + 4x$, definido para valores de x menores que 4, $x < 4$, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función f es continua para $x < 4$.

- El trozo de función, $x^2 - 4x$, definido para valores de x mayores que 4, $x > 4$, es continua por ser otra función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función f es continua para $x > 4$.

- El problema de la continuidad está en el punto 4, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4^- \\ x<4}} \left(-x^2 + 4x\right) = -4^2 + 4\times 4 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4^+ \\ x>4}} \left(x^2 - 4x\right) = 4^2 - 4\times 4 = 0 \\ f(4) = -4^2 + 4\times 4 = 0 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4) = 0$$

Luego $f(x)$ será continua en el punto 4.

En definitiva, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si siendo continua en dicho punto las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- Para valores de $x < 4$, f es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $-2x + 4$.

- Para valores de $x > 4$, f es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $2x - 4$.

Por tanto, una primera aproximación de la función derivada en los puntos donde ya sabemos que es derivable y cuál es su derivada, será:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+4 & \text{si} \quad x<4 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x>4 \end{cases} \qquad [1]$$

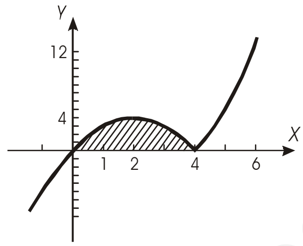
- El problema está en el punto 4. Será derivable en dicho punto si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en él.

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 4^- \\ x<4}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (-2x+4) = -8+4 = -4 \\ f'(4^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 4^+ \\ x>4}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} (2x-4) = 8-4 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -4 \neq 4 \quad \Rightarrow \\ f'(4^-) \neq f'(4^+) \end{array}\right.$$

luego la función $f(x)$ no es derivable en $x = 4$.

La función derivada coincidirá con la que nos aproximamos inicialmente en [1].

(c) El recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas se corresponde con la zona rayada en la gráfica.



El área de dicho recinto es:

$$\text{Área} = \left| \int_0^4 \left(-x^2+4x\right)dx \right| = \left| \left[\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right)\right]_0^4 \right| =$$

$$= \left| -\frac{4^3}{3}+\frac{4\times 4^2}{2}-0 \right| = \left| -\frac{64}{3}+32 \right| = \frac{32}{3}$$

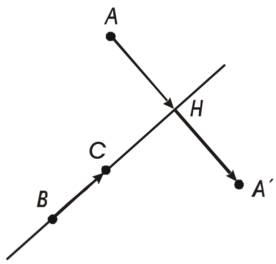
SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Calculemos el vector de dirección de la recta que pasa por los puntos B y C.

$$\overrightarrow{BC}=(0,0,1)-(1,3,0)=(-1,\,-3,\,1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por dichos puntos es:

$$\overline{BC}\equiv\begin{cases} x\;=\;-\lambda \\ y\;=\;-3\lambda \\ z\;=\;1+\lambda \end{cases}$$



Para calcular el simétrico, $A´$, del punto A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C, elegiremos un punto genérico de la recta, por ejemplo, $H = (-\lambda,\ -3\lambda,\ 1+\lambda)$, que satisfaga las condiciones siguientes:

El vector $\overrightarrow{AH}$ es perpendicular al vector de dirección de r, es decir, al vector $\overrightarrow{BC}$, y además $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HA'}$.

$$\overrightarrow{AH}=(-\lambda,-3\lambda,1+\lambda)-(1,-1,2)=(-\lambda-1,\,-3\lambda+1,\,\lambda-1)$$

$$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\;\Rightarrow\;\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{BC}=0\;\Rightarrow\;(-\lambda-1,\,-3\lambda+1,\,\lambda-1)\bullet(-1,-3,1)=0\;\Rightarrow$$

$$\lambda+1+9\lambda-3+\lambda-1=0\;\Rightarrow\;11\lambda=3\;\Rightarrow\;\lambda=\frac{3}{11}$$

Utilicemos este valor para obtener las coordenadas del punto H y las del vector $\overrightarrow{AH}$.

$$H=(-\lambda,\,-3\lambda,\,1+\lambda)=\left(-\frac{3}{11},\,-3\bullet\frac{3}{11},\,1+\frac{3}{11}\right)=\left(-\frac{3}{11},\,-\frac{9}{11},\,\frac{14}{11}\right)$$

$$\overrightarrow{AH}=\left(-\lambda-1,\,-3\lambda+1,\,\lambda-1\right)=\left(-\frac{3}{11}-1,\,-3\times\frac{3}{11}+1,\,\frac{3}{11}-1\right)=\left(-\frac{14}{11},\,\frac{2}{11},\,-\frac{8}{11}\right)$$

Supongamos que el simétrico del punto A respecto de r, el $A´$, tenga de coordenadas, por ejemplo, $A´=(a,\,b,\,c)$, luego las coordenadas del vector $\overrightarrow{HA'}$ son:

$$\overrightarrow{HA'}=(a,\,b,\,c)-\left(-\frac{3}{11},\,-\frac{9}{11},\,\frac{14}{11}\right)=\left(a+\frac{3}{11},\,b+\frac{9}{11},\,c-\frac{14}{11}\right)$$

Igualemos los vectores $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HA'}$.

$$\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{AH} \;\Rightarrow\; \left(a+\frac{3}{11},\, b+\frac{9}{11},\, c-\frac{14}{11}\right)=\left(-\frac{14}{11},\, \frac{2}{11},\, -\frac{8}{11}\right) \;\Rightarrow \begin{cases} a+\frac{3}{11}=-\frac{14}{11} \\ b+\frac{9}{11}=\frac{2}{11} \\ c-\frac{14}{11}=-\frac{8}{11}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{17}{11} \\ b=-\frac{7}{11} \\ c=\frac{6}{11}\end{cases}$$

Las coordenadas del simétrico del punto A son:

$$A'\left(-\frac{17}{11},\, -\frac{7}{11},\, \frac{6}{11}\right)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Discutamos el primero de los sistemas, $AX = b$ según los valores de α.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lo haremos mediante el método de reducción de Gauss. Expresemos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1-\alpha & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Pasemos la 1ª fila a la 3ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1-\alpha & 3 & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + α · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 7-\alpha & 7 & -7 \\ 0 & 1+3\alpha & 1+2\alpha & -1-5\alpha \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 7-\alpha & -7 \\ 0 & 1+2\alpha & 1+3\alpha & -1-5\alpha \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 7 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 7 · [3ªf.] - (1+2α) · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 7-\alpha & -7 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2+8\alpha & -21\alpha \end{array}\right) \end{array}$$

La matriz está triangulada inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha^2 + 8\alpha = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha(\alpha+4) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+4 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha=-4 \end{cases}$

** Si α = 0, la última ecuación sería $0 = 0$ ⇒ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, o sea, con infinitas soluciones.

** Si α = -4, la última ecuación sería $0 = -21\cdot(-4)$ ⇒ $0 = 84$ ⇒ se trata de una ecuación absurda, por lo que el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -4 \Rightarrow$ para cualquier valor de α distinto de 0 y de -4, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, tendríamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el sistema es un sistema compatible determinado, con solución única.

Discutamos el segundo de los sistemas, $BX = c$ según los valores de α.

$$\begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo haremos mediante el método de reducción de Gauss. Expresemos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha-1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pasemos la 1ª fila a la 3ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - (α-1) · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 1-2\alpha & -5\alpha+3 \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1-2\alpha & -5\alpha+3 \\ 0 & \alpha-1 & 1-2\alpha & -5\alpha+3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (α-1) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1-2\alpha & -5\alpha+3 \\ 0 & 0 & -2\alpha^2+\alpha & -5\alpha^2+3\alpha \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -2\alpha^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha(-2\alpha+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -2\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

** Si $\alpha = 0$, la última ecuación sería $0 = 0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, o sea, con infinitas soluciones.

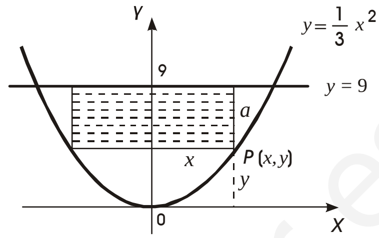
** Si $\alpha = \frac{1}{2}$, la última ecuación sería $0 = -5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 0 = \frac{1}{4} \Rightarrow$ se trata de una ecuación absurda, por lo que el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ y $\alpha \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ para cualquier valor de α distinto de 0 y de $\frac{1}{2}$, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, tendríamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el sistema es un sistema compatible determinado, con solución única.

En conclusión, los dos sistemas tienen infinitas soluciones para α = 0.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Elijamos un punto cualquiera $P(x, y)$ de la curva.

Teniendo en cuenta la gráfica adjunta, construyamos la función área de la mitad del rectángulo.

$$A(x) = x \times a$$

Es evidente que se satisface que $a = 9 - y$, por lo que la función anterior quedará así:

$$A(x) = x(9 - y)$$

Pero como el punto P pertenece a la curva, su ordenada y verificará la ecuación de la misma, por lo que:

$$A(x) = x\left(9 - \frac{1}{3}x^2\right) \quad \Rightarrow \quad A(x) = 9x - \frac{1}{3}x^3$$

Esta función es una función polinómica, continua y derivable en todo su dominio. Obtengamos su dominio, que será desde el cero hasta el punto en que curva y recta se cortan, calculemos éste punto de corte resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{3}x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 27 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{27} \\ x = -\sqrt{27} \end{cases}$$

luego el dominio es el intervalo $\left(0, \sqrt{27}\right)$.

Obtengamos la primera derivada para calcular los máximos relativos de esta función:

$$A'(x) = 9 - x^2$$

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada

$$9 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Estudiemos la monotonía en los intervalos $(0,3)$ y $\left(3, \sqrt{27}\right)$ de la función *A(x)*, que es continua y derivable, probando valores intermedios de los mismos, por ejemplo, 1 y 4 respectivamente en la primera derivada.

$A'(1) = 9 - 1^2 = 8 > 0 \quad \Rightarrow$ La función es creciente en el intervalo $(0,3)$.

$A'(4) = 9 - 4^2 = -7 < 0 \quad \Rightarrow$ La función es decreciente en el intervalo $\left(3, \sqrt{27}\right)$.

Podemos deducir que hay un máximo relativo en $x = 3$, y que a la vista del estudio realizado hasta ahora ese máximo relativo es también el máximo absoluto. La ordenada *y* de este máximo relativo es:

$$y = \frac{1}{3}x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3} \times 3^2 = 3$$

El rectángulo de área máxima será el que tenga de dimensiones:

base = $2x = 2 \times 3 = 6$

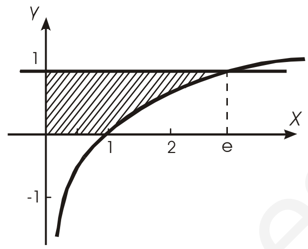
altura = $a = 9 - y = 9 - 3 = 6$

es decir, se trataría de un cuadrado.

Los puntos sobre la curva serían el P = (3, 3) y el Q = (-3, 3).

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

La función $y = \text{Ln}\,(x)$ es una función elemental cuyo dominio es el intervalo $(0, +\infty)$, su gráfica es una curva que corta al eje de abscisas en el punto (1, 0), presenta una asíntota vertical $x = 0$ por la derecha, y es una función estrictamente creciente.

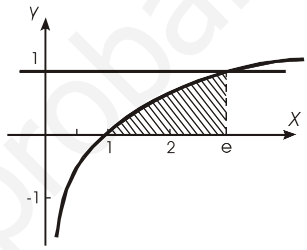


La gráfica de la función $y = 1$ es una recta paralela al eje de abscisas y situada a una distancia del mismo de 1.

Ambas gráficas se cortan en el punto $(e, 1)$.

El recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las dos funciones anteriores es el que se encuentra rayado en el gráfico anterior.

Para calcular el área del recinto anterior, calcularemos el área del rectángulo de base e y altura 1, es decir, $e \times 1 = e$, y a este área le restamos el área delimitada por la curva $y = \text{Ln}\,(x)$, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos 1 y e, o sea, el recinto rayado situado al lado. El área de este nuevo recinto es:



$$\text{Área} = \int_1^e \text{Ln}\,(x)\ dx$$

Para calcular una primitiva de esta integral definida, lo haremos mediante el método de integración por partes.

$$u = \text{Ln}\,(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

$$\text{Área } = \int_1^e \text{Ln}(x)\ dx = \Big[x\ \text{Ln}\,(x)\Big]_1^e - \int_1^e x\ \frac{1}{x}\,dx = \Big[x\ \text{Ln}\,(x)\Big]_1^e - \int_1^e dx = \Big[x\ \text{Ln}\,(x)\Big]_1^e - [x]_1^e =$$

$$= e\,\text{Ln}\,(e) - 1 \times \text{Ln}\,(1) - (e - 1) = e - 0 - e + 1 = 1$$

Finalmente, el área del recinto inicial que es el que me pide el ejercicio es:

$$\text{Área} = e - 1.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Si el plano $\pi_1 \equiv \text{A}x + \text{B}y + \text{C}z + \text{D} = 0$ es paralelo al plano $\pi \equiv 3x - y + 2z - 4 = 0$, los vectores normales (A, B, C) y (3, -1, 2) de cada uno de los planos deben ser paralelos y tener sus coordenadas proporcionales, es decir, podemos tomar el mismo vector normal. Por tanto:

$$\pi_1 \equiv \text{A}x + \text{B}y + \text{C}z + \text{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 \equiv 3x - y + 2z + \text{D} = 0$$

Si este plano pasa por el punto $P(1, -2, 2)$, las coordenadas de este punto verificarán la ecuación del plano:

$$3 \times 1 - (-2) + 2 \times 2 + \text{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 + 2 + 4 + \text{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{D} = -9$$

luego la ecuación del plano π_1 es: $3x - y + 2z - 9 = 0$.

(b) Si el plano π_2 contiene a la recta r, entonces pertenecerá al haz de planos que tiene como recta base del haz a dicha recta. La ecuación del haz de planos es:

$$\alpha\,(x-y+z-1)+\beta\,(2x+y-4z-1)=0 \;\Rightarrow\; \alpha x-\alpha y+\alpha z-\alpha+2\beta x+\beta y-4\beta z-\beta=0 \;\Rightarrow$$

$$(\alpha+2\beta)x+(-\alpha+\beta)y+(\alpha-4\beta)z-\alpha-\beta=0 \;\Rightarrow$$

Esta es la ecuación de todos los planos que contienen a la recta r, calculemos el plano de este haz que es perpendicular a π y a π_1, impongamos la condición de perpendicularidad entre planos, es decir, la de que los vectores normales son perpendiculares, luego el producto escalar de los mismos es cero:

$$\vec{n}_{\pi}=(3,-1,2) \qquad ; \qquad \vec{n}_{\pi_2}=(\alpha+2\beta,\; -\alpha+\beta,\; \alpha-4\beta)$$

$$\vec{n}_{\pi}\bullet\vec{n}_{\pi_2}=0 \;\Rightarrow\; (3,-1,2)\bullet(\alpha+2\beta,\; -\alpha+\beta,\; \alpha-4\beta)=0 \;\Rightarrow$$

$$3(\alpha+2\beta)-1(-\alpha+\beta)+2(\alpha-4\beta)=0 \;\Rightarrow$$

$$3\alpha+6\beta+\alpha-\beta+2\alpha-8\beta=0 \;\Rightarrow\; 6\alpha-3\beta=0 \;\Rightarrow\; \beta=2\alpha$$

Sustituyamos este valor de β en la ecuación del haz de planos:

$$(\alpha+2(2\alpha))x+(-\alpha+2\alpha)y+(\alpha-4(2\alpha))z-\alpha-2\alpha=0 \;\Rightarrow\; 5\alpha x+\alpha y-7\alpha z-3\alpha=0$$

simplificando por α la expresión anterior obtendremos la ecuación del plano π_2 :

$$\pi_2 \equiv 5x+y-7z-3=0$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para saber si una matriz A tiene inversa, lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, cuando se consiga esto, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. En el caso de no ser posible que aparezca dicha matriz unidad a la izquierda, por ejemplo, porque apareciese una fila de ceros, entonces la matriz A no tendría inversa.

Obtengamos primero la matriz $3A$ $\Rightarrow$ $3\times A=3\times\begin{pmatrix}1&0&a\\a&0&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&3a\\3a&0&-3\\6&-3&3\end{pmatrix}$

Calculemos la inversa de $3A$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&3a&1&0&0\\3a&0&-3&0&1&0\\6&-3&3&0&0&1\end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=3\neq0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - a · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&3a&1&0&0\\0&0&-3-3a^2&-a&1&0\\0&-3&3-6a&-2&0&1\end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&3a&1&0&0\\0&-3&3-6a&-2&0&1\\0&0&-3-3a^2&-a&1&0\end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido una matriz triangular, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Estudiemos los diversos casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -3 - 3a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow$ No hay ningún valor de a que anule a este coeficiente, luego para cualquier valor de a este coeficiente, $a_{33} = 0$, siempre será distinto de cero, por tanto nunca aparecerá una fila de ceros, en definitiva, la matriz $3A$ siempre tiene inversa para cualquier valor de a.

(b) Obtengamos la matriz A^2 para $a = 0$.

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos, si es posible, la inversa de la matriz A^2. Lo haremos mediante el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, la matriz que queda a la derecha es la inversa de A^2 para $a = 0$, es decir:

$$\left(A^2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 38 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Calcula una primitiva de la función f definida por

$$f(x)=\frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}$$

para $x\neq 1$ y $x\neq -3$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3ax+b & \text{si} \quad x\leq 0 \\ e^{x(ax+b)} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Determina a y b sabiendo que f es derivable.

EJERCICIO 3. Considera

$$A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) [1 PUNTO]. ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?
(b) [1´5 PUNTOS]. Resuelve, para $m=2$, el sistema de ecuaciones $AX=C$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Determina la recta que no corta al plano de ecuación $x-y+z=7$ y cuyo punto más cercano al origen es (1, 2, 3).

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$$

y sea r la recta de ecuación $2x + y = 6$.

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina, si es posible, un punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea r.

(b) [1 PUNTO]. ¿Hay algún punto de la gráfica de f en el que la recta normal a la gráfica sea r? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 2. Considera la curva de ecuación

$$y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina sus asíntotas.

(b) [1 PUNTO]. ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 3. Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$.

(b) [1 PUNTO]. Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X + (AB)^t = C$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Sabiendo que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x - 2y - z = a \\ 2x + z = a \end{cases}$$

se cortan, determina a y el punto de corte.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si queremos calcular una primitiva de f, debemos observar de que se trata de una integral racional impropia debido a que el grado del polinomio del numerador es de grado igual que el del denominador.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & +10x & & x^2+2x-3 \\ \hline -2x^2 & -4x & +6 & 2 \\ \hline & 6x & +6 & \end{array}$$

La integral será:

$$\int \frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}\,dx = \int 2\,dx + \int \frac{6x+6}{x^2+2x-3}\,dx = 2x + \int \frac{6x+6}{x^2+2x-3}\,dx = \qquad [1]$$

Descompongamos el integrando de la integral racional propia en una suma de fracciones elementales, sabiendo que las raíces del denominador son

$$x^2+2x-3=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\times 3}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\frac{6x+6}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3} \;\Rightarrow\; \frac{6x+6}{x^2+2x-3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \;\Rightarrow$$

$$6x+6=A(x+3)+B(x-1) \;\Rightarrow \begin{cases} x=-3 \;\Rightarrow\; 6(-3)+6=-4B \;\Rightarrow\; -12=-4B \;\Rightarrow\; B=3 \\ x=1 \;\Rightarrow\; 6+6=4A \;\Rightarrow\; 12=4A \;\Rightarrow\; A=3 \end{cases}$$

Continuando desde [1]

$$=2x+\int \frac{A}{x-1}\,dx+\int \frac{B}{x+31}\,dx=2x+\int \frac{3}{x-1}\,dx+\int \frac{3}{x+3}\,dx=$$

$$= 2x+3\mathrm{Ln}\left|x-1\right|+3\mathrm{Ln}\left|x+3\right|+k$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si la función *f* es derivable necesariamente ha de ser continua previamente.Veámoslo.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de x menores que 0, $x<0$, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$; luego la función *f* es continua para $x<0$.

- El trozo de función para valores de x mayores que 0, $x>0$, es una función exponencial de exponente una función polinómica, por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$, luego la función *f* es continua para $x>0$.

- El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función. Estudiemos la continuidad en el punto 0.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} (3ax+b)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} e^{x(ax+b)}=e^0=1 \\ f(0)=3a\bullet 0+b=b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \;\Rightarrow \\ \\ \qquad b=1 \end{array}\right.$$

Luego *f(x)* es continua en el punto 0 si $b=1$.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ siempre que $b=1$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad; en nuestro caso se ha visto y demostrado que es continua en su dominio, siempre que $b = 1$.

- Para valores de $x < 0$, f es derivable por ser una función polinómica, que es derivable en todo $\mathbb{R}$, siendo la función derivada, $3a$.

- Para valores de $x > 0$, f es derivable, por ser una función exponencial de exponente una función polinómica, siendo la función derivada, $e^{x(ax+b)}(2ax+b)$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x)=\begin{cases} 3a & \text{si} \quad x<0 \\ e^{x(ax+b)}\left(2ax+b\right) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

- El problema está inicalmente en el punto 0.

En el punto 0 será derivable, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3a = 3a \\ f'(0^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{x(ax+b)}\left(2ax+b\right)\right) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f'(0^-) = f'(0^+) \quad \Rightarrow \\ 3a = b \end{array}\right.$$

luego la función *f(x)* es derivable en $x = 0$ si $3a = b$ y $b = 1$, es decir, si:

$$3a = b \;\Rightarrow\; 3a = 1 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{3} \;\text{ y }\; b = 1$$

Sustituyamos estos valores de *a* y *b* en la aproximación que se hizo de la función derivada. Una vez hechas las simplificaciones oportunas, la función derivada quedará finalmente así:

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ e^{x\left(\frac{1}{3}x+1\right)}\left(\frac{2}{3}x+1\right) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

En consecuencia *f(x)* será derivable en su dominio si $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = 1$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para saber si una matriz *A* tiene inversa, lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz *A*, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, cuando se consiga esto, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}. En el caso de no ser posible que aparezca dicha matriz unidad a la izquierda, por ejemplo, porque apareciese una fila de ceros, entonces la matriz *A* no tendría inversa.

Veamos para qué valores de *m* la matriz *A* tiene inversa. Calculémoslos.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} m & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -m & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pasemos la 1ª fila a la 3ª, y por tanto las filas 2ª y 3ª pasan a ser 1ª y 2ª respectivamente..

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -m & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ m & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot [2^a f.] - 3 \cdot [1^a f.]$
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot [3^a f.] - m \cdot [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4+3m & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2-m & 2+m^2 & 2 & -m & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamosla 3ª fila por: $[3^a f.] - (-2-m) \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4+3m & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4m^2+2m-6 & 2 & -6-4m & 4+2m \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido una matriz triangular, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Estudiemos los diversos casos que pueden presentarse.

$$* \text{ Si } a_{33} = 0 \Rightarrow 4m^2 + 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 4 \times (-6)}}{8} = \frac{-2 \pm 10}{8} = \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

Para estos dos valores de m que anulan a este coeficiente se produce toda una fila de ceros, luego para estos dos valores de m la matriz A no tiene inversa. Para todos los valores distintos de estos dos, es decir, para los valores de $m \neq 1$ y $m \neq -\frac{3}{2}$ la matriz A tendrá inversa.

(b) Para resolver el sistema de ecuaciones $AX = C$ para $m = 2$, tendremos en cuenta que para este valor la matriz A tiene inversa, y por tanto podemos multiplicar a la izquierda por A^{-1} en los dos miembros de la ecuación:

$$A^{-1} A X = A^{-1} C \qquad \Rightarrow \qquad I X = A^{-1} C \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} C$$

Para calcular la inversa de A para $m = 2$, basta sustituir este valor de m en la última matriz triangular del apartado **(a)** anterior, y terminar de triangular superiormente.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4+3m & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4m^2+2m-6 & 2 & -6-4m & 4+2m \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & -14 & 8 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 7 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $7 \cdot [2^a f.] - 2 \cdot [3^a f.]$
Sustituyamos la 1ª fila por: $7 \cdot [1^a f.] + 2 \cdot [3^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 7 & 0 & 2 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & -2 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 7 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $[1^a f.] - [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & -2 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 14 y simplifiquemos.
Dividamos la 2ª fila por 7 y simplifiquemos.
Dividamos la 3ª fila por 7 y simplifiquemos.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -1 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & -1 & \frac{4}{7} \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1} .
Multipliquemos esta matriz inversa por la matriz C para obtener la matriz X:

$$X = A^{-1} \times C \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -1 & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} & -1 & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Si la recta no corta al plano es que es paralela al mismo, por lo que el vector de dirección de la recta, (v_1, v_2, v_3), y el vector normal al plano, $(1, -1, 1)$, deberán ser perpendiculares, luego el producto escalar de ambos es cero:

$$(v_1, v_2, v_3) \perp (1, -1, 1) \;\Rightarrow\; (v_1, v_2, v_3) \bullet (1, -1, 1) = 0 \;\Rightarrow\; v_1 - v_2 + v_3 = 0 \qquad [1]$$

Como el punto de la recta más cercano al origen $O(0, 0, 0)$ es el $H(1, 2, 3)$, significa que el vector $\overrightarrow{OH}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta, luego el producto escalar de ambos es cero:

$$\overrightarrow{OH} = (1, 2, 3) - (0, 0, 0) = (1, 2, 3)$$
$$\overrightarrow{OH} \perp (v_1, v_2, v_3) \;\Rightarrow\; (1, 2, 3) \bullet (v_1, v_2, v_3) = 0 \;\Rightarrow\; v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$$

Hemos obtenido una nueva condición que junto a la [1] forman un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que vamos a resolver.

$$\left.\begin{array}{r} v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Lo haremos mediante el método de reducción de Gauss. Expresemos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la v_3 , que la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3v_3 \\ 0 & -3 & 2v_3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -5v_3 \\ 0 & -3 & 2v_3 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$3v_1 = -5v_3 \qquad ; \qquad -3v_2 = 2v_3$$

Terminemos de despejar las dos incógnitas:

$$v_1 = -\frac{5}{3}v_3 \quad ; \quad v_2 = -\frac{2}{3}v_3$$

Evidentemente hay muchos vectores de dirección, elijamos uno, por ejemplo, para $v_3 = 3$ tendremos: $v_1 = -5$; $v_2 = -2$, es decir, $\vec{v} = (-5, -2, 3)$.

Finalmente, la ecuación de la recta, de la que sabemos que pasa por el punto (1, 2, 3), es:

$$\begin{cases} x = 1-5\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 3+3\lambda \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Los puntos de corte de la recta *r* con la gráfica de *f(x)* serán los puntos donde puede ser tangente dicha recta a la función *f*.

Resolvamos el sistema formado por la ecuación de la recta y la de la función.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3-5x^2+5x+3 \\ y = -2x+6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-5x^2+5x+3=-2x+6 \Rightarrow x^3-5x^2+7x-3=0$$

la ecuación de tercer grado que hemos obtenido la resolvemos mediante la regla de Ruffini, para ello probamos con los divisores del término independiente, por ejemplo, con el 1.

	1	−5	7	−3
1		1	−4	3
	1	−4	3	0

Una raíz es el 1. Para calcular las demás raíces resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

Calculemos la ordenada correspondiente a cada uno de los puntos de corte que tienen la función *f* y la recta *r*.

$$x=3 \Rightarrow y=-2\times 3+6=0 \Rightarrow (3,0)$$
$$x=1 \Rightarrow y=-2\times 1+6=4 \Rightarrow (1,4)$$

Luego las coordenadas de los puntos de corte que de *f* y *r* son (3, 0) y (1, 4).

Calculemos ahora la ecuación de la recta tangente a la función *f* en cada uno de los puntos anteriores para ver si coincide o no con la ecuación de la recta *r*. No obstante, bastará con que comprobemos si la derivada de la función *f* en cada uno de esos puntos coincide con la pendiente de la recta *r*, que es -2.

* En el punto (3, 0).

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 5 \Rightarrow f'(3) = 3\cdot 3^2 - 10\cdot 3 + 5 = 2 \neq$ pendiente de *r*.

* En el punto (1, 4).

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 5 \Rightarrow f'(1) = 3\cdot 1^2 - 10\cdot 1 + 5 = -2 =$ pendiente de *r*.

(b) Para que la recta *r* pueda ser una recta normal a *f* debe cortarla, en principio, en algún punto. Ya sabemos que los únicos puntos de corte de *f* y *r* son: (3, 0) y (1, 4).

Calculemos ahora la ecuación de la recta normal a la función *f* en cada uno de los puntos anteriores para ver si coincide o no con la ecuación de la recta *r*. En el punto $x=1$ la recta *r* era tangente a *f* luego no puede ser ahora recta normal. Sólo nos queda comprobarlo en el punto $x=3$. Bastará que calculemos la pendiente de la recta normal a la gráfica de *f* en este punto y comprobar si coincide con la pendiente de la recta *r*, que es -2.

* En el punto (3, 0).

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 5 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 3\cdot 3^2 - 10\cdot 3 + 5 = 2$

pendiente de la normal en el punto $3 = -\dfrac{1}{f'(3)} = -\dfrac{1}{2} \neq$ pendiente de *r* que es -2.

Luego no hay ningún punto de la gráfica de *f* en que la recta normal sea *r*.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$

Veamos si hay en $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = \frac{(-1)^3+2(-1)}{(-1)^2-2(-1)-3} = \frac{-3}{0} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical: } x = -1.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de *f* respecto de la asíntota vertical $x = -1$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x\to -1^-\\ x<-1}} \frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = \frac{\left(-1^-\right)^3+2\left(-1^-\right)}{\left(-1^-\right)^2-2\left(-1^-\right)-3} = \frac{-3}{+0} = -\infty \\ &\lim_{\substack{x\to -1^+\\ x>-1}} \frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = \frac{\left(-1^+\right)^3+2\left(-1^+\right)}{\left(-1^+\right)^2-2\left(-1^+\right)-3} = \frac{-3}{-0} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

La función *f(x)* tiende a $-\infty$ cuando *x* se acerca a -1 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

Veamos ahora si hay en $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = \frac{3^3+2\times 3}{3^2-2\times 3-3} = \frac{33}{0} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical: } x = 3.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de *f* respecto de la asíntota vertical $x = 3$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x\to 3^-\\ x<3}} \frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = \frac{\left(3^-\right)^3+2\left(3^-\right)}{\left(3^-\right)^2-2\left(3^-\right)-3} = \frac{33}{-0} = -\infty \\ &\lim_{\substack{x\to 3^+\\ x>3}} \frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = \frac{\left(3^+\right)^3+2\left(3^+\right)}{\left(3^+\right)^2-2\left(3^+\right)-3} = \frac{33}{+0} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

La función *f(x)* tiende a $-\infty$ cuando *x* se acerca a 3 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+2x}{x^2-2x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+2}{2x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x}{2}=\pm\infty \quad\Rightarrow$$ No existe asíntota horizontal.

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: y=mx+n. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\text{m}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{x(x^2-2x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}=1$$

Calculemos ahora n:

$$\text{n}=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\text{m}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x}{x^2-2x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-x^3+2x^2+3x}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2-2x-3}=2$$

La asíntota oblicua, es: $y = x + 2$.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x=1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(1000)=\dfrac{1000^3+2\times1000}{1000^2-2\times1000-3}=1002'009024 \\ y_{\text{asíntota}}=1000+2=1002\end{array}\right\}\Rightarrow \quad f(1000)>y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to+\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x=-1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000)=\dfrac{(-1000)^3+2(-1000)}{(-1000)^2-2(-1000)-3}=-998'008976 \\ y_{\text{asíntota}}=-1000+2=-998\end{array}\right\}\Rightarrow \quad f(1000)<y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to-\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

(b) La curva no puede cortar a las asíntotas verticales porque los puntos $x=-1$ y $x=3$ no pertenecen al dominio de la función por anular al denominador.

Comprobemos si la asíntota oblicua y la función se cortan en algún punto.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^3+2x}{x^2-2x-3} \\ y=x+2\end{array}\right\}\Rightarrow \quad \frac{x^3+2x}{x^2-2x-3}=x+2 \quad\Rightarrow\quad x^3+2x=\left(x^2-2x-3\right)(x+2) \quad\Rightarrow$$

$$x^3+2x=x^3-2x^2-3x+2x^2-4x-6 \;\Rightarrow\; x^3+2x=x^3-7x-6 \;\Rightarrow\; 9x=-6 \;\Rightarrow\; x=-\frac{2}{3}$$

Terminemos de calcular la ordenada del punto que hemos obtenido:

$$y=x+2 \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$$

Luego el punto de corte es: $\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos $(AB)^t$ y $(BA)^t$

$$AB=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\2 & 8 & 6\\-1 & -4 & -3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad (AB)^t=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\2 & 8 & 6\\-1 & -4 & -3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\4 & 8 & -4\\3 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

$$(BA)=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(6) \qquad\Rightarrow\qquad (BA)^t=(6)$$

(b) Determinemos una matriz *X* que verifique la relación $\frac{1}{2}X+(AB)^t=C.$

$$\frac{1}{2}X+(AB)^t=C \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}X=C-(AB)^t \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}X=\begin{pmatrix}0 & 4 & -3\\-2 & 9 & -6\\1 & -4 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\4 & 8 & -4\\3 & 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\-6 & 1 & -2\\-2 & -10 & 7\end{pmatrix}$$

$$X=2\times\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\-6 & 1 & -2\\-2 & -10 & 7\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad X=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -4\\-12 & 2 & -4\\-4 & -20 & 14\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Para determinar el valor de *a* de manera que las dos se corten en un punto, lo haremos discutiendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{aligned}x+y-z&=1\\x-y&=2\\x-2y-z&=a\\2x+z&=a\end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo para los diversos valores de *a* y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 0 & 2\\1 & -2 & -1 & a\\2 & 0 & 1 & a\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=1\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & a-1 \\ 0 & -2 & 3 & a-2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot$ [3ªf.] - $3 \cdot$ [2ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2a-5 \\ 0 & 0 & 2 & a-3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: $3 \cdot$ [4ªf.] + $2 \cdot$ [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2a-5 \\ 0 & 0 & 0 & 7a-19 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, y para que las dos rectas se corten en un punto el sistema debe ser un sistema compatible determinado, es decir, me debe quedar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, luego la última ecuación tiene que ser trivial, $0 = 0$, o sea, se ha de cumplir que $7a - 19 = 0 \Rightarrow a = 19/7$.

Calculemos el punto donde ambas rectas se cortan. Para ello, eliminamos la última ecuación que es trivial y sustituimos el valor de a por 19/7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{3}{7} \end{array}\right)$$

Multipliquemos la 3ª fila por 7/3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -7 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $7 \cdot$ [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: $7 \cdot$ [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & -14 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -14 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -14 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución del sistema es:
$14\,x = 20 \quad ; \quad -14\,y = 8 \quad ; \quad -7\,z = 1$

Terminemos de despejar x, y y z:

$$x = \frac{20}{14} = \frac{10}{7} \quad ; \quad y = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7} \quad ; \quad z = -\frac{1}{7}$$

Luego el punto donde ambas rectas se cortan es el $\left(\frac{10}{7},\ -\frac{4}{7},\ -\frac{1}{7}\right)$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 39 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De entre todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, determina las que son tangentes a la curva de ecuación $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$. Calcula los puntos de tangencia correspondientes.

EJERCICIO 2. Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}.$$

(a) [1 PUNTO]. Calcula

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(b) [1´5 PUNTO]. Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x - my + z &= 1 \\ x + y + z &= m + 2 \\ x + y + mz &= 4 \end{aligned}\right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Clasifícalo según los valores del parámetro m.
(b) [1 PUNTO]. Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$ que esté más cercano al punto $P(1, -1, 0)$.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si} \quad x>0\\ 1 & \text{si} \quad x\le 0\end{cases}$$

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y = -(x - 2)^2 - 2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = 3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} k & x & 1+ax\\ 2k & y & 2+ay\\ 3k & z & 3+az\end{pmatrix}$$

y enuncia las propiedades que hayas usado.

EJERCICIO 4. Considera la recta r y el plano π siguientes

$$r\equiv\begin{cases}x+z-a &=0\\ y-az-1&=0\end{cases}, \qquad \pi\equiv 2x-y=b.$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina a y b sabiendo que r está contenida en π.
(b) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de un plano que contenga r y sea perpendicular a π.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

La ecuación de las rectas tangentes que pasan por el origen tienen la forma de $y = mx$. Calculemos los puntos que tienen en común la curva y las tangentes que pasan por el origen:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{4}x^2+4x+4\\ y=mx\end{array}\right\}\Rightarrow \quad \frac{1}{4}x^2+4x+4=mx \quad\Rightarrow\quad x^2+16x+16-4mx=0 \quad\Rightarrow$$

$$x^2+(16-4m)x+16=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-16+4m\pm\sqrt{(16-4m)^2-64}}{2}=\frac{-16+4m\pm\sqrt{16m^2-128m+192}}{2}$$

al ser la curva una parábola, para continuar calculando los puntos de corte de la curva con las tangentes, debemos imponer la condición de que curva y tangente se corten en un único punto, lo que implica que el radicando ha de ser cero:

$$16m^2-128m+192=0 \;\Rightarrow\; m^2-8m+12=0 \;\Rightarrow\; m=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm 4}{2}=\begin{cases} m=6 \\ m=2\end{cases}$$

Hemos obtenido sólo dos rectas, las $y=6x$ e $y=2x$, de pendientes 6 y 2 respectivamente, que pasando por el origen son tangentes a la curva. Terminemos de calcular las coordenadas de los puntos de intersección común sustituyendo cada uno de estos valores de las pendientes en la última expresión de la página anterior:

* Para $m = 6$.

$$x=\frac{-16+4\times 6\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{-16+24}{2}=4$$

$$y=mx \;\Rightarrow\; y=6x \;\Rightarrow\; y=6\times 4=24 \;\Rightarrow\; (4,\ 24)$$

* Para $m = 2$.

$$x=\frac{-16+4\times 2\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{-16+8}{2}=-4$$

$$y=mx \;\Rightarrow\; y=2x \;\Rightarrow\; y=2\times(-4)=-8 \;\Rightarrow\; (-4,\ -8)$$

Los puntos de tangencia son (4, 24) y (-4, -8).

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 e^{\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left((-x)^2 e^{\frac{-x}{2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{\frac{x}{2}}}=\frac{\infty^2}{e^{\frac{\infty}{2}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

para el cálculo del límite se ha hecho el cambio de x por $-x$, de esta manera en vez de calcular el límite cuando $x\to-\infty$, se calcula cuando $x\to+\infty$. Para destruir ahora la indeterminación de infinito partido por infinito usamos la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{e^{\frac{x}{2}}}=\frac{\infty}{e^{\frac{\infty}{2}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{e^{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{e^{\frac{x}{2}}}=\frac{8}{\infty}=0$$

Calculemos ahora este otro límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 e^{\frac{x}{2}}\right)=\infty^2 e^{\frac{\infty}{2}}=\infty\times\infty=\infty$$

(b) Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, teniendo en cuenta que es una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Hallemos la función primera derivada de *f(x)*.

$$f'(x)=2x\,e^{\frac{x}{2}}+x^2\,e^{\frac{x}{2}}\,\frac{1}{2} \qquad\Rightarrow\qquad f'(x)=x\,e^{\frac{x}{2}}\left(2+\frac{x}{2}\right)$$

Calculemos los valores que anulan a la función primera derivada de *f(x)*.

$$x\,e^{\frac{x}{2}}\left(2+\frac{x}{2}\right)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ 2+\dfrac{x}{2}=0 \;\Rightarrow\; x=-4 \end{cases}$$

Con estos dos puntos, 0 y -4, los ordenamos y construimos los posibles intervalos de monotonía: (-∞, -4), (-4, 0), (0, +∞).

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -5, -1 y 1 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-5)=(-5)\,e^{\frac{-5}{2}}\left(2+\dfrac{-5}{2}\right)=0'205>0 \;\Rightarrow\; \text{creciente en } (-\infty,-4) \\ f'(-1)=(-1)\,e^{\frac{-1}{2}}\left(2+\dfrac{-1}{2}\right)=-0'909<0 \;\Rightarrow\; \text{decreciente en } (-4,0) \\ f'(1)=1\times e^{\frac{1}{2}}\left(2+\dfrac{1}{2}\right)=4'1218>0 \;\Rightarrow\; \text{creciente en } (0,+\infty) \end{cases}$$

Estudiemos los extremos locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, ya que la función es continua y derivable en todo su dominio que es $\mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora podemos asegurar que hay un máximo local en $x = -4$, y un mínimo local en $x = 0$.

Las ordenadas de estos extremos son:

$$f(-4)=(-4)^2 e^{\frac{-4}{2}}=16\,e^{-2} \;\Rightarrow\; \text{Máximo en } \left(-4,\ 16\,e^{-2}\right)$$

$$f(0)=0^2 e^{\frac{0}{2}}=0 \;\Rightarrow\; \text{Mínimo en } (0,\ 0)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el sistema siguiente según los valores del parámetro m

$$\left.\begin{array}{l} x-my+z=1 \\ x+y+z=m+2 \\ x+y+mz=4 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & 4 \end{array}\right)$$

Pasemos la 1ª fila a tercer lugar, por lo que las filas 2ª y 3ª pasan a ser 1ª y 2ª respectivamente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & 4 \\ 1 & -m & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -m-1 & 0 & -1-m \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 0 & -m-1 & 0 & -1-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} y el a_{22} que pueden serlo. Estudiemos los casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ la última ecuación sería $0 = 1 \Rightarrow$ se trata de una ecuación absurda, por lo que el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{22} = 0 \Rightarrow -m - 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow$ la segunda ecuación sería $0=0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1 \Rightarrow$ para cualquier valor de m distinto de 1 y de -1, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, tendríamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el sistema es un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvamos el sistema en el caso de compatible indeterminado, es decir, cuando $m = -1$. Sustituyamos este valor en el sistema matricial triangulado inferiormente que obtuvimos en el apartado anterior, recordando además que la segunda ecuación era trivial y la eliminamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 0 & -m-1 & 0 & -1-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Intercambiamos entre sí la tercera y cuarta columna, con el fin de que todos los elementos de la diagonal principal sean distintos de cero.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

Al estar triangulado inferiormente el sistema y ser un sistema compatible indeterminado, nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al 2º miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-y \\ 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] + [2^a f.]$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 5-2y \\ 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado. La solución del sistema es:

$$2x = 5 - 2y \quad ; \quad -2z = 3.$$

Terminemos de despejar las incógnitas x y z, y sustituyamos la incógnita secundaria, y, por un parámetro, por ejemplo por $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x = \frac{5}{2} - \alpha \quad ; \quad y = \alpha \quad ; \quad z = -\frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica, resolviendo el sistema:

$r \equiv \begin{cases} x+3y+z = \ \ 1 \\ \quad\ \ y+z = -1 \end{cases}$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la *z*, que la pasamos al 2º miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1-z \\ 0 & 1 & -1-z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 3 · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+2z \\ 0 & 1 & -1-z \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado. La solución es:
$x = 4 + 2z$; $y = -1 - z$.

Sustituyamos la incógnita secundaria *z* por un parámetro, por ejemplo, por $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 4+2\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = \ \ \lambda \end{cases}$$

Para calcular el punto de la recta *r* que esté más cercano al punto *P*(1, -1, 0), elegiremos un punto genérico de la recta, por ejemplo, *H* = (4+2λ, -1-λ, λ), que satisfaga la condición siguiente:

El vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular al vector de dirección de r, es decir, al vector (2, -1, 1).

$$\overrightarrow{PH} = (4+2\lambda, -1-\lambda, \lambda) - (1, -1, 0) = (3+2\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$\overrightarrow{PH} \perp \vec{v_r} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PH} \bullet \vec{v_r} = 0 \quad \Rightarrow \quad (3+2\lambda, -\lambda, \lambda) \bullet (2, -1, 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$6+4\lambda+\lambda+\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\lambda = -6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$$

Utilicemos este valor para obtener las coordenadas del punto *H* de *r* más cercano a *P*.

$$H = (4+2\lambda,\ -1-\lambda,\ \lambda) = (4+2(-1),\ -1-(-1),\ -1) = (2,\ 0,\ -1)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Determinemos primeramente los puntos donde la función *f* es continua, ya que en aquellos puntos donde no sea continua no podrá ser derivable.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- Para valores de $x < 0$, la función *f* es una función constante y las funciones constantes son continuas en todo ℝ, luego *f* será continua para todos los valores $x < 0$.

- Para valores de $x > 0$, la función *f* es el cociente de dos funciones, la del numerador, sen (*x*) y la del denominador, *x*, ambas son continuas en todo ℝ, la una por tratarse de una función elemental, sen (x), y la otra, x, polinómica; y el cociente de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ también es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en los valores que anulen al denominador, que en este caso es el cero pero este valor no pertenece al dominio particular que estamos considerando, luego f será continua para todos los valores $x > 0$.

- El problema está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función, estudiemos la continuidad en dicho punto.

Para que la función f sea continua en el punto 0, los límites laterales deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en el punto 0.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

La indeterminación de cero partido por cero se ha destruido haciendo uso de la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar independientemente el numerador y el denominador.

Como los límites laterales coinciden entre sí y además también coinciden con el valor de $f(0)$, la función será continua en el punto 0.

Por tanto f será continua en todo $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad

- Para valores de $x < 0$, la función f es una función constante y las funciones constantes son derivables en todo $\mathbb{R}$, luego f será derivable para todos los valores $x < 0$, siendo la derivada 0.

- Para valores de $x > 0$, la función f es el cociente de dos funciones, la del numerador, sen (x) y la del denominador, x, ambas son derivables en todo $\mathbb{R}$, la una por tratarse de una función elemental, sen (x), y la otra, x, polinómica; siendo la función derivada $\dfrac{x\cos(x) - \text{sen}(x)}{x^2}$, derivada que existe en todo $\mathbb{R}$ menos en los valores que anulen al denominador, que en este caso es el cero pero este valor no pertenece al dominio particular que estamos considerando, luego f será derivable para todos los valores $x > 0$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x\cos(x) - \text{sen}(x)}{x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

- El problema está inicialmente en el punto 0. Será derivable en el punto 0, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \frac{0-0}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\operatorname{sen}(x)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

luego se verifica que $f'(0^-) = f'(0^+)$, es decir, que las derivadas laterales coinciden, por tanto la función será derivable en el punto 0.

En definitiva, f será derivable en $\mathbb{R}$, siendo la función derivada finalmente:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

En primer lugar obtengamos la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = 3$.

La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto es x_0:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Calculemos el valor de la derivada de la función en el punto 3.

$$f(x) = -(x-2)^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2(x-2) \quad \Rightarrow \quad f'(3) = -2(3-2) = -2$$

Calculemos ahora la ordenada en el punto 3:

$$x_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(3) = -(3-2)^2 - 2 = -3$$

La ecuación de la recta tangente en el punto (3, -3) es:

$$y - (-3) = -2(x-3) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 3$$

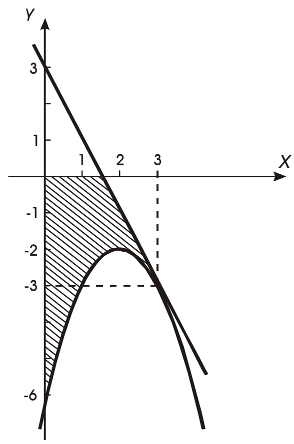
Dibujemos en primer lugar la parábola: $y = -(x-2)^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad y = -x^2 + 4x - 6$

abscisa del vértice = $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2$; ordenada del vértice $= -(2-2)^2 - 2 = -2$

Luego el vértice es el punto V(2, -2). Otros puntos de interés son el (0, -6) y el (3, -3).

La gráfica de la parábola está representada al lado.

La recta tangente $y = -2x + 3$, pasa por el punto (3, -3), que es el punto de tangencia, y por los puntos de corte con los ejes (0, 3) y (1´5, 0). La gráfica también está situada al lado, juntamente con la de la parábola.



El recinto cuya área nos pide el ejercicio, es el que se encuentra rayado en el gráfico adjunto. Calculemos su área.

Primeramente calculamos el área encerrada por la parábola, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos 0 y 3.

$$\text{Área}_1 = \left| \int_0^3 \left(-x^2 + 4x - 6\right) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 6x \right]_0^3 \right| =$$

$$=\left|\left(-\frac{3^3}{3}+\frac{4\times 3^2}{2}-6\times 3\right)-0\right|=\left|-\frac{27}{3}+\frac{36}{2}-18\right|=\left|-9\right|=9$$

Calculemos ahora el área encerrada por la recta tangente, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos 1´5 y 3. El punto 1´5 es el punto de corte de la recta con el eje de abscisas.

Esta área se corresponde con la de un triángulo rectángulo de base $3 - 1´5$ y altura 3, es decir:

$$\text{Área}_2=\frac{(3-1'5)\times 3}{2}=\frac{4'5}{2}=\frac{9}{4}$$

Finalmente el área del recinto pedido es:

$$\text{Área} = \text{Área}_1 - \text{Área}_2 = 9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}\quad u^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Calculemos el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix}$, sin desarrollarlo.

$$\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix} = k\times\begin{vmatrix} 1 & x & 1+ax \\ 2 & y & 2+ay \\ 3 & z & 3+az \end{vmatrix} = k\left(\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & y & 2 \\ 3 & z & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x & ax \\ 2 & y & ay \\ 3 & z & az \end{vmatrix}\right)=k(0+0)=0$$

Hemos utilizado la propiedad de los determinantes que dice: "*Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante están multiplicados por un mismo número, éste podemos sacarlo fuera del símbolo del determinante como factor común*". En el ejercicio hemos sacado factor común k.

A continuación hemos utilizado la propiedad de los determinantes que dice: "*Si los elementos de cualquier fila o columna de un determinante son sumas de igual nº de términos, entonces el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de las filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada por sumandos, la cual es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos para el 2º determinante y así sucesivamente, hasta el último sumando*". En el ejercicio hemos descompuesto la tercera columna dando lugar a la suma de dos determinantes.

Por último hemos usado la propiedad que dice: "*Si dos filas o columnas son iguales o proporcionales, el determinante vale cero*". Los dos determinantes que habíamos obtenido aplicando la propiedad anterior resultan que son cero por tener el primero de ellos la 1ª y 3ª columna iguales; y en el segundo, la 2ª y 3ª columna proporcionales.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Si la recta *r* está contenida en el plano π se ha de satisfacer que al resolver el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debemos obtener un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Determinemos *a* y *b* con esta condición.

$$\left.\begin{array}{r} x+z = a \\ y-az = 1 \\ 2x-y = b \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 2 & -1 & 0 & b \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & -1 & -2 & b-2a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -2-a & b-2a+1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, para que la recta esté contenida en el plano, el sistema debe ser compatible indeterminado uniparamétrico, la última ecuación debe ser trivial, y así nos quedaría un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

Por tanto se ha de verificar lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} -2-a=0 \\ b-2a+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a=-2 \\ b-2a+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a=-2 \\ b-2(-2)+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a=-2 \\ b=-5 \end{array}\right\}$$

(b) Obtengamos el haz de planos que contiene a la recta *r*.

$$\alpha(x+z+2)+\beta(y+2z-1)=0 \;\Rightarrow\; \alpha x+\alpha z+2\alpha+\beta y+2\beta z-\beta=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \alpha x+\beta y+(\alpha+2\beta)z+2\alpha-\beta=0$$

El vector normal a cualquier plano de este haz es:

$$\vec{n}=(\alpha,\,\beta,\,\alpha+2\beta)$$

Para que un plano de ese haz, que contiene a la recta *r*, sea perpendicular al plano π, se ha de satisfacer que los vectores normales de ambos planos sean perpendiculares y por tanto que su producto escalar sea cero:

$$\vec{n}\perp\vec{n}_\pi \;\Rightarrow\; \vec{n}\bullet\vec{n}_\pi=0 \;\Rightarrow\; (\alpha,\,\beta,\,\alpha+2\beta)\bullet(2,-1,0)=0 \;\Rightarrow\; 2\alpha-\beta=0 \;\Rightarrow\; \beta=2\alpha$$

sustituyendo este valor de β en la ecuación del haz de planos, tendremos:

$$\alpha x+\beta y+(\alpha+2\beta)z+2\alpha-\beta=0 \;\Rightarrow\; \alpha x+2\alpha y+(\alpha+2\times 2\alpha)z+2\alpha-2\alpha=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \alpha x+2\alpha y+5\alpha z=0$$

Simplificando por α obtendremos el plano que contiene a *r* y es perpendicular a π:

$$x+2y+5z=0$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO JUNIO 2003

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Sea $\text{Ln}(1-x^2)$ el logaritmo neperiano de $1-x^2$ y sea $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\text{Ln}(1-x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-1$. Conociendo además que $\int_0^1 f(x)dx=6$, halla a, b y c.

EJERCICIO 3. Considera los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,2,a)$ y $\vec{w}=(2,0,0)$.

(a) [1´25 PUNTOS] Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

(b) [1´25 PUNTOS] Determina los valores de a para que los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{w}$ son ortogonales.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS] Sabiendo que las rectas

$$r\equiv x=y=z \qquad \text{y} \qquad s\equiv\begin{cases} x=1+\mu \\ y=3+\mu \\ z=-\mu \end{cases}$$

se cruzan, halla los puntos A y B, de r y s respectivamente, que están a mínima distancia.

Opción B

EJERCICIO 1. Dadas la parábola de ecuación $y = 1 + x^2$ y la recta de ecuación $y = 1 + x$, se pide:

(a) [1´5 PUNTOS] Área de la región limitada por la recta y la parábola.

(b) [1 PUNTO] Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.

EJERCICIO 2. Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 3)\, e^{-x}$.

(a) [0´5 PUNTOS] Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

(b) [1´5 PUNTOS] Determina los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

(c) [0´5 PUNTOS] Esboza la gráfica de *f*.

EJERCICIO 3. Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

(a) [0´5 PUNTOS] El determinante de A^3.

(b) [0´5 PUNTOS] El determinante de A^{-1}.

(c) [0´5 PUNTOS] El determinante de $2A$.

(d) [1 PUNTO] El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS] Determina el punto P de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x + y + z + 3 = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos primeramente el conjunto de todas las primitivas de *f(x)*:

$$\int \text{Ln}\left(1 - x^2\right) dx$$

Se trata de una integral por partes:

$$u = \text{Ln}\left(1-x^2\right) \quad ; \quad du = \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$
$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

$$\int \text{Ln}\,(1-x^2)\,dx = x\,\text{Ln}\,(1-x^2) - \int x\frac{-2x}{1-x^2}\,dx = x\,\text{Ln}\,(1-x^2) - \int \frac{-2x^2}{1-x^2}\,dx =$$

$$= x\,\text{Ln}\left(1-x^2\right) + \int \frac{2x^2}{1-x^2}\,dx =$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & 1-x^2 \\ \hline -2x^2+2 & -2 \\ \hline 2 & \end{array}$$

esta última integral es una integral racional impropia, efectuemos la división del integrando.

$$= x\,\text{Ln}\left(1-x^2\right) + \int \left(-2 + \frac{2}{1-x^2}\right)\,dx = x\,\text{Ln}\left(1-x^2\right) - 2x + \int \frac{2}{1-x^2}\,dx = \qquad [1]$$

Esta nueva integral es una integral racional propia, por lo que la descompondremos en una suma de integrales elementales simples, para ello descompondremos el integrando:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{-2}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{-2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{-2}{x^2-1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \quad \Rightarrow$$

$$-2 = A(x+1) + B(x-1) \quad \Rightarrow \begin{cases} x=-1 & ; \quad -2=-2B & ; \quad B=1 \\ x=1 & ; \quad -2=2A & ; \quad A=-1 \end{cases}$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$= x\ \text{Ln}\left(1-x^2\right) - 2x + \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)\,dx =$$

$$= x\,\text{Ln}\left(1-x^2\right) - 2x - \text{Ln}\,|x-1| + \text{Ln}\,|x+1| = x\,\text{Ln}\left(1-x^2\right) - 2x + \text{Ln}\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

De todas estas primitivas, *F(x)*, obtengamos la *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto (0,1).

$$F(x) = x\,\text{Ln}\left(1-x^2\right) - 2x + \text{Ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C \quad \Rightarrow \quad F(0) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$F(0) = 0\times\text{Ln}\left(1-0^2\right) - 2\times 0 + \text{Ln}\left|\frac{0+1}{0-1}\right| + C = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

luego la primitiva que se nos pide es: $f(x) = x\,\text{Ln}\left(1-x^2\right) - 2x + \text{Ln}\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + 1$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos una función, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, de forma que presente un extremo relativo en el punto de abscisa $x=0$, para ello se ha de verificar que $f'(0) = 0$:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\Rightarrow\; f'(0) = 0+0+b = 0 \;\Rightarrow\; b=0.$

Luego $f(x)$ será de la forma $f(x) = x^3 + ax^2 + c$.

Sabemos también que tiene un punto de inflexión en $x=-1$, para ello se ha de verificar que $f''(-1) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x + 2a \;\Rightarrow\; f''(-1) = 6(-1) + 2a = 0 \;\Rightarrow\; a = 3.$

La función tendrá este otro aspecto ahora: $f(x) = x^3 + 3x^2 + c$.

Por último nos dicen que se verifica que $\int_0^1 f(x)\,dx = 6$, o lo que es lo mismo:

$$\int_0^1 \left(x^3+3x^2+c\right)dx = 6 \;\Rightarrow\; \int_0^1 \left(x^3+3x^2+c\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}+cx\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4}+1+c\right)-0=$$

$$=\frac{5}{4}+c \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4}+c=6 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{19}{4}$$

La expresión de la función $f(x)$, finalmente, será: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 19/4$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para que los tres vectores sean linealmente independientes, el rango de la matriz formada por sus componentes debe ser tres.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

Como la matriz tiene que tener rango 3, significa que todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, es decir:

$$a-2 \neq 0 \quad ; \quad a \neq 2.$$

(b) Construyamos en primer lugar los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{w}$.

$$\vec{u}+\vec{v}=(1,1,1)+(2,2,a)=(3,3,1+a) \quad ; \quad \vec{u}-\vec{w}=(1,1,1)-(2,0,0)=(-1,1,1)$$

para que estos vectores sean ortogonales, debe verificarse que su producto escalar sea cero:

$$(\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}-\vec{w})=(3,3,1+a)\bullet(-1,1,1)=-3+3+1+a=1+a=0 \;\Rightarrow\; a=-1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos en primer lugar la ecuación de la recta r en forma paramétrica.

$$r \equiv x=y=z \quad \Rightarrow \quad r\equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Los puntos A y B de r y s, respectivamente, que estén a mínima distancia serán aquellos que hagan que el vector, $\vec{AB}$, que determinan ambos puntos sea perpendicular a las rectas r y s y por tanto a sus respectivos vectores de dirección.

Elijamos dichos puntos genéricos, $A=(\lambda,\ \lambda,\ \lambda)$ de r y $B=\left(1+\mu,\ 3+\mu,\ -\mu\right)$ de s.

Construimos el vector $\vec{AB}$ que determinan ambos puntos:

$$\vec{AB}=(1+\mu,\ \ 3+\mu,\ \ -\mu)-(\lambda,\lambda,\lambda)=(1+\mu-\lambda,\ \ 3+\mu-\lambda,\ \ -\mu-\lambda)$$

y le imponemos la condición de que sea perpendicular a cada uno de los vectores de dirección de las rectas, es decir, que el respectivo producto escalar sea cero:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}\bullet\vec{u}_r=0\\ \vec{AB}\bullet\vec{v}_s=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(1+\mu-\lambda,\ \ 3+\mu-\lambda,\ \ -\mu-\lambda)\bullet(1,\ 1,\ 1)=0\\ (1+\mu-\lambda,\ \ 3+\mu-\lambda,\ \ -\mu-\lambda)\bullet(1,\ 1,\ -1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}1+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda-\mu-\lambda=0\\ 1+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda+\mu+\lambda=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mu-3\lambda=-4\\ 3\mu-\lambda=-4\end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema anterior de dos ecuaciones con dos incógnitas, λ y μ, mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual expresamos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&-4\\3&-1&-4\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=1\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&-4\\0&8&8\end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 8.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&-4\\0&1&1\end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=1\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&1\end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. La solución del sistema es

$$\mu=-1\quad;\quad\lambda=1.$$

El punto A tendrá de coordenadas: $A=(\lambda,\ \lambda,\ \lambda)=(1,1,1)$.

Y el punto $B=(1+\mu,\ 3+\mu,\ -\mu)=(1-1,\ 3-1,\ -(-1))=(0,2,1)$.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) El área limitada por la recta y la parábola coincide con el área de la función diferencia entre ambas funciones limitada por los puntos de corte de dicha función con el eje de abscisas.

Obtengamos la función diferencia.

$$h(x)=1+x^2-(1+x)=x^2-x$$

Calculemos los puntos de corte de esta función con el eje de abscisas.

$$x^2-x=0\quad\Rightarrow\quad x(x-1)=0\quad\Rightarrow\quad x=0\quad;\quad x=1.$$

El área pedida será:

$$\text{Área}=\left|\int_0^1(x^2-x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|=\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-0\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}\ \ \text{u}^2.$$

(b) La recta paralela a la dada tendrá la misma pendiente que la de ésta.

Recta dada: $y = 1 + x$ $\Rightarrow$ pendiente = 1 $\Rightarrow$ pendiente recta tangente = 1.

Como la recta paralela ha de ser tangente a la parábola, la derivada de la función correspondiente a la parábola en el punto de tangencia x_0, ha de valer también 1.

$y = 1 + x^2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow 2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$

Calculemos la ordenada y_0 del punto de tangencia:

$$y_0 = 1 + (x_0)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

La ecuación de la recta paralela a la dada y tangente a la parábola es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{5}{4} = 1 \times \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = x - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \Rightarrow y = x + \frac{3}{4}.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, ya que la función *f(x)* podemos ponerla de la forma, $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$, pero no hay ningún valor que anule al denominador, luego no hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe, primeramente para $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$$ hay asíntota horizontal $y = 0$, si $x \to +\infty$.

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 10$ (es suficiente en este caso) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(10) = \dfrac{10+3}{e^{10}} = 0'000590199... \\ y_{asíntota} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(10) > y_{asíntota}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

Comprobemos si existe para $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} (x+3)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} (-x+3)e^{x} = -\infty \times \infty = -\infty$$ $\Rightarrow$ no hay asíntota horizontal si $x \to -\infty$.

Al haber asíntota horizontal por la derecha y no por la izquierda, no hay asíntota oblicua por la derecha y podrá haberla por la izquierda ya que la condición necesaria para que exista es que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$, y esto lo acabamos de comprobar en el párrafo anterior.

Calculemos la posible asíntota oblicua, $y = mx + n$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+3)e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-x+3)e^{x}}{-x}=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{x}+(-x+3)e^{x}}{-1}=\frac{-\infty-\infty}{-1}=\infty$$

luego no hay asíntota oblicua para $x \to -\infty$, hay una rama parabólica paralela al eje OY.

(b) Estudiemos los extremos locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, ya que la función es continua y derivable en todo su dominio, por ser un cociente de funciones que son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, y no anularse el denominador para ningún valor.

$f(x)=(x+3)\,e^{-x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=e^{-x}-(x+3)\,e^{-x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=e^{-x}(-2-x)$

$e^{-x}(-2-x)=0 \quad\Rightarrow\quad -2-x=0 \quad\Rightarrow\quad x=-2.$

Sustituyamos este valor en la segunda derivada para caracterizar al extremo local.

$f'(x)=e^{-x}(-2-x) \quad\Rightarrow\quad f''(x)=-e^{-x}(-2-x)-e^{-x}=e^{-x}(x+1) \quad\Rightarrow$

$f''(-2)=e^{2}(-2+1)=-e^{2}<0 \quad\Rightarrow\quad$ Máximo relativo en $\left(-2,\ e^{2}\right)$

la ordenada del máximo se ha obtenido sustituyendo la abscisa -2 en la función:

$f(x)=(x+3)\,e^{-x} \quad\Rightarrow\quad f(-2)=(-2+3)\,e^{-(-2)}=e^{2}$

Calculemos ahora los puntos de inflexión.

Obtengamos los valores que anulen a la segunda derivada.

$f''(x)=e^{-x}(x+1) \quad\Rightarrow\quad e^{-x}(x+1)=0 \quad\Rightarrow\quad x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1$

sustituyamos este valor en la tercera derivada.

$f''(x)=e^{-x}(x+1) \quad\Rightarrow\quad f'''(x)=-e^{-x}(x+1)+e^{-x}=-x\,e^{-x} \quad\Rightarrow$

$f'''(-1)=-(-1)\,e^{-(-1)}=e\neq 0 \quad\Rightarrow\quad$ Punto de inflexión en $(-1,\ 2e)$.

la ordenada del punto de inflexión se ha obtenido sustituyendo la abscisa -1 en la función:

$f(x)=(x+3)\,e^{-x} \quad\Rightarrow\quad f(-1)=(-1+3)\,e^{-(-1)}=2e$

(c) Para poder representar la gráfica de la función $f(x)=(x+3)\,e^{-x}$, necesitamos calcular los puntos de corte con los ejes y estudiar la monotonía, además de lo ya analizado en los dos apartados anteriores.

Punto de corte con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y=(x+3)\,e^{-x} \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\ (x+3)\,e^{-x}=0\ \Rightarrow\ x+3=0\ \Rightarrow\ x=-3\ \Rightarrow\ (-3,0)$$

Punto de corte con el eje de ordenadas.

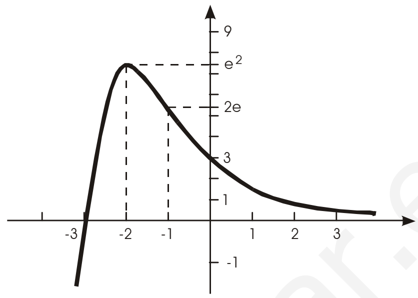
$$\left.\begin{array}{l} y=(x+3)\,e^{-x} \\ x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\ y=(0+3)\,e^{-0}=3\ \Rightarrow\ (0,3)$$

Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. El valor que anula a la función primera derivada de $f(x)$, era el -2, por lo que construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty,\ -2)$ y $(-2,\ +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -3 y 0 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$f\,'(-3) = e^{-(-3)}\,(-2-(-3)) = e^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ creciente en $(-\infty, -2)$
$f\,'(0) = e^{-0}\,(-2-0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ decreciente en $(-2, +\infty)$

La gráfica de la función *f (x)* es la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos el determinante de la matriz A^3, sabiendo que $|A| = 5$.

$$|A^3| = |A|^3 = 5^3 = 125$$

El resultado anterior está basado en la siguiente propiedad: *"el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices*". En este caso al tratarse de la misma matriz, la propiedad se transforma en esta otra: "*el determinante de la potencia de una matriz es igual al determinante de la matriz elevado a dicha potencia".*

(b) Calculemos ahora el determinante de A^{-1}.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$$

Nos hemos basado en la propiedad que dice que: *"el determinante de una matriz cuadrada invertible es igual al inverso del determinante de la matriz inversa".*

(c) Calculemos el determinante de la matriz $2A$.

$$|2A| = 2^3 \times |A| = 8 \times 5 = 40$$

El resultado anterior está basado en la propiedad de la multiplicación de un número por una matriz, que dice: *"que para multiplicar una matriz por un número hay que multiplicar todos los elementos de la matriz por dicho número"*; y en la propiedad de la multiplicación de un número por un determinante que dice: *"si multiplicamos los elementos de una fila o columna de un determinante por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número"* , o bien *"que para multiplicar un determinante por un número basta multiplicar una fila o una columna del determinante por dicho número"*. Por tanto, al multiplicar por 2 la matriz cuadrada *A*, de orden tres, todos los elementos de *A* quedan multiplicados por 2, esto implica que en el determinante asociado correspondiente lo que realmente hemos hecho es multiplicar por dos las tres filas o columnas del mismo con lo que el determinante queda multiplicado por 2^3.

(d) Supongamos que la matriz *A* sea de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Construyamos la matriz *B* que nos dice el ejercicio, es decir, aquella en la que la 1ª columna sea $3C_1 - C_3$, la 2ª sea $2C_3$ y la 3ª sea C_2, donde C_1, C_2 y C_3 son respectivamente la 1ª, 2ª y 3ª columnas de la matriz *A*.

$$B = \begin{pmatrix} 3a_1 - a_3 & 2a_3 & a_2 \\ 3b_1 - b_3 & 2b_3 & b_2 \\ 3c_1 - c_3 & 2c_3 & c_2 \end{pmatrix}$$

y calculemos ahora el valor de su determinante.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3a_1 - a_3 & 2a_3 & a_2 \\ 3b_1 - b_3 & 2b_3 & b_2 \\ 3c_1 - c_3 & 2c_3 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3a_1 - a_3 & a_2 & 2a_3 \\ 3b_1 - b_3 & b_2 & 2b_3 \\ 3c_1 - c_3 & c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} =$$

El primer paso que hemos realizado ha sido cambiar entre sí la 2ª con la 3ª columna, basándonos en la propiedad de los determinantes que dice: "*Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo*"

Saquemos ahora el 2 factor común, según la propiedad que dice: "*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor común puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

$$= -2\begin{vmatrix} 3a_1 - a_3 & a_2 & a_3 \\ 3b_1 - b_3 & b_2 & b_3 \\ 3c_1 - c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

Como la primera columna es suma de dos términos, aplicaremos la propiedad que dice: "*Si los elementos de cualquier fila o columna de un determinante son sumas de igual número de términos, entonces, el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada por sumandos, la cual, es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos sumandos para el 2º determinante, y así sucesivamente, hasta el último sumando*".

$$= -2\begin{vmatrix} 3a_1 & a_2 & a_3 \\ 3b_1 & b_2 & b_3 \\ 3c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -a_3 & a_2 & a_3 \\ -b_3 & b_2 & b_3 \\ -c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

En el primero de los determinantes sacaremos el 3 factor común, basándonos en la segunda de las propiedades ya enunciadas; y en el segundo de los determinantes observamos que la 1ª y 3ª columna son proporcionales u opuestas, por lo que el determinante vale cero, ya que nos basamos en la propiedad que dice: "*Si dos filas o columnas de un determinante son iguales o proporcionales el determinante vale cero*".

$$= -2\times 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - 0 = -6\times 5 = -30$$

el último determinante es precisamente el determinante de la matriz *A* que, según nos dice el problema, vale 5.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Elijamos un punto genérico, *P*, de la recta; tendrá de coordenadas $(1+2\lambda,\ -1+\lambda,\ 3\lambda)$.

Expresemos el plano π_2 en forma general, para ello eliminaremos los parámetros λ y μ.

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda+\mu \\ z = -6-\mu \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \lambda & = & x+3 \\ -\lambda+\mu & = & y \\ -\mu & = & z+6 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & x+3 \\ -1 & 1 & y \\ 0 & -1 & z+6 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & x+3 \\ 0 & 1 & x+y+3 \\ 0 & -1 & z+6 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & x+3 \\ 0 & 1 & x+y+3 \\ 0 & 0 & x+y+z+9 \end{array}\right)$$

Al tener que ser un sistema compatible, la última ecuación ha de ser trivial, por lo que se ha de verificar que $x + y + z + 9 = 0$, que no es sino la ecuación del plano π_2 en forma general.

Impongamos la condición a ese punto *P* de estar a igual distancia de uno y otro plano:

$$\left|\frac{1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+9}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|$$

$$\left|\frac{6\lambda+3}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{6\lambda+9}{\sqrt{3}}\right| \qquad \Rightarrow \qquad |6\lambda+3| = |6\lambda+9|$$

esta última ecuación, al ser en valor absoluto, da lugar a dos ecuaciones:

$$6\lambda+3 = 6\lambda+9 \ \Rightarrow\ 3 = 9 \quad \Rightarrow \quad \text{ecuación absurda}$$

$$6\lambda+3 = -(6\lambda+9) \ \Rightarrow\ 12\lambda = -12 \ \Rightarrow\ \lambda = -1$$

Luego el punto P de la recta que esté a igual distancia de ambos planos será el

$P\,(1+2\lambda,\ -1+\lambda,\ 3\lambda) \quad \Rightarrow \quad P\,(1+2(-1),\ \ -1+(-1),\ \ 3(-1)) \quad \Rightarrow \quad P\,(-1,\ -2,\ -3)$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2003

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{Ln}\,(1+x) - \text{sen}\,x}{x\cdot \text{sen}\,x}$$

siendo $\text{Ln}(1+x)$ el logaritmo neperiano de $1+x$.

EJERCICIO 2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{x/3}$

(a) [1 PUNTO]. ¿En qué punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas?
(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

EJERCICIO 3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&m&0\\1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

(a) [1´25 PUNTOS]. ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $A\cdot X+2B=3C$?
(b) [1´25 PUNTOS]. Resuelve la ecuación matricial dada para $m=1$.

EJERCICIO 4. Se sabe que los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(-7, 1, 5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$.
(a) [1 PUNTO]. Calcula las coordenadas del punto D.
(b) [1´5 PUNTOS]. Halla el área del paralelogramo.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Sea f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)\text{Ln}(x)$, donde $\text{Ln}(x)$ es el logaritmo neperiano de x. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3/2)$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & \text{si} \quad x\neq -1 \ \text{ y } \ x\neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x=-1 \ \text{ o } \ x=1 \end{cases}$$

EJERCICIO 3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa.
(b) [1´25 PUNTOS]. Resuelve el sistema $A\cdot X=3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de todas sus soluciones.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(2, 2, 1)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. Además se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{Ln}(1+x)-\text{sen}\,x}{x\cdot\text{sen}\,x}=\frac{\text{Ln}(1+0)-\text{sen}(0)}{0\cdot\text{sen}(0)}=\frac{0-0}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\cos x}{\text{sen}\,x+x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)\cos x}{(\text{sen}\,x+x\cdot\cos x)(1+x)}=\frac{1-(1+0)\cos(0)}{(\text{sen}\,(0)+0\cdot\cos(0))(1+0)}=\frac{1-1}{(0+0)\cdot 1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x \; - \; (1+x)\left(-\text{sen } x\right)}{\left(\cos x + \cos x - x \cdot \text{sen } x\right)(1+x) + \left(\text{sen } x + x \cdot \cos x\right)} = \frac{-1-1\cdot 0}{(1+1-0)\cdot 1 + (0+0)} = \frac{-1}{2}$$

Las indeterminaciones de $\left[\frac{0}{0}\right]$ se han destruido utilizando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en un punto, coincide con el valor de la derivada de *f* en dicho punto, por tanto, si la abscisa del punto de tangencia es el x_0, su ordenada será:

$$y_0 = e^{\frac{x_0}{3}}$$

y la pendiente de la recta tangente en x_0 es:

$$f(x) = e^{\frac{x}{3}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} \;\Rightarrow\; m = f'(x_0) = \frac{1}{3} e^{\frac{x_0}{3}}$$

y en consecuencia, teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en un punto de abscisa x_0 es: $y - y_0 = f´(x_0)\,(x - x_0)$ $\Rightarrow$

$$y - e^{\frac{x_0}{3}} = \frac{1}{3} e^{\frac{x_0}{3}} \,(x - x_0)$$

impongamos ahora la condición a esta recta tangente genérica, que pase por el origen de coordenadas (0, 0):

$$0 - e^{\frac{x_0}{3}} = \frac{1}{3} e^{\frac{x_0}{3}} \,(0 - x_0) \;\Rightarrow\; -e^{\frac{x_0}{3}} = -\frac{1}{3} e^{\frac{x_0}{3}} \, x_0 \;\Rightarrow\; -3e^{\frac{x_0}{3}} = -e^{\frac{x_0}{3}} \, x_0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -3e^{\frac{x_0}{3}} + e^{\frac{x_0}{3}} x_0 = 0 \;\Rightarrow\; e^{\frac{x_0}{3}}\left(-3 + x_0\right) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x_0}{3}} = 0 \;\Rightarrow\; \text{no tiene solución} \\ -3 + x_0 = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = 3 \end{cases}$$

luego la ordenada del punto de tangencia es, $y_0 = e^{\frac{3}{3}} \Rightarrow y_0 = e$, luego el punto de tangencia es el (3, *e*).

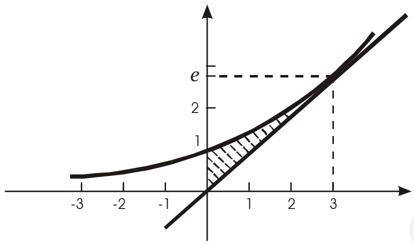
Finalmente la ecuación de la recta tangente es:

$$y - e^{\frac{x_0}{3}} = \frac{1}{3} e^{\frac{x_0}{3}} (x - x_0) \;\Rightarrow\; y - e^{\frac{3}{3}} = \frac{1}{3} e^{\frac{3}{3}} (x - 3) \;\Rightarrow\; y - e = \frac{1}{3} e (x - 3) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y - e = \frac{1}{3} e \cdot x - e \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{3} e \cdot x$$

(b) Dibujemos el recinto acotado que nos dice el ejercicio. Para ello representemos primeramente la función exponencial, $f(x) = e^{x/3}$, que es una función casi elemental por cuanto que sabemos que pasa por el punto (0, 1) del eje de ordenadas y por el punto de tangencia (3, *e*). Asimismo sabemos que presenta la asíntota horizontal, $y = 0$, para $x \to -\infty$.

Para dibujar ahora la recta tangente tendremos en cuenta que es una función lineal, y por tanto, pasa por el origen de coordenadas además de por el punto de tangencia.



El recinto limitado por ambas gráficas y el eje de ordenadas es el que se encuentra rayado y situado al lado. Su área se calcula restando a la limitada por la curva, las ordenadas en los puntos de abscisas 0 y 3 y el eje de ordenadas, la del triángulo de base 3 y altura e.

$$\text{Área} = \int_0^3 e^{\frac{x}{3}}\,dx - \frac{3\cdot e}{2} = 3\int_0^3 \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\,dx - \frac{3\cdot e}{2} = 3\cdot\left[e^{\frac{x}{3}}\right]_0^3 - \frac{3\cdot e}{2} = 3\left(e^{\frac{3}{3}} - e^{\frac{0}{3}}\right) - \frac{3\cdot e}{2} =$$

$$= 3(e-1) - \frac{3\cdot e}{2} = \left(\frac{3\cdot e}{2} - 3\right)\ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Operemos inicialmente en la ecuación matricial, $A\cdot X+2B=3C$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&m&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot X + 2\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&m&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot X + \begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\3&0&3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&m&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\3&0&3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&m&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&3&0\\3&0&3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow$$

Hemos llegado a una ecuación que para que tenga solución se ha de verificar que la matriz que está multiplicando a la matriz X, la matriz A, tenga inversa. Veamos para qué valores de m existe la inversa, para ello intentemos calcularla mediante el método de Gauss que consiste en poner a la derecha de dicha matriz la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de la A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&m&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&m&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $m \cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -m & m-1 & 1 & -m \end{array}\right)$$

Para que en la parte de la izquierda podamos obtener la matriz unidad, no nos ha de salir ninguna fila de ceros al triangular inferiormente, para ello, todos los elementos de la diagonal principal deben ser distintos de cero, por lo que *m* tiene que ser necesariamente distinta de cero, y así la ecuación matricial tendrá solución.

(b) Para resolver la ecuación matricial cuando $m = 1$, basta continuar desde donde lo habíamos dejado en el apartado anterior, sustituyendo lógicamente *m* por 1, y así obtener la matriz inversa, A^{-1} que estábamos buscando.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos ahora superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Multipliquemos la 3ª fila por -1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que al no salirnos ninguna fila de ceros, la matriz que estaba multiplicando a la matriz *X*, la *A*, tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminemos de resolver la ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

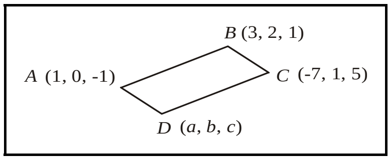
Multipliquemos a la izquierda por la inversa de *A*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓ N EJERCICIO 4.-

(a) Teniendo en cuenta lo que nos dice el ejercicio y observando el dibujo, deducimos que:



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (a,b,c)-(1,0,-1) = (a-1,b,c+1) \\ \overrightarrow{BC} = (-7,1,5)-(3,2,1) = (-10,-1,4) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$(a-1,b,c+1) = (-10,-1,4) \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a-1=-10 \\ b=-1 \\ c+1=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-9 \\ b=-1 \\ c=3 \end{array}\right. \Rightarrow \quad D(-9,-1,3)$$

(b) El área del paralelogramo *ABCD* será:

$$\text{Área} = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right|$$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3,2,1)-(1,0,-1) = (2,2,2) \\ \overrightarrow{AD} = (-9,-1,3)-(1,0,-1) = (-10,-1,4) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2,2,2)\times(-10,-1,4) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} \right) = (10,-28,18)$$

$$\text{Área} = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right| = \left| (10,-28,18) \right| = \sqrt{10^2 + (-28)^2 + 18^2} = \sqrt{1208} = 2\sqrt{302} \ \text{u}^2.$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos la integral indefinida siguiente:

$$\int (x-1) \ \text{Ln}(x) \ dx =$$

la resolveremos haciendo uso del método de integración por partes.

$$u = \text{Ln}(x) \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$dv = (x-1)\,dx \qquad v = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \text{Ln}(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \text{Ln}(x) - \int \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \text{Ln}(x) - \left(\frac{x^2}{4} - x\right) + C$$

Obtengamos ahora de toda esta familia de primitivas aquella cuya gráfica pasa por el punto (1, -3/2).

$$F(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\mathrm{Ln}\,(x)-\left(\frac{x^2}{4}-x\right)+C \Rightarrow F(1)=\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\mathrm{Ln}\,(1)-\left(\frac{1^2}{4}-1\right)+C=-\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0-\left(-\frac{3}{4}\right)+C=-\frac{3}{2} \Rightarrow C=-\frac{3}{2}-\frac{3}{4} \Rightarrow C=-\frac{9}{4}$$

Luego la primitiva de *f* es:

$$F(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\mathrm{Ln}\,(x)-\left(\frac{x^2}{4}-x\right)-\frac{9}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Antes de estudiar la derivabilidad desarrollemos la función, teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-|x|} & \text{si} \quad x\neq -1 \ \text{ y } \ x\neq 1\\ 0 & \text{si} \quad x=-1 \ \text{ o } \ x=1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-(-x)} & \text{si} \ \ x\neq -1 \ \text{ y } \ x\neq 1 \ \text{ y } \ x<0\\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \ \ x\neq -1 \ \text{ y } \ x\neq 1 \ \text{ y } \ x\geq 0\\ 0 & \text{si} \ \ x=-1 \ \text{ o } \ x=1\end{cases}$$

Observando los dominios particulares de cada uno de los trozos, podemos expresar finalmente la función de esta manera:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & \text{si} \ \ x<-1\\ 0 & \text{si} \ \ x=-1\\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \ \ -1<x<0\\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \ \ 0\leq x<1\\ 0 & \text{si} \ \ x=1\\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \ \ 1<x\end{cases}$$

Antes de estudiar la derivabilidad analizaremos la continuidad de la función.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de *x* menores que -1, $x<-1$, es una función racional, que es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo para los valores que anulen a la expresión del denominador que en este caso es el -1, pero este valor no pertenece al dominio particular de este trozo, luego la función *f* es continua para $x<-1$.

- El trozo de función para valores de x mayores que -1 y menores que 0, $-1<x<0$, es una función racional, que es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo para los valores que anulen a la expresión del denominador que en este caso es el -1, pero este valor no pertenece al dominio particular de este trozo, luego la función f es continua para $-1<x<0$.

- El trozo de función para valores de x mayores que 0 y menores que 1, $0<x<1$, es una función racional, que es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo para los valores que anulen a la expresión del denominador que en este caso es el 1, pero este valor no pertenece al dominio particular de este trozo, luego la función f es continua para $0<x<1$.

- El trozo de función para valores de x mayores que 1, $1<x$, es una función racional, que es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo para los valores que anulen a la expresión del denominador que en este caso es el 1, pero este valor no pertenece al dominio particular de este trozo, luego la función f es continua para $1<x$.

- El problema de la continuidad está en los puntos -1, 0 y 1, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Estudiemos la continuidad en el punto -1.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1}} \frac{x}{1+x} = \frac{-1}{1+(-1)^-} = \frac{-1}{-0} = +\infty \\
\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1^+ \\ x>-1}} \frac{x}{1+x} = \frac{-1}{1+(-1)^+} = \frac{-1}{+0} = -\infty \\
f(-1) = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to -1^+} f(x) \neq \lim_{x\to -1^-} f(x) \neq f(-1) \right.$$

Luego *f(x)* no es continua en el punto -1.

Estudiemos la continuidad en el punto 0.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \frac{x}{1+x} = \frac{0}{1+0^-} = 0 \\
\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \frac{x}{1-x} = \frac{0}{1-0^+} = 0 \\
f(0) = \dfrac{0}{1-0} = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \right.$$

Luego *f(x)* es continua en el punto 0.

Estudiemos la continuidad en el punto 1.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1^-\\x<1}}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1-1^-}=\dfrac{1}{+0}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1^+\\x>1}}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1-1^+}=\dfrac{1}{-0}=-\infty \\ f(1)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to1^-} f(x)\neq f(1)\right.$$

Luego *f(x)* no es continua en el punto 1.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales en dicho punto coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad.

- Para valores de $x<-1$, *f* es derivable, ya que es una función racional, que es derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo para los valores que anulen a la expresión del denominador que en este caso es el -1, pero este valor no pertenece al dominio particular de este trozo, luego la función *f* es derivable para $x<-1$. siendo la función derivada, $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

- Para valores de $-1<x<0$, *f* es derivable por las mismas razones indicadas en el párrafo anterior, siendo la función derivada, $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

- Para valores de $0<x<1$, *f* es derivable por las mismas razones anteriores, siendo la función derivada, $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

- Para valores de $1<x$ *f* es derivable por las mismas razones anteriores, siendo la función derivada, $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

- Para el valor de $x=-1$, *f* no es derivable por no ser continua en dicho punto, ya que, como dijimos antes, la no continuidad implica la no derivabilidad.

- Para el valor de $x=1$, *f* no es derivable por no ser continua en dicho punto, ya que, la no continuidad implica la no derivabilidad.

Una primera aproximación de la función derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x<-1 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad 0<x<1 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$$

El problema está en el punto 0, ya que al ser continua en dicho punto puede ser derivable.

Estudiemos la derivabilidad en dicho punto, para lo cual basta comprobar que las derivadas laterales coincidan.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)^- = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{\left(1+0^-\right)^2} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ f'(0)^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{\left(1-0^+\right)^2} = \dfrac{1}{1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \right.$$

luego la función *f* es derivable en 0. La función derivada quedará finalmente así:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Obtengamos primeramente la matriz $A+\lambda I$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Para calcular los valores de λ para los que la matriz obtenida no tiene inversa, lo haremos mediante el cálculo del rango de dicha matriz, triangulándola inferiormente:

$$\begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2+\lambda \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ -2+\lambda & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (2 - λ) · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2+\lambda \\ 0 & \lambda-3 & 2\lambda-6 \\ 0 & 2\lambda-6 & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix}$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2+\lambda \\ 0 & \lambda-3 & 2\lambda-6 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+9 \end{pmatrix}$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo los elementos a_{22} y a_{33} que pueden serlo o no, estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \quad ; \quad \lambda = -3$

** Si $\lambda = 3 \quad \Rightarrow$ La 3ª fila es toda de ceros, al igual que la 2ª, y el rango de la matriz es 1, por lo que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

** Si $\lambda = -3 \quad \Rightarrow$ La 3ª fila es toda de ceros, y el rango de la matriz es 2, por lo que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

* $a_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3$. Ya se ha estudiado este caso.

(b) Resolvamos el sistema $A \cdot X = 3X$.

Restemos a ambos miembros de la igualdad la matriz $3X$:

$A \cdot X - 3X = 3X - 3X \quad \Rightarrow \quad A \cdot X - 3X = O \quad \Rightarrow \quad (A - 3I)\, X = O$

donde O es la matriz nula de orden 3×1. Hemos pues obtenido un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, donde la matriz de los coeficientes es $A - 3I$. Calculemos esta matriz.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $5 \cdot$ [2ªf.] $- 2 \cdot$ [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: $5 \cdot$ [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -6 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] $- 2 \cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero. Hemos obtenido una fila de ceros que se corresponde con una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, que al ser homogéneo, se trata pues de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones. La interpretación geométrica se refiere a que el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos se cortan en una recta, cuya ecuación vamos a obtener terminando de resolver dicho sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por -6.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria .

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -2 & -z \\ 0 & 1 & -2z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + $2 \cdot$ [2ªf.]

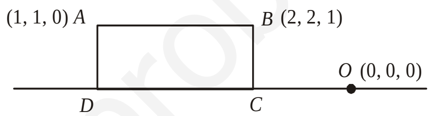
$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 0 & -5z \\ 0 & 1 & -2z \end{array}\right)$ La matriz está diagonalizada.
La solución del sistema es: $-5x = -5z$; $y = -2z$
que simplificando: $x = z$; $y = -2z$

Sustituyendo la incógnita secundaria z por un parámetro, por ejemplo, $\lambda \in \mathbb{R}$, tendremos finalmente la solución del sistema, que como dijimos se corresponde con la ecuación de una recta.

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Elegiremos como vector de dirección de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los puntos C y D, al vector $\overrightarrow{AB}$ por ser paralela dicha recta al lado que determinan los puntos A y B.



La ecuación de la recta r que pasa por el origen (0, 0, 0) y tiene como vector al $\overrightarrow{AB}$ será:

$$\overrightarrow{AB} = (2,2,1) - (1,1,0) = (1,1,1) \quad ; \quad r \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\cdot\lambda \\ y = 0 + 1\cdot\lambda \\ z = 0 + 1\cdot\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El punto C por pertenecer a la recta r tendrá como coordenadas genéricas, $(\lambda, \lambda, \lambda)$, y según el problema y tal como podemos observar en el dibujo, el vector $\overrightarrow{BC}$ será perpendicular al vector de dirección $\overrightarrow{AB}$ de la recta r, luego el producto escalar de ambos será cero:

$$\overrightarrow{BC} = (\lambda, \lambda, \lambda) - (2,2,1) = (\lambda - 2,\ \lambda - 2,\ \lambda - 1) \quad ; \quad \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 2,\ \lambda - 2,\ \lambda - 1) \bullet (1,\ 1,\ 1) = 0 \Rightarrow \lambda - 2 + \lambda - 2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3}$$

luego el punto C tiene de coordenadas: $C\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

De forma análoga procedemos con el punto D de coordenadas genéricas, $(\lambda, \lambda, \lambda)$.

$$\overrightarrow{AD} = (\lambda, \lambda, \lambda) - (1,1,0) = (\lambda - 1,\ \lambda - 1,\ \lambda) \quad ; \quad \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 1,\ \lambda - 1,\ \lambda) \bullet (1,\ 1,\ 1) = 0 \Rightarrow \lambda - 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

luego el punto D tiene de coordenadas: $D\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

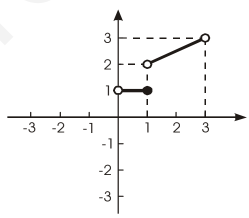
UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 40 DE EXAMEN

Opción A

<u>EJERCICIO 1</u>. En la figura adjunta puedes ver representada parte de la gráfica de una función f que está definida en el intervalo $(-3, 3)$ y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.



(a) [0´75 PUNTOS]. Razona cuál debe ser el valor de $f(0)$.
(b) [0´75 PUNTOS]. Completa la gráfica de f
(c) [1 PUNTO]. Halla $f\,'(x)$ para los $x \in (-3, 3)$ en los que dicha derivada exista.

<u>EJERCICIO 2</u>. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene máximo absoluto en el punto de abscisa $x=1$, que su gráfica pasa por el punto (1, 4) y que $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \frac{32}{2}$. Halla a, b y c.

<u>EJERCICIO 3</u>. [2´5 PUNTOS]. Determina razonadamente los valores de m para los que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x+\ y+\ z &= mx \\ x+2y+\ z &= my \\ x+2y+4z &= mz \end{aligned}\right\}$$

tiene más de una solución.

<u>EJERCICIO 4</u>. [2´5 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 1, -1)$, es paralela al plano $3x - y + z = 4$ y corta a la recta intersección de los planos $x + z = 4$ y $x - 2y + z = 1$.

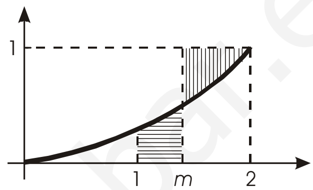
Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

es tal que $f(0)=4$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1, 2). Conociendo además que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es horizontal, calcula a, b, c y d.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo [0, 2] la gráfica de la parábola de ecuación $y=x^2/4$. Halla el valor de m para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



EJERCICIO 3. **(a)** [1 PUNTO]. Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 vale -2 ¿Cuánto vale el determinante de la matriz $4A$?

(b) [1´5 PUNTOS]. Dada la matriz $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ \lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$, ¿para qué valores de λ la matriz $3B+B^2$ no tiene inversa?

EJERCICIO 4. Considera la recta $r\equiv\begin{cases}x+y-z=1\\ y=2\end{cases}$ y el plano $\pi\equiv x-2y+z=0$.

(a) [1 PUNTO]. Calcula el haz de planos que contienen a la recta r.

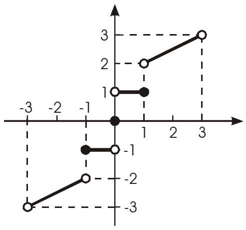
(b) [1´5 PUNTOS]. Halla el plano que contiene a la recta r y corta al plano π en una recta paralela al plano $z=0$.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función al estar definida en el intervalo $(-3,3)$ hace que exista el valor de $f(0)$, como además es simétrica respecto al origen, necesariamente $f(0)=0$, pues si tomase otro valor, por ejemplo, $a\neq 0$, entonces, $f(0)=a$, lo que implicaría que el simétrico del punto $(0, a)$ de la gráfica de f respecto del origen sería el punto $(0,-a)$, y en consecuencia f no sería una función.

(b) Teniendo en cuenta que la gráfica de la función f es simétrica respecto al origen de coordenadas, la gráfica completa de f será:



(c) Calculemos las expresiones matemáticas de cada uno de los trozos de la función *f(x)*.

* En el intervalo (-3, -2), la función es afín, ya que su gráfica es una recta que pasaría por los puntos (-3, -3) y (-1, -2):

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \Rightarrow \frac{x+1}{-3+1}=\frac{y+2}{-3+2} \Rightarrow \frac{x+1}{-2}=\frac{y+2}{-1} \Rightarrow$$

$$-x-1=-2y-4 \quad \Rightarrow \quad 2y=x-3 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

* En el intervalo [-1, 0), la función es constante, ya que su gráfica es una recta paralela al eje de abscisas y a una distancia de 1 unidad por debajo de ella:

$$y = -1$$

* En el punto 0, la función toma el valor cero.

* En el intervalo (0, 1], la función es constante, ya que su gráfica es una recta paralela al eje de abscisas y a una distancia de 1 unidad por encima de ella:

$$y = 1$$

* En el intervalo (1, 3), la función es afín, ya que su gráfica es una recta que pasaría por los puntos (1, 2) y (3, 3):

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \Rightarrow \frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{3-2} \Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1} \Rightarrow x-1=2y-4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

Por tanto, la expresión matemática de la función *f(x)* es:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{3}{2} & \text{si} \quad -3<x<-1 \\ -1 & \text{si} \quad -1\leq x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x\leq 1 \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & \text{si} \quad 1<x<3 \end{cases}$$

Si observamos la gráfica de la función *f(x)*, deducimos que no es continua en los puntos -1, 0 y 1; y teniendo en cuenta que la no continuidad de una función en un punto implica la no derivabilidad de la misma en dicho punto, la función derivada en el intervalo (-3, 3) será:

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad -3<x<-1 \\ 0 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ 0 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1<x<3 \end{cases}$$

donde además hemos tenido en cuenta que la derivada de la función en los trozos en los que es afín es 1/2, y donde es constante, cero.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

La función $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene un máximo absoluto en el punto de abscisa $x=1$, como se trata de una función cuadrática, continua y derivable en todo ℝ, ese máximo absoluto será relativo y por tanto se verificará:

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2ax+b \quad \Rightarrow \quad f'(1)=2a+b \quad \Rightarrow \quad 0=2a+b \qquad [1]$$

como el punto (1, 4) pertenece a la gráfica de *f(x)*, se cumplirá:

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \Rightarrow \quad f(1)=a+b+c \quad \Rightarrow \quad 4=a+b+c \qquad [2]$$

Por otro lado nos dicen que:

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\frac{32}{2} \;\Rightarrow\; \int_{-1}^{3} f(x)\,dx=16 \;\Rightarrow\; \int_{-1}^{3}(ax^2+bx+c)\,dx=\left[a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\right]_{-1}^{3}=$$

$$=\left(a\frac{3^3}{3}+b\frac{3^2}{2}+3c\right)-\left(a\frac{(-1)^3}{3}+b\frac{(-1)^2}{2}-c\right)=9a+\frac{9}{2}b+3c-\left(-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-c\right)=$$

$$=9a+\frac{9}{2}b+3c+\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c=\frac{28}{3}a+4b+4c \;\Rightarrow\; \frac{28}{3}a+4b+4c=16 \;\Rightarrow \qquad [3]$$

Resolvamos el sistema formado por las tres ecuaciones obtenidas, [1], [2] y [3]

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=4 \\ 2a+b=0 \\ 7a+3b+3c=12 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 7 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -4 & -16 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 4 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 4 · [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. La solución es:

$4a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

$-2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

$4c = 16 \quad \Rightarrow \quad c = 4$

Esta solución encontrada, *f(x)*=4, no se corresponde con el de una función cuadrática, por eso recomendamos al lector que rehaga el problema tomando, por ejemplo, como valor de la integral definida 32/3 en vez de 32/2. La solución que se encontrará será: *a*= -1, *b*=2 y *c*= 3.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Discutamos el sistema siguiente según los valores del parámetro *m*.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+\ \ y+\ \ z = mx \\ x+2y+\ \ z = my \\ x+2y+4z = mz \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (2-m)x+ \quad\quad y+ \quad\quad z = 0 \\ x+(2-m)y+ \quad\quad z = 0 \\ x+ \quad\quad 2y+(4-m)z = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4-m & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 1 & 2-m & 1 & 0 \\ 2-m & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $(2-m)$ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 0 & -m & -3+m & 0 \\ 0 & -3+2m & -m^2+6m-7 & 0 \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ª f.] + 2 · [2ª f.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 0 & -m & -3+m & 0 \\ 0 & -3 & -m^2+8m-13 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 0 & -3 & -m^2+8m-13 & 0 \\ 0 & -m & -3+m & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - m · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 0 & -3 & -m^2+8m-13 & 0 \\ 0 & 0 & m^3-8m^2+16m-9 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede ser cero. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow m^3 - 8m^2 + 16m - 9 = 0 \Rightarrow$

	1	-8	16	-9
1		1	-7	9
	1	-7	9	0

Por Ruffini hemos encontrado una solución, $m = 1$, busquemos las demás:

$$m^2-7m+9=0 \Rightarrow m=\frac{7\pm\sqrt{49-36}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$$

Para estos tres valores de m, 1, $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{7-\sqrt{13}}{2}$, la última ecuación es trivial y la eliminamos, quedándonos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, como se trata de un sistema homogéneo, el sistema es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0$, obtendríamos que para todos los valores de m distintos de 1, $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{7-\sqrt{13}}{2}$, un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas que al ser homogéneo, sólo admitiría la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta s, intersección de los planos, $x+z=4$ y $x-2y+z=1$, en forma paramétrica, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos:

$$\left.\begin{aligned} x+z &= 4 \\ x-2y+z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al 2º miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4-z \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución es:
$x = 4 - z$; $y = 3/2$.

Sustituyamos la incógnita secundaria z por un parámetro, por ejemplo, por $t \in \mathbb{R}$, con lo que finalmente obtendremos la ecuación de la recta s, intersección de los dos planos, en paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x = 4-t \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = t \end{cases}$$

La recta r que nos piden pasa por el punto $P(3, 1, -1)$ y corta a la recta s en un punto H de coordenadas genéricas $\left(4-t, \dfrac{3}{2}, t\right)$, de forma que el vector de dirección de la recta r, el vector $\overrightarrow{PH}$, tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{PH} = \left(4-t, \frac{3}{2}, t\right) - (3, 1, -1) = \left(1-t, \frac{1}{2}, t+1\right)$$

Como esta recta r es paralela al plano $3x-y+z=4$, se verificará que el vector de dirección, $\overrightarrow{PH}$, de la recta y el vector normal a este plano serán perpendiculares y por consiguiente su producto escalar será cero.

$$\overrightarrow{PH} \perp \vec{n} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PH} \bullet \vec{n} = 0 \;\Rightarrow\; \left(1-t, \frac{1}{2}, t+1\right) \bullet (3, -1, 1) = 0$$

$$3-3t-\frac{1}{2}+t+1=0 \;\Rightarrow\; -2t=-\frac{7}{2} \;\Rightarrow\; t=\frac{7}{4}$$

Este valor de t me permite calcular el vector de dirección de la recta r que cumple todas las condiciones del problema:

$$\overrightarrow{PH} = \left(1-t, \frac{1}{2}, t+1\right) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PH} = \left(1-\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}+1\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$$

La ecuación de la recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3-\dfrac{3}{4}\lambda \\ y = 1+\dfrac{1}{2}\lambda \\ z = -1+\dfrac{11}{4}\lambda \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Apliquemos la condición de que $f(0)=4$ a la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

$f(0)=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d \quad \Rightarrow \quad 4=d$ [1]

Apliquemos la condición de que el punto (1, 2) es un punto de inflexión:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad \Rightarrow \quad f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=6a\cdot 1+2b \quad \Rightarrow \quad 0=6a+2b \quad \Rightarrow \quad 3a+b=0$ [2]

Como el punto (1, 2) es un punto de la gráfica de $f(x)$ satisfacerá su expresión matemática:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad \Rightarrow \quad f(1)=a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+4 \quad \Rightarrow \quad 2=a+b+c+4 \quad \Rightarrow$

$a+b+c=-2$ [3]

Como la recta tangente a la gráfica de f en $x=0$ es horizontal, significa que:

$f'(0)=0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad \Rightarrow \quad f'(0)=3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c \quad \Rightarrow \quad c=0$ [4]

La ecuación [3] con este valor de c calculado quedará así: $a+b=-2$ [5]

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones [2] y [5].

$$\left.\begin{aligned} 3a+b &= 0 \\ a+b &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=3\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_2=2\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución es:

$a=1 \quad ; \quad b=-3.$

Los valores de a, b, c y d son: $a=1$; $b=-3$; $c=0$; $d=4$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos el área de cada una de las dos regiones e igualémoslas.

$$\int_1^m \frac{x^2}{4}\,dx=(2-m)\times 1-\int_m^2 \frac{x^2}{4}\,dx$$

donde la integral definida del primer miembro se corresponde con el área de la primera superficie rayada, y el segundo miembro con la de la segunda superficie rayada, obtenida ésta mediante la diferencia entre el área del rectángulo de base $(2-m)$ y altura 1, y el área de la región que queda por debajo de la región sombreada, es decir, la limitada por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas de los puntos m y 2.

$$\int_1^m \frac{x^2}{4}\,dx=(2-m)\times 1-\int_m^2 \frac{x^2}{4}\,dx \;\Rightarrow\; \int_1^m \frac{x^2}{4}\,dx+\int_m^2 \frac{x^2}{4}\,dx=2-m \;\Rightarrow\; \int_1^2 \frac{x^2}{4}\,dx=2-m$$

$$\left[\frac{x^3}{12}\right]_1^2 = 2-m \;\Rightarrow\; \frac{2^3}{12}-\frac{1^3}{12} = 2-m \;\Rightarrow\; \frac{7}{12} = 2-m \;\Rightarrow\; m = 2-\frac{7}{12} \;\Rightarrow\; m = \frac{17}{12}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Si la matriz A es: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, la matriz $4A$ es: $\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4d & 4e & 4f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$, ya que para multiplicar un número por una matriz se multiplican todos los elementos de la matriz por dicho número.

Si el determinante de la matriz A vale -2, el de la matriz $4A$ será:

$$\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4d & 4e & 4f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} = 4\times 4\times 4\times \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 64\times(-2) = -128$$

Hemos utilizado la propiedad de los determinantes que dice: "*Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante están multiplicados por un mismo número, éste podemos sacarlo fuera del símbolo del determinante como factor común*". En el ejercicio hemos sacado factor común el 4, tres veces.

(b) Calculemos la matriz $3B+B^2$

$$3\times\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2\lambda+1 & -2 \\ \lambda & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4+2\lambda & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz no tendrá inversa para aquellos valores de λ que hagan que el determinante asociado a dicha matriz valga cero:

$$\begin{vmatrix} 4+2\lambda & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} = (4+2\lambda)(2\lambda+1)(-1)+8\lambda+8\lambda-2\lambda(2\lambda+1)+32\lambda-(4+2\lambda) =$$

$$= -8\lambda-4\lambda^2-4-2\lambda+16\lambda-4\lambda^2-2\lambda+32\lambda-4-2\lambda = -8\lambda^2+34\lambda-8$$

$$-8\lambda^2+34\lambda-8 = 0 \Rightarrow -4\lambda^2+17\lambda-4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-17\pm\sqrt{289-64}}{-8} = \frac{-17\pm 15}{-8} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ 4 \end{cases}$$

Para estos dos valores de λ, 4 y 1/4, la matriz $3B+B^2$ no tendría inversa.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) El haz de planos que contiene a la recta r es:

$$\alpha(x+y-z-1)+\beta(y-2)=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha x+(\alpha+\beta)y-\alpha z-\alpha-2\beta=0$$

siendo α y β números reales cualesquiera, pero no simultánemamente cero.

(b) En el haz de planos que contiene a la recta r, tomemos, por ejemplo, $\alpha \neq 0$, da igual tomar β, y dividamos toda la expresión por α:

$$\alpha x+(\alpha+\beta)y-\alpha z-\alpha-2\beta=0 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{\alpha}x+\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha}y-\frac{\alpha}{\alpha}z-\frac{\alpha}{\alpha}-\frac{2\beta}{\alpha}=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x+\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)y-z-1-2\bullet\frac{\beta}{\alpha}=0 \;\Rightarrow\; x+(1+\lambda)y-z-1-2\lambda=0$$

donde β/α lo hemos sustituido por λ.

Hallemos la recta intersección del plano que contiene a r (en principio será un plano del haz) con el plano π, posteriormente impondremos la condición a la recta así obtenida de ser paralela al plano $z=0$.

Hallemos la recta intersección, anteriormente citada, resolviendo el sistema formado por el el plano π y el haz de planos:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z &= 0 \\ x+(1+\lambda)y-z &= 1+2\lambda \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & -1 & 1+2\lambda \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3+\lambda & -2 & 1+2\lambda \end{array}\right)$$

Intercambiemos las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3+\lambda & 1+2\lambda \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, nos sobra una incógnita la y que la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2y \\ 0 & -2 & 1+2\lambda-(3+\lambda)y \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1+2\lambda+(1-\lambda)y \\ 0 & -2 & 1+2\lambda-(3+\lambda)y \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$2x = 1+2\lambda + (1-\lambda)y$$
$$-2z = 1+2\lambda - (3+\lambda)y$$

Despejemos, finalmente, la x y la z, y sustituyamos la y por un parámetro, por ejemplo, por $t \in \mathbb{R}$, tendremos:

$$s \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1+2\lambda}{2} + \dfrac{1-\lambda}{2}t \\ y = t \\ z = -\dfrac{1+2\lambda}{2} + \dfrac{3+\lambda}{2}t \end{cases}$$

que es la ecuación de la recta intersección del plano que contiene a r con el plano π.

Impongamos ahora la condición de que esta recta sea paralela al plano $z=0$, es decir, que el vector de dirección de la recta s y el vector normal al plano $z=0$ sean perpendiculares, o lo que es lo mismo, que el producto escalar de ambos vectores sea cero:

$$\vec{v_s} \perp \vec{n}_{z=0} \Rightarrow \vec{v_s} \bullet \vec{n}_{z=0} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1-\lambda}{2},\ 1,\ \frac{3+\lambda}{2}\right) \bullet (0,\ 0,\ 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3+\lambda}{2} = 0 \Rightarrow 3+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

Sustituyamos este valor de λ en la ecuación del haz de planos que contenía a r para obtener el plano que nos pide el problema:

$$x+(1+\lambda)y-z-1-2\lambda=0 \Rightarrow x+(1-3)y-z-1-2(-3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2y-z+5=0$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 41 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

tiene un punto de derivada nula en $x=1$ que no es extremo relativo y que $f(1)=1$. Calcula a, b y c.

EJERCICIO 2. Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ La función definida por $f(x) = x^2 - 2x+2$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje OY.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

halla la matriz X que cumple que $A\cdot X=(B\cdot A^t)^t$.

EJERCICIO 4. Considera el punto $P(-2, 3, 0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases} x+y+z+2 = 0 \\ 2x-2y+z+1 = 0. \end{cases}$

(a) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r.

(b) [1´5 PUNTOS]. Determina el punto de r más próximo a P.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que la función $f : (0, 3) \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de su dominio, siendo

$$f'(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad 0<x\leq 2 \\ -x+3 & \text{si} \quad 2<x<3, \end{cases}$$

y que $f(1) = 0$. Halla la expresión analítica de f.

EJERCICIO 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por

$$f(x)=\begin{cases} |2-x| & \text{si} \quad x<a, \\ x^2-5x+7 & \text{si} \quad x\geq a, \end{cases}$$

donde a es un número real.

(a) [0´5 PUNTOS]. Determina a.

(b) [2 PUNTOS]. Halla la función derivada de f.

EJERCICIO 3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) [1 PUNTO]. Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 2$.

EJERCICIO 4. Considera una recta r y un plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right\} \ (t\in R) \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right\} \ (\alpha,\beta\in R).$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Estudia la posición relativa de la recta y el plano π.

(b) [1´25 PUNTOS]. Dados los puntos B (4, 4, 4) y C (0, 0, 0), halla un punto A en la recta r de manera que el triángulo formado por los puntos A, B y C sea rectángulo en B.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la función f tiene un punto de derivada nula en $x = 1$ y no es extremo relativo es que se trata de un punto de inflexión de tangencia horizontal. Por tanto se verificará:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2+2ax+b \quad\Rightarrow\quad f'(1)=3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b \quad\Rightarrow$$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x + 2a \;\Rightarrow\; f''(1) = 6\cdot 1 + 2a \;\Rightarrow\; 0 = 6 + 2a \;\Rightarrow\; a = -3.$

Sustituyendo este valor de a en la expresión [1, tendremos:

$0 = 3 + 2a + b \quad \Rightarrow \quad 0 = 3 + 2(-3) + b \quad \Rightarrow \quad b = 3.$

Por último, impongamos la condición de que $f(1) = 1$:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\Rightarrow\; f(1) = 1^3 + (-3)\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + c \;\Rightarrow\; 1 = 1 - 3 + 3 + c \;\Rightarrow\; c = 0.$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto x_0 es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Si $x_0 = 3 \;\Rightarrow\; y_0 = f(x_0) = f(3) = 3^2 - 2\cdot 3 + 2 = 5$

Por otro lado:

$f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 2\cdot 3 - 2 = 4$

Luego la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 3, será:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = 4\,(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 7$$

(b) Dibujemos en primer lugar la parábola: $y = x^2 - 2x + 2$.

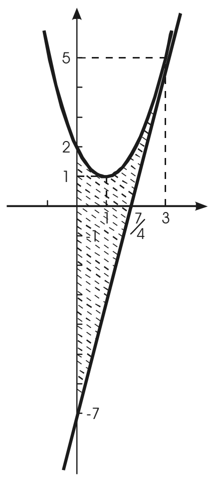
abscisa del vértice $= \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$; ordenada del vértice $= 1^2 - 2\cdot 1 + 2 = 1$

Luego el vértice es el punto V(1, 1).

Otros puntos de interés son el (0, 2) y el (3, 5).

La gráfica de la parábola está representada al lado.

La recta tangente, $y = 4x - 7$, pasa por el punto (3, 5), que es el punto de tangencia, y por los puntos de corte con los ejes (0, -7) y (7/4, 0). La gráfica también está situada al lado, juntamente con la de la parábola.



El recinto cuya área nos pide el ejercicio, es el que se encuentra rayado en el gráfico adjunto. Calculemos su área.

Primeramente calculamos el área encerrada por la parábola, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos 0 y 3.

$$A_1 = \int_0^3 \left(x^2 - 2x + 2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x\right]_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{18}{2} + 6 - 0 = 6$$

Calculemos el área encerrada por la recta tangente, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos 0 y 7/4. Se trata de un triángulo rectángulo de base 7/4 y altura 7:

$$A_2 = \frac{\frac{7}{4}\times 7}{2} = \frac{49}{8}$$

Calculemos el área encerrada por la recta tangente, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos 7/4 y 3. Se trata de un triángulo rectángulo de base (3 - 7/4) y altura 5:

$$\frac{\left(3 - \frac{7}{4}\right)\times 5}{2} = \frac{25}{8}$$

Finalmente el área del recinto pedido será:

$$A_1 + A_2 - A_3 = 6+\frac{49}{8}-\frac{25}{8}=\frac{48+49-25}{8}=\frac{72}{8}=9 \text{ u}^2.$$

También se podía haber hecho integrando la función diferencia de la parábola y la recta tangente, entre cero y tres.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Hallemos la matriz X que cumple que $A\cdot X = (B\cdot A^t)^t$. [1]

Veamos primero si la matriz A admite inversa. Tendrá inversa si el determinante asociado a dicha matriz es distinto de cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}=-2+0+0-0-0+3=1\neq 0$$

luego admite inversa.

En consecuencia, en la expresión [1], podemos multiplicar a la izquierda por la inversa de A, A^{-1},

$$A\cdot X=(B\cdot A^t)^t \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(B\cdot A^t)^t$$

por la propiedad asociativa:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(B\cdot A^t)^t \qquad \Rightarrow \qquad (A^{-1}\cdot A)\cdot X=A^{-1}\cdot(B\cdot A^t)^t$$

$$I\cdot X=A^{-1}\cdot(B\cdot A^t)^t \qquad \Rightarrow \qquad X=A^{-1}\cdot(B\cdot A^t)^t$$

por la propiedad que dice: "*La traspuesta de un producto de dos matrices es igual al producto de las traspuestas en orden inverso*", tendremos:

$$X=A^{-1}\cdot(A^t)^t\cdot B^t$$

como la traspuesta de la traspuesta de una matriz es la propia matriz:

$$X=A^{-1}\cdot A\cdot B^t$$

por la propiedad asociativa:

$$X=(A^{-1}\cdot A)\cdot B^t \qquad \Rightarrow \qquad X=I\cdot B^t\Rightarrow \qquad X=B^t$$

es decir:

$$X=\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) En primer lugar, expresamos la ecuación de la recta r en forma paramétrica, para ello, resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de los planos que determinan a la recta:

$$r\equiv\begin{cases} x+y+z+2 = 0 \\ 2x-2y+z+1 = 0 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas de las y con las de las z

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulizado. Nos sobra una incógnita, la y que la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2-y \\ 0 & -1 & 3+4y \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1+3y \\ 0 & -1 & 3+4y \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado. La solución del sistema es:

$$x = 1+3y \quad ; \quad z = -3 - 4y.$$

Terminemos de despejar las incógnitas x y z, y sustituyamos la incógnita secundaria, y, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$:

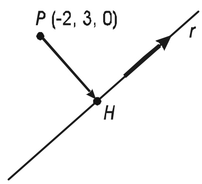
$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3\alpha \\ y = \alpha \\ z = -3-4\alpha \end{cases}$$

Un punto Q de la recta r será el $Q(1, 0, -3)$. Los puntos $P(-2, 3, 0)$ y Q determinan un vector $\vec{PQ}$ de coordenadas

$$\vec{PQ} = (1,0,-3) - (-2,3,0) = (3,-3,-3)$$

La ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r, será el que pasando por Q tiene como vectores de dirección el de la recta r y el $\vec{PQ}$.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1+3\alpha+3\beta \\ y = \alpha-3\beta \\ z = -3-4\alpha-3\beta \end{cases}$$



(a) Llamemos H al punto de r más próximo a P. El punto H al ser, en principio, un punto genérico de r, tendrá de coordenadas:

$$H\,(1+3\alpha,\ \alpha,\ -3-4\alpha)$$

Se verificará que el vector $\vec{PH}$ será perpendicular al vector de dirección $(3, 1, -4)$ de la recta r, y por tanto el producto escalar de ambos será cero:

$$\vec{PH} = (1+3\alpha,\ \alpha,\ -3-4\alpha) - (-2,\ 3,\ 0) = (3+3\alpha,\ \alpha-3,\ -3-4\alpha)$$

$$\vec{PH} \perp \vec{u_r} \ \Rightarrow\ \vec{PH} \bullet \vec{u_r} = 0 \ \Rightarrow\ (3+3\alpha,\ \alpha-3,\ -3-4\alpha) \bullet (3,\ 1,\ -4) = 0 \ \Rightarrow$$

$$9+9\alpha+\alpha-3+12+16\alpha = 0 \ \Rightarrow\ 26\alpha+18 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = -\frac{18}{26} \ \Rightarrow\ \alpha = -\frac{9}{13}$$

luego el punto H de r más próximo a P es:

$$H\left(1+3\left(\frac{-9}{13}\right),\ \frac{-9}{13},\ -3-4\left(\frac{-9}{13}\right)\right) \ \Rightarrow\ H\left(1-\frac{27}{13},\ -\frac{9}{13},\ -3+\frac{36}{13}\right) \ \Rightarrow\ H\left(-\frac{14}{13},\ -\frac{9}{13},\ -\frac{3}{13}\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Como la función f es derivable en todo su dominio (0, 3), y teniendo en cuenta que la derivabilidad implica continuidad, podemos concluir que dicha función es continua también en su dominio.

Integrando $f'(x)$, obtendremos una primera aproximación de f.

$$f(x)=\begin{cases} \int (x-1)\,dx & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ \int (-x+3)\,dx & \text{si} \quad 2<x<3 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+a & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+3x+b & \text{si} \quad 2<x<3 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $f(1) = 0$:

$$f(1)=\frac{1^2}{2}-1+a \quad \Rightarrow \quad 0=\frac{1}{2}-1+a \quad \Rightarrow \quad 0=-\frac{1}{2}+a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}$$

Como f es continua en (0, 3) lo será en $x=2$. Para que una función sea continua en un punto, los límites laterales deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en dicho punto. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{2}-2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}}\left(-\dfrac{x^2}{2}+3x+b\right)=-\dfrac{4}{2}+6+b=4+b \\ f(2)=\dfrac{4}{2}-2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \\ \dfrac{1}{2}=4+b \quad \Rightarrow \quad b=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

luego la función f será:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{7}{2} & \text{si} \quad 2<x<3 \end{cases}$$

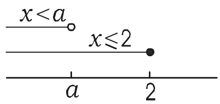
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Descompongamos el trozo de función valor absoluto de la función f en dos trozos, aplicando el concepto de función valor absoluto:

$$f(x)=\begin{cases} |2-x| & \text{si} \quad x<a \\ x^2-5x+7 & \text{si} \quad x\ge a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x<a \text{ y } 2-x\ge 0 \\ -(2-x) & \text{si} \quad x<a \text{ y } 2-x<0 \\ x^2-5x+7 & \text{si} \quad x\ge a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x<a \text{ y } x\le 2 \\ x-2 & \text{si} \quad x<a \text{ y } x>2 \\ x^2-5x+7 & \text{si} \quad x\ge a \end{cases}$$

Para resolver el sistema de inecuaciones de los dominios supongamos, en primer lugar, que $a < 2$, en cuyo caso tendremos:



- Para el primero de los dominios: $x < a$ y $x \leq 2$, la solución es, $x < a$.

- Para el segundo de los dominios: $x < a$ y $x > 2$, no es posible encontrar ninguna solución.

Por lo tanto, para este caso, la función *f* sería:

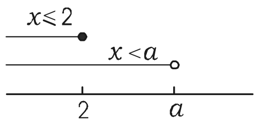
$$f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x<a \\ x^2-5x+7 & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$

Como es continua en ℝ, lo será en el punto *a* que es donde únicamente puede haber problemas, ya que cada uno de los trozos son funciones polinómicas que son continuas en todo ℝ. Para que sea continua en *a*, se ha de verificar que los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a^- \\ x<a}} (2-x) = 2-a \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ x>a}} \left(x^2-5x+7\right) = a^2-5a+7 \\ f(a) = a^2-5a+7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) \;\Rightarrow \\ a^2-5a+7 = 2-a \;\Rightarrow\; a^2-4a+5=0 \\ a = \dfrac{4\pm\sqrt{16-20}}{2} = \dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2} \end{array}\right.$$

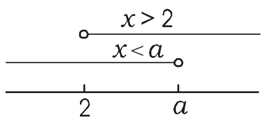
No existe ningún valor real de *a*, por lo que el supuesto de $a < 2$ no es posible.

Supongamos ahora que $a > 2$, en cuyo caso tendremos:



- Para el primero de los dominios: $x < a$ y $x \leq 2$, la solución es, $x \leq 2$.

- Para el segundo de los dominios: $x < a$ y $x > 2$, la solución es, $2 < x < a$.



Por lo tanto, para este segundo caso, la función *f* sería:

$$f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x-2 & \text{si} \quad 2<x<a \\ x^2-5x+7 & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$

Como es continua en ℝ, lo será en el punto *a* que es donde únicamente puede haber problemas, ya que cada uno de los trozos son funciones polinómicas que son continuas en todo ℝ. En el punto 2, evidentemente, es continua la función. Para que sea continua en *a*, se ha de verificar que los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a^-\\ x<a}}(x-2)=a-2\\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a^+\\ x>a}}\left(x^2-5x+7\right)=a^2-5a+7\\ f(a)=a^2-5a+7\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)\ \Rightarrow\\ a^2-5a+7=a-2\ \Rightarrow\ a^2-6a+9=0\\ a=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\dfrac{6\pm 0}{2}=3\end{array}\right.$$

La función f será continua en $\mathbb{R}$ para el valor de $a = 3$.

Por último, consideremos el caso de $a = 2$.

- Para el primero de los dominios: $x < a$ y $x \le 2$, o lo que es lo mismo, $x < 2$ y $x \le 2$, la solución es, $x < 2$.

- Para el segundo de los dominios: $x < a$ y $x > 2$, o lo que es lo mismo, $x < 2$ y $x > 2$, no es posible encontrar ninguna solución.

Por lo tanto, para este caso, la función f sería:

$$f(x)=\begin{cases}2-x & \text{si} \quad x<2\\ x^2-5x+7 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

Como es continua en $\mathbb{R}$, lo será en el punto 2 que es donde únicamente puede haber problemas, ya que cada uno de los trozos son funciones polinómicas que son continuas en todo $\mathbb{R}$. Para que sea continua en 2, se ha de verificar que los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}}(2-x)=2-2=0\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}}\left(x^2-5x+7\right)=4-10+7=1\\ f(2)=2^2-10+7=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\ \Rightarrow\\ \qquad\qquad 0\ne 1\end{array}\right.$$

Por lo tanto, este último supuesto de $a = 2$, no es posible.

En definitiva, el único valor para el que la función f es continua en $\mathbb{R}$, es para el de a=3.

(b) Como la función f es continua en $\mathbb{R}$, podrá ser derivable en $\mathbb{R}$. Veámoslo, sustituyamos el valor de a por 3, tendremos:

$$f(x)=\begin{cases}2-x & \text{si} \quad x\le 2\\ x-2 & \text{si} \quad 2<x<3\\ x^2-5x+7 & \text{si} \quad x\ge 3\end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua.

- Para valores de $x < 2$, la función f es polinómica y las funciones polinómicas son

- Para valores de $2<x<3$, la función f es polinómica y las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$, luego f será derivable para todos los valores $2 < x < 3$, siendo la derivada 1.

- Para valores de $x \geq 3$, la función f es polinómica y las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$, luego f será derivable para todos los valores $x \geq 3$, siendo la derivada $2x-5$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<2 \\ 1 & \text{si} \quad 2<x<3 \\ 2x-5 & \text{si} \quad 3<x \end{cases}$$

El problema está inicialmente en los puntos 2 y 3. Será derivable en el punto 2, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(2^-)= \lim_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} f'(x)= \lim_{x\to 2^-} (-1)= -1$$

$$f'(2^+)= \lim_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} f'(x)= \lim_{x\to 2^+} 1= 1$$

podemos observar que: $-1\neq 1 \;\Rightarrow\; f'(2^-)\neq f'(2^+)$, es decir, que las derivadas laterales no coinciden, por tanto la función no será derivable en el punto 2.

Veamos si es derivable en el punto 3, lo será si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(3^-)= \lim_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} f'(x)= \lim_{x\to 3^-} 1= 1$$

$$f'(3^+)= \lim_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3}} f'(x)= \lim_{x\to 3^+} (2x-5)= 6-5= 1$$

podemos observar que: $1=1 \;\Rightarrow\; f'(3^-)=f'(3^+)$, es decir, que las derivadas laterales coinciden, por tanto la función será derivable en el punto 3.

En definitiva, la función derivada de f será, finalmente:

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<2 \\ 1 & \text{si} \quad 2<x<3 \\ 2x-5 & \text{si} \quad 3\leq x \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para determinar los valores de m para los que la matriz A tenga inversa, lo haremos mediante el método de Ga2uss, que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ m^2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - $m^2 \cdot$ [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $m \cdot$ [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m^2 & -m^2 & 1 & 0 \\ 0 & -m & 1-m & -m & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - m · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-m & 0 & 1 & -m \\ 0 & -m & 1-m & -m & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + m · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-m & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 1-m^2 & -m & m & 1-m^2 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente y en la parte de la izquierda todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse:

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = 1$ y $m = -1 \Rightarrow$ Para estos dos valores de m la matriz A no tendría inversa porque obtendríamos toda una fila de ceros, es decir, el rango de la matriz A sería 2.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 1 - m^2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1 \Rightarrow$ Para todos los valores de m, distintos de 1 y -1, la matriz A tendría inversa porque el rango de la matriz A sería 3.

(b) Sustituyamos en la última matriz del apartado anterior, el valor de m por 2, valor para el que sí sabemos que tendrá inversa la matriz A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1-2^2 & -2 & 2 & 1-2^2 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª y 3ª fila efectuando las operaciones indicadas.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 3
Simplifiquemos la 2ª fila por 3
Simplifiquemos la 3ª fila por - 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π, localizaremos los puntos de coordenadas (x, y, z) comunes a ambos. Para ello identificamos las coordenadas respectivas:

$$\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right\} \ (t\in R) \quad ; \quad \left.\begin{array}{r} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right\} \ (\alpha,\beta\in R) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} t=\alpha \\ t=\alpha \\ 0=\beta \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{r} t-\alpha=0 \\ t-\alpha=0 \\ -\beta=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} t-\alpha=0 \\ t-\alpha=0 \\ \beta=0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

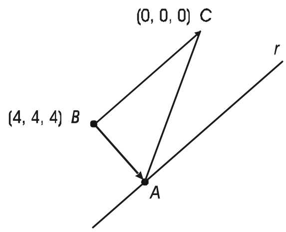
La segunda ecuación es trivial, la suprimimos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí la segunda y tercera columna.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (t) & (\beta) & (\alpha) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado, nos quedan dos ecuaciones y tres incógnitas y como es un sistema homogéneo, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, la solución es pues toda una la recta está contenida en el plano.



(b) Elijamos un punto genérico de la recta r, por ejemplo, el punto A de coordenadas $(t, t, 0)$. [1]

Se verificará, al ser rectángulo en B, que $\vec{BA} \perp \vec{BC}$, lo que implica que el producto escalar de ambos vectores será cero:

$$\vec{BA}=(t,\ t,\ 0)-(4,\ 4,\ 4)=(t-4,\ t-4,\ -4)$$
$$\vec{BC}=(0,\ 0,\ 0)-(4,\ 4,\ 4)=(-4,\ -4,\ -4)$$

$$\vec{BA}\bullet\vec{BC}=0 \quad \Rightarrow \quad (t-4,\ t-4,\ -4)\bullet(-4,\ -4,\ -4)=0 \quad \Rightarrow$$
$$-4t+16-4t+16+16=0 \quad \Rightarrow \quad -8t=-48 \quad \Rightarrow \quad t=6$$

Sustituyendo este valor de $t = 6$ en [1] tendremos que las coordenadas del punto A que nos pide el problema serán: $A\ (6, 6, 0)$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 42 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{si} \quad x\leq 1, \\ 2-x^2 & \text{si} \quad x>1. \end{cases}$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en $x = 1$.
(b) [1´25 PUNTOS]. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Determina el valor positivo de λ para el que el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = \lambda x$ es 1.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+my-z &=& -2+2my \\ mx-\ y+4z &=& 5+2z \\ 6x-10y-z &=& -1. \end{array}\right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Discute las soluciones del sistema según los valores de m.
(b) [1 PUNTO]. Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4. Se sabe que el plano Π corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos A, B y C, siendo las longitudes de los segmentos OA, OB y OC de 4 unidades, donde O es el origen de coordenadas.
(a) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano Π.
(b) [0´75 PUNTOS]. Calcula el área del triángulo ABC.
(c) [1 PUNTO]. Obtén un plano paralelo al plano Π que diste 4 unidades del origen de coordenadas.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

(a) [0´5 PUNTOS]. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
(b) [0´5 PUNTOS]. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta tangente obtenida.
(c) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 2. Considera la función f definida para $x \neq -2$ por $f(x)=\dfrac{2x^2+2}{x+2}$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla las asíntotas de la gráfica de f.
(b) [1´25 PUNTOS]. Estudia la posición relativa de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

EJERCICIO 3. Considera la matriz

$$M(x)=\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde x es un número real.
(a) [1´25 PUNTOS]. ¿Para qué valores de x existe $(M(x))^{-1}$? Para los valores de x obtenidos, calcula la matriz $(M(x))^{-1}$.
(b) [1´25 PUNTOS]. Resuelve, si es posible, la ecuación $M(3)\cdot M(x) = M(5)$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla la perpendicular común a las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\ \ \alpha \\ z=\ -\alpha \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s\equiv\begin{cases} x=\beta \\ y=2+2\beta \\ z=0. \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Determinemos primeramente los puntos donde la función f es continua, ya que en aquellos puntos donde no sea continua no podrá ser derivable.

Para que la función f sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- Para valores de $x < 1$, la función f es una función polinómica y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego f será continua para todos los valores $x < 1$.

- Para valores de $x > 1$, la función *f* es una función polinómica y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego *f* será continua para todos los valores $x > 1$.

- El problema está en el punto 1, donde hay un cambio en el comportamiento de la función, estudiemos la continuidad en dicho punto.

Para que la función *f* sea continua en el punto 1, los límites laterales deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en el punto 1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} \left(x^2+3\right) = 1+3 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \left(2-x^2\right) = 2-1 = 1 \\ f(1) = 1+3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \\ 4 \neq 1 \end{array} \Rightarrow$$

Como los límites laterales no coinciden entre sí, aunque el límite por la izquierda coincida con el valor de *f*(1), la función no será continua en el punto 1.

Por tanto *f* será continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el punto 1.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad

- Para valores de $x < 1$, la función *f* es una función polinómica y las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$, luego *f* será derivable para todos los valores $x < 1$, siendo la derivada $2x$.

- Para valores de $x > 1$, la función *f* es una función polinómica y las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$, luego *f* será derivable para todos los valores $x > 1$, siendo la derivada $-2x$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<1 \\ -2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

- El problema está inicialmente en el punto 1. Pero no será derivable en el punto 1 porque no es continua en él, luego la función derivada anterior es definitivamente la función derivada.

Las derivadas laterales en el punto 1 son: $f'(1^-) = 2\times 1 = 2 \;\; ; \;\; f'(1^+) = -2\times 1 = -2$, es decir, las derivadas laterales aunque existen no coinciden.

(b) Para obtener los intervalos de monotonía debemos calcular previamente los puntos donde la función no es continua, no es derivable y aquellos otros en los que la derivada se anule.

El punto 1, según el apartado anterior, es el único punto donde la función ni es continua ni derivable.

Veamos ahora los puntos donde la primera derivada se anula, $f'(x) = 0$.

$$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \qquad ; \qquad -2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Con los dos puntos, 0 y 1, los ordenamos y construimos los tres posibles intervalos de monotonía, $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -1, 0.5 y 2 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} x=-1 \;\Rightarrow\; f'(-1)=2\times(-1)=-2<0 \;\Rightarrow\; \text{decreciente en } (-\infty,\,0) \\ x=0.5 \;\Rightarrow\; f'(0.5)=2\times(0.5)=1>0 \;\Rightarrow\; \text{creciente en } (0,\,1) \\ x=2 \;\Rightarrow\; f'(2)=-2\times 2=-4<0 \;\Rightarrow\; \text{decreciente en } (1,\,+\infty) \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Construyamos la función diferencia de la recta y la parábola: $g(x) = \lambda x - x^2$.

Calculemos los puntos en que esta función diferencia corta al eje de abscisas, para ello resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la parábola.

$$\left.\begin{array}{l} y=\lambda x \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x(\lambda - x)=0 \;\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \lambda - x = 0 \;\Rightarrow\; x=\lambda \end{cases}$$

Calculemos ahora el área encerrada por esta función diferencia entre 0 y λ y el eje de abscisas, teniendo en cuenta que el ejercicio nos dice que $\lambda > 0$.

$$\text{Área} = \int_0^{\lambda} \left(\lambda x - x^2\right) dx = \left[\frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\lambda} = \frac{\lambda^3}{2} - \frac{\lambda^3}{3} - 0 = \frac{\lambda^3}{6}$$

Por otro lado sabemos que este área debe valer 1, luego

$$\frac{\lambda^3}{6} = 1 \;\Rightarrow\; \lambda^3 = 6 \;\Rightarrow\; \lambda = \sqrt[3]{6}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para discutir el sistema que se nos da debemos preparar antes dicho sistema, o sea:

$$\left.\begin{array}{r} x+my-z=-2+2my \\ mx-\;y+4z=5+2z \\ 6x-10y-z=-1. \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+my-z-2my=-2 \\ mx-\;y+4z-2z=\;\;5 \\ 6x-10y-z=-1. \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-\;my-\;z=-2 \\ mx-\;\;y+2z=\;\;5 \\ 6x-10y-\;z=-1. \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & -2 \\ m & -1 & 2 & 5 \\ 6 & -10 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - m · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 6 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & -2 \\ 0 & m^2-1 & 2+m & 5+2m \\ 0 & 6m-10 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & -2 \\ 0 & 6m-10 & 5 & 11 \\ 0 & m^2-1 & 2+m & 5+2m \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & -2 \\ 0 & 5 & 6m-10 & 11 \\ 0 & 2+m & m^2-1 & 5+2m \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $5 \cdot$ [3ªf.] - $(2+m) \cdot$ [2ªf.]

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & -2 \\ 0 & 5 & 6m-10 & 11 \\ 0 & 0 & -m^2-2m+15 & 3-m \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -m^2 - 2m + 15 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+60}}{-2} = \dfrac{2 \pm 8}{-2} = \begin{cases} -5 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow$

** Si $m = -5$, la última ecuación sería $0 = 3 - (-5) \Rightarrow 0 = 8$, se trata de una ecuación absurda, por lo que el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

** Si $m = 3$, la última ecuación sería $0 = 3 - 3 \Rightarrow 0 = 0$, se trata de una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$ y $m \neq -5 \Rightarrow$ para cualquier valor de m distinto de 3 y de -5, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, tendríamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el sistema es un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvamos el sistema para $m = 3$ que es cuando es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado anterior, y eliminemos directamente la última ecuación por ser trivial, tendremos:

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & -2 \\ 0 & 5 & 6m-10 & 11 \\ 0 & 0 & -m^2-2m+15 & 3-m \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 11 \end{array}\right)$$

Nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al 2º miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2+3y \\ 0 & 5 & 11-8y \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $5 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 1+7y \\ 0 & 5 & 11-8y \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución del sistema es:
$5x = 1 + 7y$; $5z = 11 - 8y$.

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la incógnita secundaria, la y, por un parámetro, por ejemplo, por t:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}y \\ z = \dfrac{11}{5} - \dfrac{8}{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}t \\ y = t \\ z = \dfrac{11}{5} - \dfrac{8}{5}t \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) El plano Π al cortar a los ejes coordenados en los puntos *A*, *B* y *C*, estando éstos a una distancia de 4 unidades del origen, significa que las coordenadas de los puntos son: *A* (4, 0, 0), *B* (0, 4, 0) y *C* (0, 0, 4).

Para calcular la ecuación del plano Π, necesitamos saber un punto, por ejemplo, el *A*, y dos vectores de dirección, por ejemplo, $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, de coordenadas:

$$\vec{AB}=(0,\,4,\,0)-(4,\,0,\,0)=(-4,\,4,\,0) \quad ; \quad \vec{AC}=(0,\,0,\,4)-(4,\,0,\,0)=(-4,\,0,\,4)$$

La ecuación del plano Π en forma paramétrica es:

$$\Pi\equiv\begin{cases} x &= 4-4\alpha-4\beta \\ y &= 4\alpha \\ z &= 4\beta \end{cases}$$

(b) El área del triángulo *ABC* será:

$$\text{Área } \overset{\Delta}{ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(-4,\,4,\,0)\times(-4,\,0,\,4)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix}4&0\\0&4\end{vmatrix},\,-\begin{vmatrix}-4&0\\-4&4\end{vmatrix},\,\begin{vmatrix}-4&4\\-4&0\end{vmatrix}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|(16,16,16)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{16^2+16^2+16^2}=\frac{16}{2}\sqrt{3}=8\sqrt{3}\ \text{u}^2.$$

(c) Expresemos el plano Π en forma general, para ello eliminaremos los parámetros α y β de las ecuaciones paramétricas.

$$\Pi\equiv\begin{cases} x=4-4\alpha-4\beta \\ y=4\alpha \\ z=4\beta \end{cases}$$

Preparemos el sistema considerando los parámetros como incógnitas y las incógnitas como término independiente.

$$\left.\begin{aligned} 4\alpha+4\beta&=4-x \\ 4\alpha\quad\ &=y \\ 4\beta&=z \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 4-x \\ 4 & 0 & y \\ 0 & 4 & z \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=4\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 4-x \\ 0 & -4 & x+y-4 \\ 0 & 4 & z \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=-4\neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 4-x \\ 0 & -4 & x+y-4 \\ 0 & 0 & x+y+z-4 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, como tiene que ser compatible la última ecuación debe ser trivial, es decir, $x+y+z-4=0$, que es la ecuación general del plano Π.

Un plano paralelo al plano Π, tendrá de ecuación general: $x+y+z+D=0$. Como la distancia de este plano al origen de coordenadas (0, 0, 0) es 4, tendremos:

$$\left|\frac{0+0+0+D}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=4 \ \Rightarrow\ \frac{D}{\sqrt{3}}=\pm 4 \ \Rightarrow\ D=4\sqrt{3} \ ; \ D=-4\sqrt{3}$$

Hemos obtenido dos posibles planos: $x+y+z+4\sqrt{3}=0 \ ; \ x+y+z-4\sqrt{3}=0.$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f (x)* en un punto x_0 es:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Calculemos el valor de la derivada de la función en el punto 1.

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \;\Rightarrow\; f(x)=x^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \;\Rightarrow\; f'(1)=\frac{1}{3}$$

Calculemos ahora la ordenada en el punto 1:

$$x_0=1 \quad\Rightarrow\quad y_0=f(1)=\sqrt[3]{1}=1$$

La ecuación de la recta tangente en el punto (1, 1) es:

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1) \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

(b) Representemos la función *f*.

1.- El dominio de *f* es $\mathbb{R}$.

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas.

Si $y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\Rightarrow\; (0, 0)$

Que será también el punto de corte con el eje de ordenadas.

3.- Simetría.

$$\begin{cases} \forall x \in R \;\Rightarrow\; -x \in R \\ f(-x)=\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}=-f(x) \end{cases}$$

La gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas

4.- Es continua en todo su dominio.

5.- La función derivada es $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, lo que implica que no es derivable en el punto $x=0$.

6.- Fácilmente puede comprobarse que es creciente en su dominio, ya que para $\forall\, x$ del mismo, *f ´(x)* es positiva, salvo en el punto cero que presenta una tangente vertical.

7.- Concavidad.

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; f''(x)=\frac{-2}{9}x^{\frac{-5}{3}}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

Solo hay dos intervalos de concavidad, teniendo en cuenta que sólo hay un valor donde la función no es derivable, $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

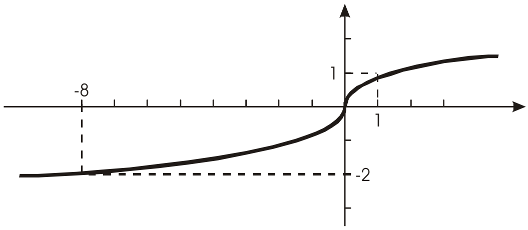
Si $x < 0 \;\Rightarrow\; f''(x) > 0 \;\Rightarrow$ en $(-\infty, 0)$ la concavidad es hacia las *y* positivas.

Si $x > 0 \;\Rightarrow\; f''(x) < 0 \;\Rightarrow$ en $(0, +\infty)$ la concavidad es hacia las *y* negativas.

Luego en el punto (0, 0) hay un punto de inflexión de tangencia vertical.

8.- No hay asíntotas.

9.- La gráfica es la situada a continuación.



Vamos ahora a representar la gráfica de la recta tangente a *f* en el punto de abscisa $x = 1$.

Como nos piden que esbocemos el recinto que delimitan *f* y la recta tangente, deberemos calcular los puntos en los que ambas gráficas se cortan. Resolvamos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt[3]{x} \\ y = \frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=\sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \quad \Rightarrow$$

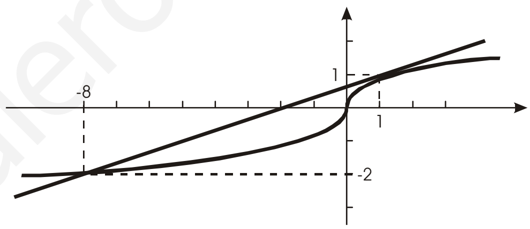
$$\left(\frac{1}{3}x\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3+3\left(\frac{1}{3}x\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=x \;\Rightarrow\; \frac{1}{27}x^3+\frac{8}{27}+\frac{6}{27}x^2+\frac{4}{9}x-x=0 \;\Rightarrow$$

$$x^3+8+6x^2+12x-27x=0 \quad \Rightarrow \quad x^3+6x^2-15x+8=0 \quad \Rightarrow$$

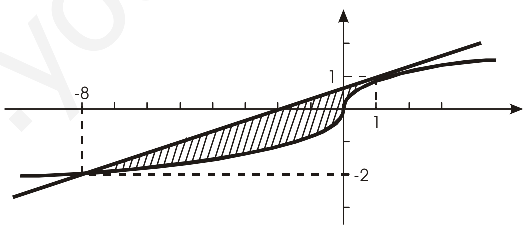
	1	6	-15	8
1		1	7	-8
	1	7	-8	0

$$x^2+7x-8=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\frac{-7\pm 9}{2}=\begin{cases}1\\-8\end{cases}$$

La gráfica de *f* y la de la recta tangente es la situada al lado.



El recinto limitado por ambas gráficas, finalmente, es el siguiente



(c) El área del recinto anterior se obtendrá hallando la función diferencia de la recta y la de *f* e integrándola entre -8 y 1:

$$\text{Área} = \int_{-8}^{1}\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}-\sqrt[3]{x}\right)dx=\left[\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{-8}^{1}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\left(\frac{64}{6}-\frac{16}{3}-\frac{3}{4}(-8)^{\frac{4}{3}}\right)=$$

$$= \frac{2+8-9}{12} - \left(\frac{64-32}{6} - \frac{3\sqrt[3]{(-8)^4}}{4} \right) = \frac{1}{12} - \frac{16}{3} + \frac{3\sqrt[3]{2^{12}}}{4} = \frac{1-64}{12} + 12 = \frac{-63+144}{12} = \frac{27}{4} \text{ u}^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "a" tal que se satisfaga: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Al tratarse de una función racional, los posibles valores de "a" hay que buscarlos entre los que anulan al denominador, en nuestro caso, ese valor puede ser el -2. Comprobémoslo.

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2+2}{x+2} = \frac{2(-2)^2+2}{-2+2} = \frac{10}{0} = \pm\infty$$

Luego hay una asíntota vertical, $x = -2$.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Calculemos dichos límites.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+2}{x+2} = \infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+2}{x+2} = -\infty$$

No hay asíntota horizontal, pero existe la posibilidad de asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2x^2+2}{x+2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+2}{x(x+2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+2}{x^2+2x} = 2$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - mx \big) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2+2}{x+2} - 2x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+2-2x^2-4x}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2-4x}{x+2} = -4$$

Luego hay una asíntota oblicua para $x \to \pm\infty$, $y = 2x - 4$.

(b) Estudiemos la posición de la gráfica de la función f respecto de la asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -2^- \\ x<-2}} \dfrac{2x^2+2}{x+2} = \dfrac{2(-2)^2+2}{-2^-+2} = \dfrac{10}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to -2^+ \\ x>-2}} \dfrac{2x^2+2}{x+2} = \dfrac{2(-2)^2+2}{-2^++2} = \dfrac{10}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a -2 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

Analicemos ahora la posición respecto de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 1000$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(1000) = \dfrac{2 \times 1000^2+2}{1000+2} = 1996'009980 \\ y_{\text{asíntota}} = 2 \times 1000 - 4 = 1996 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{2(-1000)^2+2}{-1000+2} = -2004'010020 \\ y_{\text{asíntota}} = 2(-1000)-4 = -2004 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-1000) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to -\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) La matriz $M(x)$ tendrá inversa si la matriz triangulada inferior correspondiente tiene todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero, como resulta que ya lo está, al observar los elementos de dicha diagonal comprobamos que todos son distintos de cero, ya que el único que podría no serlo sería el a_{11}, es decir, el 2^x, pero resulta que 2^x nunca puede ser cero. En definitiva, la matriz $M(x)$ admitirá inversa para cualquier valor de x.

Para determinar la matriz inversa de $M(x)$, para cualquier valor de x, lo haremos mediante el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de la matriz $M(x)$, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa, $(M(x))^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2^x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - $x \cdot$ [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2^x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2^x.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2^x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$\left(M(x)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

(b) Resolvamos la ecuación $M(3) \cdot M(x) = M(5)$.

Multipliquemos a la izquierda por la inversa de $M(3)$, $(M(3))^{-1}$.

$(M(3))^{-1} \cdot M(3) \cdot M(x) = (M(3))^{-1} \cdot M(5)$

Por la propiedad asociativa:

$((M(3))^{-1} \cdot M(3)) \cdot M(x) = (M(3))^{-1} \cdot M(5)$

Por la existencia de elemento neutro:

$I \cdot M(x) = (M(3))^{-1} \cdot M(5) \quad \Rightarrow \quad M(x) = (M(3))^{-1} \cdot M(5)$

Sustituyamos 3 en [1] y 5 en la matriz *M(x)*:

$$M(x) = \begin{pmatrix} 2^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos observar que el resultado coincide con $M(2)$, es decir, $x = 2$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Sean A y B puntos genéricos de r y s, respectivamente, impongamos la condición de que el vector, $\vec{AB}$, que determinan ambos puntos sea perpendicular a las rectas r y s y por tanto a sus respectivos vectores de dirección.

Elijamos dichos puntos genéricos, $A=(1+\alpha,\ \alpha,\ -\alpha)$ de r y $B=(\beta,\ 2+2\beta,\ 0)$ de s.

Construimos el vector $\vec{AB}$ que determinan ambos puntos:

$$\vec{AB}=(\beta,\ 2+2\beta,\ 0)-(1+\alpha,\ \alpha,\ -\alpha)=(\beta-1-\alpha,\ 2+2\beta-\alpha,\ \alpha)$$

y le imponemos la condición de que sea perpendicular a cada uno de los vectores de dirección de las rectas, lo que implica que el respectivo producto escalar sea cero:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB}\bullet\vec{u}_r=0 \\ \vec{AB}\bullet\vec{v}_s=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (\beta-1-\alpha,\ 2+2\beta-\alpha,\ \alpha)\bullet(1,\ 1,\ -1)=0 \\ (\beta-1-\alpha,\ 2+2\beta-\alpha,\ \alpha)\bullet(1,\ 2,\ 0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \beta-1-\alpha+2+2\beta-\alpha-\alpha=0 \\ \beta-1-\alpha+4+4\beta-2\alpha=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3\alpha+3\beta=-1 \\ -3\alpha+5\beta=-3 \end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema anterior de dos ecuaciones con dos incógnitas, α y β, mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual expresamos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. La solución del sistema es

$$\alpha = -2/3 \quad ; \quad \beta = -1.$$

El punto B tiene de coordenadas: $B=(\beta,\ 2+2\beta,\ 0)=(-1,\ 2+2(-1),\ 0)=(-1,\ 0,\ 0)$, y el vector $\vec{AB}$, las siguientes:

$$\vec{AB}=(\beta-1-\alpha,\ 2+2\beta-\alpha,\ \alpha)=\left(-1-1-\left(-\frac{2}{3}\right),\ 2+2(-1)-\left(-\frac{2}{3}\right),\ -\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$$

La ecuación de la recta perpendicular común será:

$$\left.\begin{array}{l} x=-1-\frac{4}{3}t \\ y=\frac{2}{3}t \\ z=-\frac{2}{3}t \end{array}\right\}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 43 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función.

EJERCICIO 2. Dada la función f definida para $x \neq -1$ por $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$, determina:

(a) [1´5 PUNTOS]. Las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1 PUNTO]. Los puntos de corte, si existen, de dicha gráfica con sus asíntotas.

EJERCICIO 3. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad y \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) [0´75 PUNTOS]. ¿Para qué valores de m existe la matriz A^{-1}?

(b) [1 PUNTO]. Siendo $m = 2$, calcula A^{-1} y resuelve el sistema $A \cdot X = B$.

(c) [0´75 PUNTOS]. Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para $m = 1$.

EJERCICIO 4. Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0. \end{cases}$

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula el ángulo formado por el plano π y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ $(x>1)$, uno de sus lados situado sobre el eje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.

EJERCICIO 2. Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 6 - x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = |x|.$$

(a) [0´75 PUNTOS]. Dibuja el recinto acotado que está limitado por las gráficas de f y g.
(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, *A*, *B* y *C*. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala *A* hubieran asistido a la sala *B* y los de la sala *B* a la sala *A*, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por el punto $(-1, -8)$ y sea tangente a los ejes coordenados.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el máximo relativo de la función $f(x)$, que al ser polinómica, será continua y derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$, por lo que el máximo relativo se encontrará entre los valores que anulen a la primera derivada. Hallemos la función primera derivada.

$$f(x)=2x^3-6x+4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 - 6$$

Obtengamos los valores que anulan a la primera derivada.

$$6x^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \ ; \ x = -1$$

Sustituyamos estos valores en la función segunda derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 12x \quad \Rightarrow$$

$$f''(1) = 12\cdot 1 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo relativo en } (1, 0)$$

$$f''(-1) = 12\cdot(-1) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo relativo en } (-1, 8)$$

Las ordenadas de los extremos relativos se han obtenido sustituyendo los valores de abscisas en la función $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$:

$f(1) = 2x^3 - 6x + 4 = 2\cdot1^3 - 6\cdot1 + 4 = 0$

$f(-1) = 2x^3 - 6x + 4 = 2\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1) + 4 = 8$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de tangencia -1, es $y = 8$, ya que es tangente en un máximo relativo, y por tanto será paralela al eje de abscisas.

Construyamos la función diferencia entre la recta tangente y *f*.

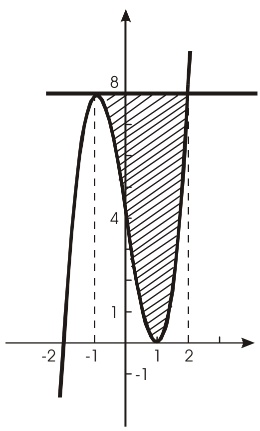
$h(x) = 8 - (2x^3 - 6x + 4) = -2x^3 + 6x + 4$

Calculemos los puntos de corte de la función diferencia con el eje de abscisas.

$h(x) = -2x^3 + 6x + 4 \quad \Rightarrow \quad -2x^3 + 6x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 3x - 2 = 0.$

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0

; $\quad x^2 - x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$



El recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta tangente es el situado al lado.

El área de dicho recinto será:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} \left(-2x^3 + 6x + 4\right) dx = \left[-2\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-2\frac{2^4}{4} + 6\frac{2^2}{2} + 4\bullet 2\right) - \left(-2\frac{(-1)^4}{4} + 6\frac{(-1)^2}{2} + 4(-1)\right) =$$

$$= -8 + 12 + 8 - \left(-\frac{1}{2} + 3 - 4\right) = 12 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{2} \text{ u.}^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "*a*" tal que se satisfaga: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Al tratarse de una función racional, los posibles valores de "*a*" hay que buscarlos entre los que anulan al denominador, en nuestro caso, ese valor puede ser el -1. Comprobémoslo.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \frac{(-1)^3}{(1-1)^2} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$$

Luego hay una asíntota vertical, $x = -1$.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Calculemos estos límites.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(1+x)^2}=\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(1+x)^2}=-\infty$$

No hay asíntota horizontal, pero existe la posibilidad de asíntota oblicua:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{(1+x)^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(1+x)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2+x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(1+x)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{x^2+2x+1}=-2$$

Luego hay una asíntota oblicua para $x\to\pm\infty$, $y = x - 2$.

Estudiemos la posición de la gráfica de la función f respecto de la asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to-1^-\\ x<-1}}\frac{x^3}{(1+x)^2}=\frac{(-1)^3}{\left(1+(-1)^-\right)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1^+\\ x>-1}}\frac{x^3}{(1+x)^2}=\frac{(-1)^3}{\left(1+(-1)^-\right)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a -1 tanto por la izquierda como cuando lo hace por la derecha.

Analicemos ahora la posición respecto de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 1000$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(1000)=\frac{1000^3}{(1+1000)^2}=998'0029960\\ y_{\text{asíntota}}=1000-2=998\end{array}\right\}\Rightarrow f(1000)>y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to+\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000)=\frac{(-1000)^3}{(1-1000)^2}=-1002'003004\\ y_{\text{asíntota}}=-1000-2=-1002\end{array}\right\}\Rightarrow f(-1000)<y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to-\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

(b) Determinemos los puntos de corte de la función, si existen, únicamente con la asíntota oblicua porque con la asíntota vertical no hay.

Resolveremos el sistema formado por las expresiones de la función y la asíntota:

$$\left.\begin{array}{l} y=x-2\\ y=\frac{x^3}{(1+x)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow x-2=\frac{x^3}{(1+x)^2}\Rightarrow (x-2)\left(x^2+2x+1\right)=x^3\Rightarrow x^3-3x-2=x^3\Rightarrow$$

$$-3x-2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3}\Rightarrow\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}-2\right)\Rightarrow\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{8}{3}\right).$$

La ordenada del punto de corte la hemos obtenido sustituyendo la abscisa $-2/3$ en la asíntota.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para determinar los valores de *m* para los que la matriz *A* tenga inversa, lo haremos mediante el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de la matriz *A*, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m+4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-m & -4 & 0 & 1 \\ 0 & m & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - *m* · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-m & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m^2-4m+3 & 4m & 1 & -m \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente y en la parte de la izquierda todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no.

Veamos los diferentes casos que pueden presentarse:

* Si $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; m^2 - 4m + 3 = 0 \;\Rightarrow\; m = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \;\Rightarrow$ Para estos dos valores de *m* la matriz *A* no tendría inversa porque obtendríamos toda una fila de ceros, es decir, el rango de la matriz *A* sería 2.

* Si $a_{33} \neq 0 \;\Rightarrow\; m^2 - 4m + 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; m \neq 3$ y $m \neq 1 \;\Rightarrow$ Para todos los valores de *m*, distintos de 3 y 1, la matriz *A* tendría inversa porque el rango de la matriz *A* sería 3.

(b) Sustituyamos en la última matriz del apartado anterior, el valor de *m* por 2, para calcular la inversa de la matriz *A*, A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-m & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m^2-4m+3 & 4m & 1 & -m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2^2-4\times 2+3 & 4\times 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por -1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora la ecuación $A \cdot X = B$.

Multipliquemos a la izquierda por la inversa de A, por A^{-1}:

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

por la propiedad asociativa: $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$

por la existencia de la matriz unidad: $I \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$

Calculemos, finalmente, la matriz X

$$X = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+1+6 \\ 12-2-9 \\ -8+1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Si queremos resolver la ecuación $A \cdot X = B$ para el valor de $m = 1$, no podemos proceder de la forma como lo hemos hecho en el apartado anterior b), porque la matriz A no tiene inversa según vimos en el apartado a), por lo que lo haremos de la forma siguiente.

Sustituyamos el valor de $m = 1$ en la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Expresemos la ecuación $A \cdot X = B$ en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido una fila de ceros que suprimimos, la incógnita que nos sobra , la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1+z \\ 0 & 1 & -1-3z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = 1 + z \quad ; \quad y = -1 - 3z$$

Sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro $t \in \mathbb{R}$:

Tendremos, finalmente, la solución del sistema: $x = 1 + t \quad ; \quad y = -1 - 3t \quad ; \quad z = t$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Si la recta debe estar contenida en el plano, al resolver el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debemos obtener un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, hallemos el valor de *a* que haga posible esa situación.

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+1=0 \\ x-3y+z=0 \\ x-y+az+2=0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss. Tengamos en cuenta que los términos independientes deben estar en el segundo miembro.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede o no serlo. Como lo que queríamos era que la recta estuviese contenida en el plano, el sistema debe ser compatible indeterminado luego la última ecuación debe ser trivial, lo que implica que $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; a+1=0 \;\Rightarrow\; a = -1$.

(b) Para calcular el ángulo formado por la recta y el plano necesitamos el vector normal al plano π, $\vec{n}=(1,-2,0)$, y el de dirección de la recta *s* que obtendremos mediante el producto vectorial de los vectores normales que definen a la misma:

$$\vec{v}_s = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (1,-3,1)\times(1,-1,1) = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2, 0, 2)$$

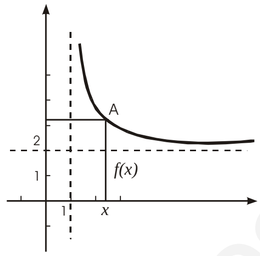
$$\operatorname{sen}\left(\widehat{s,\pi}\right) = \frac{\vec{n}\bullet\vec{v}_s}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{v}_s\right|} = \left| \frac{(1,-2,0)\bullet(-2,0,2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+0}\;\sqrt{(-2)^2+0+2^2}} \right| = \left| \frac{-2+0+0}{\sqrt{5}\,\sqrt{8}} \right| = \frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\left(\widehat{s,\pi}\right) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0^\circ\, 19'\, 18.3''$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

La construcción de los rectángulos está simulada en la gráfica adjunta, el vértice *A*, que está



sobre la curva tiene de coordenadas (x, $f(x)$), lo que implica que la función área que vamos a construir y que queremos minimizar, será:

$$A(x) = x \cdot f(x)$$

Sustituyendo la expresión de $f(x)$ en la función área, tendremos:

$$A(x) = x \cdot \frac{2x^2}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{2x^3}{x^2-1} \qquad (x>1)$$

Tal como nos dice el problema el dominio de esta función es el intervalo $(1, \infty)$. Siendo además una función continua y derivable en dicho dominio.

Calculemos el mínimo absoluto, calculando previamente el mínimo relativo.

$$A'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada

$$\frac{2x^4-6x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2x^4 - 6x^2 = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 \cdot \left(x^2-3\right) = 0 \begin{cases} 2x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

De todos los valores obtenidos, de entrada, el único que nos puede valer es el $+\sqrt{3}$ porque es el que únicamente pertenece al dominio de $A(x)$.

Estudiemos la monotonía de la función $A(x)$, en los intervalos $\left(1, \sqrt{3}\right)$ y $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, ya que al ser continua y derivable en su dominio y no existir, por tanto, puntos de no continuidad y de no derivabilidad, el valor que anula a la derivada es el único punto que nos sirve de referencia para la construcción de dichos intervalos.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 1.5 y 2, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$A'(1.5) = \frac{2(1.5)^4 - 6(1.5)^2}{(1.5^2-1)^2} = -\frac{54}{25} < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } \left(1, \sqrt{3}\right)$$

$$A'(2) = \frac{2\cdot 2^4 - 6\cdot 2^2}{(2^2-1)^2} = \frac{8}{9} > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$$

luego el valor que anulaba a la primera derivada es el mínimo absoluto. Consecuentemente la base del rectángulo de área mínima es $\sqrt{3}$ y la altura del mismo será 3, ya que:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Representemos $y = 6 - x^2$, cuya gráfica es una parábola.

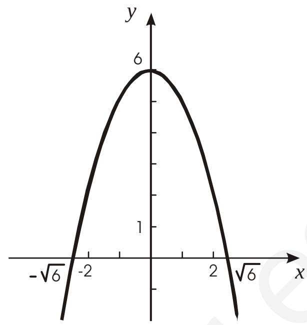
1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 6 \;\Rightarrow\; (0, 6)$

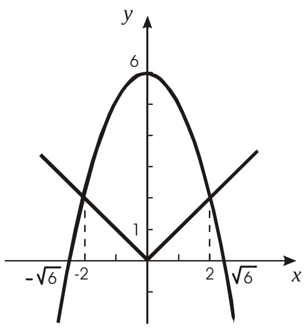
2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{6}$; $x = \sqrt{6} \;\Rightarrow\; \left(-\sqrt{6}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{6}, 0\right)$

3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -b/(2a) = 0/(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 6 \quad \Rightarrow \quad V(0, 6)$

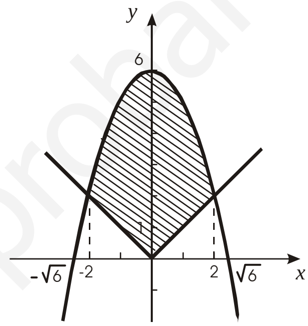
La gráfica de la función $f(x)$ es la situada al lado.





La gráfica de la función valor absoluto de x, $|x|$, es una función elemental y la hemos situado a la izquierda junto con la de la función $f(x)$.

El recinto acotado por las gráficas de ambas funciones es el que se muestra rayado.



(b) Calculemos el área del recinto rayado. Teniendo en cuenta que es simétrico respecto del eje de ordenadas, calcularemos sólo la mitad para después multiplicar el resultado por dos.

Construyamos la función diferencia entre $f(x)$ y el trozo de la del valor absoluto para valores mayores que cero, x:

$$h(x) = 6 - x^2 - x$$

Obtengamos los puntos de corte de esta nueva función con el eje de abscisas:

$$6 - x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 - x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

sólo nos interesa el valor 2, ya que el otro no forma parte de la solución en este caso

$$\text{Área} = \int_0^2 \left(-x^2 - x + 6\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2 = -\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 12 - 0 = \frac{22}{3}$$

El área del recinto acotado por ambas funciones será: $2 \times \frac{22}{3} = \frac{44}{3}$ u^2.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Llamemos x al nº de espectadores de la sala A, y al nº de espectadores de la sala B y z al nº de espectadores de la sala C. Haciendo la traducción correspondiente llegamos al sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y + 5z &= 720 \\ x + y + z &= 200 \\ 4x + 3y + 5z &= 740 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

Coloquemos directamente la segunda ecuación en primer lugar.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 3 & 4 & 5 & 720 \\ 4 & 3 & 5 & 740 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 4 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & -1 & 1 & -60 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 3 & 60 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - 2 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] - [3ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 540 \\ 0 & 3 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 3 & 60 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 3 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 3 & 60 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$3x = 300 \quad ; \quad 3y = 240 \quad ; \quad 3z = 60$$

o lo que es lo mismo:

$$x = 100 \quad ; \quad y = 80 \quad ; \quad z = 20$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Si la circunferencia es tangente a los ejes coordenados, entonces las coordenadas del centro de la circunferencia son iguales e iguales al radio de la misma.

La ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + a^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

Como el punto $(-1,-8)$ pertenece a la circunferencia, sus coordenadas verificarán a la misma:

$$(-1)^2 + (-8)^2 - 2a(-1) - 2a(-8) + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 64 + 2a + 16a + a^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$a^2 + 18a + 65 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 260}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 260}}{2} = \frac{-18 \pm 8}{2} = \begin{cases} -5 \\ -13 \end{cases}$$

Una ecuación podría ser:

$$x^2 + y^2 - 2(-5)x - 2(-5)y + (-5)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0.$$

Otra ecuación sería:

$$x^2 + y^2 - 2(-13)x - 2(-13)y + (-13)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 26x + 26y + 169 = 0.$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO JUNIO 2004

Opción A

EJERCICIO 1. De la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ se sabe que $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2)=0$.

(a) [1´25 PUNTOS] Determina *f*.

(b) [1´25 PUNTOS] Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

EJERCICIO 2. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$.

(a) [1 PUNTO] Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) [1´5 PUNTOS] Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de *f*. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de *f* ?

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} mx-y=1 \\ x-my=2m-1 \end{array}\right\}$$

(a) [1´25 PUNTOS] Clasifica el sistema según los valores de *m*.

(b) [1´25 PUNTOS] Calcula los valores de *m* para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$.

EJERCICIO 4. Sean los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(0, 5, 3)$ y $D(-1, 4, 3)$.

(a) [1 PUNTO] Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.

(b) [0´75 PUNTOS] Demuestra que el polígono de vértices consecutivos *ABCD* es un rectángulo.

(c) [0´75 PUNTOS] Calcula el área de dicho rectángulo.

Opción B

EJERCICIO 1. Se sabe que la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

es continua en $(-1,+\infty)$.

(a) [1´25 PUNTOS] Halla el valor de a. ¿Es derivable en $x=0$?

(b) [1´25 PUNTOS] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Determina b sabiendo que $b>0$ y que el área de la región limitada por la curva $y=x^2$ y la recta $y=bx$ es igual a 9/2.

EJERCICIO 3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad \text{y}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&0\end{pmatrix}$$

(a) [1´25 PUNTOS] Calcula $A\cdot B$, $A\cdot C$, $A^t\cdot B^t$ y $C^t\cdot A^t$, siendo A^t, B^t y C^t las matrices transpuestas de A, B y C, respectivamente.

(b) [1´25 PUNTOS] Razona cuáles de las matrices A, B, C y $A\cdot B$ tiene matriz inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS] Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$, halla un vector unitario $\vec{w}$ que sea coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos primeramente el conjunto de todas las primitivas de *f´(x)*:

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{3}{(x+1)^2}\,dx=\int 3(x+1)^{-2}\,dx=3\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1}=\frac{-3}{x+1}+K$$

De todas estas primitivas, *f(x)*, obtengamos la *f(x)* tal que *f*(2) = 0:

$$f(x)=\frac{-3}{x+1}+K \;\Rightarrow\; 0=\frac{-3}{2+1}+K \;\Rightarrow\; 0=-1+K \;\Rightarrow\; K=1$$

luego la primitiva que se nos pide es: $f(x)=\dfrac{-3}{x+1}+1.$

(b) Para hallar las primitivas de *f(x)*, integraremos la función *f(x)* obtenida anteriormente.

$$F(x) = \int \left(\frac{-3}{x+1} + 1 \right) dx = -3 \text{ Ln} |x+1| + x + C$$

Para determinar la primitiva cuya gráfica pase por el punto (0, 1), sustituiremos la x por 0 en la expresión anterior, y el resultado lo igualamos a 1, es decir, $F(0) = 1$.

$$-3 \text{ Ln} |0+1| + 0 + C = 1 \Rightarrow -3 \text{ Ln}(1) + C = 1 \Rightarrow 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Luego la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1) es:

$$F(x) = -3 \text{ Ln} |x+1| + x + 1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0 = 1$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - f(1) = f'(1)(x-1) \qquad [1]$$

Calculemos la ordenada en dicho punto:

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) \Rightarrow f(1) = (1+1)(1-1)(1-2) = 0$

Obtengamos la función primera derivada.

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) \Rightarrow f'(x) = (x-1)(x-2) + (x+1)(x-2) + (x+1)(x-1)$

El valor de esta derivada en el punto 1, es:

$f'(1) = (1-1)(1-2) + (1+1)(1-2) + (1+1)(1-1) = -2.$

Sustituyamos estos valores calculados en la expresión [1]

$y - 0 = (-2)(x-1) \Rightarrow y = -2x + 2$ que es la ecuación de la recta tangente.

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0 = 1$ es:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1) \Rightarrow$$

$$y - 0 = -\frac{1}{-2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$ que es la ecuación de la recta normal.

(b) La función f al ser polinómica, es continua y derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$, por lo que para determinar los intervalos de concavidad y convexidad calcularemos, en primer lugar, los valores que anulen a la segunda derivada.

$f'(x) = (x-1)(x-2) + (x+1)(x-2) + (x+1)(x-1)$

$f''(x) = (x-2) + (x-1) + (x-2) + (x+1) + (x-1) + (x+1) \Rightarrow f''(x) = 6x - 4$

$6x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2/3$

Con este valor construimos los dos posibles intervalos de concavidad y convexidad, el $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ y el $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de estos intervalos, por ejemplo, el 0 y el 1, en la segunda derivada:

$f''(0) = 6 \times 0 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow$ la función es cóncava en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

$f''(1) = 6 \times 1 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow$ la función es convexa en $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

La función al pasar de cóncava a convexa presenta un punto de inflexión en 2/3, ya que se trata, como dijimos al principio, de una función polinómica, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

La ordenada del punto de inflexión es:

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}+1\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right) \;\Rightarrow\; f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-4}{3}\right) \;\Rightarrow\; f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{20}{27}$$

Luego el punto de inflexión es el $\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right)$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para clasificar el sistema, lo expresaremos en forma matricial, y aplicaremos el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{array}\right)$$ Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 2ª.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ m & -1 & 1 \end{array}\right)$$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - m · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & -1+m^2 & 1-2m^2+m \end{array}\right)$$ La matriz está triangulada inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{22} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{22} = 0 \;\Rightarrow\; -1 + m^2 = 0 \;\Rightarrow\; m = 1 \;;\; m = -1$.

** Si $m = 1 \;\Rightarrow\; 0 = 1 - 2 + 1 \;\Rightarrow\; 0 = 0 \;\Rightarrow$ la última ecuación es trivial, la eliminamos, nos queda un sistema de una ecuación con dos incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

** Si $m = -1 \;\Rightarrow\; 0 = 1 - 2 - 1 \;\Rightarrow\; 0 = -2 \;\Rightarrow$ la última ecuación es absurda, por lo que en este caso el sistema es incompatible.

* Si $a_{22} \neq 0 \;\Rightarrow\; -1 + m^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; m \neq 1$ y $m \neq -1 \;\Rightarrow$ tendríamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se trata pues de un sistema compatible determinado, es decir, con solución única.

(b) Estudiemos la situación para el caso de $m = 1$. El sistema que nos quedaría es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & -1+m^2 & 1-2m^2+m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Como es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, la incógnita que nos sobra, la y, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria:

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1+y \end{array}\right)$ La solución es, $x = 1 + y$, sustituyamos ahora la incógnita secundaria, y, por un parámetro, por ejemplo, t, la solución finalmente será:

$$x = 1 + t \quad ; \quad y = t$$

Sustituyamos la x por 3:

$$3 = 1 + t \;\Rightarrow\; t = 2 \;\Rightarrow\; y = 2$$

Luego para $m = 1$, el sistema tiene una solución en la que $x = 3$ e $y = 2$.

Estudiemos ahora la situación para el caso de $m \neq 1$ y $m \neq -1$. El sistema sería:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & -1+m^2 & 1-2m^2+m \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1+m^2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $(-1+m^2)\cdot$ [1ªf.] $+ m \cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1+m^2 & 0 & 1-m \\ 0 & -1+m^2 & 1-2m^2+m \end{array}\right)$$

La solución de este sistema compatible determinado es:

$$x = \frac{1-m}{-1+m^2} = \frac{1-m}{(m+1)(m-1)} = \frac{-1}{m+1} \quad ; \quad y = \frac{1-2m^2+m}{-1+m^2}$$

Sustituyamos la x por 3:

$$3 = \frac{-1}{m+1} \;\Rightarrow\; 3m+3=-1 \;\Rightarrow\; m = \frac{-4}{3} \quad ; \quad y = \frac{1-2\left(\frac{-4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}}{-1+\left(\frac{-4}{3}\right)^2} = 5$$

Luego para $m = -4/3$, el sistema tiene una solución en la que $x = 3$ e $y = 5$.

Por tanto, hay dos valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x=3$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para probar que los cuatro puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(0, 5, 3)$ y $D(-1, 4, 3)$ son coplanarios, lo haremos obteniendo los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}$ *y* $\vec{AD}$ y comprobando que el producto mixto de los tres es cero.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} = (2,3,1)-(1,2,1) = (1,1,0) \\ \vec{AC} = (0,5,3)-(1,2,1) = (-1,3,2) \\ \vec{AD} = (-1,4,3)-(1,2,1) = (-2,2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6-4-4+2 = 0$$

Luego los cuatro puntos son coplanarios.

La ecuación de dicho plano la obtendremos considerando el punto A y los vectores de dirección $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\begin{cases} x = 1+\lambda-\mu \\ y = 2+\lambda+3\mu \\ z = 1+2\mu \end{cases}$$

(b) Para que el polígono de vértices consecutivos $ABCD$ sea un rectángulo se ha de verificar, en primer lugar, que $\vec{AB} = \vec{DC}$ y $\vec{AD} = \vec{BC}$, es decir, que los lados AB y DC, y los AD y BC sean paralelos e iguales

Comprobémoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{DC} = (0,5,3)-(-1,4,3) = (1,1,0) \\ \vec{BC} = (0,5,3)-(2,3,1) = (-2,2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{AB} = \vec{DC} \\ \vec{AD} = \vec{BC} \end{array}\right\}$$

En segundo lugar se ha de verificar que

$$\vec{AD} \perp \vec{AB} \quad \text{y} \quad \vec{DC} \perp \vec{BC}$$

aunque no es preciso verificar las dos, sólo una de ellas porque la otra se satisfacería como consecuencia del paralelismo anteriormente demostrado.

$$\vec{AD} \perp \vec{AB} \;\Rightarrow\; \vec{AD} \bullet \vec{AB} = 0 \;\Rightarrow\; (-2,2,2)\bullet(1,1,0) = -2+2+0 = 0$$

$$\vec{DC} \perp \vec{BC} \;\Rightarrow\; \vec{DC} \bullet \vec{BC} = 0 \;\Rightarrow\; (1,1,0)\bullet(-2,2,2) = -2+2+0 = 0$$

luego, efectivamente, es un rectángulo.

(c) El área del rectángulo anterior es: Área = base × altura

$$\text{base} = \vec{AB} = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{altura} = \vec{AD} = \left|\vec{AD}\right| = \sqrt{(-2)^2+2^2+2^2} = \sqrt{12}$$

Área = base × altura $= \sqrt{2} \times \sqrt{12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ u^2.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos el valor de a para que la función f sea continua en $(-1, +\infty)$.

Para que la función f sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de x mayores que -1 y menores que 0, $-1<x<0$, es una función polinómica y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$; luego la función f es continua para $-1<x<0$.

- El trozo de función para valores de x mayores que 0, $x>0$, es una función racional, cociente de dos funciones polinómicas, por lo que es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el -1, valor que anula al denominador pero que no pertenece al dominio particular de este trozo de función, luego la función f es continua para $x>0$.

- El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Estudiemos la continuidad en el punto 0.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \left(x^2-4x+3\right) = 3 \\
\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \left(\frac{x^2+a}{x+1}\right) = a \\
\displaystyle f(0) = \frac{0+a}{0+1} = a
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \\
3 = a
\end{array}\right.$$

Luego $f(x)$ es continua en $x=0$, y por tanto en $(-1, +\infty)$, si $a = 3$.

Estudiemos ahora la derivabilidad para ver si lo es en el punto $x=0$.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales en dicho punto coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad. En este ejercicio la función es continua en todo su dominio para a = 3, por lo que pasamos directamente a estudiar la derivabilidad.

- Para valores de $-1<x<0$, f es derivable, siendo la función derivada, $2x-4$.

- Para valores de $0<x$, f es derivable, siendo la función derivada, $\dfrac{2x(x+1)-\left(x^2+3\right)}{(x+1)^2}$, que simplificando sería $\dfrac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

Una primera aproximación de la función derivada sería:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en el punto 0.

- Para el valor de $x=0$, f es continua y podrá ser derivable, lo será si las derivadas laterales en dicho punto coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}(2x-4)=-4 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=f'(0^-) \\ \quad -4\neq-3 \end{array}\right.$$

luego la función f no es derivable en el punto $x=0$.

La expresión de la función derivada coincidirá con la 1ª aproximación que hicimos.

(b) Para estudiar la monotonía de la función debemos tener en cuenta los puntos donde la primera derivada es cero, los puntos de no existencia, los de no continuidad y los de no derivabilidad.

En nuestro caso, estudiaremos la monotonía en el dominio de la función, es decir, en el intervalo $(-1, +\infty)$. Sabemos que no hay puntos de discontinuidad y que hay un punto de no derivabilidad, el $x=0$.

Sólo nos queda calcular los puntos de derivabilidad cero, $f'(x)=0$, es decir:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=0 & \text{si} \quad 0<x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \ \text{(pero no pertenece al dominio)} \\ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\begin{cases} 1 \\ -3 \ \text{(no pertenece al dominio)} \end{cases} \end{cases}$$

En consecuencia, sólo hay un valor que anula a la primera derivada, el $x=1$.

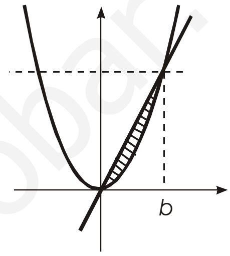
Con los valores 0 y 1, y con el dominio de la función, construimos los tres intervalos de monotonía, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. Probemos valores intermedios, por ejemplo, $-0'5$, $0'5$ y 2, de esos intervalos en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente.

$f'(-0'5)=2(-0'5)-4=-5<0 \quad \Rightarrow$ Decreciente en $(-1,\ 0)$

$f'(0'5)=\dfrac{0'5^2+2\times 0'5-3}{(0'5+1)^2}=\dfrac{-1'75}{2'25}<0 \quad \Rightarrow$ Decreciente en (0, 1)

$f'(2)=\dfrac{2^2+2\times 2-3}{(2+1)^2}=\dfrac{5}{9}>0 \quad \Rightarrow$ Creciente en $(1,\ +\infty)$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



La gráfica de la curva $y=x^2$ es una parábola de vértice el (0, 0). La recta $y=bx$, es una recta de pendiente positiva ($b>0$) y por tanto su gráfica es creciente y pasa por el origen por tratarse de una función lineal. Ambas funciones son elementales siendo la situación, aproximadamente, la situada al lado.

Es evidente que ambas funciones se cortan en $x=0$ y $x=b$:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=bx \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=bx \quad \Rightarrow \quad x^2-bx=0 \quad \Rightarrow \quad x(b-x)=0 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=b \end{array}\right.$$

El área de la región limitada por ambas gráficas (rayada en el dibujo), vale 9/2, por tanto:

$$\int_0^b \left(bx-x^2\right)dx=\frac{9}{2} \;\Rightarrow\; \left[b\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^b=\frac{9}{2} \;\Rightarrow\; \frac{b^3}{2}-\frac{b^3}{3}=\frac{9}{2} \;\Rightarrow\; \frac{b^3}{6}=\frac{9}{2} \;\Rightarrow\; b=3$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos $A\cdot B$, $A\cdot C$, $A^t\cdot B^t$ y $C^t\cdot A^t$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad ; \quad A\cdot C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$$

$$A^t\cdot B^t=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix} \quad ; \quad C^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$$

(b) Las matrices A, B y C no tienen inversa por no ser cuadradas, ya que es la primera condición para que puedan tenerla.

La matriz $A\cdot B$ sí tiene inversa porque se trata de la matriz unidad de orden 2, I_2, siendo la inversa la misma matriz unidad de orden 2.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Hallemos primeramente un vector $\vec{a}$ que sea coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, que sea combinación lineal de ambos, y a su vez perpendicular a $\vec{v}$, por tanto, se ha de verificar que:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}\\ \vec{a}\perp\vec{v}\ \Rightarrow\ \vec{a}\bullet\vec{v}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}\right)\bullet\vec{v}=0\ \Rightarrow\ \left(\alpha\,\vec{u}\right)\bullet\vec{v}+\left(\beta\,\vec{v}\right)\bullet\vec{v}=0\ \Rightarrow$$

La última expresión la hemos obtenido aplicando la propiedad distributiva de la suma de vectores respecto del producto escalar.

$$\alpha\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+\beta\left(\vec{v}\bullet\vec{v}\right)=0\ \Rightarrow$$

Y esta última expresión la hemos obtenido aplicando la propiedad pseudoasociativa.

$$\alpha\,((2,1,0)\bullet(-1,0,1))+\beta\,((-1,0,1)\bullet(-1,0,1))=0\ \Rightarrow$$

$$\alpha(-2+0+0)+\beta\,(1+0+1)=0\ \Rightarrow\ -2\alpha+2\beta=0\ \Rightarrow\ \alpha=\beta$$

El vector $\vec{a}$ será pues:

$$\vec{a}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}\ \Rightarrow\ \vec{a}=\alpha\,(2,1,0)+\beta\,(-1,0,1)\ \Rightarrow\ \vec{a}=\alpha\,(2,1,0)+\alpha\,(-1,0,1)\ \Rightarrow$$

$$\vec{a}=(\alpha,\alpha,\alpha)$$

Pero lo que nos pedía el ejercicio era un vector unitario, $\vec{w}$, que satisfaciese todo lo anterior, por tanto para obtenerlo basta dividir el vector $\vec{a}$ por su módulo:

$$\vec{w}=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}\ \Rightarrow\ \vec{w}=\frac{(\alpha,\ \alpha,\ \alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2}}\ \Rightarrow\ \vec{w}=\frac{(\alpha,\ \alpha,\ \alpha)}{\sqrt{3\alpha^2}}\ \Rightarrow\ \vec{w}=\frac{(\alpha,\ \alpha,\ \alpha)}{\sqrt{3}\,\alpha}\ \Rightarrow$$

$$\vec{w}=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}\,\alpha},\ \frac{\alpha}{\sqrt{3}\,\alpha},\ \frac{\alpha}{\sqrt{3}\,\alpha}\right)\ \Rightarrow\ \vec{w}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Si hubiésemos dividido el vector $\vec{a}$ por menos su módulo, hubiésemos obtenido este otro vector:

$$\vec{w}=\frac{\vec{a}}{-\left|\vec{a}\right|}\ \Rightarrow\ \vec{w}=\frac{(\alpha,\ \alpha,\ \alpha)}{-\sqrt{\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2}}\ \Rightarrow\ \vec{w}=\frac{(\alpha,\ \alpha,\ \alpha)}{-\sqrt{3\alpha^2}}\ \Rightarrow\ \vec{w}=\frac{(\alpha,\ \alpha,\ \alpha)}{-\sqrt{3}\,\alpha}\ \Rightarrow$$

$$\vec{w}=\left(\frac{\alpha}{-\sqrt{3}\,\alpha},\ \frac{\alpha}{-\sqrt{3}\,\alpha},\ \frac{\alpha}{-\sqrt{3}\,\alpha}\right)\ \Rightarrow\ \vec{w}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

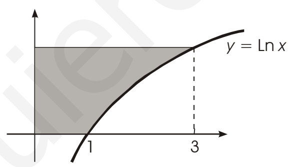
Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2004

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1€/cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Siendo Ln x el logaritmo neperiano de x, halla el área de la superficie sombreada.



EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Determina a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones

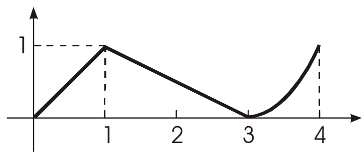
$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=\ \ 1 \\ -x+y+2z=-1 \\ ax+by+z=\ \ 4 \end{array}\right\}$$

tiene al menos dos soluciones distintas.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos $y+z=1$ e $y-3z+3=0$, y que sus otros dos vértices son $A(2, 0, 1)$ y $B(0, -3, 0)$. Halla C y el área del triángulo ABC.

Opción B

EJERCICIO 1. De una función $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$ se sabe que $f(1)=3$ y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo.



(a) [0´5 PUNTOS] Halla la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$.
(b) [1 PUNTO] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. ¿En qué punto alcanza la función su máximo absoluto?
(c) [1 PUNTO] Estudia la concavidad y la convexidad de *f*.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y=2x$ y por las curvas $y=x^2$ e $y=\dfrac{x^2}{2}$.

EJERCICIO 3.
(a) [1 PUNTO]. Sabiendo que la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de *a*?
(b) [1´5 PUNTOS]. Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

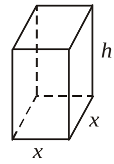
EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla la perpendicular común a las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s\equiv\begin{cases} x=\beta \\ y=\beta-1 \\ z=-1. \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Construyamos la función coste, que es lo que me piden que sea mínimo; tomemos como variable independiente el lado, *x*, de la base cuadrada.



$$C(x) = 1´5\,x^2 + 1\times x^2 + 1\times 4x\,h \qquad [1]$$

donde hemos multiplicado el área de la base, x^2, por el coste de 1´5 el cm^2, ya que es un 50% más caro que el del resto de la caja que es de 1 euro; el área de la tapa, x^2, la hemos multiplicado por 1, y el área lateral, $4x\,h$, también por 1.

Busquemos la relación existente entre la x y la h, altura de la caja, es decir, la condición que nos da el problema y es que el volumen es 80 cm^3:

$$80 = x^2\, h \;\Rightarrow\; h = \frac{80}{x^2}.$$ Sustituyamos este valor de h en [1]

$$C(x) = 1'5x^2 + x^2 + 4x\,\frac{80}{x^2} \;\Rightarrow\; C(x) = 2'5x^2 + \frac{320}{x}$$

Calculemos el dominio de esa función. De entrada, los valores de x tendrán que ser mayores que cero, es decir, estrictamente positivos. Pero como los valores que puede tomar h son también mayores que cero, observando la relación entre x y h, deducimos que los valores que puede tomar el lado x son todos los valores mayores que cero.

En definitiva, el dominio de $C(x)$ serán los valores del intervalo $(0, +\infty)$.

La función $C(x)$ es continua y derivable en este dominio, ya que se trata de la suma de una función polinómica, $2'5x^2$, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y de una función racional, $320/x$, que donde únicamente no existe es en el cero, pero este valor no pertenece al dominio de $C(x)$.

Calculemos los mínimos relativos o locales. Obtengamos la función primera derivada.

$$C'(x) = 5x - \frac{320}{x^2}$$

Calculemos el valor o los valores que anulen a esta primera derivada.

$$5x - \frac{320}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5x^3 - 320}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 5x^3 - 320 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 64 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{64} \;\Rightarrow\; x = 4$$

El único valor que anula a la derivada y pertenece al dominio es el $x = 4$.

Comprobemos que es el mínimo relativo y absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: $(0, 4)$ y $(4, +\infty)$.

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 1 y 5, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$C'(1) = 5 \times 1 - \frac{320}{1^2} = -315 < 0 \;\Rightarrow\; \text{decreciente en } (0,\ 4)$$

$$C'(5) = 5 \times 5 - \frac{320}{5^2} = \frac{61}{5} > 0 \;\Rightarrow\; \text{creciente en } (4,\ \infty)$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es mínimo relativo sino también mínimo absoluto. En definitiva, las dimensiones de la caja son:

* Lado del cuadrado de la base: 4 cm

* Altura de la caja: $h = \frac{80}{x^2} = \frac{80}{4^2} = 5$ cm

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

El área de la región sombreada será, el área del rectángulo de base 3 y altura, Ln(3), menos el área de la región limitada por la curva, Ln (x), y las ordenadas en los puntos x=1 y x=3.

$$\text{Área} = 3 \cdot \text{Ln}(3) - \int_1^3 \text{Ln}\,(x)\; dx$$

Calculemos, en primer lugar, la integral indefinida correspondiente, es decir, $\int \mathrm{Ln}(x)\,dx$
Se trata de una integral por partes.

$$u = \mathrm{Ln}(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = \int dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

$$\int \mathrm{Ln}(x)\ dx = x\ \mathrm{Ln}(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ \mathrm{Ln}(x) - x$$

y la integral definida será, por tanto:

$$\int_1^3 \mathrm{Ln}(x)\,dx = \left[x\ \mathrm{Ln}(x) - x\right]_1^3 = 3\mathrm{Ln}(3) - 3 - \left(\mathrm{Ln}(1) - 1\right) = 3\mathrm{Ln}(3) - 3 + 1 = 3\mathrm{Ln}(3) - 2$$

El área sombreada, finalmente, será:
Área = $3\ \mathrm{Ln}(3) - (3\ \mathrm{Ln}(3) - 2) = 3\ \mathrm{Ln}(3) - 3\ \mathrm{Ln}(3) + 2 = 2\ u^2$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Si el sistema tiene al menos dos soluciones distintas es que tiene infinitas, por lo que se trata de un sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=1 \\ -x+y+2z=-1 \\ ax+by+z=4 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ a & b & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - a · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & b-3a & 1-a & 4-a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 4 · [3ªf.] - (b - 3a) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5a-3b+4 & 16-4a \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado. Para que sea un sistema compatible indeterminado los elementos a_{33} y a_{34} deben ser iguales a cero, es decir: $5a - 3b + 4 = 0$
$16 - 4a = 0$

Si resolvemos este último sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, tendremos que la última ecuación nos da para a un valor de 4, que sustituyéndolo en la primera de las ecuaciones, obtendremos que b valdrá:

$$5 \times 4 - 3b + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3b = 24 \quad \Rightarrow \quad b = 8$$

En resumen, para que el sistema inicial tenga al menos dos soluciones distintas, se ha de verificar que $a = 4$ y $b = 8$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Calculemos la ecuación de la recta, intersección de los planos $y + z = 1$ e $y - 3z + 3 = 0$, en forma paramétrica. Para ello, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos.

$$\left.\begin{array}{r} y+z=\ \ 1 \\ y-3z=-3 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Pasemos la primera columna a ocupar la tercera.

$$\begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, nos sobra una incógnita, la x, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por -4.

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución del sistema es: $y = 0$; $z = 1$. Terminemos de despejar las incógnitas, llamando t a la incógnita secundaria x:

$$r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

que es la ecuación de la recta intersección de los dos planos.

El vértice C del triángulo al estar sobre esta recta tendrá de coordenadas genéricas: $(t, 0, 1)$, y al ser rectángulo en C se verificará que:

$$\vec{CA} \perp \vec{CB} \ \Rightarrow \ \vec{CA} \bullet \vec{CB} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{CA} = (2,0,1)-(t,0,1) = (2-t,0,0) \\ \vec{CB} = (0,-3,0)-(t,0,1) = (-t,-3,-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{CA} \bullet \vec{CB} = 0 \Rightarrow (2-t,0,0)\bullet(-t,-3,-1) = 0 \Rightarrow -2t+t^2 = 0 \Rightarrow t(-2+t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases}$$

hemos obtenido dos posibles puntos C, el (0, 0, 1) y el (2, 0 1), pero este último coincide con el punto A, por lo que no habría triángulo, consecuentemente el punto C es el (0, 0, 1).

Calculemos ahora el área del triángulo ABC.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{CA} \times \vec{CB}\right| = \frac{1}{2}\left|(2,0,0)\times(0,-3,-1)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(0,\,2,\,-6)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2+2^2+(-6)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{40} = \sqrt{10}\ \text{u}^2.$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función f es derivable en [0, 4], según la gráfica, luego es continua en [0, 4].

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0 = 1$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(1) = f'(1)(x-1) \qquad [1]$$

El enunciado del ejercicio nos dice que la ordenada en dicho punto es $f(1) = 3$.

De la observación de la gráfica de la función derivada, deducimos que la derivada en el punto 1 es: $f'(1) = 1$.

Sustituyamos estos valores en la expresión [1]

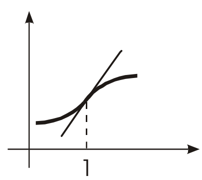
$y - 3 = 1 \times (x-1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 2$ que es la ecuación de la recta tangente.

(b) De la gráfica de la función derivada deducimos que:

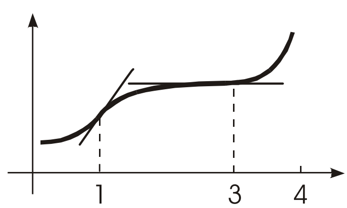
- En el intervalo (0, 1) la función derivada es positiva, $f'(x) > 0$, luego la función es creciente en (0, 1).
- En el intervalo (1, 3) la función derivada es positiva, $f'(x) > 0$, luego la función es creciente en (1, 3).
- En el intervalo (3, 4) la función derivada es positiva, $f'(x) > 0$, luego la función es creciente en (3, 4).

Al ser la función creciente en todos y cada uno de los intervalos anteriores, y siendo continua y derivable en su dominio [0, 4], significa que el máximo absoluto lo alcanzará en el punto $x = 4$.

Si profundizamos un poco, deduciremos que en el punto $x = 1$, hay un punto de inflexión, ya que las pendientes (positivas) de la rectas tangentes desde el punto 0 hasta 1 van creciendo y a partir de 1 y hasta 3 van decreciendo, eso significa que la gráfica de f tendrá un aspecto similar al representado al lado, donde además la pendiente de la tangente en 1 es 1.



En el punto $x = 3$, ocurre algo similar, pero al revés, las pendientes (positivas) de las rectas tangentes van disminuyendo desde el punto 1 hasta 3 y a partir de 3 y hasta 4 van aumentando muy rápidamente, eso significa que la gráfica de f tendrá un aspecto similar al representado al lado, donde además sabemos que la recta tangente en 3 tiene pendiente 0, o lo que es lo mismo, que es un punto de inflexión de tangencia horizontal.



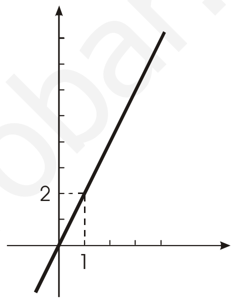
(c) La concavidad y la convexidad hay que estudiarla en la segunda derivada, por eso, a partir de la gráfica de la función primera derivada y según sea creciente o decreciente deduciremos el signo de la segunda derivada.

En el intervalo (0, 1) la función *f´(x)* es creciente, luego la primera derivada de ésta o la segunda de *f* es positiva, es decir, *f´´(x)*>0, lo que implica que la función *f* es convexa en (0, 1).

En el intervalo (1, 3) la función *f´(x)* es decreciente, luego la primera derivada de ésta o la segunda de *f* es negativa, es decir, *f´´(x)*<0, lo que implica que la función *f* es cóncava en (1,3).

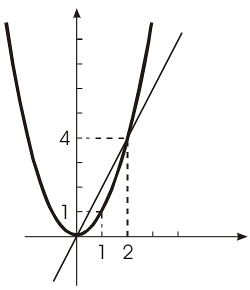
En el intervalo (3, 4) la función *f´(x)* es creciente, luego la primera derivada de ésta o la segunda de *f* es positiva, es decir, *f´´(x)*>0, lo que implica que la función *f* es convexa en (3, 4).

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

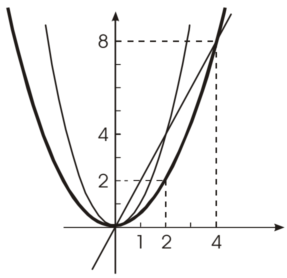


Antes de calcular el área del recinto vamos a dibujarlo.

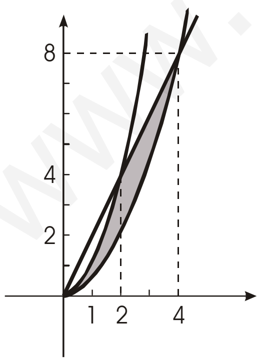
La gráfica de la función lineal $y=2x$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas; otro punto, por ejemplo, sería el (1, 2). La representación gráfica está situada al lado.



La gráfica de la función cuadrática elemental $y = x^2$ es una parábola cuyo vértice pasa por el origen de coordenadas. Otros dos puntos, por ejemplo, serían el (1, 1) y el (2, 4). La representación gráfica es la situada al lado, juntamente con la anterior.



La gráfica de la función cuadrática $y=\dfrac{x^2}{2}$ es una parábola cuyo vértice pasa por el origen de coordenadas. Al ser el coeficiente de x^2, $\dfrac{1}{2}<1,$ la parábola es más abierta que la anterior. Otros dos puntos, por ejemplo, serían el (2, 2) y el (4, 8). La representación gráfica es la situada al lado, juntamente con las anteriores.



El recinto limitado por las tres gráficas es el que se encuentra sombreado y situado al lado. Para calcular su área, hay que calcular previamente los puntos de intersección de la recta con cada una de las parábolas.

Intersección de la recta con la función $y=x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=2x \;\;\Rightarrow\;\; x^2-2x=0 \;\;\Rightarrow\;\; x(x-2)=0 \;\;\Rightarrow \\ x=0 \;\;;\;\; x=2 \end{array}\right.$$

Intersección de la recta con la función $y=\dfrac{x^2}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{2}=2x \;\;\Rightarrow\;\; x^2-4x=0 \;\;\Rightarrow\;\; x(x-4)=0 \;\;\Rightarrow \\ x=0 \;\;;\;\; x=4 \end{array}\right.$$

El área del recinto acotado por la recta y por las dos curvas será:

$$\text{Área} = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 + \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{8}{6}\right) - \left(\frac{0}{3} - \frac{0}{6}\right) + \left(16 - \frac{64}{6}\right) - \left(4 - \frac{8}{6}\right) = \frac{4}{3} - 0 + \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = 4 \text{ u.}^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Si la matriz *A* tiene de rango 2, vamos a triangularla porque el rango de una matriz por Gauss coincide con el número de filas no nulas de la matriz escalonada o triangular correspondiente.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $3 \cdot [2^a f.] - [1^a f.]$
Sustituyamos la 3ª fila por: $3 \cdot [3^a f.] + [1^a f.]$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \\ 0 & 3a-5 & 3a+1 \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -10 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $10 \cdot [3^a f.] + (3a - 5) \cdot [2^a f.]$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 9a+45 \end{pmatrix}$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el elemento a_{33} que puede serlo o no, estudiemos los dos casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 9a + 45 = 0 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow$ la 3ª fila es toda de ceros, luego el rango de la matriz *A* es 2.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 9a + 45 \neq 0 \Rightarrow a \neq -5 \Rightarrow$ la 3ª fila es distinta de cero, luego el rango de la matriz *A* es 3.

(b) Para resolver el sistema, lo haremos mediante el método de reducción de Gauss - Jordan, por lo que lo expresamos en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $3 \cdot [2^a f.] - [1^a f.]$
Sustituyamos la 3ª fila por: $3 \cdot [3^a f.] + [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -7 & -1 \\ 0 & -20 & -14 & -2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -10 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $[3^a f.] - 2 \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, la última ecuación es trivial, la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. La incógnita que nos sobra, la *z*, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1-z \\ 0 & -10 & -1+7z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -10 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $5 \cdot [1^a f.] - [2^a f.]$

$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 0 & 6-12z \\ 0 & -10 & -1+7z \end{array}\right)$ La matriz está diagonalizada, la solución es:

$15\,x = 6 - 12\,z \quad ; \quad -10\,y = -1 + 7\,z$

o lo que es lo mismo: $x=\dfrac{6}{15}-\dfrac{12}{15}z \quad ; \quad y=\dfrac{1}{10}-\dfrac{7}{10}z$

que simplificando y sustituyendo la incógnita z por un parámetro, por ejemplo, $t\in\mathbb{R}$, tendremos finalmente la solución del sistema: $x=\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{5}t \quad ; \quad y=\dfrac{1}{10}-\dfrac{7}{10}t \quad ; \quad z=t$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Las ecuaciones de las rectas r y s en forma paramétrica son:

$$r=\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases} \qquad s=\begin{cases} x=\beta \\ y=\beta-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Elijamos de la recta r un punto genérico, P, de coordenadas $P(1, 1, \alpha)$; y de la recta s otro, H, de coordenadas $H(\beta, \beta-1, -1)$.

Se ha de verificar que el vector $\overrightarrow{PH}$ que determinan estos dos puntos genéricos, ha de ser perpendicular al vector de dirección de cada una de las rectas, y por tanto, los productos escalares respectivos serán cero:

$$\overrightarrow{PH}=(\beta,\ \beta-1,\ -1)-(1,\ 1,\ \alpha)=(\beta-1,\ \beta-2,\ -1-\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PH}\perp\vec{u}_r \ \Rightarrow\ \overrightarrow{PH}\bullet\vec{u}_r=0 \ \Rightarrow\ (\beta-1,\ \beta-2,\ -1-\alpha)\bullet(0,0,1)=0 \\ \overrightarrow{PH}\perp\vec{v}_s \ \Rightarrow\ \overrightarrow{PH}\bullet\vec{v}_s=0 \ \Rightarrow\ (\beta-1,\ \beta-2,\ -1-\alpha)\bullet(1,1,0)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -1-\alpha=0 \\ \beta-1+\beta-2=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha=-1 \\ 2\beta=3 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=-1 \\ \beta=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

La ecuación de la perpendicular común es la ecuación de la recta que se apoya perpendicularmente en r y s, es la de recta que pasa por el punto, por ejemplo, el P, y tiene como vector de dirección el vector $\overrightarrow{PH}$, es decir:

$$P(1,\ 1,\ \alpha) \quad \Rightarrow \quad P(1,\ 1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{PH}=(\beta-1,\ \beta-2,\ -1-\alpha)=\left(\frac{3}{2}-1,\ \frac{3}{2}-2,\ -1-(-1)\right)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=1-\dfrac{1}{2}\lambda \\ z=-1 \end{cases}$$

que es la ecuación de la perpendicular común a r y s.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 44 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

(b) [1´25 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de *f*.

EJERCICIO 2. Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x|$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de *f* y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 3. Se sabe que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x + \alpha y = 1 \\ x + \alpha z = 1 \\ y + z = \alpha \end{array}\right\}$$

tiene una única solución.

(a) [1´25 PUNTOS]. Prueba que $\alpha \neq 0$.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la solución del sistema.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Calcula el área del triángulo de vértices $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$ y C, siendo C la proyección ortogonal del punto $(1, 1, 1)$ sobre el plano $x + y + z = 1$.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Halla una función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que su gráfica pase por el punto $M(0, 1)$, que la tangente en el punto M sea paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$ y que $f''(x) = 3x^2$.

EJERCICIO 2. Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x + 4e^{-x}$.

(a) [1 PUNTO]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

EJERCICIO 3. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6,$$

calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) [0´75 PUNTOS]. $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$.

(b) [0´75 PUNTOS]. $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$.

(c) [1 PUNTO]. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Considera el punto $A(0, 1, -1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - z = -4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = 2$. halla la ecuación de la recta que pasa por el A, es paralela a π y corta a r.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "*a*" tal que se satisfaga: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

La función que nos dan la podemos expresar de esta otra forma, $f(x) = x^2 e^{-x^2} = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

Al tratarse de una función cociente, los posibles valores de "*a*" hay que buscarlos entre los que anulan al denominador, en nuestro caso, no hay ningún valor que anule al denominador.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in R$

Calculemos estos límites.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

luego hay asíntota horizontal por la derecha, $y = 0$, veamos si la hay también por la izquierda.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)^2}{e^{(-x)^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

luego también hay asíntota horizontal por la izquierda, $y = 0$, en definitiva, la asíntota, $y = 0$, lo es por ambos lados.

Estudiemos la posición de la gráfica de la función f respecto de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 1000$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(1000) = \dfrac{1000^2}{e^{1000^2}} > 0 \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{(-1000)^2}{e^{(-1000)^2}} = \dfrac{1000^2}{e^{1000^2}} > 0 \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to -\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

(b) Se trata de una función continua y derivable en todo su dominio que es $\mathbb{R}$. Calculemos los intervalos de monotonía.

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x\,e^{-x^2} + x^2(-2x)e^{-x^2} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = 2x\,e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x\,e^{-x^2}\left(1 - x^2\right)$$

$$2x\,e^{-x^2}\left(1 - x^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \;\; ; \;\; x = -1 \end{cases}$$

Estos valores que anulan a la función primera derivada, los llevamos ordenadamente sobre la recta real y construimos los intervalos de monotonía (-∞, -1), (-1, 0), (0, 1) y (1, +∞). Probemos valores intermedios, por ejemplo, -2, -0´5, 0´5 y 2, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(-2)=2(-2)\,e^{-(-2)^2}\left(1-(-2)^2\right)=12\,e^{-4}>0 \qquad \Rightarrow \text{ Creciente en } (-\infty,\,-1)$$

$$f'(-0'5)=2(-0'5)\,e^{-(-0'5)^2}\left(1-(-0'5)^2\right)=-0'75\,e^{-0'5}<0 \qquad \Rightarrow \text{ Decreciente en } (-1,\,0)$$

$$f'(0'5)=2(0'5)\,e^{-(0'5)^2}\left(1-0'5^2\right)=0'75\,e^{-0'5}>0 \qquad \Rightarrow \text{ Creciente en } (0,\,1)$$

$$f'(2)=2(2)\,e^{-2^2}\left(1-2^2\right)=-12\,e^{-4}<0 \qquad \Rightarrow \text{ Decreciente en } (1,\,+\infty)$$

Veamos ahora los extremos locales o relativos.

$$f'(x)=2x\,e^{-x^2}\left(1-x^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$f''(x)=2\,e^{-x^2}\left(1-x^2\right)+2x(-2x)e^{-x^2}\left(1-x^2\right)+2xe^{-x^2}(-2x) \quad \Rightarrow$$

$$f''(x)=2\,e^{-x^2}-2\,x^2e^{-x^2}-4x^2\,e^{-x^2}+4x^4\,e^{-x^2}-4x^2e^{-x^2} \quad \Rightarrow$$

$$f''(x)=2\,e^{-x^2}\left(2x^4-5x^2+1\right)$$

Sustituyamos los valores, -1, 0 y 1 que anulaban a la primera derivada en la función segunda derivada:

$$f''(-1)=2\,e^{-(-1)^2}\left(2(-1)^4-5(-1)^2+1\right)=2\,e^{-1}(-2)<0 \qquad \Rightarrow \text{Máximo local en}\left(-1,\,e^{-1}\right)$$

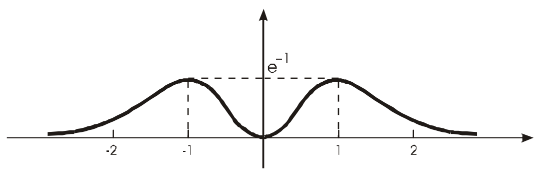
$$f''(0)=2\,e^{-0^2}\left(2\cdot 0^4-5\cdot 0^2+1\right)=2>0 \qquad \Rightarrow \text{Mínimo local en } (0,\,0)$$

$$f''(1)=2\,e^{-1^2}\left(2\cdot 1^4-5\cdot 1^2+1\right)=2e^{-1}(-2)<0 \qquad \Rightarrow \text{Máximo local en}\left(1,\,e^{-1}\right)$$

Las ordenadas de los extremos relativos se han obtenido sustituyendo los valores de abscisas en la función *f(x)*.

$$f(-1)=(-1)^2\,e^{-(-1)^2}=e^{-1} \quad ; \quad f(0)=0^2\,e^{-0^2}=0 \quad ; \quad f(1)=1^2\,e^{-1^2}=e^{-1}$$

(c) Con los datos anteriores la gráfica de la función es la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Expresemos la función *f(x)* como una función a trozos.

$$f(x)=x\,|x|=\begin{cases} x(-x) & \text{si} \quad x<0 \\ x\cdot x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Antes de pintar la gráfica de *f(x)* calculemos los puntos de corte de la misma con la bisectriz del primer y tercer cuadrante, *y* = *x*.

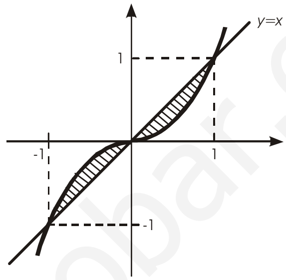
$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2 \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -x^2=x \quad \Rightarrow \quad -x^2-x=0 \quad \Rightarrow \quad -x(x+1)=0 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Hemos obtenido dos puntos de corte con el trozo $y = -x^2$, el (0, 0) y el (-1, 0).

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2=x \quad \Rightarrow \quad x^2-x=0 \quad \Rightarrow \quad x(x-1)=0 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Hemos obtenido dos puntos de corte con trozo, $y = x^2$, el (0, 0) y el (1, 0).

La región acotada que nos pide el ejercicio se corresponde con la zona rayada situada al lado, y donde hemos tenido en cuenta que los trozos de la gráfica de la función *f(x)* son dos parábolas elementales.



(b) El área de la región anterior es la siguiente.

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0}\left(x+x^2\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}\left(x-x^2\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right| =$$

$$= \left|0-\left(\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{3}\right)\right| + \left|\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}-0\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\text{ u.}^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Probemos que para $\alpha \neq 0$ el sistema tiene una única solución. Discutiremos el sistema mediante el método de Gauss, por lo que lo expresaremos en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + $\alpha \cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 2\alpha & \alpha^2 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse:

* Si $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow$ La última ecuación sería $0 = 0$, es decir, sería una ecuación trivial, la eliminamos y nos quedaría un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow$ La última ecuación sería una ecuación normal, y nos quedaría un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible determinado con solución única, que era lo que queríamos probar.

(b) Para hallar la solución del sistema para $\alpha \neq 0$, continuaremos desde donde lo habíamos triangulado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 2\alpha & \alpha^2 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por α ya que es distinto de cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & \alpha \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot [2^a f.] - [3^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & \alpha \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] - \alpha \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2-\alpha^2 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & \alpha \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$2x = 2 - \alpha^2 \quad ; \quad 2y = \alpha \quad ; \quad 2z = \alpha$$

Terminando de despejar las incógnitas, la solución, finalmente,

$$x = \frac{2-\alpha^2}{2} \quad ; \quad y = \frac{\alpha}{2} \quad ; \quad z = \frac{\alpha}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Calculemos, inicialmente, las coordenadas del punto C, es decir, la proyección ortogonal del punto $P(1, 1, 1)$ sobre el plano $x + y + z = 1$. Expresemos la ecuación del plano en forma paramétrica, para ello resolvamos el sistema formado por la ecuación del plano, es decir, un sistema de una ecuación y tres incógnitas, lo haremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, nos sobran dos incógnitas, la y y la z, que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1-y-z \end{array}\right)$$

La solución es: $x = 1 - y - z$

Sustituyamos las incógnitas secundarias por un parámetro cada una de ellas:

$$\begin{cases} x = 1-\alpha-\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

El punto C por pertenecer a este plano tendrá, de entrada, las coordenadas genéricas:

$$C\,(1-\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta)$$

Para que este punto sea la proyección ortogonal del $P(1,\ 1,\ 1)$ se ha de verificar que el vector $\vec{PC}$ sea perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, es decir:

$$\vec{PC} = \big(1-\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta\big) - \big(1,\ 1,\ 1\big) = \big(-\alpha-\beta,\ \alpha-1,\ \beta-1\big)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{PC}\perp\vec{u}\ \Rightarrow\ \vec{PC}\bullet\vec{u}=0\ \Rightarrow\ \big(-\alpha-\beta,\ \alpha-1,\ \beta-1\big)\bullet\big(-1,\ 1,0\big)=0 \\ \vec{PC}\perp\vec{v}\ \Rightarrow\ \vec{PC}\bullet\vec{v}=0\ \Rightarrow\ \big(-\alpha-\beta,\ \alpha-1,\ \beta-1\big)\bullet\big(-1,\ 0,1\big)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\alpha-1=0 \\ \alpha+\beta+\beta-1=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha+\beta=1 \\ \alpha+2\beta=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones anterior mediante el método de Gauss, para lo cual lo expresaremos en formas matricial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$6\alpha = 2 \quad ; \quad 3\beta = 1$$

que terminando de despejar, tendremos: $\alpha = \dfrac{1}{3} \quad ; \quad \beta = \dfrac{1}{3}$

El punto C tendrá de coordenadas:

$$C\big(1-\alpha-\beta,\ \ \alpha,\ \ \beta\big) = \left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3},\ \ \frac{1}{3},\ \ \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3},\ \ \frac{1}{3},\ \ \frac{1}{3}\right)$$

Para calcular el área del triángulo ABC, obtengamos antes los vectores:

$$\vec{AB} = \big(0,\ 1,\ 0\big) - \big(0,\ 0,\ 1\big) = \big(0,\ 1,\ -1\big)$$

$$\vec{AC} = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) - \big(0,\ 0,\ 1\big) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$$

Área del triángulo $ABC = \dfrac{1}{2}\left|\ \vec{AB}\times\vec{AC}\ \right| = \dfrac{1}{2}\left|\ \big(0,\ 1,\ -1\big)\times\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)\ \right| =$

$$= \frac{1}{2}\left|\ \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}\right)\ \right| = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3},\ \ -\frac{1}{3},\ \ -\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{1}{3},\ \ -\frac{1}{3},\ \ -\frac{1}{3}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la segunda derivada de *f(x)* es $f''(x) = 3x^2$ la primera derivada será:

$$f'(x) = \int 3x^2\, dx = 3\frac{x^3}{3} + \text{C} = x^3 + \text{C}$$

Si la tangente a la gráfica de f en el punto $M(0, 1)$ es paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$, significa que la primera derivada de la función en el punto de abscisa cero coincide con la pendiente de la recta, es decir,

$2x - y + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad \text{m} = 2 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 2$

$f'(x) = x^3 + \text{C} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0^3 + \text{C} \quad \Rightarrow \quad 2 = \text{C}$

luego

$f'(x) = x^3 + \text{C} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^3 + 2$

La función *f(x)* será

$$f(x) = \int \left(x^3 + 2\right) dx = \frac{x^4}{4} + 2x + \text{K}$$

Como la gráfica de esta función pasa por el punto M(0, 1), las coordenadas de este punto satisfacen la expresión matemática de dicha función, o sea, $f(0) = 1$:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + \text{K} \;\Rightarrow\; f(0) = \frac{0^4}{4} + 2\times 0 + \text{K} \;\Rightarrow\; 1 = \text{K}$$

Luego la función *f(x)*, finalmente, será: $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x + 1$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Tenemos una función que está definida en todo $\mathbb{R}$, y que es continua en todo su dominio, por tratarse, básicamente, de la suma de dos funciones exponenciales elementales.

Para hallar los intervalos de monotonía, obtengamos la función primera derivada y calculemos los valores que la hacen cero.

$$f(x) = e^x + 4e^{-x} \;\Rightarrow\; f'(x) = e^x - 4e^{-x} \;\Rightarrow\; e^x - 4e^{-x} = 0 \;\Rightarrow$$

$$e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{e^x\, e^x - 4}{e^x} = 0 \;\Rightarrow\; e^x\, e^x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; e^{2x} = 4 \;\Rightarrow$$

$$2x = \text{Ln}(4) \;\Rightarrow\; x = \frac{\text{Ln}(2^2)}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{2\,\text{Ln}(2)}{2} \;\Rightarrow\; x = \text{Ln}(2)$$

Con este valor que anula a la función primera derivada construimos los dos intervalos de monotonía siguientes, $(-\infty, \text{Ln}(2))$ y $(\text{Ln}(2), +\infty)$, probamos un valor intermedio, por ejemplo, 0 y 1, de cada uno de los intervalos en la función derivada y según nos salga mayor o menor que cero, la función será creciente o decreciente en dicho intervalo.

$f'(0) = e^0 - 4e^{-0} = 1 - 4 = -3 < 0 \;\Rightarrow$ Decreciente en $(-\infty, \text{Ln}(2))$

$f'(1) = e^1 - 4e^{-1} = e - \dfrac{4}{e} > 0 \;\Rightarrow$ Creciente en $(\text{Ln}(2), +\infty)$

La función es continua y está definida en todo $\mathbb{R}$, por lo que al pasar de decreciente a creciente en el punto x = Ln(2), significa que en dicho punto hay un mínimo relativo que a su vez es absoluto.

El valor que alcanza la función en dicho mínimo absoluto es:

$$f(\text{Ln}(2)) = e^{\text{Ln}(2)} + 4e^{-\text{Ln}(2)} \quad \Rightarrow \quad f(\text{Ln}(2)) = 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 4$$

El mínimo relativo y absoluto es el punto de coordenadas (Ln(2), 4).

(b) Teniendo en cuenta los resultados anteriores, el área que nos piden será:

$$\int_0^2 \left(e^x + 4e^{-x}\right) dx = \left[e^x - 4e^{-x}\right]_0^2 = e^2 - 4e^{-2} - \left(e^0 - 4e^{-0}\right) = e^2 - 4e^{-2} + 3 = 9'8477 \text{ u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3(-6) = 18$

La propiedad que consecutivamente hemos utilizado dos veces es:

"*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

O sea, hemos sacado factor común primeramente el signo menos de la primera fila, y después el 3 de la primera columna.

(b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} y & x & z \\ u & t & v \\ b & a & c \end{vmatrix} = -2(-1)\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2(-6) = -12$

La primera propiedad que se ha utilizado es:

"*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

En este ejercicio hemos sacado factor común el -2 de la primera columna.

La segunda propiedad que se ha aplicado es:

"*Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo*".

En este caso hemos intercambiado entre sí las dos primeras columnas.

(c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ -a & -b & -c \end{vmatrix} =$

La propiedad que hemos aplicado es:

"*Si los elementos de una fila o columna de un determinante son sumas de igual número de términos, entonces el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de las filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada por sumandos, la cual es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos sumandos para el segundo determinante, así hasta el último sumando*".

Continuando con el ejercicio, tendremos:

$$= 0 + (-1)\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6$$

La propiedad que se ha usado para el primero de los determinantes es:

"*Si dos filas o dos columnas de un determinante son proporcionales, el determinante es cero*".

En nuestro caso, la primera y tercera fila son proporcionales, ya que la tercera es doble de la primera.

La propiedad que se ha usado para el segundo de los determinantes es:

"*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

O sea, hemos sacado factor común el signo menos de la tercera fila.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Elijamos un punto genérico, *H*, de la recta *r*, para ello expresemos la ecuación de esta recta en forma paramétrica.

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 2x - z = -4 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la *z*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -z \\ 0 & 4 & -4+3z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -4+z \\ 0 & 4 & -4+3z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$2x = -4 + z \quad ; \quad 4y = -4 + 3z$$

Terminemos de despejar las incógnitas:

$$x = -2 + \frac{1}{2}z \quad ; \quad y = -1 + \frac{3}{4}z$$

Sustituyamos la incógnita secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = -1 + \frac{3}{4}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico, H, de esta recta será: $H\left(-2+\frac{1}{2}\lambda,\ -1+\frac{3}{4}\lambda,\ \lambda\right)$.

Construyamos el vector $\vec{AH}$ e impogámosle la condición de ser perpendicular al vector normal del plano π, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero. Dicho vector será el de dirección de la recta que nos pide el problema.

$$\vec{AH} = \left(-2+\frac{1}{2}\lambda,\ -1+\frac{3}{4}\lambda,\ \lambda\right) - (0,\ 1,\ -1) = \left(-2+\frac{1}{2}\lambda,\ -2+\frac{3}{4}\lambda,\ \lambda+1\right)$$

$$\vec{AH} \perp \vec{n_\pi} \ \Rightarrow\ \vec{AH}\cdot \vec{n_\pi} = 0 \ \Rightarrow\ \left(-2+\frac{1}{2}\lambda,\ -2+\frac{3}{4}\lambda,\ \lambda+1\right)\cdot(1,\ -2,\ -1) = 0 \ \Rightarrow 0$$

$$-2+\frac{1}{2}\lambda + 4 - \frac{3}{2}\lambda - \lambda - 1 = 0 \ \Rightarrow\ 1 - 2\lambda = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\vec{AH} = \left(-2+\frac{1}{2}\lambda,\ -2+\frac{3}{4}\lambda,\ \lambda+1\right) = \left(-2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},\ -2+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+1\right) = \left(-\frac{7}{4},\ -\frac{13}{8},\ \frac{3}{2}\right)$$

La ecuación de la recta, s, que pasa por A, corta a r y es paralela a π, es

$$s \equiv \begin{cases} x = -\frac{7}{4}\mu \\ y = 1 - \frac{13}{8}\mu \\ z = -1 + \frac{3}{2}\mu \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 45 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Considera la integral definida $I = \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

(a) [1´5 PUNTOS]. Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variables $1+\sqrt{x} = t$.

(b) [1 PUNTO]. Calcula I.

EJERCICIO 2. **(a)** [1 PUNTO]. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y=x^2$ que es paralela a la recta $-4x + y + 3 = 0$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y=x^2$ que pasan por el punto (2, 0).

EJERCICIO 3. Denotamos por M^t a la matriz transpuesta de una matriz M.

(a) [1 PUNTO]. Sabiendo que $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que det(A)=4, calcula los siguientes determinantes.

$$\det\left(-3A^t\right) \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}$$

(b) [0´75 PUNTOS]. Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$. Calcula det(B).

(c) [0´75 PUNTOS]. Sea C una matriz cuadrada tal que $C^{-1} = C^t$. ¿Puede ser det(C) = 3? Razona la respuesta.

EJERCICIO 4. Halla la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y-1 = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-1 = 1-z \\ y = 0. \end{cases}$$

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$.

(a) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en un punto de la misma de ordenada y=1, teniendo en cuenta que dicha recta tangente tiene pendiente negativa.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Se quiere fabricar una caja abierta de chapa con base cuadrada y con 32 litros de capacidad. Halla las dimensiones de la caja que precisa la menor cantidad de chapa.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} mx+2y+z=2 \\ x+my=m \\ 2x+mz=0 \end{array}\right\}.$$

(a) [0´5 PUNTOS]. Determina los valores de *m* para los que $x=0$, $y=1$ y $z=0$ es solución del sistema.

(b) [1 PUNTO]. Determina los valores de *m* para los que el sistema es incompatible.

(c) [1 PUNTO]. Determina los valores de *m* para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Considera los puntos $P(6,-1,-10)$, $Q(0,2,2)$ y R, que es el punto de intersección del plano $\pi\equiv 2x+\lambda y+z-2=0$ y la recta

$$r\equiv\left\{\begin{array}{r} x+y+z-1=0 \\ y=1. \end{array}\right.$$

Determina λ sabiendo que los puntos P, Q y R están alineados.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Hagamos el cambio de variable $1+\sqrt{x}=t$, al diferenciar esta expresión tendremos:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=dt \qquad\Rightarrow\qquad dx=2\sqrt{x}\,dt \qquad\Rightarrow\qquad dx=2\left(t-1\right)dt$$

Los límites de integración quedarán modificados así:

si $x = 1 \Rightarrow 1+\sqrt{1} = t \Rightarrow t = 2$; si $x = 9 \Rightarrow 1+\sqrt{9} = t \Rightarrow t = 4$

La expresión de la integral con motivo de este cambio será:

$$I = \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_2^4 \frac{1}{t}\,2\,(t-1)\,dt$$

(b) Calculemos *I*.

$$I = \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_2^4 \frac{1}{t}\,2\,(t-1)\,dt = \int_2^4 \frac{2t-2}{t}\,dt = \int_2^4\left(\frac{2t}{t}-\frac{2}{t}\right)dt = \int_2^4\left(2-\frac{2}{t}\right)dt =$$

$$= \Big[2t - 2\,\mathrm{Ln}(t)\Big]_2^4 = \big(2\times 4 - 2\,\mathrm{Ln}(4)\big) - \big(2\times 2 - 2\,\mathrm{Ln}(2)\big) = 8 - 2\,\mathrm{Ln}(2^2) - 4 + 2\,\mathrm{Ln}(2) =$$

$$= 8 - 4\,\mathrm{Ln}(2) - 4 + 2\,\mathrm{Ln}(2) = 4 - 2\,\mathrm{Ln}(2) = 4 - \mathrm{Ln}(4)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la pendiente de la recta $-4x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = 4x - 3 \Rightarrow m = 4$.

La recta tangente a la curva de ecuación, $y = x^2$, que sea paralela a la recta anterior, tendrá la misma pendiente, es decir, 4.

La derivada de la función $y = x^2$ en el punto x_0 es:

$$y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y'_{x_0} = 2x_0$$

el punto x_0 donde la tangente a la gráfica de $y = x^2$ es paralela a la recta $-4x + y + 3 = 0$ será

$$y'_{x_0} = 2x_0 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2$$

Si el punto de tangencia tiene de abscisa $x_0 = 2$, la ordenada de dicho punto es:

$$y_0 = 2^2 = 4$$

Luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 4\,(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 4.$$

(b) Para hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto (2, 0), consideraremos como punto de tangencia genérico el (x_0, y_0), por lo que dichas ecuaciones tangentes son:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - x_0^2 = 2x_0\,(x - x_0)$$

impongamos la condición a estas rectas tangentes que pasen por el punto (2, 0).

$$0 - x_0^2 = 2x_0\,(2 - x_0) \quad \Rightarrow \quad 0 = 4x_0 - 2x_0^2 + x_0^2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = 4x_0 - x_0^2 \quad \Rightarrow \quad x_0(4 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente en cada uno de estos dos puntos es:

* si $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow y'_0 = 0 \Rightarrow y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 0\,(x - 0) \Rightarrow y = 0$.

* si $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 16 \Rightarrow y'_0 = 0 \Rightarrow y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \Rightarrow y - 16 = 8\,(x - 4) \Rightarrow y = 8x - 16$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos antes la matriz $-3A^t$ y después $\det(-3A^t)$.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow -3A^t=\begin{pmatrix} -3a & -3c \\ -3b & -3d \end{pmatrix}$$

Hemos tenido en cuenta que la matriz transpuesta de una matriz se obtiene cambiando filas por columnas o viceversa. Y que para multiplicar una matriz por un número, hay que multiplicar todos los elementos de la matriz por dicho número

$$\det(-3A^t)=\begin{vmatrix} -3a & -3c \\ -3b & -3d \end{vmatrix}=(-3)(-3)\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=9\times 4=36$$

Las propiedades de los determinantes que hemos utilizado son, en primer lugar:

"*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

En este caso dos veces el -3.

Por último:

"*El determinante asociado a una matriz cuadrada y el correspondiente a la matriz transpuesta son iguales*".

En nuestro caso:

$$\det(A)=\det\left(A^t\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=4$$

Calculemos ahora este otro determinante.

$$\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}=2(-3)\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=-6(-1)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=6\times 4=24$$

La primera propiedad que hemos usado es:

"*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

En este caso hemos sacado 2 y -3.

La segunda propiedad utilizada es:

"*Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo*".

En este ejercicio hemos intercambiado entre sí la primera y segunda columna.

(b) Si $B^3=I \quad \Rightarrow \quad B\times B\times B=I \quad \Rightarrow \quad |B\times B\times B|=|I| \quad \Rightarrow$

Ya que si dos matrices son iguales, sus determinantes asociados también lo son.

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices, y que el determinante de la matriz identidad es 1, tendremos:

$$|B|\times|B|\times|B|=|I| \quad \Rightarrow \quad |B|^3=1 \quad \Rightarrow \quad |B|=\sqrt[3]{1}=1$$

(c) Si $C^{-1}=C^t \quad \Rightarrow \quad |C^{-1}|=|C^t| \quad \Rightarrow \quad |C^{-1}|=|C| \quad \Rightarrow$

Ya que si dos matrices cuadradas son iguales, sus determinantes asociados también lo son, y que el determinante asociado a una matriz cuadrada y el correspondiente a la matriz transpuesta son iguales.

Teniendo en cuenta que el determinante asociado a una matriz cuadrada y el determinante correspondiente de la matriz inversa son inversos, tendremos:

$$\left|C\right| = \left|C^{-1}\right| \Rightarrow \left|C\right| = \frac{1}{\left|C\right|} \Rightarrow \left|C\right|^2 = 1 \Rightarrow \left|C\right| = \sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} \left|C\right| = 1 \\ \left|C\right| = -1 \end{cases}$$

luego $|C|$ no puede ser 3, es decir, $|C| \neq 3$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Para hallar la distancia entre ambas rectas estudiaremos, primeramente, la posición relativa de dichas rectas. Para lo cual resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - 1 = 1 - z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 0 \\ -3y - z &= -5 \\ x + z &= 2 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: $3 \cdot$ [4ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, pero hemos obtenido una única ecuación absurda, $0 = -3$, por lo que el sistema es incompatible, o sea, las dos rectas se cruzan en el espacio.

Calculemos la mínima distancia entre ambas rectas. Expresemos, en primer lugar, las ecuaciones de las rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 0 \\ -3y - z &= -5 \end{aligned}\right\}$$

Pongamos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos sobra una incógnita, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5+z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución será:

$$x = 0 \quad ; \quad -3y = -5 + z$$

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la incógnita secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta r.

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Hagamos lo mismo con la recta s.

$$s \equiv \begin{cases} x - 1 = 1 - z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x + z = 2 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

Pongamos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos sobra una incógnita, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-z \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución será:

$$x = 2 - z \quad ; \quad y = 0$$

Sustituyamos la incógnita secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, $\beta \in \mathbb{R}$, obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta s.

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 - \beta \\ y = 0 \\ z = \beta \end{cases}$$

Elijamos un punto genérico de cada una de las rectas, P de r y H de s.

$$P\left(0,\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\alpha,\ \alpha\right) \quad ; \quad H\left(2-\beta,\ 0,\ \beta\right)$$

Construyamos el vector $\overrightarrow{PH}$ e impongámosle la condición de ser perpendicular a cada uno de los vectores de dirección de las rectas r y s. El módulo de este vector será la mínima distancia entre las dos rectas.

$$\overrightarrow{PH} = \left(2-\beta,\ 0,\ \beta\right) - \left(0,\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\alpha,\ \alpha\right) = \left(2-\beta,\ -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\alpha,\ \beta - \alpha\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PH} \perp \vec{u}_r \Rightarrow \overrightarrow{PH} \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow \left(2-\beta,\ -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\alpha,\ \beta - \alpha\right) \cdot \left(0,\ -\frac{1}{3},\ 1\right) = 0 \\ \overrightarrow{PH} \perp \vec{v}_s \Rightarrow \overrightarrow{PH} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow \left(2-\beta,\ -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\alpha,\ \beta - \alpha\right) \cdot \left(-1,\ 0,\ 1\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{r} \frac{5}{9} - \frac{1}{9}\alpha + \beta - \alpha = 0 \\ -2 + \beta + \beta - \alpha = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} \beta - \frac{10}{9}\alpha = -\frac{5}{9} \\ 2\beta - \alpha = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 9\beta - 10\alpha = -5 \\ 2\beta - \alpha = 2 \end{array} \right\}$$

Pongamos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -10 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 9 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 9 · [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -10 & -5 \\ 0 & 11 & 28 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 11 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 11 · [1ªf.] + 10 · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 99 & 0 & 225 \\ 0 & 11 & 28 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución será:

$$99\beta = 225 \quad ; \quad 11\alpha = 28$$

Terminemos de despejar α y β.

$$\beta = \frac{225}{99} = \frac{25}{11} \quad ; \quad \alpha = \frac{28}{11}$$

El vector $\vec{PH}$ será:

$$\vec{PH} = \left(2-\beta,\ -\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\alpha,\ \beta-\alpha\right) = \left(2-\frac{25}{11},\ -\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{28}{11},\ \frac{25}{11}-\frac{28}{11}\right) = \left(-\frac{3}{11},\ -\frac{9}{11},\ -\frac{3}{11}\right)$$

La distancia entre las rectas *r* y *s*, finalmente, será:

$$\text{dist}(r, s) = \left|\vec{PH}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{11}\right)^2+\left(-\frac{9}{11}\right)^2+\left(-\frac{3}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{99}{11^2}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos el punto o los puntos de la función que tengan de ordenada $y = 1$.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1 \Rightarrow -x^2+2x = 0 \Rightarrow x(-x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Obtengamos el valor de la derivada de esta función en cada uno de los puntos anteriores para ver en cuál de ellos la pendiente de la recta tangente es negativa.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \begin{cases} f'(0) = -\frac{2}{3}\times 0+\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \\ f'(2) = -\frac{2}{3}\times 2+\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

El punto donde la tangente es negativa es el $x_0 = 2$. La ecuación de dicha recta tangente de pendiente negativa y ordenada $y_0 = 1$, es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad y-1 = -\frac{2}{3}\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$$

(b) Dibujemos previamente el recinto, para ello, representemos $f(x) = -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$ cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y=0 \quad \Rightarrow$

$$0=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\begin{cases} 3 & \Rightarrow \quad (3,\,0) \\ -1 & \Rightarrow \quad (-1,\,0) \end{cases}$$

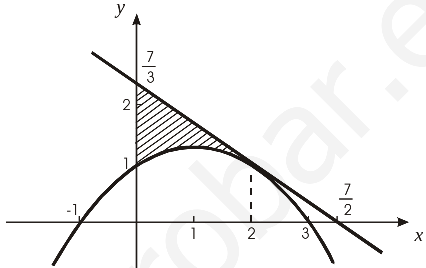
3.- Coordenadas del vértice *V*:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{2}{3}}{2\left(-\frac{1}{3}\right)}=1 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{3}\times 1^2+\frac{2}{3}\times 1+1=\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad V\left(1,\ \frac{4}{3}\right)$$

La recta tangente, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$, pasa por los puntos $\left(0,\ \frac{7}{3}\right)$ y $\left(\frac{7}{2},\ 0\right)$.

La región cuya área nos pide el ejercicio es la que se encuentra rayada al lado.

El área de dicho recinto será:



$$\text{Área}=\int_0^2\left(-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}-\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1\right)\right)dx=\int_0^2\left(-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)dx=$$

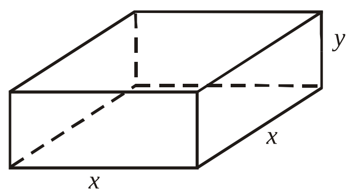
$$=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}\right)dx=\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}-\frac{4}{3}\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right]_0^2=\frac{8}{9}-\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-0=\frac{8}{9}\ \text{u.}^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Construyamos la función área de la que me piden que sea mínima.

$$A(x)=x^2+4x\,y$$



Tengamos en cuenta la relación que existe entre *x* e *y*, ya que el volumen de la caja es 32 litros.

$$32=x\,x\,y \quad \Rightarrow \quad 32=x^2y \quad \Rightarrow \quad y=\frac{32}{x^2}$$

Luego el área será:

$$A(x)=x^2+4x\frac{32}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad A(x)=x^2+\frac{128}{x}$$

Esta función tiene por dominio el intervalo (0, +∞), y es continua en dicho dominio por ser la suma de una función polinómica que lo es en todo ℝ, y de una función racional que también lo es salvo en el punto 0, pero este valor no pertenece al dominio de *A(x)*.

Calculemos los extremos relativos de *A(x)*.

$$A(x)=x^2+\frac{128}{x} \quad \Rightarrow \quad A'(x)=2x-\frac{128}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 2x-\frac{128}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3-128=0 \quad \Rightarrow$$

$$2x^3 = 128 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$
$$A(x) = x^2 + \frac{128}{x} \Rightarrow A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} \Rightarrow A''(x) = 2 + \frac{256}{x^2} \Rightarrow$$
$$A''(x) = 2 + \frac{256}{x^2} \Rightarrow A''(4) = 2 + \frac{256}{4^2} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } (4, 48).$$

El valor de la ordenada, 48, se ha obtenido sustituyendo la abscisa 4 en la función *A(x)*, es decir:
$$A(x) = x^2 + \frac{128}{x} \Rightarrow A(4) = 4^2 + \frac{128}{4} = 16 + 32 = 48$$

Estudiemos la monotonía.

Hay dos posibles intervalos de monotonía, el (0, 4) y el (4, +∞), probemos con un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, el 1 y el 5, respetivamente en la función primera derivada:
$$A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} \Rightarrow A'(1) = 2 \times 1 - \frac{128}{1^2} = -126 < 0 \Rightarrow \text{Decreciente en } (0, 4).$$
$$A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} \Rightarrow A'(5) = 2 \times 5 - \frac{128}{5^2} = \frac{122}{25} > 0 \Rightarrow \text{Creciente en } (4, +\infty).$$

Luego podemos concluir que el mínimo relativo es absoluto. Las dimensiones de la caja son, el lado de la base cuadrada, $x = 4$, y la altura de la caja, $y = \frac{32}{4^2} = 2$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Determinemos los valores de *m* para los que $x=0, y=1$ y $z=0$ es solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} mx + 2y + z = 2 \\ x + my = m \\ 2x + mz = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

Pongamos la primera ecuación directamente en la tercera fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & m \\ 2 & 0 & m & 0 \\ m & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - *m* · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & m \\ 0 & -2m & m & -2m \\ 0 & 2-m^2 & 1 & 2-m^2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos la 2ª fila con la 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & m \\ 0 & 2-m^2 & 1 & 2-m^2 \\ 0 & -2m & m & -2m \end{array}\right)$$

Intercambiemos la 2ª columna con la 3ª.

$$\begin{array}{c} \quad (x)\ (z)\quad (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & 2-m^2 & 2-m^2 \\ 0 & m & -2m & -2m \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - *m* ·[2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & 2-m^2 & 2-m^2 \\ 0 & 0 & m^3-4m & m^3-4m \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo. En este apartado nos piden los valores de *m* para que el sistema tenga solución única, es decir, sea un sistema compatible determinado. Luego a_{33} debe ser distinto de cero.

Calculemos, primeramente, los valores que hagan $a_{33} = 0$.

* Si $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; m^3 - 4m = 0 \;\Rightarrow\; m(m^2 - 4) = 0 \;\Rightarrow\; m = 0 \;;\; m = 2 \;;\; m = -2$.

Luego para que el sistema sea compatible determinado, o sea, tenga como solución única la solución: $x = 0$, $y = 1$ y $z = 0$, los valores de *m* han de ser distintos de 0, 2 y -2.

Comprobémoslo terminando de resolver el sistema anterior.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & 2-m^2 & 2-m^2 \\ 0 & 0 & m^3-4m & m^3-4m \end{array}\right) \end{array}$$

Simplifiquemos la 3ª fila por $m^3 - 4m$ que es distinto de 0.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & 2-m^2 & 2-m^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - $(2-m^2)\cdot$ [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - $m\cdot$ [3ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es:

$$x = 0 \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad z = 0$$

que es la solución que queríamos comprobar que efectivamente lo era.

(b) Teníamos el siguiente sistema triangulado inferiormente.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & 2-m^2 & 2-m^2 \\ 0 & 0 & m^3-4m & m^3-4m \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo. En este apartado nos piden los valores de *m* para los que el sistema sea incompatible. Luego si a_{33} es distinto de cero, sabemos por el apartado anterior que es un sistema compatible determinado. Y si a_{33} es cero, la última ecuación sería 0 = 0 que es una ecuación trivial y la eliminaríamos, con lo que nos quedaría un sistema de 2 ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. En definitiva, no hay ningún valor de *m* que haga al sistema incompatible.

(c) Según los apartados anteriores, para que el sistema tenga infinitas soluciones, es decir, sea un sistema compatible indeterminado los valores de *m* han de ser: $m = 0 \;;\; m = 2 \;;\; m = -2$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Calculemos el punto *R*, que es el punto de intersección del plano π y de la recta *r*, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones del plano y de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x+\lambda y+z-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ y&=1 \\ 2x+\lambda y+z&=2 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - (λ-2) ·[2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, luego se trata de un sistema compatible determinado, independientemente del valor que le podamos asignar a λ. Calculemos la solución del sistema.
Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución del sistema es:

$$x = 2-\lambda \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad z = \lambda-2$$

Las coordenadas del punto *R* son: $(2-\lambda,\ 1,\ \lambda-2)$

Para que los tres puntos, *P*(6, -1, -10), *Q*(0, 2, 2) y *R*(2 - λ , 1, λ - 2) estén alineados, se ha verificar que los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$ sean paralelos, es decir, que las coordenadas de los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$ sean proporcionales.

$$\vec{PQ} = (0,2,2)-(6,-1,-10) = (-6,3,12)$$

$$\vec{PR} = (2-\lambda,1,\lambda-2)-(6,-1,-10) = (-4-\lambda,2,\lambda+8)$$

$$\frac{-4-\lambda}{-6} = \frac{2}{3} = \frac{\lambda+8}{12} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-4-\lambda}{-6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow -12-3\lambda = -12 \Rightarrow \lambda = 0 \\ \dfrac{2}{3} = \dfrac{\lambda+8}{12} \Rightarrow 24 = 3\lambda+24 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$$

luego el punto *R* estará alineado con *P* y *Q* cuando $\lambda = 0$.

El punto *R* tendrá de coordenadas (2, 1, -2).

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 46 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2 - x|x|$.
(a) [0´75 PUNTOS]. Esboza la gráfica de *f*.
(b) [1 PUNTO]. Estudia la derivabilidad de *f* en $x = 0$.
(c) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 2$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Considera las funciones $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \text{Ln}\, x \quad \text{y} \quad g(x) = 1 - 2^x,$$

siendo Ln x el logaritmo neperiano de x. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y las gráficas de *f* y *g*.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ (a+2)x - 12y + 12z = 0 \end{array}\right\}.$$

Determina el valor *a* para que tenga soluciones distintas de la solución trivial y resuélvelo para dicho valor de *a*.

EJERCICIO 4. Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda. \end{array}\right.$

(a) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de un plano perpendicular a π y que contenga a la recta *r*.
(b) [1´5 PUNTOS]. ¿Hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta *r*? En caso afirmativo determina sus ecuaciones.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$$

es finito. Determina el valor de *a* y calcula el límite.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Determina *b* sabiendo que $b > 0$ y que el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = \left(\frac{1}{3}x - b \right)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

EJERCICIO 3. Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2.$ Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) [0´75 PUNTOS]. $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

(b) [0´75 PUNTOS]. $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(c) [1 PUNTO]. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{31} & a_{22} - a_{32} & a_{23} - a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

EJERCICIO 4. Las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

contienen dos lados de un cuadrado.

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula el área del cuadrado.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Expresemos la función *f (x)* como una función a trozos. Teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto, tendremos:

$$f(x) = 2 - x\,|x| = \begin{cases} 2 - x(-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 - x\,x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Representemos, primeramente, el trozo de función, $y = 2 + x^2$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow 2 + x^2 = 0 \Rightarrow$ No hay puntos de corte.

3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -b/2a = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow V(0, 2)$

Representemos ahora el trozo, $y = 2 - x^2$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$

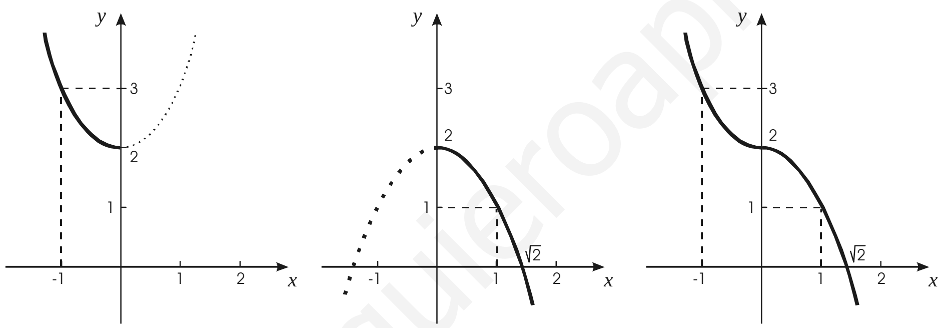
2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow 2 - x^2 = 0 \Rightarrow$

$x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \left(-\sqrt{2}, 0\right); \left(\sqrt{2}, 0\right)$

3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -b/2a = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow V(0, 2)$

A continuación están dibujadas cada una de las parábolas por separado, y la última es la función *f(x)* cuya gráfica es la que pide el ejercicio.



(b) Para estudiar la derivabilidad de *f(x)* en $x = 0$, estudiaremos antes la continuidad de la función en todo su dominio.

- Para valores de $x < 0$, la función $2 + x^2$ es continua por ser polinómica.
- Para valores de $x > 0$, la función $2 - x^2$ es continua por ser polinómica.
- Para $x = 0$, la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(2 + x^2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(2 - x^2\right) = 2 \\ f(0) = 2 - 0^2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 2$$

es decir, en el punto $x = 0$ es continua. Luego la función es continua en todo $\mathbb{R}$

Estudiemos ahora la derivabilidad, ya que puede ser derivable en todo su dominio por ser continua en él.

- Para valores de $x < 0$, la función $2 + x^2$ es derivable por ser polinómica, siendo la función derivada, $2x$.
- Para valores de $x > 0$, la función $2 - x^2$ es derivable por ser polinómica, siendo la función derivada, $-2x$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde sabemos que ya es derivable, sería:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<0 \\ -2x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

comprobemos si en el punto 0 es derivable, ya que puede serlo por ser continua en él. Será derivable si las derivadas laterales existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x)=0 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-2x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(0^-)=f'(0^+)=0$$

En el punto $x=0$ la función f es derivable, luego la función derivada, definitivamente, es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<0 \\ -2x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

(c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ es:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad y-f(2)=f'(2)(x-2)$

Calculemos $f(2)$ y $f'(2)$.

$f(2) = 2 - 2^2 = 2 - 4 = -2$

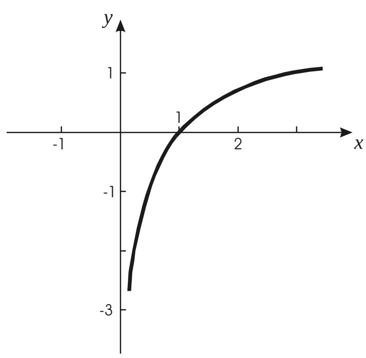
$f'(2) = -2 \times 2 = -4$

La ecuación de la recta tangente, finalmente, será:

$y-(-2)=(-4)(x-2) \quad \Rightarrow \quad y+2=-4x+8 \quad \Rightarrow \quad y=-4x+6$.

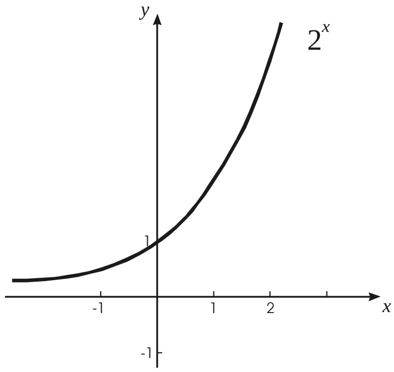
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

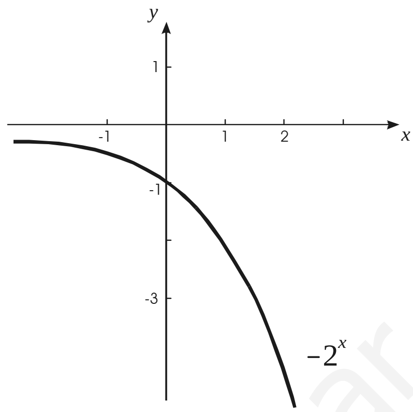
La gráfica de la función elemental logaritmo neperiano de *x*, Ln *(x)*, está situada al lado.

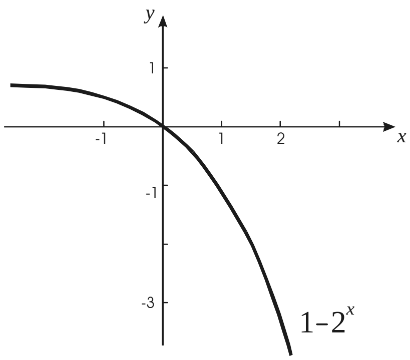


La gráfica de la función $1 - 2^x$ se puede obtener a partir de la función exponencial elemental 2^x, sin más que someter a ésta a una reflexión y después a un desplazamiento vertical de una unidad hacia arriba.

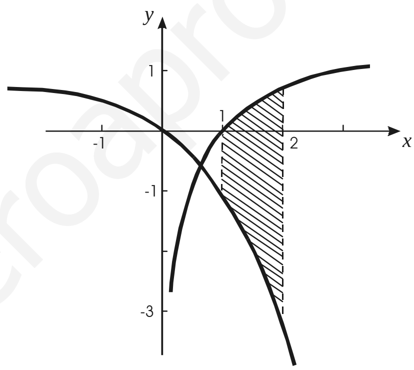
Las diversas gráficas que se van obteniendo con los movimientos citados en el párrafo anterior están dibujadas a continuación.



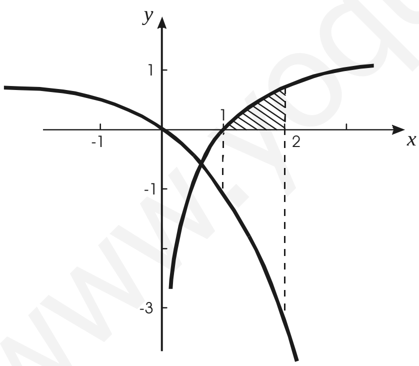


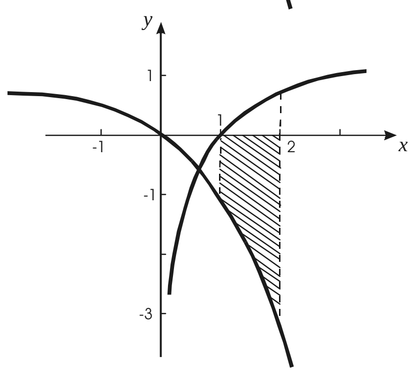


El recinto cuya área nos piden es el situado más abajo.



El área de dicho recinto podemos obtenerlo mediante la suma de las áreas de cada uno de los recintos siguientes.





El área del primero de los recintos es:

$$\text{Área}_1 = \int_1^2 \text{Ln}(x)\, dx =$$

Se trata de una integral por partes.

$$u = \text{Ln}(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

Continuando con la integral.

$$\int_1^2 \text{Ln}(x)\,dx = \left[x\ \text{Ln}(x)\right]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx = \left[x\ \text{Ln}(x)\right]_1^2 - \int_1^2 dx = \left[x\ \text{Ln}(x)\right]_1^2 - [x]_1^2 =$$

$$= \left(2\ \text{Ln}(2) - 1\ \text{Ln}(1)\right) - (2-1) = 2\ \text{Ln}(2) - 1$$

Calculemos ahora el área del segundo de los recintos

$$\text{Área}_2 = \left|\int_1^2 \left(1-2^x\right)dx\right| = \left|\left[x - \frac{2^x}{\text{Ln}(2)}\right]_1^2\right| = \left|2 - \frac{2^2}{\text{Ln}(2)} - \left(1 - \frac{2^1}{\text{Ln}(2)}\right)\right| =$$

$$= \left|2 - \frac{4}{\text{Ln}(2)} - 1 + \frac{2}{\text{Ln}(2)}\right| = \left|1 - \frac{2}{\text{Ln}(2)}\right| = \frac{2}{\text{Ln}(2)} - 1$$

El área pedida será la suma de las áreas de los dos recintos, es decir:

$$\text{Área} = \text{Área}_1 + \text{Área}_2 = 2\,\text{Ln}(2) - 1 + \frac{2}{\text{Ln}(2)} - 1 = 2\,\text{Ln}(2) - 2 + \frac{2}{\text{Ln}(2)}\ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo para determinar el valor de a que haga que dicho sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la solución trivial, es decir, sea un sistema compatible indeterminado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -13 & 2 & 0 \\ a+2 & -12 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $(a+2)$ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & -18-3a & 10-a & 0 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por -19.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18-3a & 10-a & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + $(18 + 3a)$ · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10-a & 0 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente y todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 10 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq 10 \Rightarrow$ obtendríamos un sistema homogéneo de tres ecuaciones y tres incógnitas, que sólo admitiría la solución trivial, $x=0$, $y=0$ y $z=0$.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 10 - a = 0 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow$ la última ecuación es de la forma, $0 = 0$, que es una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Este valor de $a = 10$ es precisamente el que nos pide el problema y es para el que vamos a resolver el sistema.

El sistema que nos queda, una vez que hemos eliminado la última ecuación, por ser una ecuación trivial, es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como es un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, la incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -z \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = -z \quad ; \quad y = 0.$$

Sustituyamos la incógnita secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, por $t \in \mathbb{R}$, la solución del sistema, finalmente, será: $x = -t$; $y = 0$; $z = t$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Si el plano que nos piden contiene a la recta r entonces un punto del plano puede ser cualquier punto de la recta, por ejemplo, el (1, 1, 1), y un vector de dirección del plano podrá ser el de dirección de la recta, es decir, el (1, 1, 3).

Como el plano que hemos de calcular es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x+y-z+7=0$, resulta que el vector normal al plano π, el (2, 1, -1), puede ser el otro vector de dirección del plano que buscamos. La ecuación del plano será:

$$\begin{cases} x = 1+\alpha+2\beta \\ y = 1+\alpha+\beta \\ z = 1+3\alpha-\beta \end{cases}$$

(b) La ecuación de los planos paralelos al plano $\pi \equiv 2x+y-z+7=0$, serán de la forma:

$$2x+y-z+D=0$$

Para calcular el valor de D correspondiente al plano que contenga a la recta r, será el que haga que el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la de los planos paralelos sea un sistema compatible, para ello bastará sustituir la x, y y z de la ecuación de la recta en la de los planos paralelos y comprobar que se puede obtener un valor para D.

$$\left.\begin{array}{r} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+3\lambda \\ 2x+y-z+D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} 2(1+\lambda)+(1+\lambda)-(1+3\lambda)+D=0 \\ 2+2\lambda+1+\lambda-1-3\lambda+D=0 \\ D=-2 \end{array}$$

La ecuación del plano que nos piden es: $2x+y-z-2=0$.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el límite siguiente sabiendo que es finito.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)=\frac{1}{e^0-1}-\frac{a}{2\times 0}=\frac{1}{0}-\frac{a}{0}=[\infty-\infty]=$$

Ha aparecido una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, la destruiremos reduciendo a una sola fracción la expresión inicial.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-a(e^x-1)}{2x(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

La indeterminación de cero partido por cero la destruiremos mediante la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-a\,e^x}{2(e^x-1)+2x(e^x-1)}=\frac{2-a}{0}=$$

Hemos obtenido un cociente en el que pueden ocurrir dos cosas según que el numerador sea cero o no.

Si $2-a\neq 0 \Rightarrow a\neq 2$, entonces el cociente de un número distinto de cero entre cero da $\pm\infty$, luego al no poderse obtener un límite finito, a no puede ser distinto de 2.

Si $2-a=0 \Rightarrow a=2$, entonces el cociente de cero entre cero da lugar a una indeterminación.

Destruyamos dicha indeterminación cuando $a=2$, mediante la Regla de L´Hôpital.

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^x}{2e^x+2e^x+2xe^x}=\frac{-2e^0}{2e^0+2e^0+2\times 0\times e^0}=\frac{-2}{2+2}=-\frac{1}{2}$$

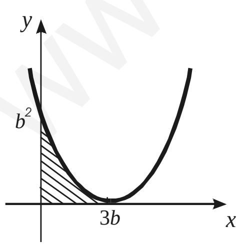
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Representemos $y=\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2$, $b>0$ cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x=0 \Rightarrow y=b^2 \Rightarrow (0,b^2)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y=0 \Rightarrow \frac{1}{3}x-b=0 \Rightarrow x=3b \Rightarrow (3b,0)$

3.- Coordenadas del vértice V:



$V(3b,0)$, ya que la parábola al tener un sólo punto de corte con el eje de abscisas, éste es el vértice.

La gráfica de la función $f(x)$ es la situada al lado.

El recinto acotado por la parábola y los ejes coordenados es el que se muestra rayado.

Sabemos que el área es 8, luego:

$$\int_0^{3b}\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2dx=8 \Rightarrow 3\int_0^{3b}\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2\frac{1}{3}\,dx=8 \Rightarrow$$

$$3\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x-b\right)^3\right]_0^{3b}=\left[\left(\frac{1}{3}x-b\right)^3\right]_0^{3b}=\left(\frac{1}{3}3b-b\right)^3-(-b)^3=8 \;\Rightarrow\; b^3=8 \;\Rightarrow\; b=2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 3\times 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 15(-2) = -30$$

La propiedad que se ha utilizado dos veces dice:

"*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

En este ejercicio hemos sacado, en primer lugar, factor común el 3 de la primera fila y, en segundo lugar, el 5 de la última columna.

(b) Calculemos este otro determinante.

$$\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -3(-2) = 6$$

La propiedad que se ha utilizado, en primer lugar, ha sido:

"*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

En este ejercicio hemos sacado factor común el 3 de la primera fila.

La segunda propiedad que se ha utilizado dice:

"*Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo*".

En este caso hemos intercambiado entre sí las dos primeras filas.

(c) Calculemos el determinante siguiente.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2+0 = -2$$

La propiedad que hemos aplicado en primer lugar es:

"*Si los elementos de una fila o columna de un determinante son sumas de igual número de términos, entonces el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de las filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada* *por sumandos, la cual es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos sumandos para el segundo determinante, así hasta el último sumando*".

La segunda propiedad que se ha usado es:

"*Si dos filas o dos columnas de un determinante son proporcionales, el determinante es cero*".

En nuestro caso, en el último de los determinantes, la segunda y tercera fila son proporcionales, o más exactamente la tercera es igual que la segunda.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Estudiemos la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$$

Formemos con las ecuaciones de ambas rectas un sistema de ecuaciones lineales.

$$\left.\begin{array}{r} x+y \quad = 2 \\ 2x+2y+z=4 \\ x+y \quad = 6 \\ x+y-z \;=6 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Intercambiemos la 2ª y 3ª columna.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado, hemos obtenido dos ecuaciones absurdas (la 3ª y 4ª) por lo que las dos rectas son paralelas en sentido estricto.

Para obtener el área del cuadrado, calcularemos la distancia entre ambas rectas que coincidirá con la longitud del lado del cuadrado. Expresamos las dos rectas en forma paramétrica.

La forma paramétrica de recta r la obtendremos resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones en las que viene dada dicha recta.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos la 2ª y 3ª columna.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado. La incógnita que nos sobra, la y, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-y \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

La solución es: $x = 2 - y$; $z = 0$.
Sustituyamos la incógnita secundaria y por un parámetro, por ejemplo, α, las ecuaciones paramétricas de r serán:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

Análogamente, la forma paramétrica de recta s será:

$$s \equiv \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos la 2ª y 3ª columna.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado. La incógnita que nos sobra, la y, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6-y \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

La solución es: $x = 6 - y$; $z = 0$.
Sustituyamos la incógnita secundaria y por un parámetro, por ejemplo, β, las ecuaciones paramétricas de s serán:

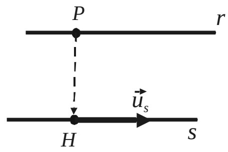
$$s \equiv \begin{cases} x = 6 - \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}$$

El lado del cuadrado coincidirá con la distancia, por ejemplo, de un punto $P(2, 0, 0)$ de r a s.

Elijamos un punto H genérico de s: $H(6-\beta, \beta, 0)$

Construyamos el vector que determinan los puntos P y H.

$$\vec{PH} = (6-\beta, \beta, 0) - (2, 0, 0) = (4-\beta, \beta, 0)$$



Este vector será perpendicular al vector de dirección de la recta s, el $\vec{u}_s = (-1, 1, 0)$, por lo que el producto escalar de ambos será cero:

$$\vec{PH} \perp \vec{u}_s \Rightarrow \vec{PH} \bullet \vec{u}_s = 0 \Rightarrow (4-\beta, \beta, 0) \bullet (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$-4 + \beta + \beta = 0 \Rightarrow 2\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2$$

$$\vec{PH} = (4-\beta, \beta, 0) = (4-2, 2, 0) = (2, 2, 0)$$

Lado del cuadrado = dist (r, s) = dist (P, s) = $\left|\vec{PH}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$

Área del cuadrado = $\left(\sqrt{8}\right)^2 = 8$ u^2.

(b) La ecuación del plano que contiene al cuadrado, será el plano que pase por el punto P(2, 0, 0), y sus vectores de dirección son, por ejemplo, el $\vec{u}_s = (-1, 1, 0)$ y el $\vec{PH} = (2, 2, 0)$.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda + 2\mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 0 \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 47 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Calcula

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx.$$

EJERCICIO 2. Se sabe que la función $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-\frac{1}{2}x+c & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si} \quad 0\le x<1. \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(-1, 1)$.

(a) [1 PUNTO]. Determina el valor de la constante c.

(b) [0´5 PUNTOS]. Calcula la función derivada $f´$.

(c) [1 PUNTO]. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+\lambda y = \lambda \\ \lambda x+y+(\lambda-1)z = 1 \\ \lambda x+y = 2+\lambda \end{array}\right\}.$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) [1 PUNTO]. Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4. Considera las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x=y \\ z=2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\begin{cases} x+y=1 \\ z=3. \end{cases}$$

Halla la ecuación de una recta que corte a r y s y sea perpendicular al plano $z = 0$.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de *f*.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)\, e^{2x}$. Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $\left(1, e^2\right)$.

EJERCICIO 3. Un tendero dispone de tres tipos de zumo en botellas que llamaremos *A*, *B* y *C*. El mencionado tendero observa que si vende a 1€ las botellas del tipo *A*, a 3€ las del tipo *B* y a 4€ las del tipo *C*, entonces obtiene un total de 20€. Pero si vende a 1€ las del tipo *A*, a 3€ las del *B* y a 6€ las del *C*, entonces obtiene un total de 25€.

(a) [0´75 PUNTOS]. Plantea el sistema de ecuaciones que relaciona el número de botellas de cada tipo que posee el tendero.

(b) [1 PUNTO]. Resuelve dicho sistema.

(c) [0´75 PUNTOS]. ¿Puede determinarse el número de botellas de cada tipo de que dispone el tendero? (Ten en cuenta que el número de botellas debe ser entero y positivo).

EJERCICIO 4. Sean los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, -1, 3)$.

(a) [1´5 PUNTOS]. Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por *A* y por *B*.

(b) [1 PUNTO]. Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos *ABCD* sabiendo que la recta determinada por los vértices *C* y *D* pasa por el origen de coordenadas.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos, primeramente, la integral indefinida siguiente:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3}\, dx$$

Se trata de una integral racional propia, por lo que calcularemos los valores que anulan al denominador del integrando.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Descompongamos la fracción en fracciones elementales en función de sus raíces.

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{x-1} \;\Rightarrow$$

$$1=A(x+3)+B(x-1) \;\Rightarrow \begin{cases} x=1 & 1=A\cdot 4 \;\Rightarrow\; A=\dfrac{1}{4} \\ x=-3 & 1=B(-4) \;\Rightarrow\; B=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Calculemos ahora la integral definida que nos pide el ejercicio.

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2+2x-3}\,dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1/4}{x-1}-\frac{1/4}{x+3}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|x-1|-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|x+3|\right]_{-2}^{0}=\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|-1|-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|3|-\left(\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|-2-1|-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|-2+3|\right)=$$

$$= =\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(1)-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(3)-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(3)+\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(1)=-\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(3)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Si la función *f(x)* es derivable en $(-1, 1)$ tiene que ser continua también en $(-1, 1)$.

Calculemos el valor de *c* para que la función sea continua.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de *x* mayores que -1 y menores que 0, $-1<x<0$, es una función cuadrática, que es continua en todo $\mathbb{R}$, luego la función *f* es continua para $-1<x<0$.

- El trozo de función para valores de *x* mayores que 0 y menores que 1, $0<x<1$, es una función raíz cuadrada de una función polinómica, que es continua en su dominio, en nuestro caso para los valores que hagan al radicando mayor o igual a cero, $1-x\geq 0$, es decir, para todos los valores de *x* menores o iguales a 1, luego la función es continua para $x<1$.

- El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x>0}}\left(2x^2-\dfrac{1}{2}x+c\right)=c \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0+ \\ x<0}}\sqrt{1-x}=1 \\ f(0)=\sqrt{1-0}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \;\Rightarrow\; c=1$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 0, para el valor de $c=1$.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $(-1, 1)$, para el valor de $c=1$.

(b) Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, pero en nuestro caso es continua para el valor de $c = 1$.

- Para valores de $-1 < x < 0$, f al ser una función cuadrática, que es derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces la función f es derivable para $-1 < x < 0$, siendo la derivada, $4x - \frac{1}{2}$.

- Para valores de $0 < x < 1$, f es una función raíz cuadrada de una función polinómica, que es derivable para todos los valores de su dominio menos para los que hagan cero al radicando, el $x = 1$, luego será derivable para todos los valores de $x < 1$, es decir, la función f es derivable para $0 < x < 1$, siendo la función derivada, $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si} \quad 0 < x > 1 \end{cases}$$

- El problema está en el punto 0.

En el punto 0 será derivable, si las derivadas laterales coinciden.

$$\left.\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x>0}} \left(4x - \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2} \\ f'(0^+) &= \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x<0}} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} f'(0^-) &= f'(0^+) \Rightarrow \\ \frac{-1}{2} &= \frac{-1}{2} \end{aligned}\right.$$

luego la función *f(x)* será derivable en $x = 0$.

En definitiva *f(x)* será derivable en $(-1, 1)$.

La función *f´(x)* será:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si} \quad 0 \le x > 1 \end{cases}$$

(c) Las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y = -x$ son aquellas que tengan de pendiente -1, es decir, deben existir unos puntos x_0 en los que la derivada de la función en dichos puntos, $f'(x_0)$, sea precisamente -1.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(x_0) = -(x - x_0)$$

Calculemos x_0, identificando la derivada en dichos puntos x_0 con -1. Distinguiremos los dos casos que pueden presentarse, teniendo en cuenta cómo es la derivada de esta función.

A) $f'(x_0) = 4x_0 - \frac{1}{2} \Rightarrow -1 = 4x_0 - \frac{1}{2} \Rightarrow 4x_0 = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow x_0 = \frac{-1}{8}$

B) $f'(x_0) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x_0}} \Rightarrow -1 = \frac{-1}{2\sqrt{1-x_0}} \Rightarrow 2\sqrt{1-x_0} = 1 \Rightarrow 1 - x_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}$

Calculemos la ecuación de la recta tangente en cada uno de los casos.

A) En el primero de los casos, será:

$$y - f(x_0) = -(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\left(x + \frac{1}{8}\right) \qquad [1]$$

Obtengamos el valor de la ordenada en el punto -1/8, es decir, $f\left(-\frac{1}{8}\right)$.

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = 2\left(-\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\right) + 1 = \frac{2}{64} + \frac{1}{16} + 1 = \frac{35}{32}$$

Continuando en [1], tendremos la primera de las ecuaciones tangentes.

$$y - \frac{35}{32} = -\left(x + \frac{1}{8}\right) \;\Rightarrow\; y - \frac{35}{32} = -x - \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; y = -x + \frac{35}{32} - \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; y = -x + \frac{31}{32}$$

B) La ecuación de la recta tangente en este segundo caso, será:

$$y - f(x_0) = -(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - f\left(\frac{3}{4}\right) = -\left(x - \frac{3}{4}\right) \qquad [2]$$

Obtengamos el valor de la ordenada en el punto 3/4, es decir, $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Continuando en [2], tendremos la segunda de las ecuaciones tangentes.

$$y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{3}{4}\right) \;\Rightarrow\; y - \frac{1}{2} = -x + \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; y = -x + \frac{5}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el sistema siguiente según los valores del parámetro λ.

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda y &= \lambda \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z &= 1 \\ \lambda x + y &= 2 + \lambda \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 2+\lambda \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - λ · [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - λ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda - 1 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 2+\lambda-\lambda^2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 2+\lambda-\lambda^2 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente y todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} y el a_{33} que pueden serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse:

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 ; \lambda = -1 \Rightarrow$ Estudiemos cada uno de estos dos casos.

** Si $\lambda = 1 \Rightarrow$ la última ecuación será, $0 = 2+1-1^2 \Rightarrow 0 = 2$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema será un sistema incompatible.

** Si $\lambda = -1 \Rightarrow$ la última ecuación será, $0 = 2-1-1^2 \Rightarrow 0 = 0$, que es una ecuación trivial, por lo que la podemos eliminar. Observemos cómo quedaría el sistema al eliminar la última ecuación y sustituir el valor de λ por -1.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema estaría triangulado, nos quedarían dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 1 - \lambda^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1 \Rightarrow$ la última ecuación sería una ecuación normal, es decir, no sería ni trivial ni absurda. Pero veamos lo que le ocurriría al coeficiente a_{22} para los valores de $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$, resultaría que como $a_{22} = \lambda - 1$, a_{22} no sería nunca cero ya que sólo sería cero para $\lambda = 1$, por lo que para los valores de $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$ el sistema sería un sistema compatible determinado.

(b) Terminemos de resolver el sistema para el caso de $\lambda = -1$, que es cuando era un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria, nos quedará el siguiente sistema.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1+y \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado la solución es:

$$x = -1 + y \quad ; \quad -2z = 0$$

o lo que es lo mismo: $x = -1 + y \quad ; \quad z = 0$

Sustituyendo la incógnita secundaria, la *y*, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$, tendremos finalmente la solución del sistema compatible indeterminado uniparamétrico:

$$x = -1 + \alpha \quad ; \quad y = \alpha \quad ; \quad z = 0.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos las ecuaciones de las rectas *r* y *s* en forma paramétrica para elegir después un punto genérico de cada una de ellas.

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x - y = 0 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria, nos quedará el siguiente sistema.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es: $x = y \quad ; \quad z = 2$. Sustituyamos la incógnita secundaria, *y*, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones paramétricas de *r* serán:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 \end{array} \right.$$

Hagamos ahora lo mismo con la recta *s*

$s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria, nos quedará el siguiente sistema.

$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-y \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es: $x = 1 - y$; $z = 3$. Sustituyamos la incógnita secundaria, *y*, por un parámetro, por ejemplo, por $\beta \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones paramétricas de *s* serán: $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \beta \\ z = 3 \end{cases}$

Elijamos un punto genérico de *r*, el $A(\alpha, \alpha, 2)$, y otro punto de *s*, el $B(1 - \beta, \beta, 3)$.

La recta que pasa por *A* y *B*, es decir la que corta a *r* y *s*, le vamos a imponer la condición de ser perpendicular al plano $z = 0$. Para ello el vector de dirección de la recta, el vector $\vec{AB}$ y el vector normal al plano, el $\vec{n} = (0, 0, 1)$, tienen la misma dirección , es decir, son paralelos, luego sus coordenadas son proporcionales.

$\vec{AB} = (1 - \beta, \beta, 3) - (\alpha, \alpha, 2) = (1 - \beta - \alpha, \beta - \alpha, 1)$

Establezcamos la proporcionalidad de ambos vectores.

$$\frac{0}{1-\beta-\alpha} = \frac{0}{\beta-\alpha} = \frac{1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{0}{\beta-\alpha} = \dfrac{1}{1} & \Rightarrow \quad \beta - \alpha = 0 \\ \dfrac{0}{1-\beta-\alpha} = \dfrac{1}{1} & \Rightarrow \quad 1 - \beta - \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 0 \\ -\beta - \alpha = -1 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones lineal anterior, para lo cual lo expresamos en forma matricial y lo resolvemos mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $-2 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es: $-2\alpha = -1$; $-2\beta = -1$, o lo que es lo mismo:

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{2}$$

La recta que corta a *r* y *s*, y es perpendicular a la plano $z = 0$, es la que pasa por el punto $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$ y tiene como vector de dirección al vector $\vec{AB} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 1\right) = (0,0,1)$.

La ecuación de esta recta es: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 2 + \mu \end{cases}$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función *f(x)* es el producto de la función exponencial elemental e^x, que es continua y derivable en todo ℝ, y de la función cos x + sen x que es a su vez suma de dos funciones trigonométricas elementales, que son continuas y derivables en ℝ, por lo que su suma seguirá siendo continua y derivable en ℝ, y por tanto el producto de ambas funciones lo será también en ℝ, es decir, *f(x)* es una función continua y derivable en todo ℝ y por supuesto lo será en el dominio en la que está definida que es [0, 2π].

Obtengamos la primera derivada.

$f(x) = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) \Rightarrow f'(x) = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x (-\operatorname{sen} x + \cos x) = 2e^x \cos x$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

$$2e^x \cos x = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{imposible} \\ \cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow & \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Sólo hay dos valores que anulen a la primera derivada y que pertenezcan al dominio de la función, el $\frac{\pi}{2}$ y el $\frac{3\pi}{2}$. Estudiemos la monotonía de la función *f(x)*, en los intervalos, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, ya que al ser continua y derivable en su dominio y no existir, por tanto, puntos de no continuidad y de no derivabilidad, los valores que anulan a la derivada son los únicos puntos que nos sirven de referencia para la construcción de dichos intervalos.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, $\frac{\pi}{4}$, π y $\frac{7\pi}{4}$, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\pi/4} \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\, e^{\pi/4} > 0 \quad \Rightarrow \text{ Creciente en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'(\pi) = 2e^{\pi} \cos(\pi) = 2e^{\pi}(-1) = -2\, e^{\pi} < 0 \quad \Rightarrow \text{ Decreciente en } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2e^{7\pi/4} \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2e^{7\pi/4} \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\, e^{7\pi/4} > 0 \quad \Rightarrow \text{ Creciente en } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

(b) Teniendo en cuenta todo lo expuesto en el apartado anterior deduciremos que:

Máximo relativo en $\left(\frac{\pi}{2},\ e^{\pi/2}\right)$; Mínimo relativo en $\left(\frac{3\pi}{2},\ -e^{3\pi/2}\right)$

Las ordenadas de los extremos relativos se han obtenido sustituyendo las abscisas de dichos puntos en la función, es decir:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}\,(0+1) = e^{\pi/2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{3\pi/2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = e^{3\pi/2}\,(0-1) = -e^{3\pi/2}$$

El máximo y mínimo absolutos hay que localizarlos entre los máximo y mínimo relativos o en los extremos del intervalo donde la función está definida. Calculemos las ordenadas en estos extremos.

$$f(0) = e^0(\cos(0) + \text{sen}(0)) = 1\times(1+0) = 1$$

$$f(2\pi) = e^{2\pi}(\cos(2\pi) + \text{sen}(2\pi)) = e^{2\pi}(1+0) = e^{2\pi}$$

El máximo absoluto se corresponde con el punto que tenga mayor ordenada, en nuestro caso, con el $\left(2\pi,\, e^{2\pi}\right)$.

El mínimo absoluto será: $\left(\frac{3\pi}{2},\ -e^{3\pi/2}\right)$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos primeramente una primitiva de *f(x)*.

$$F(x) = \int (x-1)\, e^{2x}\, dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u = x-1 \qquad du = dx$$

$$dv = e^{2x}dx \qquad v = \int dv = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F(x) = \int (x-1)\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x}(x-1) - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}(x-1) - \frac{1}{4}e^{2x} + \text{K} = e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) + \text{K}$$

Obtengamos ahora la primitiva cuya gráfica pasa por el punto $\left(1, e^2\right)$, es decir, que $F(1)=e^2$.

$$F(1) = e^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) + \text{K} \;\Rightarrow\; e^2 = e^2\left(\frac{-1}{4}\right) + \text{K} \;\Rightarrow\; \text{K} = \frac{5}{4}e^2$$

La primitiva que nos pide el ejercicio es:

$$F(x) = e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{4}e^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Llamemos *x* al nº de botellas de zumo del tipo *A*, *y* a las del tipo *B* y *z* a las del tipo *C*. Haciendo la traducción correspondiente llegamos al sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 20 \\ x + 3y + 6z &= 25 \end{aligned}\right\}$$

(b) Expresemos el sistema anterior en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 20 \\ 1 & 3 & 6 & 25 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$\begin{array}{c} (x)\,(z)\,(y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 20 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \end{array}$ El sistema está triangulado, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas por lo que, en principio, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, la incógnita que nos sobra, la *y*, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\begin{array}{c} (x)\,(z) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 20-3y \\ 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$\begin{array}{c} (x)\,(z) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10-3y \\ 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$ El sistema está diagonalizado, la solución es: $x = 10 - 3y$; $2z = 5$
o lo que es lo mismo: $x = 10 - 3y$; $z = 5/2$
Sustituyamos la incógnita secundaria, *y*, por un parámetro, por ejemplo, por $\lambda \in \mathbb{R}$. Tendremos, finalmente, la solución del sistema.

$$x = 10 - 3\lambda \quad ; \quad y = \lambda \quad ; \quad z = 5/2$$

(c) No puede determinarse el número de botellas de cada tipo que posee el tendero porque de las del tipo *C* que hemos obtenido, 5/2, es imposible ya que no es un número natural. Es decir, el problema no tiene sentido.

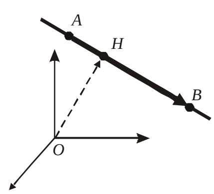
SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(1, 0, -1) y *B*(2, -1, 3).

$\vec{AB} = (2, -1, 3) - (1, 0, -1) = (1, -1, 4)$

La ecuación de la recta que pasa por *A* y *B*, es decir, la que pasa por A y tiene como vector de dirección al vector $\vec{AB}$ es:

$$r_{AB} \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1+4\lambda \end{cases}$$



Elijamos un punto genérico de esta recta, por ejemplo, el punto *H* de coordenadas *H*(1+λ, -λ, -1+4λ), construyamos el vector $\vec{OH}$ e impongámosle la condición de ser perpendicular al vector de dirección de la recta.

$$\vec{OH} = (1+\lambda, -\lambda, -1+4\lambda) - (0, 0, 0) = (1+\lambda, -\lambda, -1+4\lambda)$$

$$\vec{OH} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow (1+\lambda, -\lambda, -1+4\lambda) \cdot (1, -1, 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\lambda+\lambda-4+16\lambda = 0 \Rightarrow 18\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

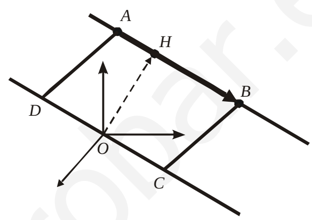
El vector $\vec{OH}$ tendrá pues de coordenadas:

$$\vec{OH} = (1+\lambda, -\lambda, -1+4\lambda) = \left(1+\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -1+4\times\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right)$$

La distancia del origen a la recta que pasa por los puntos *A* y *B* coincidirá con el módulo del vector $\vec{OH}$.

$$\text{dist}(O, r) = \text{dist}(O, H) = \left|\vec{OH}\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{49+1+4}{36}} = \sqrt{\frac{54}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(b) El área del paralelogramo *ABCD* será igual a la base por la altura, siendo la base el lado *AB* y la altura coincidirá con la distancia de *O* a la recta *r* que pasa por *A* y *B*, ya que los puntos *C* y *D* están alineados con el origen *O*.



Área *ABCD* = base × altura =

$$= \left|\vec{AB}\right| \times \text{dist}(O, r) =$$

$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{18} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{108}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ u}^2.$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	PLANES DE 1994 Y DE 2002 MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO JUNIO 2005

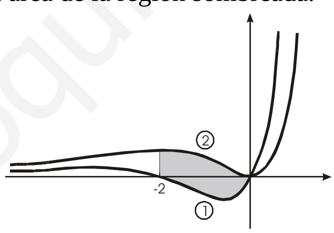
Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo en $x=-1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x=-2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=0$. Calcula a, b, c y d sabiendo además que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 9.

EJERCICIO 2. Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^x$ y a su función derivada f'.

(a) [1 PUNTO] Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.

(b) [1´5 PUNTOS] Calcula el área de la región sombreada.



EJERCICIO 3. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

(a) [1 PUNTO] ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala.

(b) [1´5 PUNTOS] Determina la matriz X que cumple que $A\cdot X+C\cdot B^t=B\cdot B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

EJERCICIO 4. Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x+2y=6\\ z=2\end{cases}$

(a) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.

(b) [1´5 PUNTOS] Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

(a) [1 PUNTO] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1 PUNTO] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) [0´5 PUNTOS] Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 2. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-x/2}$.

(a) [0´75 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

(b) [1´75 PUNTOS] Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación $x=2$ y la recta tangente obtenida en (a).

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=-2 \\ -\lambda x+3y+z=-7 \\ x+2y+(\lambda+2)=-5 \end{array}\right\}.$$

(a) [1´5 PUNTOS] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) [1 PUNTO] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4. Sean los vectores

$$\vec{v}_1=(0,1,0),\ \vec{v}_2=(2,1,-1)\ \text{ y }\ \vec{v}_3=(2,3,-1).$$

(a) [0´75 PUNTOS] ¿Son los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ linealmente dependientes?

(b) [0´75 PUNTOS] ¿Para qué valores de a el vector $(4, a+3, -2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$?

(c) [1 PUNTO] Calcula un vector unitario y perpendicular a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Como la función polinómica $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un máximo relativo en $x=-1$, se cumplirá que la primera derivada de la función en dicho punto es cero y la segunda menor de cero, es decir:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow$$
$$f''(x) = 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = 6a \quad \Rightarrow$$
$$f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c \quad \Rightarrow \quad 3a - 2b + c = 0 \qquad [1]$$
$$f''(-1) = 6a(-1) + 2b \quad \Rightarrow \quad -6a + 2b < 0 \quad \Rightarrow \quad b < 3a \qquad [2]$$

Tendremos en cuenta que las funciones polinómicas son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.

Como la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas en el punto $x = -2$, se verificará:

$$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c + d = 0 \qquad [3]$$

Al haber un punto de inflexión en $x = 0$, se cumplirá que:

$$f''(0) = 6a \cdot 0 + 2b \quad \Rightarrow \quad 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \qquad [4]$$
$$f'''(x) = 6a \quad \Rightarrow \quad 6a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 0$$

esta última condición es evidente que se satisface ya que la función es polinómica de grado tres y por tanto el coeficiente del término de grado tres, a, tiene que ser distinto de cero.

El problema, finalmente, nos dice que la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9, lo que implica que la derivada de la función en dicho punto es 9:

$$f'(2) = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b + c = 9 \qquad [5]$$

Sustituyamos el valor de $b = 0$ en las expresiones [1], [2], [3] y [5], tendremos:

$$-3a - 2b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + c = 0$$
$$b < 3a \quad \Rightarrow \quad a > 0 \qquad [6]$$
$$-8a + 4b - 2c + d = 0 \quad \Rightarrow \quad -8a - 2c + d = 0$$
$$12a + 4b + c = 9 \quad \Rightarrow \quad 12a + c = 9$$

Resolvamos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que hemos obtenido.

$$\left.\begin{array}{r} 3a + c = 0 \\ -8a - 2c + d = 0 \\ 12a + c = 9 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 1 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $3 \cdot$ [2ªf.] + $8 \cdot$ [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $4 \cdot$ [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot$ [3ªf.] + $3 \cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 9 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $3 \cdot$ [2ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 6 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $6 \cdot$ [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 18 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es: $18a = 18$; $6c = -18$; $9d = 18$ $\Rightarrow$

$a = 1$; $c = -3$; $d = 2$; $b = 0$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) La función $f(x)$ es el producto de la función x^2 que es una función cuadrática elemental cuyo recorrido es $[0, +\infty)$ por la función exponencial elemental e^x cuyo recorrido es el intervalo $(0, +\infty)$, por tanto, al multiplicar dos funciones cuyos recorridos son positivos o cero dará lugar a otra función cuyo recorrido nuca podrá tomar valores negativos, en consecuencia, la gráfica de la función $f(x)$ será la 2 y la de su función derivada la 1.

Otra razón podría ser que el punto -2 no pertenece a la gráfica de $f(x)$ ya que:

$$f(x) = x^2 e^x \quad \Rightarrow \quad f(-2) = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2} \neq 0$$

sin embargo, sí pertenece a la de su función derivada, puesto que:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 2(-2)e^{-2} + (-2)^2 e^{-2} = 0$$

(b) Obtengamos primeramente el área encerrada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos -2 y 0.

$$A_1 = \int_{-2}^{0} x^2 e^x \, dx$$

Calcularemos antes la integral indefinida correspondiente mediante el método de la integración por partes.

$$\int x^2 e^x \, dx$$

$$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$$
$$dv = e^x\,dx \qquad v = \int e^x\,dx = e^x$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx = \qquad [1]$$

$$u = 2x \qquad du = 2\,dx$$
$$dv = e^x\,dx \qquad v = \int e^x\,dx = e^x$$

Continuando desde [1]:

$$= x^2 e^{-x} - \left(2x e^x - 2\int e^x \, dx\right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x$$

Finalmente la integral definida será:

$$\int_{-2}^{0} x^2 e^x \, dx = \left[x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_{-2}^{0} = 0 - 0 + 2e^0 - \left((-2)^2 e^{-2} - 2(-2)e^{-2} + 2e^{-2}\right) =$$

$$= 2 - \left(4e^{-2} + 4e^{-2} + 2e^{-2}\right) = 2 - 10e^{-2} \quad u^2.$$

Obtengamos ahora el área encerrada por la gráfica de la función derivada de $f(x)$, $f'(x)$, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos -2 y 0.

$$A_2 = \left| \int_{-2}^{0} \left(2xe^x + x^2 e^x\right) dx \right| = \left| \left[\; 2xe^x - 2e^x + x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x \;\right]_{-2}^{0} \right| = \left| \left[x^2 e^x\right]_{-2}^{0} \right| =$$

$$= \left| 0 - \left((-2)^2 \, e^{-2}\right) \right| = \left| -4e^{-2} \right| = 4e^{-2} \quad u^2.$$

El área de la región sombreada será la suma de las dos áreas calculadas, es decir:

$$\text{Área} = A_1 + A_2 = 2 - 10e^{-2} + 4e^{-2} = \left(2 - 6e^{-2}\right) \ u.^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos la inversa de A, si es que tiene, mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -7 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 7 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 14 y simplifiquemos.
Dividamos la 2ª fila por -7.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que al no salirnos ninguna fila de ceros, la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

(b) Resolvamos la ecuación matricial $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$.
Restemos a los dos miembros de la igualdad la matriz $C \cdot B^t$:

$A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t \quad \Rightarrow \quad A \cdot X + C \cdot B^t - C \cdot B^t = B \cdot B^t - C \cdot B^t \quad \Rightarrow$

$A \cdot X = B \cdot B^t - C \cdot B^t$ multipliquemos a la izquierda por la inversa de A, A^{-1}.

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot (B \cdot B^t - C \cdot B^t)$ por la propiedad asociativa tendremos

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot (B \cdot B^t - C \cdot B^t)$ por la existencia de la matriz inversa

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (B \cdot B^t - C \cdot B^t)$ por la propiedad de la matriz unidad

$X = A^{-1} \cdot (B \cdot B^t - C \cdot B^t)$ terminemos de calcular la matriz X.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos, en primer lugar, la ecuación de la recta r en forma paramétrica. Para lo cual resolveremos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 - 2y \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$x = 6 - 2y \quad ; \quad z = 2$$

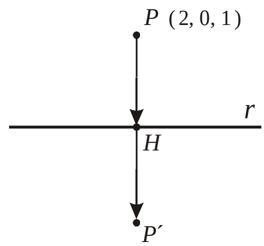
Sustituyamos la incógnita no principal, la y, por un parámetro, por ejemplo, por t, tendremos la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$$

Tomemos un punto de la recta r, el $Q(6, 0, 2)$, que junto al $P(2, 0, 1)$ determinan un vector de dirección del plano, el vector $\vec{PQ} = (6,0,2) - (2,0,1) = (4,0,1)$. Otro vector de dirección del plano es el de dirección de la recta el $(-2, 1, 0)$ de forma que la ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto P es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda + 4\mu \\ y = \lambda \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

(b) Para obtener el simétrico del punto P respecto de la recta r, $P'(a, b, c)$, tendremos que calcular un punto H de la recta de tal manera que el vector $\vec{PH}$ sea perpendicular al vector de dirección de la recta y además $\vec{PH} = \vec{HP'}$.



La ecuación de la recta r en forma paramétrica era:

$$r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$$

El punto genérico, H, tendrá de coordenadas $H(6 - 2t, t, 2)$ y el vector $\vec{PH}$:

$$\vec{PH} = (6 - 2t,\ t,\ 2) - (2,\ 0,\ 1) = (4 - 2t,\ t,\ 1)$$

Apliquemos la condición de que $\vec{PH}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta:

$$\vec{PH} \perp \vec{v}_r \;\Rightarrow\; \vec{PH} \bullet \vec{v}_r = 0 \;\Rightarrow\; (4 - 2t,\ t,\ 1) \bullet (-2,\ 1,\ 0) = 0 \;\Rightarrow$$

$$-8 + 4t + t = 0 \;\Rightarrow\; 5t = 8 \;\Rightarrow\; t = \frac{8}{5}$$

Luego el vector $\vec{PH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{PH} = (4 - 2t,\ t,\ 1) = \left(4 - 2 \cdot \frac{8}{5},\ \frac{8}{5},\ 1\right) = \left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5},\ 1\right)$$

y el punto H:

$$H\left(6-2t,\, t,\, 2\right) \;\Rightarrow\; H\left(6-2\cdot\frac{8}{5},\frac{8}{5},\,2\right) \;\Rightarrow\; H\left(\frac{14}{5},\frac{8}{5},\,2\right)$$

Impongamos la última condición, $\vec{PH} = \vec{HP'}$

$$\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5},\,1\right) = (a,\,b,\,c) - \left(\frac{14}{5},\frac{8}{5},\,2\right) \;\Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{5} = a - \frac{14}{5} & \Rightarrow \quad a = \frac{18}{5} \\ \frac{8}{5} = b - \frac{8}{5} & \Rightarrow \quad b = \frac{16}{5} \\ 1 = c - 2 & \Rightarrow \quad c = 3 \end{cases} \;\Rightarrow\; P'\left(\frac{18}{5},\frac{16}{5},\,3\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x = 0$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x} = \frac{1+1}{0} = \frac{2}{0} = \pm\infty \qquad \Rightarrow \qquad \text{Hay un asíntota vertical: } x = 0.$$

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1} = \pm\infty \qquad \Rightarrow \qquad \text{No existe asíntota horizontal.}$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: y = mx + n. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\text{m} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

Calculemos ahora n:

$$\text{n} = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \text{m}x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

La asíntota oblicua es: $y = x$.

En las funciones racionales, si hay asíntota oblicua para $x \to +\infty$, también la habrá para $x \to -\infty$, siendo además la misma.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{1}{0^-} = \dfrac{1}{-0} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = \dfrac{1}{+0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 0 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota oblicua $y = x$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(1000) = \dfrac{1000^2+1}{1000} = 1000.001 \\ y_{\text{asíntota}} = 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{(-1000)^2+1}{-1000} = -1000.001 \\ y_{\text{asíntota}} = -1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-1000) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to -\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

(b) Teniendo en cuenta que es una función racional, continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el punto cero, ya que es el valor que anula al denominador y por tanto no pertenece al dominio, determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Hallemos los valores que anulen a la función primera derivada de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x^2-\left(x^2+1\right)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Con estos dos puntos, 1 y -1, y con el 0, los ordenamos y construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -2, -0.5, 0.5 y 2, respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-2) = \dfrac{(-2)^2-1}{(-2)^2} = \dfrac{3}{4} > 0 & \Rightarrow \text{ creciente en } (-\infty, -1) \\ f'(-0.5) = \dfrac{(-0.5)^2-1}{(-0.5)^2} = \dfrac{-0.75}{0.25} < 0 & \Rightarrow \text{ decreciente en } (-1, 0) \\ f'(0.5) = \dfrac{0.5^2-1}{0.5^2} = \dfrac{-0.75}{0.25} < 0 & \Rightarrow \text{ decreciente en } (0, 1) \\ f'(2) = \dfrac{2^2-1}{2^2} = \dfrac{3}{4} > 0 & \Rightarrow \text{ creciente en } (1, +\infty) \end{cases}$$

Calculemos ahora los extremos relativos o locales.

Teniendo en cuenta todos los cálculos realizados hasta el momento y lo dicho sobre la continuidad de esta función racional, podremos concluir lo siguiente:

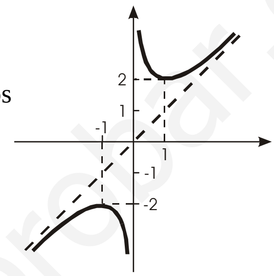
* En $x = -1$, hay un máximo relativo puesto que la función pasa de crecer a decrecer.

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo relativo } (-1,\ -2)$$

* En $x = 1$, hay un mínimo relativo puesto que la función pasa de decrecer a crecer.

$$f(1) = \frac{1^2+1}{1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo relativo } (1,\ 2)$$

(c) La gráfica de la función teniendo en cuenta los apartados anteriores, (a) y (b), se encuentra situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0 = 0$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0) \qquad [1]$$

Calculemos la ordenada en dicho punto:

$$f(0) = e^{-\frac{0}{2}} = e^0 = 1$$

Obtengamos la función primera derivada.

$$f(x) = e^{-x/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2}$$

El valor de esta derivada en el punto 0, es:

$$f'(0) = -\frac{1}{2}e^{-0/2} = -\frac{1}{2}$$

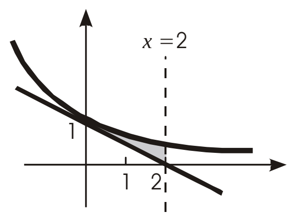
Sustituyamos estos valores calculados en la expresión [1].

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -\frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$$

que es la ecuación de la recta tangente.

(b) La función $f(x) = e^{-x/2}$ es una función exponencial casi elemental, estrictamente decreciente, que pasa por el punto (0, 1) y tiene una asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \Rightarrow +\infty$.

La recta tangente $y = -\frac{1}{2}x + 1$ pasa por los puntos (0, 1) y (2, 0).



La región acotada por la gráfica de la función f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x = 2$, es la situada al lado. Calculemos su área.

$$\text{Área} = \int_0^2 \left(e^{-\frac{x}{2}} - \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) \right) dx = \int_0^2 \left(e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x - 1 \right) dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 =$$

$$= -2e^{-\frac{2}{2}} + \frac{2^2}{4} - 2 - \left(-2e^{-\frac{0}{2}} + \frac{0^2}{4} - 0 \right) = -2e^{-1} + 1 - 2 - \left(-2e^{0} \right) = -2e^{-1} + 1 - 2 + 2 = \left(1 - 2e^{-1} \right) \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el siguiente sistema según los valores del parámetroλ.

$$\left. \begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ -\lambda x + 3y + z = -7 \\ x + 2y + (\lambda + 2) = -5 \end{array} \right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -\lambda & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & \lambda+2 & -5 \end{array} \right)$$

Coloquemos la 1ª columna en tercer lugar.
Coloquemos la 2ª columna en primer lugar.
Coloquemos la 3ª columna en segundo lugar.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -\lambda & -7 \\ 2 & \lambda+2 & 1 & -5 \end{array} \right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda-3 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + λ · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda-3 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda-2 & -2-\lambda \end{array} \right) \end{array}$$

Hemos triangulado inferiormente y todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse:

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}}{-2} = \dfrac{3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$ Estudiemos cada uno de estos dos casos.

** Si $\lambda = -1 \Rightarrow$ la última ecuación será, $0 = -2 - (-1) \Rightarrow 0 \neq -1$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema será un sistema incompatible.

** Si $\lambda = -2 \Rightarrow$ la última ecuación será, $0 = -2 - (-2) \Rightarrow 0 = 0$, que es una ecuación trivial, por lo que la podemos eliminar. El sistema estaría triangulado, nos quedarían dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow -\lambda^2 - 3\lambda - 2 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -2 \Rightarrow$ la última ecuación sería una ecuación normal, es decir, no sería ni trivial ni absurda, por lo que para los valores de $\lambda \neq -1$

y $\lambda \neq -2$ el sistema sería un sistema compatible determinado.

(b) Terminemos de resolver el sistema para el caso de $\lambda = -2$, que es cuando era un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

$$\begin{array}{ccc|c} (y) & (z) & (x) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria, nos quedará el siguiente sistema.

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2-x \\ 0 & -2 & -1+x \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_2 = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -5-x \\ 0 & -2 & -1+x \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado la solución es:

$$2y = -5 - x \quad ; \quad -2z = -1 + x$$

o lo que es lo mismo: $y = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \quad ; \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$

Sustituyendo la incógnita secundaria, la *x*, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$, tendremos finalmente la solución del sistema compatible indeterminado uniparamétrico:

$$x = \alpha \quad ; \quad y = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\alpha \quad ; \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ sean linealmente dependientes se ha de satisfacer que el determinante formado con sus respectivas componentes sea cero

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0+0-2-0-0+2 = 0 \quad \Rightarrow$$ luego sí son linealmente dependientes.

(b) Expresemos el vector $(4, a+3, -2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$.

$$(4, a+3, -2) = \alpha\,(0, 1, 0) + \beta\,(2, 1, -1) + \gamma\,(2, 3, -1) \quad ; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

y calculemos para qué valores de *a* esto es posible.

Efectuemos las operaciones.

$$(4, a+3, -2) = (0, \alpha, 0) + (2\beta, \beta, -\beta) + (2\gamma, 3\gamma, -\gamma)$$
$$(4, a+3, -2) = (2\beta+2\gamma,\ \alpha+\beta+3\gamma,\ -\beta-\gamma)$$

Al ser estos dos vectores iguales podemos identificar sus componentes:

$$\left.\begin{array}{r} 2\beta + 2\gamma = 4 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = a+3 \\ -\beta - \gamma = -2 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & a+3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Coloquemos la 1ª fila en tercer lugar.
Coloquemos la 2ª fila en primer lugar.
Coloquemos la tercera fila en segundo lugar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a+3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a+3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Hemos obtenido una ecuación trivial que podemos eliminar. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, independientemente del valor de *a*. En definitiva, para cualquier valor de *a*, podemos encontrar infinitas maneras de expresar el vector (4, *a*+3, -2) como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$. Esto es así porque además estos tres vectores son linealmente dependientes.

(c) Calculemos primeramente un vector (*a*, *b*, *c*) perpendicular a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

$(a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

$(a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a + b - c = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a - c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 2a$

luego un vector perpendicular puede ser, si le damos a *a* el valor 1, el (1, 0, 2).

Para obtener un vector unitario debemos dividir el vector obtenido por su módulo:

$$\left|(1, 0, 2)\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$(1, 0, 2) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

este último vector es el vector que es unitario y perpendicular a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	PLANES DE 1994 Y DE 2002 **MATEMÁTICAS II**

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2005

Opción A

EJERCICIO 1. De una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe que $f(0)=2$ y que $f'(x)=2x$.

(a) [1 PUNTO]. Determina f.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, por el eje de abscisas y por las rectas de ecuaciones $x=-2$ y $x=2$.

EJERCICIO 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)^2 e^{-x}$.

(a) [0´5 PUNTOS]. Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1´5 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos del mismo tipo pesan lo mismo.

EJERCICIO 4. Considera un plano $\pi \equiv x + y + mz = 3$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = \frac{z-2}{2}$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla m para que r y π sean paralelos.

(b) [0´75 PUNTOS]. Halla m para que r y π sean perpendiculares.

(c) [1 PUNTO]. ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?

Opción B

EJERCICIO 1. De una función f: $[0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(3)=6$ y que su función derivada está dada por

$$f'(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad 1\leq x<5 \end{cases}$$

(a) [1 PUNTO]. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

EJERCICIO 2. Considera la integral definida $I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Exprésala aplicando el cambio de variables $\sqrt{1+x}-1=t$.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula I.

EJERCICIO 3. Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) [1 PUNTO]. $|-3A|$ y $|A^{-1}|$.

(b) [0´75 PUNTOS]. $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.

(c) [0´75 PUNTOS]. $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.

EJERCICIO 4. Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 2y + z + 2 = 0$.

(a) [1´5 PUNTOS]. Calcula las coordenadas del punto P sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1, 0, -3)$.

(b) [1 PUNTO]. Calcula el punto simétrico de P respecto del plano π_2.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

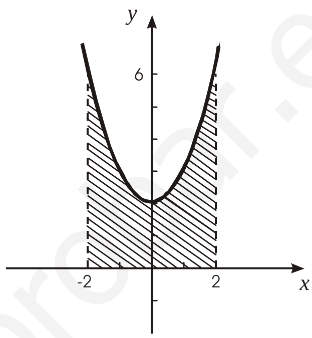
(a) Para calcular la función f conociendo su función derivada, integraremos ésta para calcular la familia de primitivas y después le impondremos la condición de que $f(0)=2$.

$$f(x)=\int f'(x)\ dx=\int 2x\ dx=\frac{2x^2}{2}+\mathrm{K}=x^2+\mathrm{K}$$

Sustituyamos la x por 2:

$$f(x)=x^2+\mathrm{K}\ \Rightarrow\ f(0)=2\ \Rightarrow\ 0^2+\mathrm{K}=2\ \Rightarrow\ \mathrm{K}=2\ \Rightarrow\ f(x)=x^2+2$$

(b) Dibujemos previamente la gráfica de *f (x)*, para lo cual tendremos en cuenta que se trata de la función elemental x^2 desplazada dos unidades hacia arriba. El área de la región que nos piden es la rayada y situada al lado.



$$\int_{-2}^{2}\left(x^2+2\right)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\frac{2^3}{3}+2\cdot 2-\left(\frac{(-2)^3}{3}+2(-2)\right)=\frac{8}{3}+4-\left(-\frac{8}{3}-4\right)=$$

$$=\frac{16}{3}+8=\frac{40}{3}\ u^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, ya que la función puede ponerse en la forma:

$$f(x)=(x-1)^2e^{-x}\quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{(x-1)^2}{e^x}\qquad[1]$$

pero no hay ningún valor que anula al denominador, puesto que $e^x=0$ no puede ser.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$

Comprobemos si existe, primero para $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-1)}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0\quad\Rightarrow\quad y=0 \text{ es la asíntota}$$

horizontal cuando $x\to+\infty$.

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

Veamos ahora si existe para $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}(-x-1)^2\cdot e^{-(-x)}=\lim_{x\to+\infty}(-x-1)^2\cdot e^{x}=\infty\cdot\infty=\infty$$

No existe asíntota horizontal para $x \to -\infty$, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$, cuando $x \to -\infty$.

Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\mathrm{m} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x-1)^2 e^{-(-x)}}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2 e^{x}}{-x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x+1)\cdot e^x + (x+1)^2 \cdot e^x}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

Luego no existe asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal, $y = 0$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} f(100) &= \frac{(100-1)^2}{e^{100}} = 9801\cdot e^{-100} \\ y_{\text{asíntota}} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f(100) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

(b) Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Obtengamos, en primer lugar, la función primera derivada.

$$f'(x) = 2(x-1)\cdot e^{-x} + (x-1)^2\left(-e^{-x}\right) \Rightarrow f'(x) = (2x-2)\cdot e^{-x} - \left(x^2 - 2x + 1\right)\cdot e^{-x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(-x^2 + 4x - 3\right)\cdot e^{-x}$$

Hallemos los valores que anulen a la función primera derivada de $f(x)$.

$$\left(-x^2 + 4x - 3\right)\cdot e^{-x} = 0 \quad \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 = 0 & \Rightarrow \quad x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \dfrac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \\ e^{-x} = 0 & \Rightarrow \quad \text{no hay ningún valor} \end{cases}$$

Con estos dos puntos, 1 y 3, los ordenamos y construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 0, 2, y 4 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(0) = (-0+0-3)\cdot e^{-0} = -3 < 0 & \Rightarrow \quad \text{decreciente en } (-\infty,\ 1) \\ f'(2) = \left(-2^2 + 8 - 3\right)\cdot e^{-2} = e^{-2} > 0 & \Rightarrow \quad \text{creciente en } (1,\ 3) \\ f'(4) = \left(-4^2 + 16 - 3\right)\cdot e^{-2} = -3\cdot e^{-2} < 0 & \Rightarrow \quad \text{decreciente en } (3,\ +\infty) \end{cases}$$

Estudiemos los extremos locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, ya que la función es continua por tratarse del producto o del cociente (según se mire, ver [1]) de dos funciones que lo son en todo $\mathbb{R}$ y no anularse para ningún valor del denominador, por similares razones es derivable en todo su dominio que es $\mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora podemos asegurar que hay un mínimo local en $x = 1$, y un máximo local en $x = 3$.

Las ordenadas de estos extremos son:

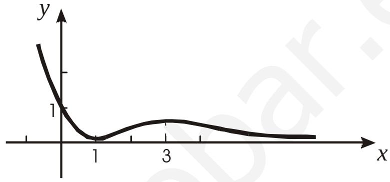
$$f(1) = (1-1)^2 \cdot e^{-0} = 0 \qquad \Rightarrow \text{ mínimo en } (1, 0).$$

. $$f(3) = (3-1)^2 \cdot e^{-3} = 4e^{-3} \qquad \Rightarrow \text{ Máximo en } \left(3,\ 4e^{-3}\right).$$

(c) Para dibujar la gráfica nos bastaría con calcular el punto de corte con el eje de ordenadas, que sería:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = (x-1)^2 e^{-x} \;\Rightarrow\; f(0) = (0-1)^2 e^{-0} \;\Rightarrow\; f(0) = 1 \;\Rightarrow\; (1, 0)$$

La gráfica sería:



SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Llamemos *s* al peso de una sortija, *m* al de una moneda y *p* al de un pendiente, con lo que podremos establecer el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} s + m + p = 30 \\ 4s + 3m + 2p = 90 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 4 & 3 & 2 & 90 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -30 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado. Se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Nos sobra una incógnita la *p* que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 30-p \\ 0 & -1 & -30+2p \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p \\ 0 & -1 & -30+2p \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $s = p$; $m = 30 - 2p$

Sustituyamos la incógnita secundaria, la *p*, por un parámetro, por ejemplo, por λ, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} s = \lambda \\ m = 30 - 2\lambda \\ p = \lambda \end{array}\right\}$$

El problema nos dice que uno de los objetos, aunque deformado, pesa 18 gramos, lo que significa que la sortija o la moneda o bien el pendiente pesa 18 gramos.

Supongamos que sea la sortija la que pesa 18 gramos, $s = 18$, eso implica que el pendiente también pesa 18, $p = 18$, ya que $s = \lambda$ y $p = \lambda$, por tanto $\lambda = 18$ y la moneda pesará:

$$m = 30 - 2\lambda \quad \Rightarrow \quad m = 30 - 2\cdot 18 \quad \Rightarrow \quad m = -6 \quad \text{que es imposible.}$$

Supongamos la única otra posibilidad, que sea la moneda la que pese 18 gramos, por lo que los otros objetos pesarán:

$m = 30 - 2\lambda \quad \Rightarrow \quad 18 = 30 - 2\lambda \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = 30 - 18 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6$
$s = \lambda \quad \Rightarrow \quad s = 6$ gramos
$p = \lambda \quad \Rightarrow \quad p = 6$ gramos

SOLUCIÓ N EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos inicialmente la recta *r* como intersección de dos planos.

$$x = y - 1 = \frac{z-2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y - 1 \\ x = \dfrac{z-2}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - z = -2 \end{cases}$$

Discutamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta *r* y la del plano π para hallar el valor de *m* para que sean paralelos.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - z = -2 \\ x + y + mz = \ \ 3 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & m & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & m & 4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 & 4 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Para que la recta y el plano sean paralelos el sistema debe ser incompatible, por lo que la última ecuación debe ser absurda, y para ello se ha de verificar que el coeficiente a_{33} sea cero, o sea:

$m + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -1$ valor para el que la recta y el plano son paralelos.

(b) Para que la recta y el plano sean perpendiculares se ha de verificar que el vector de dirección de la recta, el (1, 1, 2), y el vector normal del plano, el (1, 1, *m*), sean paralelos, es decir, las coordenadas de ambos vectores deben ser proporcionales.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{2}{m} \;\Rightarrow\; \frac{1}{1} = \frac{2}{m} \;\Rightarrow\; m = 2$$ valor para el que la recta y el plano son perpendiculares.

(c) Para que la recta esté contenida en el plano, según el apartado (a), una vez que habíamos triangulado inferiormente, el sistema tendría que ser un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, por lo que la última ecuación debería ser una ecuación trivial, 0=0, pero no es posible puesto que la última ecuación tiene como término independiente, 4. En definitiva no existe ningún valor de *m* que haga que la recta esté contenida en el plano.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función *f* es derivable en (0, 5), luego es continua en (0, 5).

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x_0 = 3$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(3) = f'(3)\,(x - 3) \qquad [1]$$

El enunciado del ejercicio nos dice que la ordenada en dicho punto es $f(3) = 6$.

De la expresión matemática de la función derivada, deducimos que la derivada en el punto 3 es: $f'(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = -1$.

Sustituyamos estos valores en la expresión [1]

$y - 6 = -1 \times (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 9$ que es la ecuación de la recta tangente.

(b) Para determinar los intervalos de monotonía de esta función continua y derivable en (0, 5), calcularemos los puntos donde se anula la derivada.

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 5x - 2 = 0 & ; & x = \dfrac{2}{5} = 0'4 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 & ; & x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Con estos tres valores y teniendo en cuenta que es una función a trozos, y que en el punto 1 hay un cambio en el comportamiento de la función, construimos los siguientes intervalos de monotonía, (0, 0´4), (0´4, 1), (1, 2), (2, 4) y (4, 5). Probamos valores intermedios de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según obtengamos un valor positivo o negativo la función será creciente o decreciente.

$f'(0'2) = 5 \cdot 0'2 - 2 = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ decreciente en $(0,\ 0'4)$

$f'(0'5) = 5 \cdot 0'5 - 2 = 0'5 > 0 \quad \Rightarrow$ creciente en $(0'4,\ 1)$

$f'(1'5) = 1'5^2 - 6 \cdot 1'5 + 8 = 1'25 > 0 \quad \Rightarrow$ creciente en $(1,\ 2)$

$f'(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ decreciente en $(2,\ 4)$

$f'(4'5) = 4'5^2 - 6 \cdot 4'5 + 8 = 1'25 > 0 \quad \Rightarrow$ creciente en $(4,\ 5)$

Teniendo en cuenta lo anterior y como la función es continua, los extremos relativos o locales se presentarán en los puntos 0´4, 2 y 4, siendo cada uno de ellos lo siguiente:

* en el 0´4 un mínimo local por pasar la gráfica de la función de decreciente a creciente.

* en el 2 un máximo local por pasar la función de creciente a decreciente.

* en el 4 un mínimo local por pasar de decreciente a creciente.

Para calcular los valores que alcanza la función en cada uno de ellos tendremos que obtener la función a partir de la función derivada mediante la integración de la misma.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \displaystyle\int (5x - 2)\,dx = \frac{5}{2}x^2 - 2x + K & \text{si} & 0 \le x < 1 \\ \displaystyle\int \left(x^2 - 6x + 8\right)dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + C & \text{si} & 1 \le x \le 5 \end{array} \right.$$

Para calcular *C* tendremos en cuenta que la función en el punto 3 vale 6, es decir, $f(3) = 6$.

$\frac{3^3}{3} - 3\cdot 3^2 + 8\cdot 3 + C = 6 \quad \Rightarrow \quad C = 6 - 9 + 27 - 24 = 0$

Al ser $C = 0$ la función tendrá el siguiente aspecto.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x^2 - 2x + K & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x & \text{si} \quad 1 \le x \le 5 \end{cases}$$

Calculemos el valor de K, sabiendo que la función es continua por ser derivable según el problema (nos han dado la expresión matemática de la función derivada).

Al tratarse de una función a trozos y de expresiones polinómicas, la función lógicamente es continua, pero para que lo sea en el punto 1, los límites laterales y el valor de la función en dicho punto deben coincidir, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{5}{2}x^2 - 2x + K\right) = \frac{5}{2} - 2 + K = \frac{1}{2} + K \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right) = \frac{1}{3} - 3 + 8 = \frac{16}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{2} + K = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{29}{6}$$

La función finalmente será: $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{29}{6} & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x & \text{si} \quad 1 \le x \le 5 \end{cases}$

Ahora ya podemos calcular los valores que alcanza la función en sus extremos relativos.

* En el 0´4: $f(0'4) = \frac{5}{2}\cdot 0'4^2 - 2\cdot 0'4 + \frac{29}{6} = \frac{133}{30} \quad \Rightarrow$ Mínimo local $\left(0'4,\ \frac{133}{30}\right)$

* En el 2: $f(2) = \frac{2^3}{3} - 3\cdot 2^2 + 8\cdot 2 = \frac{20}{3} \quad \Rightarrow$ Máximo local $\left(2,\ \frac{20}{3}\right)$

* En el 4: $f(4) = \frac{4^3}{3} - 3\cdot 4^2 + 8\cdot 4 = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow$ Mínimo local $\left(4,\ \frac{16}{3}\right)$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Apliquemos el cambio de variables $\sqrt{1+x} - 1 = t$, a la integral I. Tendremos.

$\sqrt{1+x} - 1 = t \Rightarrow \sqrt{1+x} = t + 1 \Rightarrow 1 + x = (t+1)^2 \Rightarrow \quad x = t^2 + 2t + 1 - 1 \quad \Rightarrow$

$x = t^2 + 2t \Rightarrow dx = (2t+2)\,dt$

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{1+3} - 1 = 1 \\ \text{Si} \quad x = 8 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{1+8} - 1 = 2 \end{cases}$$

$$I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}(2t+2)\,dt = \int_1^2 \frac{2t+2}{t}\,dt$$

(b) terminemos de calcular la integral I

$$I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}(2t+2)\,dt = \int_1^2 \frac{2t+2}{t}\,dt = \int_1^2 \left(2 + \frac{2}{t}\right)dt = \left[2t + 2\cdot \text{Ln}\left|t\right|\right]_1^2 =$$

$$= 4 + 2\cdot \text{Ln}(2) - \left(2 + 2\cdot \text{Ln}(1)\right) = 4 + 2\cdot \text{Ln}(2) - 2 - 0 = 2 + 2\cdot \text{Ln}(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Si el determinante asociado a la matriz A vale 2, $|A| = 2$, el de la matriz $-3A$ será:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \quad -3A = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3d & -3e & -3f \\ -3g & -3h & -3i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Hemos aplicado cómo se multiplica un número por una matriz, que es multiplicando todos los elementos de la matriz por dicho número.

$$\left|-3A\right| = \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3d & -3e & -3f \\ -3g & -3h & -3i \end{vmatrix} = (-3)^3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -27\cdot 2 = -54$$

Hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice:

"*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

En nuestro caso lo hemos hecho tres veces por haber tres filas o columnas con el factor común 3.

Calculemos ahora $|A^{-1}|$.

Aplicaremos la propiedad de los determinantes que dice:

Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, se verifica que:

$$\left|A\cdot B\right| = \left|A\right|\cdot\left|B\right|$$

En el caso de ser las matrices A y A^{-1}, tendríamos:

$$\left|A\cdot A^{-1}\right| = \left|A\right|\cdot\left|A^{-1}\right| \Rightarrow \left|I\right| = \left|A\right|\cdot\left|A^{-1}\right| \Rightarrow 1 = \left|A\right|\cdot\left|A^{-1}\right| \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{\left|A\right|}$$

Por tanto, $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|A\right|} \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{2}$

(b) Calculemos este otro determinante.

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = 2(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2\cdot 2 = -4$$

La primera de las propiedades que hemos aplicado, dice:

"*Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante*".

En nuestro caso, la tercera fila tiene como factor común el 2.

La segunda de las propiedades que se ha usado es:

"*Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo*".

En nuestro caso, hemos intercambiado las columnas primera y tercera.

(c) Calculemos este otro determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0 - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

La primera de las propiedades que hemos usado dice:

"*Si los elementos de cualquier fila o columna de un determinante son sumas de igual nº de términos, entonces el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de las filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada por sumandos, la cual, es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos sumandos para el 2º determinante y así sucesivamente, hasta el último sumando*".

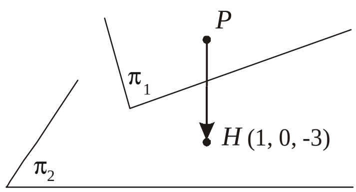
En nuestro caso, es la tercera columna la que está compuesta por la suma de dos términos.

La segunda de las propiedades que hemos aplicado es:

"*Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero*".

En nuestro caso, la primera y tercera columna son iguales.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Comencemos expresando la ecuación del plano π_1, que viene dada en forma general, en forma paramétrica. Para lo cual resolveremos el sistema formado por la ecuación del plano.

$2x + y - z + 5 = 0 \Rightarrow 2x + y - z = -5$

Pongamos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(2 \quad 1 \quad -1 \mid -5\right)$ Intercambiemos las columnas 1ª y 2ª, con el fin de que el pivote sea 1.

$$\begin{array}{ccc} (y) & (x) & (z) \end{array}$$
$\left(1 \quad 2 \quad -1 \mid -5\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, nos sobran dos incógnitas, la x y la z, que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

(y)
$\left(1 \mid -5 - 2x + z\right)$ La solución es: $y = -5 - 2x + z$

Sustituyamos cada una de las incógnitas secundarias, x y z por un parámetro, por ejemplo, α y β, respectivamente, obtendremos las ecuaciones paramétricas del plano π_1.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -5 - 2\alpha + \beta \\ z = \beta \end{cases}$$

De igual manera procedemos con el plano π_2.

$x + 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow x + 2y + z = -2$. Pongamos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(1 \quad 2 \quad 1 \middle| -2\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, nos sobran dos incógnitas, la x y la z, que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$\left(1 \middle| -2-2y-z\right)$ La solución es: $x = -2 - 2y - z$

Sustituyamos cada una de las incógnitas secundarias, y y z por un parámetro, por ejemplo, λ y μ, respectivamente, obtendremos las ecuaciones paramétricas del plano π_2.

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -2-2\lambda-\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Elijamos del plano π_1 un punto genérico, P, de coordenadas $P(\alpha, -5-2\alpha+\beta, \beta)$; y el H del otro plano, de coordenadas $H(1, 0, -3)$.

Se ha de verificar que el vector $\vec{PH}$ que determinan estos dos puntos, ha de ser perpendicular a los 2 vectores de dirección del plano π_2, y por tanto, los productos escalares respectivos serán cero:

$$\vec{PH} = (1, 0, -3) - (\alpha, -5-2\alpha+\beta, \beta) = (1-\alpha, 5+2\alpha-\beta, -3-\beta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{PH} \perp \vec{u}_{\pi_2} \Rightarrow \vec{PH} \bullet \vec{u}_{\pi_2} = 0 \Rightarrow (1-\alpha, 5+2\alpha-\beta, -3-\beta) \bullet (-2, 1, 0) = 0 \\ \vec{PH} \perp \vec{v}_{\pi_2} \Rightarrow \vec{PH} \bullet \vec{v}_{\pi_2} = 0 \Rightarrow (1-\alpha, 5+2\alpha-\beta, -3-\beta) \bullet (-1, 0, 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -2+2\alpha+5+2\alpha-\beta = 0 \\ -1+\alpha-3-\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4\alpha-\beta = -3 \\ \alpha-\beta = 4 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 19 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 0 & -28 \\ 0 & -3 & 19 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$12\alpha = -28 \quad ; \quad -3\beta = 19$$

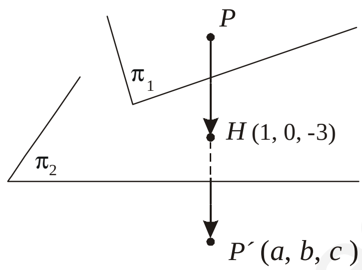
$$\alpha = \frac{-28}{12} = -\frac{7}{3} \quad ; \quad \beta = -\frac{19}{3}$$

Luego el punto P tendrá de coordenadas:

$$P = (\alpha, -5-2\alpha+\beta, \beta) = \left(-\frac{7}{3}, -5-2\cdot\frac{-7}{3}-\frac{19}{3}, -\frac{19}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}, -\frac{19}{3}\right)$$

(b) Teniendo en cuenta el dibujo, el simétrico de P respecto del plano π_2 es P' de coordenadas (a, b, c), se verificará: $\vec{PH} = \vec{HP'}$.

$$\vec{PH} = (1-\alpha, 5+2\alpha-\beta, -3-\beta) = \left(1+\frac{7}{3}, 5+2\cdot\frac{-7}{3}+\frac{19}{3}, -3+\frac{19}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}\right)$$



$\overrightarrow{HP'} = (a,\ b,\ c) - (1,\ 0,\ -3) = (a-1,\ b,\ c+3)$

Igualemos las coordenadas de ambos vectores, $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{HP'}$.

$$\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}\right) = (a-1, b, c+3) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{10}{3} = a-1 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{13}{3} \\ \dfrac{20}{3} = b \qquad \Rightarrow \quad b = \dfrac{20}{3} \\ \dfrac{10}{3} = c+3 \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad P'\left(\frac{13}{3},\ \frac{20}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

Que son las coordenadas del simétrico de P respecto del plano π_2.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	PLANES DE 1994 Y DE 2002 MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 48 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.
(a) [0´5 PUNTOS]. Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
(b) [0´75 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
(c) [0´75 PUNTOS]. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de *f*.
(d) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de *f*.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula la integral
$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones
$$\left.\begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ mx + 2z &= 0 \\ my - z &= m \end{aligned}\right\}.$$
(a) [1 PUNTO]. Determina los valores de *m* para los que el sistema tiene una única solución. Calcula dicha solución para $m = 1$.
(b) [1 PUNTO]. Determina los valores de *m* para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcula dichas soluciones.
(c) [0´5 PUNTOS]. ¿Hay algún valor de *m* para el que el sistema no tiene solución?

EJERCICIO 4. Sea el punto $P(1, 0, -3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$
(a) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano que contiene a *P* y es perpendicular a *r*.
(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de *r*.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Determina los puntos de la parábola de ecuación $y = 5 - x^2$ que están más próximos al origen de coordenadas. Calcula la distancia entre los puntos obtenidos y el origen de coordenadas

EJERCICIO 2. Se sabe que la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si} \quad 0 \le x \le 8, \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si} \quad x > 8. \end{cases}$$

es continua en $[0, +\infty)$.

(a) [0´5 PUNTOS]. Halla el valor de a.

(b) [2 PUNTOS]. Calcula $\int_0^{10} f(x)\, dx$.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Halla la matriz X que cumple que

$$A \cdot X \cdot A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 4. Se sabe que los puntos $A(m, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(7, 2, 1)$ están en un mismo plano.

(a) [1´5 PUNTOS]. Halla m y calcula la ecuación de dicho plano.

(b) [1 PUNTO]. ¿Están los puntos B, C y D alineados?

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Veámoslo.

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{1-1} = \frac{e}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical: } x = 1.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e}{1^- - 1} = \dfrac{e}{-0} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e}{1^+ - 1} = \dfrac{1}{+0} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 1 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe, calculando primeramente el límite cuando x tienda a $-\infty$ y luego cuando x tienda a $+\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{-x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x(-x-1)} = \frac{1}{e^{\infty}(-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

luego hay una asíntota horizontal, $y=0$, cuando x tiene a $-\infty$.

Calculemos ahora el límite cuando x tienda a $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{No existe asíntota horizontal.}$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal cuando x tienda a $+\infty$, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: y = mx + n. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\mathrm{m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

luego no hay asíntota oblicua $x\to+\infty$, sino que existe una rama parabólica paralela al eje de ordenadas.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal $y=0$, cuando x tiene a $-\infty$.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -10 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-10) = \dfrac{e^{-10}}{-10-1} = -0.00004127 \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-10) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to -\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

(b) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, obtengamos la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

$$e^x(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \end{cases}$$

Sólo hay un valor que anule a la primera derivada, el $x=2$, que junto al punto $x=1$ que no pertenece al dominio de la función nos permite construir los siguientes intervalos de monotonía: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 0, 1´5 y 3, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(0) = \frac{e^0(0-2)}{(0-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2 < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (-\infty, 1)$$

$$f'(1'5) = \frac{e^{1'5}(1'5-2)}{(1'5-1)^2} = -8'9633 < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (1, 2)$$

$$f'(3) = \frac{e^3(3-2)}{(3-1)^2} = 5'02138 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (2, +\infty)$$

(c) Determinemos los intervalos de concavidad y convexidad a partir de la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{\left(e^x(x-2)+e^x\right)(x-1)^2 - e^x(x-2)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{e^x(x-1)^2 - 2e^x(x-2)}{(x-1)^3} = \frac{e^x\left(x^2+1-2x-2x+4\right)}{(x-1)^3} = \frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3}$$

Calculemos los valores que anulen a esta segunda derivada.

$$\frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x^2-4x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{cases}$$

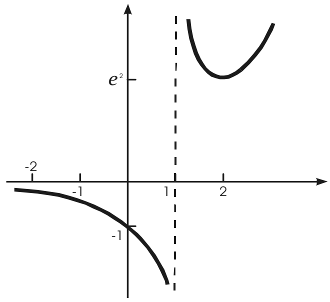
no hay ningún valor que la anule, por lo que sólo tendremos en cuenta el valor que no pertenece al dominio, el $x=1$, para construir los intervalos de curvatura siguientes, el $(-\infty, 1)$ y el $(1, +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 0 y 2, respectivamente de cada uno de estos intervalos en la función segunda derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será convexo o cóncavo:

$$f''(0) = \frac{e^0(0-0+5)}{(0-1)^3} = \frac{5}{-1} = -5 < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Cóncavo en } (-\infty, 1)$$

$$f''(2) = \frac{e^2\left(2^2-4\cdot 2+5\right)}{(2-1)^3} = e^2 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Convexo en } (1, +\infty)$$

(d) La gráfica aproximada de la función es la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la integral indefinida siguiente:

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

Se trata de una integral racional impropia donde el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador por lo que efectuaremos la división indicada.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + x^2 - 10x + 1 & x^2 - x - 2 \\ \hline -3x^3 + 3x^2 + 6x & 3x + 4 \\ \hline \quad 4x^2 - 4x + 1 & \\ \quad -4x^2 + 4x + 8 & \\ \hline \qquad\qquad 9 & \end{array}$$

La integral anterior quedará así:

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\, dx = \int (3x + 4)\, dx + \int \frac{9}{x^2 - x - 2}\, dx = [1]$$

la última integral sí es una integral racional propia, por lo que el integrando lo descompondremos en una suma de fracciones elementales para ello calcularemos los valores que anulan al denominador del integrando.

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Descompongamos la fracción en fracciones elementales en función de sus raíces.

$$\frac{9}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{x^2 - x - 2} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} \quad \Rightarrow$$

$$9 = A(x+1) + B(x-2) \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \quad \Rightarrow \quad 9 = 3A \quad \Rightarrow \quad A = 3 \\ x = -1 \quad \Rightarrow \quad 9 = -3B \quad \Rightarrow \quad B = -3 \end{cases}$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$= 3\frac{x^2}{2} + 4x + \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+1} \right) dx = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 3\mathrm{Ln}\left| x - 2 \right| - 3\mathrm{Ln}\left| x + 1 \right| + C$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el sistema siguiente según los valores del parámetro *m*, determinando inicialmente en este apartado los valores de *m* para los cuales el sistema tiene una única solución, es decir, es un sistema compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - m · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3m & 2-m & -5m \\ 0 & m & -1 & m \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & m & -1 & m \\ 0 & -3m & 2-m & -5m \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & m & m \\ 0 & 2-m & -3m & -5m \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + $(2-m)$ · [2ªf.]

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & m & m \\ 0 & 0 & -m^2-m & -m^2-3m \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente y todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse:

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -m^2 - m = 0 \Rightarrow -m(m+1)=0 \Rightarrow m = 0$; $m = -1 \Rightarrow$ Estudiemos cada uno de estos dos casos.

** Si $m = 0 \Rightarrow$ la última ecuación será: $0 = -0^2-3\cdot 0 \Rightarrow 0 = 0$, que es una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que el sistema será un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** Si $m = -1 \Rightarrow$ la última ecuación será: $0 = -(-1)^2-3\cdot(-1) \Rightarrow 0 = 2$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow -m^2 - m \neq 0 \Rightarrow -m(m+1) \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$; $m \neq -1 \Rightarrow$ la última ecuación sería una ecuación normal, es decir, no sería ni trivial ni absurda, por lo que el sistema sería un sistema compatible determinado.

Calculemos la solución única para el caso de $m = 1$. Para ello, sustituyamos este valor de m en el sistema triangulado al que habíamos llegado.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1^2-1 & -1^2-3\cdot 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos por -2 la 3ª fila.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 3 · [3ªf.]

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:
$x = -2 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad z = 1.$

(b) Según el apartado anterior, el sistema tendrá infinitas soluciones para $m = 0$. Calculemos dichas soluciones, para lo cual sustituiremos, en el sistema triangulado al que habíamos llegado inicialmente, el valor de m por 0.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La última ecuación ya habíamos dicho que era una ecuación trivial, la eliminamos; nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, la incógnita que nos sobra, la y, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5-3y \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5-3y \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

La solución es:
$x = 5 - 3y \quad ; \quad z = 0$
Sustituyamos la incógnita no principal, la y, por un parámetro, por ejemplo, por λ, tenderemos:
$$x = 5 - 3\lambda \quad ; \quad y = \lambda \quad ; \quad z = 0$$

(c) El sistema no tiene solución para $m = -1$, según se justificó en el apartado a).

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a r, expresaremos la ecuación de la recta r en forma paramétrica para elegir después el vector de dirección de la misma y hacerlo coincidir con el vector normal al plano que me piden, ya que es la condición para que el plano y la recta sean perpendiculares.

$$r \equiv \left\{\begin{array}{r} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x + z = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 2ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria, nos quedará el siguiente sistema.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -z \\ 0 & -1 & 1+2z \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es: $x = -z$; $y = -1-2z$. Sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones paramétricas de r serán:

$$r \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -1-2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

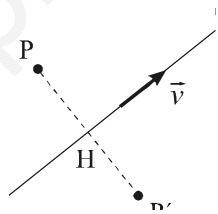
El vector de dirección de la recta r es el $(-1, -2, 1)$, y que como dijimos al principio, podemos tomarlo como el vector normal al plano que nos pide el problema; sustituyamos las coordenadas de este vector por los coeficientes de las incógnitas en la ecuación general del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -x - 2y + z + D = 0$$

Impongamos ahora la condición a este plano de que pase por el punto $P(1, 0, -3)$:

$$-x - 2y + z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 - 2\cdot 0 - 3 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 4$$

La ecuación del plano que nos piden, finalmente es: $-x - 2y + z + 4 = 0$



(b) La ecuación de la recta r en forma paramétrica era:

$$r \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -1-2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El vector de dirección de la recta r es $\vec{v} = (-1, -2, 1)$

Sea H la proyección del punto $P = (1, 0, -3)$ sobre la recta r, se cumple la condición de que el vector $\vec{PH}$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ de dirección de la recta, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto H por pertenecer a la recta tendrá de coordenadas $(-\alpha, -1-2\alpha, \alpha)$.

El vector $\vec{PH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{PH} = (-\alpha, -1-2\alpha, \alpha) - (1, 0, -3) = (-\alpha-1, -1-2\alpha, \alpha+3)$$

El producto escalar de los vectores $\vec{PH}$ y $\vec{v}$ es cero:

$$\vec{PH} \bullet \vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; (-\alpha-1, -1-2\alpha, \alpha+3) \bullet (-1, -2, 1) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\alpha + 1 + 2 + 4\alpha + \alpha + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = -1$$

Sustituyamos α en el punto H y en el vector $\vec{PH}$:

$$H = (-\alpha, -1-2\alpha, \alpha) = (-(-1), -1-2(-1), -1) = (1, 1, -1)$$

$$\vec{PH} = (-\alpha-1, -1-2\alpha, \alpha+3) = (-(-1)-1, -1-2(-1), -1+3) = (0, 1, 2)$$

El punto $P'=(a, b, c)$, simétrico del P respecto de la recta r, verifica que $\vec{PH} = \vec{HP'}$, es decir:

$$\vec{PH} = \vec{HP'} \Rightarrow (0,1,2) = (a,b,c) - (1,1,-1) \Rightarrow (0,1,2) = (a-1, b-1, c+1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = a-1 \\ 1 = b-1 \\ 2 = c+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad P' = (1, 2, 1)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Construyamos la función distancia de los puntos de la parábola, $y = 5 - x^2$, con el origen de coordenadas (0, 0). Un punto cualquiera de la parábola tendrá de coordenadas $(x, 5 - x^2)$.

$$dist(O,P) = d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(5 - x^2 - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(5 - x^2\right)^2} = \sqrt{x^4 - 9x^2 + 25}$$

Calculemos el dominio de esta función, es decir, los valores que hagan al radicando mayor o igual que cero. Podemos observar que es $\mathbb{R}$ ya que el radicando es la suma de los cuadrados de dos números, y siempre nos saldrá mayor que cero o cero.

Se trata además de la función raíz cuadrada de una función polinómica, lo que implica que es continua y derivable en dicho dominio.

Calculemos los mínimos absolutos de esta función. En primer lugar, obtendremos los relativos que se encontrarán entre los que anulen a la primera derivada:

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 18x}{2\sqrt{x^4 - 9x^2 + 25}}$$

$$4x^3 - 18x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(4x^2 - 18\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 18 \Rightarrow \; x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{2}} = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Para comprobar qué valores de los que anulan a la derivada son mínimos relativos, estudiamos la monotonía, teniendo en cuenta que la función es continua en todo su dominio.

Construimos los cuatro intervalos posibles de monotonía:

$$\left(-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -3, -1, 1 y 3, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$d'(-3) = \frac{4\cdot(-3)^3 - 18(-3)}{2\sqrt{(-3)^4 - 9(-3)^2 + 25}} = \frac{-54}{2\sqrt{25}} = -\frac{27}{5} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } \left(-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$d'(-1) = \frac{4\cdot(-1)^3 - 18(-1)}{2\sqrt{(-1)^4 - 9(-1)^2 + 25}} = \frac{14}{2\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{17}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$d'(1) = \frac{4\cdot 1^3 - 18\cdot 1}{2\sqrt{1^4 - 9\cdot 1^2 + 25}} = \frac{-14}{2\sqrt{17}} = \frac{-7}{\sqrt{17}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } \left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$d'(3) = \frac{4\cdot 3^3 - 18\cdot 3}{2\sqrt{3^4 - 9\cdot 3^2 + 25}} = \frac{54}{2\sqrt{25}} = \frac{27}{5} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

A la vista de todo lo anterior, los mínimos relativos se encuentran en los puntos donde se produce un cambio de decreciente a creciente en la gráfica de la función, es decir, en los de abscisa: $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ y $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Las ordenadas de estos puntos se obtendrán sustituyendo dichas abscisas en la ecuación de la parábola:

$$y = 5 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5 - \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \ \dfrac{1}{2}\right) \\ 5 - \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \ \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Estos mínimos relativos serán también mínimos absolutos por cuanto la monotonía que hemos estudiado de la gráfica de la función así nos lo indica, ya que además los dos mínimos toman el mismo valor mínimo. Estos serán pues los puntos de la parábola más próximos al origen de coordenadas.

Para calcular la distancia de cada uno de estos puntos al origen de coordenadas, bastará sustituir las abscisas de los mínimos absolutos en la función distancia.

$$d\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 9\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 25} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$d\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 9\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 25} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos el valor de a para que la función sea continua en $[0, +\infty)$.

Para que la función f sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de x mayores o iguales que 0 y menores que 8, $0 \le x < 8$, es una función raíz cuadrada de una función lineal, que es continua para todos los valores que hagan al radicando mayor o igual a cero, $ax \ge 0$, como en este caso los valores de x son mayores o iguales que 0, deducimos que el valor de a debe ser positivo, para de esta forma ser la función f continua para $0 \le x < 8$.

- El trozo de función para valores de x mayores que 8, $8 < x$, es una función racional, que es continua en su dominio, es decir, en todo $\mathbb{R}$ menos en los valores que anulen al denominador, $x-4=0$, o sea , el 4, pero este valor no pertenece al dominio particular de este trozo de función, luego la función es continua para $8 < x$.

- El problema de la continuidad está en el punto 8, donde hay un cambio en el comportamiento de la función. Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 8^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 8^- \\ x<8}} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ \lim\limits_{x \to 8^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 8^+ \\ x>8}} \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} = \dfrac{64 - 32}{8 - 4} = 8 \\ f(8) = \sqrt{8a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ \sqrt{8a} = 8 \Rightarrow 8a = 64 \Rightarrow a = 8 \end{cases}$$

Luego $f(x)$ será continua en el punto 8, para el valor de $a = 8$.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $[0, +\infty)$ para el valor de $a = 8$.

(b) Calculemos la integral definida $\int_0^{10} f(x)\, dx$.

$$\int_0^{10} f(x)\, dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\, dx + \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4}\, dx = \int_0^8 \sqrt{8}\, x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4}\, dx = \qquad [1]$$

La última integral es una integral racional impropia donde el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador por lo que efectuaremos la división indicada.

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -32 & x-4 \\ \cline{3-3} -x^2+4x & & x+4 \\ \cline{1-2} 4x & -32 & \\ -4x & +36 & \\ \cline{1-2} & -16 & \end{array}$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$= \int_0^8 \sqrt{8}\, x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int_8^{10} \left(x + 4 - \frac{16}{x-4} \right) dx =$$

$$= \left[\sqrt{8}\, \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^8 + \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 16\,\mathrm{Ln}|x-4| \right]_8^{10} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{8}\, x^{\frac{3}{2}} \right]_0^8 + \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 16\,\mathrm{Ln}|x-4| \right]_8^{10} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{8}\cdot 8^{\frac{3}{2}} - 0 + \left(\frac{10^2}{2} + 4\cdot 10 - 16\,\mathrm{Ln}|10-4| \right) - \left(\frac{8^2}{2} + 4\cdot 8 - 16\,\mathrm{Ln}|8-4| \right) =$$

$$= \frac{2}{3} 8^2 + 50 + 40 - 16\,\mathrm{Ln}(6) - \big(32 + 32 - 16\,\mathrm{Ln}(4) \big) =$$

$$= \frac{128}{3} + 90 - 16\,\mathrm{Ln}(6) - 64 + 16\,\mathrm{Ln}(4) = \frac{128}{3} + 26 + 16\,\big(\mathrm{Ln}(4) - \mathrm{Ln}(6) \big) = \frac{206}{3} + 16\,\mathrm{Ln}\left(\frac{2}{3} \right)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para hallar la matriz *X* que cumple $A \cdot X \cdot A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcularemos, si es posible, la matriz inversa de la *A*. Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz *A* la matriz unidad e intentar, mediante el uso transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de *A*, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}.

$\left(\begin{array}{rr|rr} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] + 2· [1ªf.]

$\left(\begin{array}{rr|rr} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{rr|rr} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$ Dividamos la 1ª fila por 3.
Dividamos la 2ª fila por -1.

$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$ La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz *A*, la matriz A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora la ecuación $A\cdot X\cdot A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A\cdot X\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + B \quad \Rightarrow \quad A\cdot X\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + B \quad \Rightarrow \quad A\cdot X\cdot A = B$$

Hemos tenido en cuenta, entre otras propiedades, que la matriz nula es el elemento neutro en la suma de matrices.

Multipliquemos a la izquierda y a la derecha por la matriz A^{-1}

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1} \quad \Rightarrow \quad I\cdot X\cdot I = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$$

Se ha tenido en cuenta la propiedad del elemento unidad y la definición de matriz inversa.

Finalmente, haremos uso de la propiedad asociativa del producto de matrices:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Calculemos los vectores siguientes

$$\vec{BC} = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 1,\ 2) = (1,\ 1,\ 1) \quad ; \quad \vec{BD} = (7,\ 2,\ 1) - (0,\ 1,\ 2) = (7,\ 1,\ -1)$$

Podemos observar que son dos vectores linealmente independientes ya que sus coordenadas no son proporcionales, es decir, los tres puntos B, C y D no están alineados.

Obtengamos la ecuación del plano que pasa por el punto B y tiene como vectores de dirección, los dos anteriores.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda + 7\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = 2 + \lambda - \mu \end{cases}$$

Calculemos m, teniendo en cuenta que el punto $A(m,\ 0,\ 1)$ pertenece a π y que sus coordenadas satisfacerán la ecuación del plano.

$$\begin{cases} m = \lambda + 7\mu \\ 0 = 1 + \lambda + \mu \\ 1 = 2 + \lambda - \mu \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda + 7\mu = m \\ \lambda + \mu = -1 \\ \lambda - \mu = -1 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & m \\ 0 & -6 & -1-m \\ 0 & -8 & -1-m \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -6 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 6 · [3ªf.] - 8 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & m \\ 0 & -6 & -1-m \\ 0 & 0 & 2m+2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, y como el sistema debe ser compatible la última ecuación debe ser trivial, es decir:

$$2m + 2 = 0 \quad ; \quad m = -1$$

(b) Los puntos B, C y D no están alineados, según se ha justificado en el apartado anterior.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	PLANES DE 1994 Y DE 2002 MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 49 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\alpha\ \mathrm{sen}\,x}{x^2}$$

es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

EJERCICIO 2. Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x\le 0, \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x>0. \end{cases}$$

(a) [1 PUNTO]. Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza dicha gráfica.
(b) [1´5 PUNTOS]. Halla el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} (b+1)x+y+z=2 \\ x+(b+1)y+z=2 \\ x+y+(b+1)z=-4 \end{array}\right\}.$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Clasifica el sistema según los valores del parámetro b.
(b) [1 PUNTO]. Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4. Se sabe que las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s\equiv\begin{cases} ax+6y+6=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$$

son paralelas.
(a) [1´5 PUNTOS]. Calcula a.
(b) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Opción B

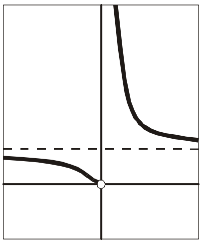
EJERCICIO 1. Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para $x \neq 0$, por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, \qquad g(x) = e^{1/x} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \text{Ln}\left|x\right|,$$

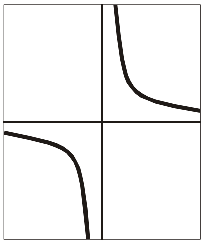
siendo Ln la función logaritmo neperiano.

(a) [1´75 PUNTOS]. Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de f, g y h.

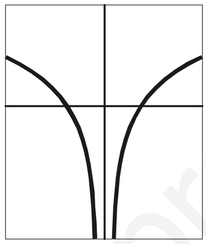
(b) [0´75 PUNTOS]. Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.



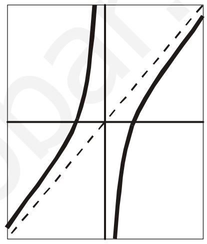
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula $\int_{-1}^{0} \text{Ln}(2 + x)\, dx$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

EJERCICIO 3. Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina el valor de b para el que $A^2 - 2A + I = O$.

(b) [1´25 PUNTOS]. Para $b=2$ halla la matriz X que cumple que $A \cdot X - 2A^t = O$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

EJERCICIO 4. Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z}{3}$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano π que contiene a s y es paralelo a r.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula la distancia de la recta r al plano π.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el límite siguiente sabiendo que es finito.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\alpha \text{ sen}x}{x^2} = \frac{0-\alpha\cdot 0}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1-\alpha \cos(x)}{2x} = \frac{1-\alpha\cdot 1}{0} = \frac{1-\alpha}{0} =$$

La indeterminación de $\left[\frac{0}{0}\right]$ la hemos destruido aplicando la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La expresión que se ha obtenido al final puede presentar dos casos según que el numerador sea cero o no. Si no lo es, es decir, si $1 - \alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, entonces el resultado final sería un número partido por cero que daría lugar a infinito, en contradicción con el enunciado del ejercicio, por tanto α no puede ser distinto de 1. El otro caso es que sea cero, es decir, $1 - \alpha = 0$, $\alpha = 1$, con lo que tendríamos una nueva indeterminación que habría que destruir, procedamos según esto último, sustituyendo α por 1.

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-(-\text{sen}\,x)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

que como observamos, para $\alpha = 1$, el límite es finito y vale cero.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Para calcular los puntos de corte de la gráfica de *f* con el eje de abscisas, resolveremos el sistema formado por la ecuación del eje de abscisas y la de la función *f*, que como es una función a trozos, lo haremos con cada uno de ellos.

Con el trozo definido para $x \leq 0$, tendremos:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$$

el valor -2 que hemos obtenido pertenece al dominio particular de este trozo y por tanto el punto de corte es el $(-2, 0)$.

Los puntos de corte del eje de abscisas con el trozo de función definido para $x > 0$, serán:

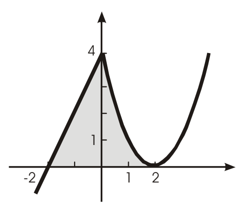
$$\begin{cases} y = (x-2)^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

el valor 2 que hemos obtenido pertenece al dominio particular de este trozo y por tanto el punto de corte es el (2, 0).

El trozo de gráfica para valores menores o iguales a 0, $y = 2x + 4$, es una función afín, su gráfica es una recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 4)$.

El trozo para valores mayores que 0, $y = (x - 2)^2$, es una función cuadrática, su gráfica es una parábola cuyo vértice es el (2, 0) y si *x* valiese 0 la función tomaría el valor 4.

La gráfica aproximada de la función *f* es la situada al lado.



(b) El área de la región que se nos pide está sombreada en la gráfica anterior.

$$\int_{-2}^{0}(2x+4)\,dx + \int_{0}^{2}(x-2)^2\,dx = \left[2\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2} = \left[x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2} =$$

$$= 0-\left((-2)^2+4(-2)\right)+\frac{(2-2)^3}{3}-\frac{(0-2)^3}{3} = -(4-8)-\frac{-8}{3} = 4+\frac{8}{3} = \frac{20}{3}\ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el sistema según los valores del parámetro b.

$$\left.\begin{aligned}(b+1)x+y+z&=2\\ x+(b+1)y+z&=2\\ x+y+(b+1)z&=-4\end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b+1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & b+1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & b+1 & -4\end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b+1 & -4\\ 1 & b+1 & 1 & 2\\ b+1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - (b+1) · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b+1 & -4\\ 0 & b & -b & 6\\ 0 & -b & -b^2-2b & 4b+6\end{array}\right)$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] +[2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b+1 & -4\\ 0 & b & -b & 6\\ 0 & 0 & -b^2-3b & 4b+12\end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente y todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} y el a_{33} que pueden serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse:

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -b^2 - 3b = 0 \Rightarrow -b(b+3)=0 \Rightarrow b=0\ ;\ b=-3 \Rightarrow$ Estudiemos cada uno de estos dos casos.

** Si $b=0 \Rightarrow$ la última ecuación será, $0 = 0+12 \Rightarrow 0 = 12$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema será un sistema incompatible.

** Si $b=-3 \Rightarrow$ la última ecuación será, $0 = 4(-3)+12 \Rightarrow 0 = 0$, que es una ecuación trivial, por lo que la podemos eliminar. Observemos cómo quedaría el sistema al eliminar la última ecuación y sustituir el valor de b por -3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4\\ 0 & -3 & 3 & 6\end{array}\right)$$

El sistema estaría triangulado, nos quedarían dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow -b^2 - 3b \neq 0 \Rightarrow -b(b+3) \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$ y $b \neq -3 \Rightarrow$ la última ecuación sería una ecuación normal, es decir, no sería ni trivial ni absurda. Pero veamos lo que le ocurriría al coeficiente a_{22} para los valores de $b \neq 0$ y $b \neq -3$, resultaría que como $a_{22} = b$, a_{22} no sería nunca cero ya que sólo sería cero para $b = 0$, por lo que para los valores de $b \neq 1$ y $b \neq -3$ el sistema sería un sistema compatible determinado.

(b) Terminemos de resolver el sistema para el caso de $b = -3$, que es cuando era un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria, nos quedará el siguiente sistema.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -4+2z \\ 0 & -3 & 6-3z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $3 \cdot$ [1ªf.] +[2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -6+3z \\ 0 & -3 & 6-3z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado la solución es:

$$3x = -6 + 3z \quad ; \quad -3y = 6 - 3z$$

o lo que es lo mismo: $x = -2 + z \quad ; \quad y = -2 + z$

Sustituyendo la incógnita secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$, tendremos finalmente la solución del sistema compatible indeterminado uniparamétrico:

$$x = -2 + \alpha \quad ; \quad y = -2 + \alpha \quad ; \quad z = \alpha.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Calculemos el valor de a de forma que las rectas sean paralelas, para ello discutiremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} ax + 6y + 6 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ a & 6 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 1ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} (z)\,(y)\,(x) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & a & -6 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] $-\ 2 \cdot$ [1ªf.]

$$\begin{array}{c} (z)\,(y)\,(x) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & a & -6 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] $-\ 3 \cdot$ [2ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{c} (z)\,(y)\,(x) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado la última ecuación es una ecuación absurda, pero la tercera puede dar lugar a dos situaciones distintas según que a_{33} sea o no cero. Estudiemos ambos casos.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow$ la 3ª ecuación sería, $0 = -12$, que sería una ecuación absurda, que junto a la anterior (la 4ª) serían dos, por lo que las dos rectas serían paralelas.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow a - 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq -3 \Rightarrow$ la última ecuación sería una ecuación normal, ni trivial ni absurda. Sólo habría una ecuación absurda (la 4ª), por lo que las dos rectas se cruzan.

(b) Para calcular el plano que contiene a ambas rectas, lo haremos a través del haz de planos que contenga a una de ellas, por ejemplo, a la recta *r*, y posteriormente le impondremos la condición de que pase por un punto cualquiera de la otra recta.

El haz de planos que tiene como recta base del haz a la recta *r* es:

$$\lambda\left(x+y-z-3\right)+\mu\left(x+2y-2\right)=0$$

Impongámosle la condición a este haz de planos de pasar por un punto *P* de la otra recta, el punto puede ser, por ejemplo:

si x es cero, $x = 0$, entonces, $s \equiv \begin{cases} ax+6y+6=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0+6y+6=0 \\ 0-2z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

luego un punto de *s* sería el $P(0, -1, 1)$

Sustituyamos las coordenadas de este punto en la ecuación del haz de planos.

$$\lambda(0-1-1-3)+\mu(0+2(-1)-2)=0 \;\Rightarrow\; -5\lambda-4\mu=0 \;\Rightarrow\; \mu=-\frac{5}{4}\lambda$$

Sustituyamos este valor de μ en la ecuación del haz de planos.

$$\lambda\left(x+y-z-3\right)-\frac{5}{4}\lambda\left(x+2y-2\right)=0 \;\Rightarrow\; 4x+4y-4z-12-5x-10y+10=0 \;\Rightarrow$$

$-x-6y-4z-2=0$, que es el plano que contiene a ambas rectas.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Obtengamos las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$.

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x = 0$. Veámoslo.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{0-1}{0}=\dfrac{-1}{0}=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad$ Hay un asíntota vertical: $x = 0$.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x=0$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}\frac{x^2-1}{x}=\frac{-1}{0^-}=\frac{-1}{-0}=+\infty \\ &\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\frac{x^2-1}{x}=\frac{-1}{0^+}=\frac{-1}{+0}=-\infty \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x se acerca a 0 por la izquierda, y a $-\infty$ cuando lo hace por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1}=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad \text{No existe asíntota horizontal.}$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: y = mx + n. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\mathrm{m}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=1$$

Calculemos ahora n:

$$\mathrm{n}=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\mathrm{m}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x}=0$$

La asíntota oblicua es: $y = x$.

En las funciones racionales, si hay asíntota oblicua para $x\to+\infty$, también la habrá para $x\to-\infty$, siendo además la misma.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota oblicua $y=x$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} f(100) & =\dfrac{100^2-1}{100}=99.99 \\ y_{\text{asíntota}} & =100 \end{array}\right\}\Rightarrow \quad f(100)< y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to+\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} f(-100) & =\dfrac{(-100)^2-1}{-1000}=-99.99 \\ y_{\text{asíntota}} & =-100=-100 \end{array}\right\}\Rightarrow \quad f(-100)> y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to-\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

Obtengamos ahora las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de $g(x)=e^{1/x}$.

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x = 0$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 0} e^{1/x}=e^{1/0}=e^{\infty}=\infty \quad\Rightarrow\quad \text{Hay un asíntota vertical: } x=0.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de g respecto de la asíntota vertical $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} e^{1/x} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $g(x)$ tiende a 0 cuando x se acerca a 0 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha, es decir, sólo hay asíntota vertical por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/(-x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{1/x}} = \dfrac{1}{e^{1/\infty}} = \dfrac{1}{e^0} = 1 \Rightarrow$ Asíntota horizontal $y=1$, si $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = e^{1/\infty} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ Existe asíntota horizontal $y=1$, cuando $x\to+\infty$.

Como existe asíntota horizontal no hay posibilidad de que pueda existir asíntota oblicua.

Estudiemos la posición de la gráfica de g respecto de la asíntota horizontal $y=1$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} g(100) & = e^{1/100} = 1.01005 \\ y_{\text{asíntota}} & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g(100) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de g, para $x\to+\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} g(-100) & = e^{1/(-100)} = 0.990049 \\ y_{\text{asíntota}} & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g(-100) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de g, para $x\to-\infty$, va por debajo de la asíntota horizontal.

Obtengamos las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de $h(x) = \text{Ln}\,|x|$.

Inicialmente expresaremos la función como una función a trozos.

$$\text{Ln}\,|x| = \begin{cases} \text{Ln}\,(-x) & \text{si} \quad x<0 \\ \text{Ln}\,(x) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al argumento del logaritmo neperiano, $x = 0$. Veámoslo.

$\lim\limits_{x\to 0} \text{Ln}\,|x| = \text{Ln}\,|0| = -\infty \quad \Rightarrow \quad$ Hay un asíntota vertical: $x = 0$.

Estudiemos la posición de la gráfica de h respecto de la asíntota vertical $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} \text{Ln}(-x) = \text{Ln}\left(-0^-\right) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} \text{Ln}(x) = \text{Ln}\left(0^+\right) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $h(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 0 por la izquierda, y a $-\infty$ cuando lo hace por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \text{Ln}(-x) = \text{Ln}(-(-\infty)) = +\infty$ $\Rightarrow$ No existe asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Ln}(x) = \text{Ln}(+\infty) = +\infty$ $\Rightarrow$ No existe asíntota horizontal.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: y = mx + n. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\text{m} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\text{Ln}(-x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{Ln}(x)}{-x} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$\text{m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{Ln}(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro.

Al ser $\text{m} = 0$ no hay asíntota oblicua sino que lo que tenemos es una rama parabólica de eje paralelo al eje de abscisas, tanto para cuando x tiende a $+\infty$ como cuando x tiende a $-\infty$.

(b) Lógicamente, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el apartado anterior, deducimos que la función *f(x)* se corresponde con la Gráfica 4, la función *g(x)* con la Gráfica 1 y la función *h(x)* con la Gráfica 3.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos primeramente la integral indefinida.

$$\int \text{Ln}(2+x)\, dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u = \text{Ln}(2+x) \qquad du = \frac{1}{2+x}dx$$
$$dv = dx \qquad v = \int dx = x$$

$$\int \text{Ln}(2+x)\, dx = \text{Ln}(2+x)\cdot x - \int \frac{x}{2+x}\, dx = \qquad [1]$$

Hemos obtenido una integral racional impropia, efectuemos la división.

x	$x+2$
$-x-2$	1
-2	

Continuando desde [1], tendremos:

$$= \text{Ln}\,(2+x)\cdot x - \int\left(1-\frac{2}{2+x}\right)\,dx = x\cdot \text{Ln}\,(2+x) - x + 2\ \text{Ln}\left|2+x\right|$$

Obtengamos ahora la integral definida.

$$\int_{-1}^{0}\text{Ln}(2+x)\ dx = \left[x\cdot\text{Ln}\,(2+x) - x + 2\ \text{Ln}\left|2+x\right|\right]_{-1}^{0} =$$

$$= 0\cdot\text{Ln}\,(2+0) - 0 + 2\ \text{Ln}\left|2+0\right| - \left((-1)\cdot\text{Ln}\,(2-1) - (-1) + 2\ \text{Ln}\left|2-1\right|\right) =$$

$$= 2\ \text{Ln}\,(2) - \left(-\text{Ln}\,(1) + 1 + 2\ \text{Ln}\,(1)\right) = 2\ \text{Ln}\,(2) - 1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Efectuemos las operaciones indicadas $A^2 - 2A + I = O$, para determinar el valor de b.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -b \\ -2 & 1 & -b \\ b & 0 & -1+b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -b+2 \\ 0 & -1 & -b+2 \\ b-2 & 0 & -1+b^2-2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -b+2 \\ 0 & 0 & -b+2 \\ b-2 & 0 & b^2-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{r} -b+2=0 \\ -b+2=0 \\ b-2=0 \\ b^2-2b=0 \end{array}\right. \Rightarrow\left\{\begin{array}{l} b=2 \\ b=2 \\ b=2 \\ b=2 \quad \text{y} \quad b=0 \end{array}\right.$$

luego, el único valor que verifica todas las ecuaciones a la vez es el de $b=2$.

(b) Para hallar la matriz X que cumple que $A\cdot X - 2A^t = O$, calcularemos, si es posible, la matriz inversa de la A. Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A la matriz unidad e intentar, mediante el uso transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de A, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Multipliquemos la 3ª fila por - 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz A, la matriz A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora la ecuación $A \cdot X - 2A^t = O$, sumándole a los dos miembros de la igualdad $2A^t$:

$$A \cdot X - 2A^t + 2A^t = O + 2A^t \quad \Rightarrow \quad A \cdot X + O = 2A^t \quad \Rightarrow \quad A \cdot X = 2A^t$$

hemos tenido en cuenta que la suma de una matriz con su opuesta es la matriz nula y que la matriz nula es el elemento neutro en la suma de matrices.

Multipliquemos a la izquierda por la matriz inversa de A, es decir, por A^{-1}.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (2A^t) \quad \Rightarrow \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot (2A^t) \quad \Rightarrow \quad X = A^{\ 1} \cdot (2A^t)$$

hemos tenido en cuenta que el producto de una matriz por su inversa es la matriz unidad, y que la matriz unidad es el elemento neutro en la multiplicación de matrices.

Terminemos de calcular la matriz X

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Calculemos el haz de planos que contiene a la recta s y después el plano de ese haz que sea paralelo a la recta r.

Expresemos, en primer lugar, la recta s como intersección de dos planos

$$s \equiv \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = y - 1 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ 3x = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 3x - 2z = 0 \end{cases}$$

El haz de planos que contiene a la recta s es:

$$\alpha(x - 2y + 2) + \beta(3x - 2z) = 0 \Rightarrow (\alpha + 3\beta)x - 2\alpha y - 2\beta z + 2\alpha = 0$$

Para obtener un plano de este haz que sea paralelo a la recta r, impongamos la condición de que el vector normal a este haz de planos, el $(\alpha + 3\beta, -2\alpha, -2\beta)$, y el vector de dirección de la recta r deben ser perpendiculares, por lo que su producto escalar debe ser cero, pero antes, expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, la incógnita que nos sobra, la *z*, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-z \\ 0 & -1 & -1+z \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$x = 2 - z \quad ; \quad y = 1 - z$

Sustituyamos la incógnita secundaria, la *z*, por un parámetro, por ejemplo, por $t \in \mathbb{R}$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

El producto escalar del vector normal al haz de planos y el de dirección de *r*, es cero, según dijimos:

$$\vec{n}_\pi\left(\alpha + 3\beta\,,\, -2\alpha\,,\, -2\beta\right) \perp \vec{v}_r\left(-1,\,-1,\,1\right) \;\Rightarrow\; \left(\alpha + 3\beta\,,\, -2\alpha\,,\, -2\beta\right) \bullet \left(-1,\,-1,\,1\right) = 0$$

$$-\alpha - 3\beta + 2\alpha - 2\beta = 0 \;\Rightarrow\; \alpha - 5\beta = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 5\beta$$

Sustituyamos este valor de α en la ecuación del haz de planos.

$$\left(\alpha + 3\beta\right)x - 2\alpha y - 2\beta z + 2\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \left(5\beta + 3\beta\right)x - 2\left(5\beta\right)y - 2\beta z + 2\left(5\beta\right) = 0$$

$$8\beta\, x - 10\beta y - 2\beta z + 10\beta = 0 \;\Rightarrow\; 8x - 10y - 2z + 10 = 0 \;\Rightarrow\; \pi \equiv 4x - 5y - z + 5 = 0$$

que es la ecuación del plano π que contiene a *s* y es paralela a *r*.

(b) Calculemos la distancia de la recta *r* al plano π, o lo que es lo mismo, de un punto cualquiera de *r*, por ejemplo el *A*(2, 1, 0) a dicho plano, ya que son paralelos.

Obtengamos la ecuación del plano π en forma paramétrica, para lo cual resolveremos el sistema formado sólo por la ecuación del plano.

$\pi \equiv 4x - 5y - z + 5 = 0$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & -1 & -5 \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las columnas 1ª y 3ª.

$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 4 & -5 \end{array}\right) \end{array}$ El sistema está diagonalizado, la incógnitas que nos sobran, la *y* y la *x*, las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

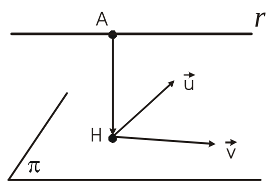
$\begin{array}{c} (z) \\ \left(\begin{array}{c|c} -1 & -5-4x+5y \end{array}\right) \end{array}$ La solución es:

$-z = -5 - 4x + 5y \quad \Rightarrow \quad z = 5 + 4x - 5y$

Sustituyamos las incógnitas secundarias por parámetros, por ejemplo, *x* por λ e *y* por μ:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 5 + 4\lambda - 5\mu \end{cases}$$

La distancia de *r* a π coincidirá con la del punto *A*(2, 1, 0) a *H*, es decir, con el módulo del vector $\vec{AH}$, este vector es perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, el $\vec{u} = (1,0,4)$ y el $\vec{v} = (0,1,-5)$. Siendo *H* el punto del plano que es el pié de la perpendicular al plano desde *A*.



El punto H inicialmente tendrá las coordenadas genéricas siguientes: $H(\lambda,\ \mu,\ 5+4\lambda-5\mu)$.

$$\vec{AH} = (\lambda,\ \mu,\ 5+4\lambda-5\mu) - (2,\ 1,\ 0) = (\lambda-2,\ \mu-1,\ 5+4\lambda-5\mu)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AH}\perp\vec{u} \;\Rightarrow\; \vec{AH}\bullet\vec{u}=0 \\ \vec{AH}\perp\vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{AH}\bullet\vec{v}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (\lambda-2,\ \mu-1,\ 5+4\lambda-5\mu)\bullet(1,\ 0,\ 4)=0 \\ (\lambda-2,\ \mu-1,\ 5+4\lambda-5\mu)\bullet(0,\ 1,\ -5)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda-2+20+16\lambda-20\mu=0 \\ \mu-1-25-20\lambda+25\mu=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 17\lambda-20\mu=-18 \\ -20\lambda+26\mu=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 17\lambda-20\mu=-18 \\ -10\lambda+13\mu=13 \end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{rr|r} 17 & -20 & -18 \\ -10 & 13 & 13 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 17 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 17 · [2ªf.] + 10 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} 17 & -20 & -18 \\ 0 & 21 & 41 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 21 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 21 · [1ªf.] + 20 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} 357 & 0 & 442 \\ 0 & 21 & 41 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:
$357\lambda = 442$; $21\mu = 41$ $\Rightarrow$ $\lambda = 26/21$; $\mu = 41/21$

Teniendo en cuenta estos valores, el vector $\vec{AH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{AH} = (\lambda-2,\ \mu-1,\ 5+4\lambda-5\mu) = \left(\frac{26}{21}-2,\ \frac{41}{21}-1,\ 5+4\cdot\frac{26}{21}-5\cdot\frac{41}{21}\right) = \left(-\frac{16}{21},\ \frac{20}{21},\ \frac{4}{21}\right)$$

La distancia pedida coincidirá con el módulo del vector $\vec{AH}$:

$$\text{dist}(r,\pi) = \left|\vec{AH}\right| = \sqrt{\left(-\frac{16}{21}\right)^2+\left(\frac{20}{21}\right)^2+\left(\frac{4}{21}\right)^2} = \sqrt{\frac{672}{21^2}} = \frac{4\sqrt{42}}{21}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	PLANES DE 1994 Y DE 2002 MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 50 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{5x+8}{x^2+x+1}$.

(a) [0´5 PUNTOS]. Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes coordenados.

(b) [0´5 PUNTOS]. Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

(c) [1 PUNTO]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(d) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de *f*.

EJERCICIO 2. Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área de la región acotada que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de *f* y por la recta tangente obtenida.

EJERCICIO 3. Sea I la matriz identidad de orden 2 y sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) [1 PUNTO]. Halla los valores de x para los que la matriz $A - xI$ no tiene inversa.

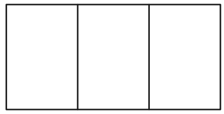
(b) [1´5 PUNTOS]. Halla los valores de a y b para los que $A^2 + aA + bI = O$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 6+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 5-7\lambda \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x-3y+1 = 0 \\ 3x-y-2 = 0. \end{cases}$$

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12.800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas) determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla sea mínima.



EJERCICIO 2. Calcula las siguientes integrales:

(a) [0´5 PUNTOS]. $\int \cos(5x+1)\, dx$.

(b) [1 PUNTO]. $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\, dx$.

(c) [1 PUNTO]. $\int_0^1 x\, e^{-3x}\, dx$.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y-z = 0 \\ x+y+(m+4)z = my \\ 2x-3y+z = 0 \end{array}\right\}.$$

(a) [1 PUNTO]. Determina los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

(b) [1´5 PUNTOS]. Resuelve el sistema cuando tenga infinitas soluciones y da una solución en la que $z=19$.

EJERCICIO 4. Sean $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ los vértices de un triángulo.

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

(b) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por el origen de coordenadas.

(c) [1 PUNTO]. Calcula el área del triángulo ABC.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para calcular los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas resolveremos el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y=0$.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{5x+8}{x^2+x+1} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{5x+8}{x^2+x+1}=0 \ \Rightarrow \ 5x+8=0 \ \Rightarrow \ x=-\frac{8}{5} \ \Rightarrow \ \left(-\frac{8}{5},\ 0\right)$$

Los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de ordenadas se obtienen resolviendo el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{5x+8}{x^2+x+1} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=\frac{0+8}{0+0+1}=8 \ \Rightarrow \ y=8 \ \Rightarrow \ (0,\ 8)$$

(b) Obtengamos las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de *f*.

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x^2+x+1=0$.

$$x^2+x+1=0 \ \Rightarrow \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

luego no hay ningún valor que anule al denominador y por tanto no hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+8}{x^2+x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{2x+1}=\frac{5}{\pm\infty}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Existe asíntota horizontal, } y=0.$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

Como existe asíntota horizontal no hay posibilidad de que pueda existir asíntota oblicua.

Estudiemos la posición de la gráfica de *f* respecto de la asíntota horizontal $y=0$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x=100 \ \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} f(100) & =\dfrac{5\cdot 100+8}{100^2+100+1}=0.05029 \\ y_{\text{asíntota}} & =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(100)>y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de *f*, para $x\to+\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x=-100 \ \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} f(-100) & =\dfrac{5(-100)+8}{(-100)^2-100+1}=-0.04969 \\ y_{\text{asíntota}} & =1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-100)<y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de *f*, para $x\to-\infty$, va por debajo de la asíntota horizontal.

(c) La función *f* es una función cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$, y además es continua en todo $\mathbb{R}$, ya que es una función racional en el que no hay ningún valor que anule al denominador.

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, obtengamos la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{5\left(x^2+x+1\right)-(5x+8)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{-5x^2-16x-3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

$$-5x^2-16x-3=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{16\pm\sqrt{16^2-60}}{-10}=\frac{16\pm\sqrt{196}}{-10}=\frac{16\pm 14}{-10}=\begin{cases} x=-3 \\ x=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Hay dos valores que anulan a la primera derivada, esto nos permite construir los siguientes intervalos de monotonía: $(-\infty, -3)$, $\left(-3, -\frac{1}{5}\right)$ y $\left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -4, -1 y 0, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(-4)=\frac{-5(-4)^2-16\cdot(-4)-3}{\left((-4)^2-4+1\right)^2}=\frac{-19}{169}<0 \quad\Rightarrow\quad \text{Decreciente en } (-\infty, -3)$$

$$f'(-1)=\frac{-5(-1)^2-16\cdot(-1)-3}{\left((-1)^2-1+1\right)^2}=8>0 \quad\Rightarrow\quad \text{Creciente en } \left(-3, -\frac{1}{5}\right)$$

$$f'(0)=\frac{-5\cdot 0^2-16\cdot 0-3}{\left(0^2+0+1\right)^2}=\frac{-3}{1}<0 \quad\Rightarrow\quad \text{Decreciente en } \left(-\frac{1}{5}, +\infty\right).$$

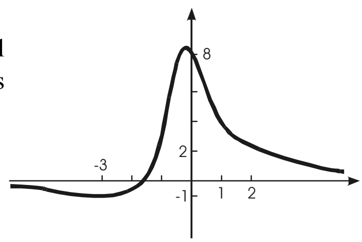
Teniendo en cuenta que es continua en todo $\mathbb{R}$, y con los resultados anteriores podemos deducir que hay un mínimo relativo o local en el punto de abscisa -3 y de ordenada:

$$f(-3)=\frac{5(-3)+8}{(-3)^2-3+1}=-1 \quad\Rightarrow\quad \text{Mínimo relativo en } (-3, -1),$$

y un máximo local en el de abscisas $-1/5$ y de ordenada:

$$f\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5\left(-\frac{1}{5}\right)+8}{\left(-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{5}+1}=\frac{25}{3} \quad\Rightarrow\quad \text{Máximo relativo en } \left(-\frac{1}{5}, \frac{25}{3}\right).$$

(d) Un esbozo de la gráfica de f es la situada al lado, donde se han tenido en cuenta todos los resultados obtenidos en los apartados anteriores.



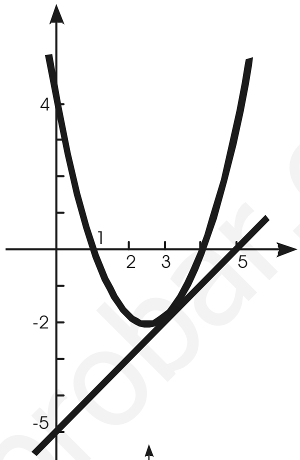
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

$f(x) = x^2 - 5x + 4 \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 2x - 5 \quad\Rightarrow\quad f'(3) = 2\cdot 3 - 5 = 1$

$f(3) = 3^2 - 5\cdot 3 + 4 \quad\Rightarrow\quad f(3) = 9 - 15 + 4 \quad\Rightarrow\quad f(3) = -2$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - f(3) = f'(3)\,(x - 3) \Rightarrow$$
$$y - (-2) = 1\cdot(x - 3) \;\Rightarrow\; y = x - 5$$



(b) Dibujemos, en primer lugar, la función $f(x)=x^2-5x+4$. Se trata de una parábola:

abscisa del vértice $= \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-5)}{2\cdot 1} = \dfrac{5}{2}$

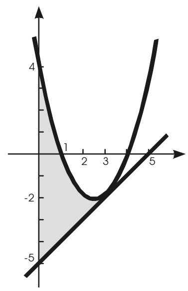
ordenada del vértice $=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 5\cdot\dfrac{5}{2} + 4 = \dfrac{25}{4} - \dfrac{25}{2} + 4 = \dfrac{-9}{4}$

Luego el vértice es el $V\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$

Otros puntos de interés son los puntos de corte con los ejes, el (1, 0), (4, 0) y el (0, 4).

Dibujemos la recta tangente, $y = x - 5$, que pasa por los puntos, (0, -5) y (5, 0), así como por el punto de tangencia (3, -2). La gráfica de ambas funciones es la situada al lado.

La región acotada cuya área me piden es la sombreada y situada al lado.



Obtengamos la función diferencia entre f y la recta tangente:

$h(x) = x^2 - 5x + 4 - (x - 5) \;\Rightarrow\; h(x) = x^2 - 6x + 9$

El área será la integral definida entre 0 y 3 de la función h, ya que esta función no tiene ningún punto de corte con el eje de abscisas entre 0 y 3:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2} = 3$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x\right]_0^3\right| = \left|\frac{27}{3} - \frac{6\cdot 9}{2} + 27 - 0\right| = 9 \text{ u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Obtengamos la matriz $A - xI$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix}$$

y calculemos el valor de x para que esta matriz no tenga inversa. Para ello, el determinante asociado a dicha matriz debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)(2-x) - 1 = 4 + x^2 - 4x - 1 = x^2 - 4x + 3 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

(b) Hallemos los valores de a y b para los que $A^2 + aA + bI = O$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5+2a+b & 4+a \\ 4+a & 5+2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5+2a+b = 0 \\ 4+a = 0 \\ 4+a = 0 \\ 5+2a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5+2a+b = 0 \\ a = -4 \\ a = -4 \\ 5+2a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5+2(-4)+b = 0 \\ a = -4 \\ a = -4 \\ 5+2(-4)+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ a = -4 \\ b = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Estudiemos en primer lugar la posición relativa de ambas rectas. Para elo expresemos la ecuación de la recta s en forma paramétrica.

$$s \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x - 3y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{matrix} \Bigg\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 7.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es: $2x = 2 \;;\; y = 1 \Rightarrow x = 1 \;;\; y = 1$

Sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\mu \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones paramétricas de s serán:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de ambas rectas para estudiar su posición relativa.

$$r \equiv \begin{cases} x = 6 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 - 7\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

Identifiquemos cada una de las incógnitas entre sí.

$$\begin{matrix} 6 + \lambda = 1 \\ 1 - 2\lambda = 1 \\ 5 - 7\lambda = \mu \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = -5 \\ -2\lambda = 0 \\ -7\lambda - \mu = -5 \end{matrix} \Bigg\}$$

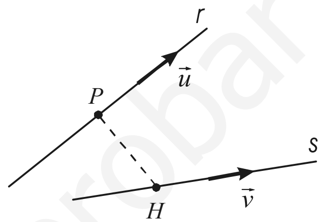
Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & -5 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 7 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & -40 \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -40 \\ 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, hemos obtenido una sola ecuación absurda, $0 = -10$, por lo que las dos rectas se cruzan en el espacio.

Para calcular la distancia entre estas dos rectas que se cruzan, lo haremos eligiendo un punto genérico de cada una de las rectas, por ejemplo, el punto P de r, de coordenadas $P(6+\lambda,\ 1-2\lambda,\ 5-7\lambda)$ y el punto H de de s, de coordenadas $H(1, 1, \mu)$. Construyamos el vector $\vec{PH}$ e impongámosle la condición de ser perpendicular al vector de dirección de la recta r, $\vec{u}\ (1, -2, -7)$, y al de la recta s, $\vec{v}\ (0, 0, 1)$.



$$\vec{PH} = (1, 1, \mu) - (6+\lambda, 1-2\lambda, 5-7\lambda) = (-5-\lambda, 2\lambda, \mu-5+7\lambda)$$

$$\begin{cases} \vec{PH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{PH}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow (-5-\lambda,\ 2\lambda,\ \mu-5+7\lambda)\cdot(1, -2, -7) = 0 \\ \vec{PH} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{PH}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (-5-\lambda,\ 2\lambda,\ \mu-5+7\lambda)\cdot(0, 0, 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -5-\lambda-4\lambda-7\mu+35-49\lambda = 0 \\ \mu-5+7\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7\mu-54\lambda = -30 \\ \mu+7\lambda = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu+7\lambda = 5 \\ -7\mu-54\lambda = -30 \end{cases}$$

Expresemos el sistema anterior en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 5 \\ -7 & -54 & -30 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 7 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 5 · [1ªf.] + 7 · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 60 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:
$\mu = 60/5 = 12 \quad ; \quad \lambda = -5/5 = -1$

El vector $\vec{PH}$ tendrá pues de coordenadas:

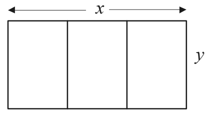
$$\vec{PH} = (-5-\lambda, 2\lambda, \mu-5+7\lambda) = \left(-5-(-1),\ 2(-1),\ 12-5+7(-1)\right) = \left(-4,\ -2,\ 0\right)$$

La distancia entre las rectas r y s coincidirá con el módulo del vector $\vec{PH}$.

$$\text{dist}(r, s) = \left|\vec{PH}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construimos la función longitud de la valla, que será la suma de las lindes de las tres parcelas.

$$L(x) = 2x + 4y$$

Expresemos la longitud y en función de la x, teniendo en cuenta el área del solar, 12800 m^2.

$$A = x \cdot y \quad \Rightarrow \quad 12800 = x \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{12800}{x}$$

sustituyamos este valor de y en la función longitud:

$$L(x) = 2x + 4 \cdot \frac{12800}{x} \quad \Rightarrow \quad L(x) = 2x + \frac{51200}{x}$$

El dominio de esta función es el intervalo abierto $(0, +\infty)$; ya que se trata de la suma de una función lineal, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y de una función racional, continua y derivable en todo $\mathbb{R} - \{0\}$, luego *L(x)* será continua y derivable en su dominio.

Calculemos el mínimo absoluto de esta función. Obtengamos, en primer lugar, los extremos relativos que sólo se encontrarán entre los valores que anulen a la derivada de *L(x)*.

$$L'(x) = 2 - \frac{51200}{x^2} \;\Rightarrow\; 2 - \frac{51200}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2 = \frac{51200}{x^2} \;\Rightarrow\; 2x^2 = 51200 \;\Rightarrow\; x = \pm 160$$

De estos valores de x sólo pertenece al dominio el $x = 160$. Sustituyámoslo en la segunda derivada.

$$L''(x) = -\frac{-51200 \cdot 2x}{x^4} \;\Rightarrow\; L''(x) = \frac{102400}{x^3} \;\Rightarrow\; L''(160) = \frac{102400}{160^3} > 0$$

Luego en $x = 160$ hay un mínimo relativo o local. Pero debemos buscar el absoluto. Como el dominio de esta función es un intervalo abierto en el que la función es continua y derivable, el mínimo absoluto hay que localizarlo teniendo en cuenta el mínimo relativo encontrado y las características de la gráfica de la función, Para lo cual estudiaremos la monotonía de la función.

Construimos los siguientes posibles intervalos de monotonía, $(0, 160)$ y $(160, +\infty)$, ya que al ser continua y derivable en su dominio y no existir por tanto, puntos de no continuidad y de no derivabilidad, los valores que anulan a la derivada son los únicos puntos que nos sirven de referencia para la construcción de dichos intervalos.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 1 y 200 respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$L'(1) = 2 - \frac{51200}{1^2} = -51198 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (0, 160)$$

$$L'(200) = 2 - \frac{51200}{200^2} = 0.72 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (160, +\infty)$$

luego $x = 160$, es no sólo un mínimo relativo o local sino también un mínimo absoluto. Las dimensiones del terreno serán:

$$x = 160 \text{ m.} \quad ; \quad y = \frac{12800}{x} = \frac{12800}{160} = 80 \text{ m.}$$

es decir, el largo debe medir 160 m. y el ancho 80 m.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la siguiente integral.

$$\int \cos(5x+1)\ dx.$$

Es una integral casi inmediata, pero podemos hacerla mediante el método de sustitución.

$$\begin{cases} 5x+1 = t \\ 5\,dx = dt \end{cases}$$

$$\int \cos(5x+1)\ dx = \int \cos(t)\ \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \cos(t)\ dt = \frac{1}{5}\operatorname{sen}(t) =$$

deshagamos el cambio realizado.

$$= \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x+1) + \text{K}$$

(b) Calculemos esta otra integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\ dx.$$

La resolveremos mediante el método de sustitución.

$$\begin{cases} x+2 = t \\ dx = dt \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\ dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\ dt = \int t^{-\frac{3}{2}}\ dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{t}} =$$

deshagamos el cambio realizado.

$$= -\frac{2}{\sqrt{x+2}} + \text{K}$$

(c) Calculemos la siguiente integral, por el método de integración por partes.

$$\int_0^1 x\,e^{-3x}\ dx.$$

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$
$$dv = e^{-3x}\,dx \quad ; \quad v = \int dv = \int e^{-3x}\ dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$\int_0^1 x\,e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}x\,e^{-3x}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}x\,e^{-3x}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^1 (-3)\ e^{-3x}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x\,e^{-3x}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9}\,e^{-3x}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\cdot 1\cdot e^{-3\cdot 1} - 0 + \left(-\frac{1}{9}\,e^{-3\cdot 1} - \left(-\frac{1}{9}\,e^{-3\cdot 0}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3} - \frac{1}{9}e^{-3} + \frac{1}{9}e^{0} = -\frac{4}{9}e^{-3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9}e^{-3}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Determinemos los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y-z=0 \\ x+y+(m+4)z=my \\ 2x-3y+z=0 \end{array}\right\}$$

Simplifiquemos y reduzcamos antes la 2ª ecuación, y después intercambiémosla con la tercera ecuación.

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ x+(1-m)y+(m+4)z=0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1-m & m+4 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 5 · [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & 0 \\ 0 & 3-5m & 5m+21 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -19 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 19 · [3ªf.] + (3-5m) · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 420+60m & 0 \end{array}\right)$$

El sistema homogéneo está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; 420 + 60m = 0 \;\Rightarrow\; m = -7 \;\Rightarrow$ La 3ª ecuación es trivial, 0 = 0, y la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, se trata de un sistema homogéneo compatible indeterminado uniparamétrico. El sistema tiene infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \;\Rightarrow\; m \neq -7 \;\Rightarrow$ Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema homogéneo de tres ecuaciones y tres incógnitas. Se trata de un sistema compatible determinado. El sistema tiene una y sólo una solución, la llamada solución trivial, $x=0$, $y=0$ y $z=0$.

(b) Resolvamos el sistema anterior para $m=-7$, que es cuando admitía infinitas soluciones. Al eliminar la última ecuación, nos queda el siguiente sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & z \\ 0 & -19 & -7z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -19 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 19 · [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 95 & 0 & 5z \\ 0 & -19 & -7z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$95x = 5z \;\;;\;\; -19y = -7z$$

o lo que es lo mismo: $x = \dfrac{1}{19}z \;;\; y = \dfrac{7}{19}z$. Sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por λ, tendremos que la solución general del sistema sería:

$$x = \frac{1}{19}\lambda \quad ; \quad y = \frac{7}{19}\lambda \quad ; \quad z = \lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $z=19$, entonces: $x=1$ e $y=7$, que es la solución particular para el caso de $z=19$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Calculemos la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$.

$\vec{AB} = (3,\ 6,\ 3) - (-3,\ 4,\ 0) = (6,\ 2,\ 3)$

$\vec{AC} = (-1,\ 2,\ 1) - (-3,\ 4,\ 0) = (2,\ -2,\ 1)$

La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + 6\lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + \mu \end{cases}$$

(b) El producto vectorial de los dos vectores de dirección del plano nos dará el vector normal al plano, y por tanto el de dirección de la recta perpendicular a dicho plano.

$$\vec{n}_\pi = (6,\ 2,\ 3) \times (2,\ -2,\ 1) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) = (8,\ 0,\ -16)$$

La ecuación de la recta perpendicular al plano y que pasa por el origen de coordenadas es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \\ z = -16t \end{cases}$$

(c) El área del triángulo ABC es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(6,\ 2,\ 3) \times (2,\ -2,\ 1)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(8,\ 0,\ -16)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 0^2 + (-16)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{320} = 4\sqrt{5}\ \text{u}^2.$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	PLANES DE 1994 Y DE 2002 MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

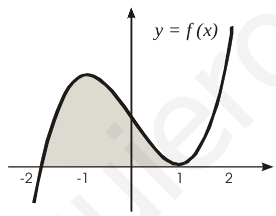
MODELO 51 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Se sabe que la gráfica de la función $f: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ es la que aparece en el dibujo.

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina f.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula el área de la región sombreada.



EJERCICIO 2. Sea f la función definida para $x \neq 2$ por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$.

(a) [1 PUNTO]. Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [0´75 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) [0´75 PUNTOS]. Calcula, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo $[0, 2)$ (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Álvaro, Marta y Guillermo son tres hermanos. Álvaro dice a Marta: si te doy la quinta parte del dinero que tengo, los tres hermanos tendremos la misma cantidad. Calcula lo que tiene cada uno si entre los tres juntan 84 euros.

EJERCICIO 4. Considera el punto $A(0, -3, 1)$, el plano $\pi \equiv 2x - 2y + 3z = 0$ y la recta $r \equiv x + 3 = y = \dfrac{z-3}{2}$.

(a) [1 PUNTO]. Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a la recta r.

(b) [1´5 PUNTOS]. Determina la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

Opción B

EJERCICIO 1. De la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{a x^2 + b}{x}$ se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ viene dada por $y = -2$.

(a) [1´5 PUNTOS]. Calcula *a* y *b*.

(b) [1 PUNTO]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(2x)$. Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x + my + z &= 0 \\ x + y + mz &= 2 \\ mx + y + z &= m \end{aligned}\right\}.$$

(a) [1 PUNTO]. ¿Para qué valores de *m* el sistema tiene al menos dos soluciones?

(b) [1´5 PUNTOS]. ¿Para qué valores de *m* el sistema admite solución en la que $x = 1$?

EJERCICIO 4. Se sabe que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = b + t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 6x + 2z = 2 \end{cases}$$

están contenidas en un mismo plano.

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula *b*.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s*.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Del dibujo deducimos que la gráfica de la función *f* tiene dos puntos de corte con el eje de abscisas, el (-2, 0) y el (1, 0), lo que implica que:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \\ (-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) + c = 0 \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = 8 \end{cases}$$

Asimismo observamos que en el punto -1 presenta un máximo relativo o local, y en el 1 un mínimo relativo, lo que significa que la primera derivada en dichos puntos es cero:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \Rightarrow & -2a + b = -3 \\ 3\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b = 0 \Rightarrow & 2a + b = -3 \end{cases}$$

Tenemos ya cuatro ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = 8 \\ -2a + b = -3 \\ 2a + b = -3 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -6 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + [2ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: 6 · [4ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + 9 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La última ecuación es trivial, la eliminamos.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 3 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -6 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 6 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado la solución es:

$$6a = 0 \quad ; \quad -6b = 18 \quad ; \quad c = 2$$

o lo que es lo mismo: $a = 0$; $b = -3$; $c = 2$

La función *f* es: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(b) El área de la región sombreada es:

$$\int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{3(-2)^2}{2} + 2(-2)\right) = \frac{27}{4}\ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Obtengamos las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de *f*.

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x = 2$. Veámoslo.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \frac{4 - 8 + 3}{0} = \frac{-1}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical: } x = 2.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 2^- \\ x < 2}} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \dfrac{4 - 8 + 3}{0^-} = \dfrac{-1}{-0} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 2^+ \\ x > 2}} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \dfrac{4 - 8 + 3}{0^+} = \dfrac{-1}{+0} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x se acerca a 2 por la izquierda, y a $-\infty$ cuando lo hace por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - 4}{1} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{No existe asíntota horizontal.}$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\mathrm{m} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} = 1$$

Calculemos ahora n:

$$\mathrm{n} = \lim_{x \to \infty}\left(f(x) - \mathrm{m}x\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x + 3}{x - 2} = -2$$

La asíntota oblicua es: $y = x - 2$.

En las funciones racionales, si hay asíntota oblicua para $x \to +\infty$, también la habrá para $x \to -\infty$, siendo además la misma.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota oblicua $y = x - 2$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} f(100) & = \dfrac{100^2 - 4 \cdot 100 + 3}{100 - 2} = 97.98979 \\ y_{\text{asíntota}} & = 100 - 2 = 98 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(100) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-100) = \dfrac{(-100)^2 - 4(-100) + 3}{-100 - 2} = -101.99019 \\ y_{\text{asíntota}} = -100 - 2 = -102 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-100) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to -\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

(b) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, obtengamos la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2) - \left(x^2 - 4x + 3\right)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

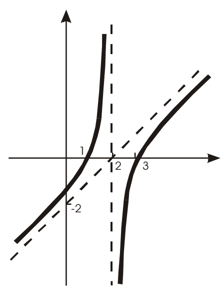
$$x^2 - 4x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

No hay ningún valor que anule a la primera derivada, por lo que el punto $x = 2$ que no pertenece al dominio de la función, es el único punto que nos permite construir los siguientes intervalos de monotonía: $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 0 y 3, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(0) = \frac{0^2 - 4\cdot 0 + 5}{(0-2)^2} = \frac{5}{4} > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (-\infty, 2)$$

$$f'(3) = \frac{3^2 - 4\cdot 3 + 5}{(3-2)^2} = 2 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (2, +\infty)$$



(c) La función f según lo deducido hasta ahora no presenta ni máximos ni mínimos relativos. Por otro lado sabemos que es creciente en el intervalo $[0, 2)$, y según el apartado a), $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x se acerca a 2 por la izquierda por lo que no habrá máximo absoluto tan sólo tendremos un mínimo absoluto en x=0, siendo el valor mínimo que alcanza la función en dicho intervalo el valor de $f(0)$, es decir:

$$f(0) = \frac{0^2 - 4\cdot 0 + 3}{0 - 2} = -\frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Llamemos x a los euros que tiene Álvaro, y a los de Marta y z a los que tiene Guillermo. Según el enunciado, después de darle Álvaro su quinta parte a Marta cada uno tendrá la misma cantidad, por lo que se verificará lo siguiente: $x - \frac{1}{5}x = y + \frac{1}{5}x = z$.

Expresemos esta doble igualdad mediante dos ecuaciones, que junto a la otra condición del ejercicio, sobre que los tres juntan 84 euros, formaremos el siguiente sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=84 \\ x-\frac{1}{5}x=y+\frac{1}{5}x \\ y+\frac{1}{5}x=z \end{array}\right\}$$

Reduzcamos a común denominador, simplifiquemos las ecuaciones y ordenemos el sistema pasando las incógnitas al primer miembro y los términos independientes al segundo.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=84 \\ 3x-5y=\ \ 0 \\ x+5y-5z=\ \ 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & -8 & -3 & -252 \\ 0 & 4 & -6 & -84 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -8 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & -8 & -3 & -252 \\ 0 & 0 & -15 & -420 \end{array}\right)$$

Simpliquemos la 3ª fila por: -15

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & -8 & -3 & -252 \\ 0 & 0 & 1 & 28 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 3 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 56 \\ 0 & -8 & 0 & -168 \\ 0 & 0 & 1 & 28 \end{array}\right)$$

Simpliquemos la 2ª fila por: -8

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 56 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 28 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 28 \end{array}\right)$$

Hemos diagonalizado, la solución es:

$x = 35$; $y = 21$; $z = 28$

Álvaro tiene 35 euros, Marta 21 y Guillermo 28 euros.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) De la ecuación de la recta *r*, que está en forma continua, deducimos que un punto de la misma es el $P(-3, 0, 3)$ y un vector de dirección sería el (1, 1, 2).

Para obtener la ecuación del plano que se nos pide, necesitamos conocer un punto, por ejemplo el *P* y dos vectores de dirección, el de *r*, es decir, el (1, 1, 2) y otro, el vector $\vec{AP}$:

$$\vec{AP} = (-3,\ 0,\ 3) - (0,\ -3,\ 1) = (-3,\ 3,\ 2)$$

La ecuación del plano, en forma paramétrica es:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -3 + \alpha - 3\beta \\ y = \alpha + 3\beta \\ z = 3 + 2\alpha + 2\beta \end{array}\right.$$

(b) Expresemos la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv x+3 = y = \frac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = 0+\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}$$

Elijamos, de esta recta r, un punto genérico $H(-3+\lambda, \lambda, 3+2\lambda)$, al que consideraremos como punto de intersección de la recta r con la recta s que me piden; construimos el vector $\vec{AH}$ que será el vector de dirección de la recta s, ahora bien, para que esta recta se paralela al plano π, impondremos a ese vector la condición de ser perpendicular al vector normal al plano π, que es la condición de paralelismo entre recta y plano.

$$\vec{AH} = (-3+\lambda, \lambda, 3+2\lambda) - (0, -3, 1) = (-3+\lambda, \lambda+3, 2+2\lambda) \quad ; \quad \vec{n_\pi}(2, -2, 3)$$

$$\vec{AH} \perp \vec{n_\pi} \Rightarrow \vec{AH} \bullet \vec{n_\pi} = 0 \Rightarrow (-3+\lambda, \lambda+3, 2+2\lambda) \bullet (2, -2, 3) = 0 \Rightarrow$$

$$-6+2\lambda-2\lambda-6+6+6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

El vector $\vec{AH}$, será:

$$\vec{AH} = (-3+\lambda, \lambda+3, 2+2\lambda) = (-3+1, 1+3, 2+2\cdot 1) = (-2, 4, 4)$$

y la ecuación de la recta s que pasa por A, es paralela a π y corta a r es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0-2\mu \\ y = -3+4\mu \\ z = 1+4\mu \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -2\mu \\ y = -3+4\mu \\ z = 1+4\mu \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$ es la recta $y=-2$, esta recta al tener de pendiente 0, implica que $f'(1)=0$, por tanto:

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax^2-(ax^2+b)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{ax^2-b}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{a\cdot 1^2-b}{1^2} \Rightarrow 0 = a-b \Rightarrow a = b \qquad [1]$$

Por otro lado, el punto $(1, -2)$ es un punto de la función f, por lo que:

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x} \Rightarrow f(1) = \frac{a\cdot 1^2+b}{1} \Rightarrow -2 = a+b \qquad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2]:

$$-2 = a+a \Rightarrow a = -1 \quad ; \quad b = -1$$

(b) Obtengamos la primera derivada.

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{-x^2-1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+1}{x^2}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

$$f'(x)=\frac{-x^2+1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-x^2+1}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad -x^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$$

Tengamos en cuenta que se trata de una función racional que es continua en todo su dominio (0, +∞), ya que el único punto donde no lo sería es el 0, pero en nuestro caso este punto no pertenece al dominio.

Hay dos valores que anulan a la primera derivada pero sólo uno, el +1, pertenece al dominio de la función. Estudiemos la monotonía de la función *f(x)* en los intervalos, (0, 1) y (1, +∞), ya que al ser continua y derivable en su dominio y no existir, por tanto, puntos de no continuidad y de no derivabilidad, los valores que anulan a la derivada (y que pertenezcan al dominio) son los únicos puntos que nos sirven de referencia para la construcción de dichos intervalos.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 0.5 y 2, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(0.5)=\frac{-0.5^2+1}{0.5^2}=\frac{-0.25+1}{0.25}=3>0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (0,1)$$

$$f'(2)=\frac{-2^2+1}{2^2}=\frac{-4+1}{4}=-\frac{3}{4}<0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (1,+\infty)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la primitiva de *f(x)*.

$$F(x)=\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u=x^2 \qquad du=2x\,dx$$

$$dv=\operatorname{sen}(2x)\,dx \qquad v=\int dv=\int \operatorname{sen}(2x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx=\frac{-1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}\int 2x\cos(2x)\,dx=\frac{-1}{2}x^2\cos(2x)+\int x\cos(2x)\,dx=$$

La última integral es otra integral por partes, por lo que:

$$u=x \qquad du=dx$$

$$dv=\cos(2x)\,dx \qquad v=\int dv=\int \cos(2x)\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x)-\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+\mathrm{K}$$

Obtengamos ahora la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (0,1), es decir, *F*(0)=1.

$$F(0)=-\frac{1}{2}\cdot 0^2\cdot\cos(2\cdot 0)+\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\operatorname{sen}(2\cdot 0)+\frac{1}{4}\cos(2\cdot 0)+\mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{1}{4}+\mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{K}=\frac{3}{4}$$

La primitiva que se nos pide será: $-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+\frac{3}{4}$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 2 \\ m & 1 & 1 & m \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1-m & m-1 & 2 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & m \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1-m & m-1 & 2 \\ 0 & 2-m-m^2 & 0 & m+2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & m+2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} y el a_{33}, que pueden serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; -m^2 - m + 2 = 0 \;\Rightarrow\; m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2+8}}{-2} = \dfrac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

** Si $m = 1 \;\Rightarrow\;$ La 3ª ecuación es, 0 = 3, que es absurda, incluso la 2ª ecuación también lo sería, 0 = 2. El sistema es incompatible, no tiene solución

** Si $m = -2 \;\Rightarrow\;$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos. El coeficiente $a_{22} = m - 1$, para este valor de m, es $a_{22} = -2-1 = -3 \neq 0$, luego nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Es en este caso y para el valor de $m = -2$ cuando el sistema tiene al menos dos soluciones, más concretamente infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \;\Rightarrow\; m \neq 1$ y $m \neq -2 \;\Rightarrow\;$ Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, se trata de un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Sustituyamos en el sistema inicial la x por 1.

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=0 \\ x+y+mz=2 \\ mx+y+z=m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1+my+z=0 \\ 1+y+mz=2 \\ m\cdot 1+y+z=m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} my+z=-1 \\ y+mz=1 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 1-m & -1 \end{array}\right)$$ Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Hemos obtenido una ecuación trivial, la eliminamos.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 \end{array}\right)$$ El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{22} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{22} = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ La 2ª ecuación sería, 0 =1, que es absurda, por lo que el sistema no tendría solución, y x no podría valer 1.

* $a_{22} \neq 0 \Rightarrow m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1 \Rightarrow$ Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, es decir sería un sistema compatible determinado, por tanto, para todos estos valores de $m \neq 1$ el sistema admitiría soluciones en las que $x = 1$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Escribamos la ecuación de la recta s en forma paramétrica.

$$s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 6x + 2z = 2 \end{cases}$$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 6 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -4 & -16 \end{array}\right)$$ Simplifiquemos la 2ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \end{array}\right)$$ El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3-z \\ 0 & 3 & -8+2z \end{array}\right)$$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1-z \\ 0 & 3 & -8+2z \end{array}\right)$$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$3x = 1 - z \quad ; \quad 3y = -8 + 2z$$

terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la incógnita secundaria z por un parámetro, por ejemplo, por λ.

$$s \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\lambda \\ y = -\dfrac{8}{3} + \dfrac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Estudiemos la posición relativa de ambas rectas. Para lo cual, buscaremos los puntos comunes que puedan tener igualando las x, las y y las z respectivamente.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = b + t \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ y = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda = 1 + t \\ -\frac{8}{3} + \frac{2}{3}\lambda = -1 - t \\ \lambda = b + t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 - \lambda = 3 + 3t \\ -8 + 2\lambda = -3 - 3t \\ \lambda = b + t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -\lambda - 3t = 2 \\ 2\lambda + 3t = 5 \\ \lambda - t = b \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & b \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|c} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & -4 & 2+b \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - 4 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|c} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 3b-30 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, hemos obtenido una última ecuación en la que pueden ocurrir dos cosas:

* $3b - 30 = 0 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow$ en este caso, la última ecuación es una ecuación trivial, $0 = 0$, la podemos eliminar y nos quedaría un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se trataría de un sistema compatible determinado, lo que implicaría que las dos rectas se cortan en un punto y estarían contenidas en un mismo plano.

* $3b - 30 \neq 0 \Rightarrow b \neq 10 \Rightarrow$ en este caso, la última ecuación es una ecuación absurda, $0 = (\text{nº} \neq 0)$, se trataría de un sistema incompatible, no tendría solución, pero al salir una sola ecuación absurda las dos rectas se cruzarían en el espacio.

Para que las dos rectas estén contenidas en un mismo plano, el valor de *b* ha de ser 10, tal como lo hemos obtenido.

(b) La ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s*, vendrá determinada por un punto y dos vectores de dirección, el punto lo podremos elegir de entre uno cualquiera de los puntos de las rectas, por ejemplo, el $(1, -1, 10)$ de la recta *r*, y los dos vectores de dirección del plano coincidirán con cada uno de los vectores de dirección de las rectas, el $(1, -1, 1)$ de *r* y el $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ de *s*.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha - \frac{1}{3}\beta \\ y = -1 - \alpha + \frac{2}{3}\beta \\ z = 10 + \alpha + \beta \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO JUNIO 2006

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Determina un punto de la curva de ecuación $y = x\,e^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

EJERCICIO 2. Sea $I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

(a) [1´25 PUNTOS] Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 1 + x^2$.
(b) [1´25 PUNTOS] Calcula el valor de I.

EJERCICIO 3. Considera $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

(a) [1 PUNTO] Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

(b) [1 PUNTO] Calcula, en función de a, los determinantes de $2A$ y A^t, siendo A^t la traspuesta de A.

(c) [0´5 PUNTOS] ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta.

EJERCICIO 4. Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$

(a) [1 PUNTO] Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.
(b) [0´75 PUNTOS] Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
(c) [0´75 PUNTOS] Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$, para $x\neq 0$.

(a) [0´75 PUNTOS] Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1 PUNTO] Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.

(b) [0´75 PUNTOS] Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y=\dfrac{x^2}{a}$ e $y=\sqrt{ax}$, con $a>0$, vale 3. Calcula el valor de a.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS] Resuelve

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. Considera el punto $P(3, 2, 0)$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$

(a) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

(b) [1´5 PUNTOS] Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

La función $y=x\,e^{-x^2}$ o $y=\dfrac{x}{e^{x^2}}$ es una función cociente de dos funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$ y como además la función del denominador no se anula para ningún valor luego la función cociente será continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Construyamos la función pendiente, $f'(x)$, de la función que nos dan, y calculemos el máximo absoluto de la misma.

$$f(x)=\frac{x}{e^{x^2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{e^{x^2}-x\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{e^{x^2}\left(1-2x^2\right)}{\left(e^{x^2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1-2x^2}{e^{x^2}}$$

El dominio de esta función, *f ´(x)*, es todo ℝ. Se trata de una función continua y derivable en todo ℝ, por las mismas razones expuestas en el primer párrafo.

Para calcular el máximo absoluto obtengamos antes los relativos que se encontrarán únicamente entre los puntos que anulen a la primera derivada de esta función derivada.

$$f'(x)=\frac{1-2x^2}{e^{x^2}} \;\Rightarrow\; f'(x)=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) \;\Rightarrow$$

$$f''(x)=-2x\,e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)+e^{-x^2}(-4x) \;\Rightarrow\; f''(x)=e^{-x^2}\left(-2x+4x^3-4x\right) \;\Rightarrow$$

$$f''(x)=e^{-x^2}\left(4x^3-6x\right)$$

Veamos qué valores anulan a esta expresión:

$$e^{-x^2}\left(4x^3-6x\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x^2}=0 \\ 4x^3-6x=0 \Rightarrow 2x\left(2x^2-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ 2x^2-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x=-\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Para determinar cuáles de estos valores se corresponden con máximos relativos, estudiemos la monotonía de *f ´(x)* ya que es una función continua en todo ℝ.

Con los valores anteriores construyamos los posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f ´(x)*, es decir, $\left(-\infty,\,-\sqrt{3/2}\right)$, $\left(-\sqrt{3/2},\,0\right)$, $\left(0,\,\sqrt{3/2}\right)$ y $\left(\sqrt{3/2},\,\infty\right)$.

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -2, -1, 1 y 2, respectivamente, en la función *f ´´(x)* y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función *f ´(x)* será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f''(-2)=e^{-(-2)^2}\left(4(-2)^3-6(-2)\right)=e^{-4}(-32+12)<0 \Rightarrow \text{ decreciente en } \left(-\infty,\,-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \\ f''(-1)=e^{-(-1)^2}\left(4(-1)^3-6(-1)\right)=e^{-1}(-4+6)>0 \Rightarrow \text{ creciente en } \left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}},\,0\right) \\ f''(1)=e^{-1^2}\left(4\cdot 1^3-6\cdot 1\right)=e^{-1}(4-6)<0 \Rightarrow \text{ decreciente en } \left(0,\,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \\ f''(2)=e^{-2^2}\left(4\cdot 2^3-6\cdot 2\right)=e^{-4}(32-12)>0 \Rightarrow \text{ creciente en } \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},\,+\infty\right) \end{cases}$$

A la vista de los resultados sólo podemos deducir la existencia de un máximo relativo en el punto $x=0$.

Para ver si este máximo relativo es absoluto, al no estar definida la función en un intervalo cerrado, debemos hacer un estudio más completo, básicamente una representación aproximada de la función *f ´(x)*.

Al tener el estudio de la monotonía hecho y ser continua y derivable en todo ℝ, bastará estudiar, si existen, las asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = \frac{1-\infty}{e^{\infty}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x}{2x\,e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^{x^2}} = \frac{-2}{e^{\infty}} = 0 \quad \Rightarrow$$

luego hay asíntota horizontal $y=0$, si $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2(-x)^2}{e^{(-x)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = 0 \quad \Rightarrow$$

luego también hay asíntota horizontal $y=0$, cuando $x \to -\infty$.

Esto último era de esperar ya que la función $f'(x)$ es una función par, es decir simétrica respecto al eje de ordenadas, puesto que todas las x están elevadas a índice par, en este caso, 2.

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

Estudiemos la posición de la gráfica de $f'(x)$ respecto de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f'(100) = \dfrac{1-2\cdot 100^2}{e^{100^2}} = -0'00000... \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(100) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de $f'(x)$, para $x \to +\infty$, va por debajo de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-100) = \dfrac{1-2\cdot(-100)^2}{e^{(-100)^2}} = -0'00000... \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-100) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de $f'(x)$, para $x \to -\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

La existencia de asíntota horizontal en las condiciones anteriores hace que nos acote superiormente a la función $f'(x)$ para cuando $x \to \pm\infty$

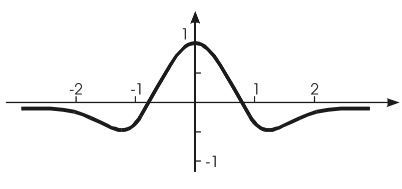
Al haber asíntota horizontal, $y=0$, por la derecha e izquierda, no hay asíntota oblicua.

La gráfica de la función $f'(x)$, de forma aproximada, es la representada más abajo.

A la vista de todos los resultados obtenidos, podemos deducir que el máximo relativo de la función $f'(x)$ es un máximo absoluto.

La ordenada de este extremo es:

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1-2\cdot 0^2}{e^{0^2}} = 1$$



es decir, la pendiente máxima es 1.

Por último, el punto de la curva $y = x\,e^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima, es el punto de abscisa $x=0$ y ordenada: $y = x\,e^{-x^2} \Rightarrow y = 0\cdot e^{-0^2} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ P (0, 0).

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Al hacer el cambio de variable $t = 1+ x^2$, en la integral I tendremos, en lo que respecta al integrando:

$$t = 1+x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = t - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{t-1}$$

$$dt = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t-1}}$$

y en lo que respecta a los límites de integración:

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad t = 1 + 2^2 = 5$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 + 0^2 = 1$$

por lo que finalmente la integral I quedará así:

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int_1^5 \frac{\left(\sqrt{t-1}\right)^3}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2\sqrt{t-1}} = \int_1^5 \frac{(t-1)^{3/2}}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2(t-1)^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\, dt \qquad [1]$$

(b) Calculemos el valor de I, continuando desde [1].

$$I = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^5 \left(\frac{t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = \frac{1}{2}\int_1^5 \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^5 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot 5^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\cdot 5^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2\cdot 1^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\cdot 1^{\frac{1}{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - \left(\frac{2}{3} - 2\right)\right) = \frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos el valor de a.

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 12 \Rightarrow a^2 - a - 12 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \Rightarrow \\ a^2 + a = 20 \Rightarrow a^2 + a - 20 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$a = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases} \qquad a = \begin{cases} -5 \\ 4 \end{cases}$$

EL valor de a es el 4 porque es el único valor que satisface las dos ecuaciones a la vez.

(b) Calculemos, en primer lugar, el determinante $2A$.

$$2A = 2\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{pmatrix} \Rightarrow |2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^2$$

Obtengamos ahora el determinate de la traspuesta de A, A^t.

$$A^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow |A^t| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2$$

(c) Una matriz A es simétrica si coincide con su traspuesta, A^t.

$$A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

Como puede observarse no pueden coincidir nunca, ya que $0 \neq 1$, por lo que no existe ningún valor de a para el cual A sea simétrica.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos, en primer lugar, la ecuación de la recta r como intersección de dos planos.

$$\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-5}{-2} = y & \Rightarrow \quad x+2y=5 \\ y = \dfrac{z-6}{m} & \Rightarrow \quad my-z=-6 \end{cases}$$

Para estudiar la posición relativa de la recta r y del plano π discutiremos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.

$$\begin{cases} 2x+y-z = -2 \\ x+2y = 5 \\ my-z = -6 \end{cases}$$

Expresemos el sistema formado por la recta r y el plano π en forma matricial y discutámoslo, según los diversos valores del parámetro m, mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & m & -1 & -6 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & m & -1 & -6 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} (x)\ (z)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & -1 & m & -6 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{c} (x)\ (z)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & m+3 & 6 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no, veamos los diferentes casos que pueden presentarse **.**

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow$ la última ecuación será, $0 = -6$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema será un sistema incompatible, lo que significa que la recta y el plano no tiene ningún punto en común, es decir, son paralelos para $m = -3$.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow m + 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq -3 \Rightarrow$ la última ecuación sería una ecuación normal, es decir, no sería ni trivial ni absurda, por lo que para el valor de $m \neq -3$ el sistema sería un sistema compatible determinado y la recta sería incidente con el plano, se cortarían en un punto.

(b) El plano que nos piden al contener a la recta r, permitirá conocer del mismo un punto, el (5, 0, 6), y un vector de dirección, el (-2, 1, -3), ambos elementos petenecientes a la recta y que los obtenemos leyendo en la ecuación de la recta r que nos da el problema.

El plano que piden al ser perpendicular al plano π nos permitirá deducir que el vector normal a éste, el (2, 1, -1), será el otro vector de dirección que nos quedaba por conocer del plano; por tanto la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π es:

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 5 - 2\lambda + 2\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = 6 - 3\lambda - \mu \end{cases}$$

(c) El plano que nos piden ahora es paralelo al plano π, luego teniendo en cuenta la condición de paralelismo de planos, deducimos que la ecuación del plano será, inicialmente, de la forma: $\pi \equiv 2x + y - z + 2 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x + y - z + D = 0$

Para calcular D le impondremos la condición que nos dice el problema, la de contener a la recta r, luego le haremos pasar por un punto de la misma, por ejemplo, por el (5, 0, 6).

$2x + y - z + D = 0 \Rightarrow 2\cdot 5 + 0 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x + y - z - 4 = 0$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos los posibles puntos de corte con los ejes de la gráfica de f.

Con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{x^4 + 3}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^4 + 3}{x} = 0 \Rightarrow x^4 + 3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-3} \Rightarrow \text{No hay puntos de corte.}$$

Con el eje OY.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{x^4 + 3}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{0^4 + 3}{0} = \infty \Rightarrow \text{No hay puntos de corte.}$$

Calculemos las asíntotas verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x = 0$. Veámoslo.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4+3}{x} = \dfrac{0+3}{0} = \dfrac{3}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow$ Hay un asíntota vertical: $x = 0$.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} \dfrac{x^4+3}{x} = \dfrac{3}{0^-} = \dfrac{3}{-0} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} \dfrac{x^4+3}{x} = \dfrac{3}{0^+} = \dfrac{3}{+0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 0 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x^3}{1} = \pm\infty \quad \Rightarrow$ No existe asíntota horizontal.

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = mx + n$. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^4+3}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4+3}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3}{2x} = \lim_{x \to \infty} \left(2x^2\right) = \infty$$

luego no hay asíntota oblicua, sino ramas parabólicas paralelas al eje de ordenadas.

(b) Teniendo en cuenta que es una función racional, continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el punto cero, ya que es el valor que anula al denominador y por tanto no pertenece al dominio, determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. Hallemos los valores que anulen a la función primera derivada de *f(x)*.

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - \left(x^4+3\right)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^4-3}{x^2} \Rightarrow 3x^4 - 3 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Con estos dos puntos, 1 y -1, y con el 0, los ordenamos y construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -2, -0.5, 0.5 y 2, respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-2) = \dfrac{3(-2)^4 - 3}{(-2)^2} = \dfrac{45}{4} > 0 & \Rightarrow \text{ creciente en } (-\infty,\ -1) \\ f'(-0.5) = \dfrac{3(-0.5)^4 - 3}{(-0.5)^2} = \dfrac{-2.8125}{0.25} < 0 & \Rightarrow \text{ decreciente en } (-1,\ 0) \\ f'(0.5) = \dfrac{3\cdot 0.5^4 - 3}{0.5^2} = \dfrac{-2.8125}{0.25} < 0 & \Rightarrow \text{ decreciente en } (0,\ 1) \\ f'(2) = \dfrac{3\cdot 2^4 - 3}{2^2} = \dfrac{45}{4} > 0 & \Rightarrow \text{ creciente en } (1,\ +\infty) \end{cases}$$

Calculemos ahora los extremos relativos o locales.

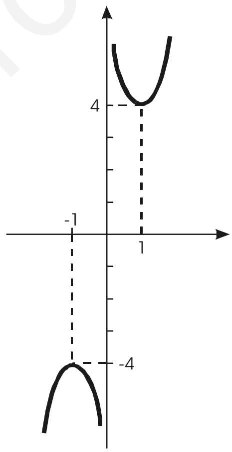
Teniendo en cuenta todos los cálculos realizados hasta el momento y lo dicho sobre la continuidad de esta función racional, podremos concluir lo siguiente:

* En $x = -1$, hay un máximo relativo puesto que la función pasa de crecer a decrecer.

$$f(-1) = \frac{(-1)^4 + 3}{-1} = -4 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo relativo } (-1, -4)$$

* En $x = 1$, hay un mínimo relativo puesto que la función pasa de decrecer a crecer.

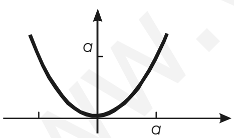
$$f(1) = \frac{1^4 + 3}{1} = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo relativo } (1, 4)$$



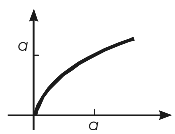
(c) La gráfica de la función teniendo en cuenta los apartados anteriores, (a) y (b), se encuentra situada al lado.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

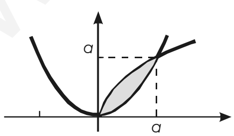
(a) La curva de ecuación $y = \dfrac{x^2}{a}$ es una parábola elemental y teniendo en cuenta que a es mayor que cero su gráfica es la situada a la izquierda.



La curva de ecuación $y = \sqrt{ax}$ es una rama de parábola de eje el eje de abscisas. Su gráfica es la situada a la derecha.



El recinto limitado por ambas curvas es el que se encuentra sombreado al lado.



Las abscisas de los puntos donde ambas curvas se cortan son:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{a} \\ y = \sqrt{ax} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \sqrt{ax} \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = ax \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} - ax = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^4 - a^3x}{a^2} = 0 \Rightarrow x^4 - a^3x = 0 \Rightarrow x\left(x^3 - a^3\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - a^3 = 0 \Rightarrow x = a \end{cases}$$

El área del recinto limitado por ambas curvas entre 0 y a sabemos que vale 3, luego:

$$\int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) dx = \int_0^a \left(\sqrt{a}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{a}\right) dx = \left[\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3a}\right]_0^a = \frac{2}{3}\, a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} - \frac{a^3}{3a} = 3 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = 3 \Rightarrow \frac{1}{3}a^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

luego el valor de a es 3 ya que tiene que ser mayor que cero.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Resolvamos el sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -9 & -11 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por 16.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 9 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 5 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado la solución es:

$2x = 2$; $2y = -2$; $z = 1$

que simplificando, finalmente, quedará:

$x = 1$; $y = -1$; $z = 1$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica. Para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de la recta que viene dada como intersección de dos planos.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-3 = 0 \\ x+2z+1 \quad = 0 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, nos sobra una incógnita, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria **.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3+z \\ 0 & -1 & -4-3z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1-2z \\ 0 & -1 & -4-3z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = -1 - 2z \quad ; \quad y = 4 + 3z$$

designemos a la incógnita secundaria z como un parámetro t; la ecuación de la recta r, será:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1-2t \\ y = 4+3t \\ z = t \end{cases}$$

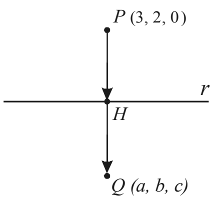
Un punto de esta recta es el $A(-1, 4, 0)$ y un vector de dirección el $(-2, 3, 1)$.

Para calcular el plano que contiene a $P(3, 2, 0)$ y a la recta r, obtengamos el vector $\vec{AP}$.

$$\vec{AP} = (3,\ 2,\ 0) - (-1,\ 4,\ 0) = (4,\ -2,\ 0)$$

La ecuación del plano será:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1-2\alpha+4\beta \\ y = 4+3\alpha-2\beta \\ z = \alpha \end{cases}$$



(b) Para obtener el simétrico del punto P respecto de la recta r, $Q(a, b, c)$, tendremos que calcular un punto H de la recta de tal manera que el vector $\vec{PH}$ sea perpendicular al vector de dirección de la recta y además $\vec{PH} = \vec{HQ}$.

El punto genérico, H, de la recta r tendrá de coordenadas $H(-1-2t, 4+3t, t)$ y el vector $\vec{PH}$:

$$\vec{PH} = (-1-2t,\ 4+3t,\ t) - (3,\ 2,\ 0) = (-4-2t,\ 2+3t,\ t)$$

Apliquemos la condición de que $\vec{PH}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta:

$$\vec{PH} \perp \vec{v_r} \quad \Rightarrow \quad \vec{PH} \bullet \vec{v_r} = 0 \ \Rightarrow \ (-4-2t,\ \ 2+3t,\ \ t) \bullet (-2,\ 3,\ 1) = 0 \ \Rightarrow$$

$$8+4t+6+9t+t = 0 \ \Rightarrow \ 14t = -14 \ \Rightarrow \ t = -1$$

Luego el vector $\vec{PH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{PH} = (-4-2t,\ 2+3t,\ \ t) = (-4-2\cdot(-1),\ 2+3\cdot(-1),\ \ -1) = (-2,\ -1,\ -1)$$

y el punto H: $H(-1-2t,\ 4+3t,\ t) \Rightarrow H(-1-2\cdot(-1),\ 4+3\cdot(-1),\ -1) \Rightarrow H(1,\ 1,\ -1)$

Impongamos la última condición, $\vec{PH} = \vec{HQ}$

$$(-2,\ -1,\ -1) = (a,\ b,\ c) - (1,\ 1,\ -1) \ \Rightarrow \begin{cases} -2 = a-1 & \Rightarrow \quad a = -1 \\ -1 = b-1 & \Rightarrow \quad b = 0 \\ -1 = c+1 & \Rightarrow \quad c = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad Q(-1,\ 0,\ -2)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2006

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$

(a) [0´75 PUNTOS]. Estudia la derivabilidad de f.

(b) [1 PUNTO]. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(c) [0´75 PUNTOS]. Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

EJERCICIO 2. Calcula

(a) [1´5 PUNTOS]. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx.$

(b) [1 PUNTO]. $\int (2x-3)\cdot \operatorname{tg}\left(x^2 - 3x\right)dx,$ Siendo tg la función tangente.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x - y - z = -1 \\ x + \lambda y + z = 4 \\ x + y + z = \lambda + 2 \end{array}\right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) [1 PUNTO]. Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{array}\right.$ que equidistan del plano π de ecuación $x + z = 1$ y del plano π' de ecuación $y - z = 3$.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Halla la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Resuelve $A\,B^t\,X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(1, 0, -2)$ y $B(-2, 3, 1)$.
(a) [1 PUNTO]. Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.
(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C donde C es un punto de la recta de ecuación $-x = y-1 = z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Expresemos la función *f(x)* como una función a trozos.

$$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - (-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad estudiemos previamente la continuidad.

- Para valores de $x < 0$, la función $x^2 + x$ es continua por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $x > 0$, la función $x^2 - x$ es continua por ser polinómica.

- Para $x = 0$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} (x^2 + x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \left(x^2 - x\right) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 \right.$$

luego la función *f(x)* es continua en todo ℝ, por tanto podrá ser derivable en ℝ.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua.

- Para valores de $x < 0$, la función *f* es polinómica y las funciones polinómicas son derivables en todo ℝ, luego *f* será derivable para todos los valores $x < 0$, siendo la derivada $2x + 1$.

- Para valores de $x > 0$, la función *f* es polinómica y las funciones polinómicas son derivables en todo ℝ, luego *f* será derivable para todos los valores $x > 0$, siendo la derivada $2x - 1$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

El problema está en el punto 0. Será derivable en el punto 0, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(0^-) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} (2x+1) = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x-1) = -1$$

podemos observar que: $-1 \neq 1 \;\Rightarrow\; f'(0^-) \neq f'(0^+)$, es decir, que las derivadas laterales no coinciden, por tanto la función no será derivable en el punto 0.

En definitiva, la función derivada de *f* será, finalmente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

(b) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, partamos de la primera derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x+1=0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{1}{2} \\[2ex] 2x-1=0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hemos obtenido dos valores que anulan a la derivada, $-1/2$ y $1/2$, y teniendo en cuenta que la función es continua en ℝ y derivable en todo ℝ menos en el punto 0, estos tres puntos nos permitirán construir los siguientes intervalos de monotonía: $(-\infty, -1/2)$, $(-1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ y $(1/2, +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -1, $-1/4$, $1/4$ y 1, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$f'(-1) = 2(-1) + 1 = -1 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Decreciente en } (-\infty,\ -1/2)$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Creciente en } (-1/2,\ 0)$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Decreciente en } (0,\ 1/2)$$

$$f'(1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Creciente en } (1/2,\ \infty)$$

(c) Estudiemos los extremos locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, es decir, en el $-1/2$ y $1/2$, o también en los puntos de no continuidad o en los de no derivabilidad. Al ser la función continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, los extremos locales sólo los podremos encontrar, además de en los puntos ya citados, en el punto 0.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora, inclusive lo de los apartados a) y b), podemos asegurar que hay un mínimo relativo o local en $x = -1/2$, ya que la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer.

Hay un máximo relativo en $x = 0$, ya que la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer.

Por último, hay otro mínimo relativo o local en $x = 1/2$, ya que la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer.

Las ordenadas de estos extremos relativos son:

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} & \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right) & \text{mínimo relativo} \\ f(0) = (0)^2 - 0 = 0 & \Rightarrow \quad (0,\ 0) & \text{máximo relativo} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} & \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right) & \text{mínimo relativo} \end{cases}$$

las ordenadas de estos extremos las hemos obtenido sustituyendo las abscisas de los mismos en la función *f(x)*.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Es una integral racional impropia (el grado del polinomio del numerador es igual que el del denominador) por lo que efectuamos la división.

$$\begin{array}{rrr|l} 5x^2 - x & - & 160 & x^2 - 25 \\ \cline{4-4} -5x^2 \quad & + & 75 & 5 \\ \cline{1-3} -x & - & 85 & \end{array}$$

La integral quedará así:

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx = \int \left(5 + \frac{-x-35}{x^2-25}\right) dx = \int 5\,dx + \int \frac{-x-35}{x^2-25}\,dx = 5x + \int \frac{-x-35}{x^2-25}\,dx = \qquad [1]$$

La última integral es una integral racional propia, por lo que calculamos las raíces del denominador.

$$x^2 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases}$$

Descompongamos la fracción del integrando en fracciones elementales:

$$\frac{-x-35}{x^2-25}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+5} \quad\Rightarrow\quad \frac{-x-35}{x^2-25}=\frac{A(x+5)+B(x-5)}{(x+5)(x-5)}$$

$$-x-35=A(x+5)+B(x-5) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=5 \quad\Rightarrow\quad -5-35=A(5+5)+0 \quad\Rightarrow\quad A=-4 \\ x=-5 \quad\Rightarrow\quad 5-35=0+B(-5-5) \quad\Rightarrow\quad B=3 \end{cases}$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$=5x+\int\left(\frac{-4}{x-5}+\frac{3}{x+5}\right)dx=5x+\int\frac{-4}{x-5}dx+\int\frac{3}{x+5}dx=5x-4\int\frac{1}{x-5}dx+3\int\frac{1}{x+5}dx=$$

$$=5x-4\cdot \mathrm{Ln}\left|x-5\right|+3\cdot \mathrm{Ln}\left|x+5\right|+C$$

(**b**) Para calcular la integral $\int(2x-3)\cdot \mathrm{tg}\left(x^2-3x\right)dx$ apliquemos el cambio de variable $x^2-3x=u$, diferenciando esta expresión obtendremos: $\begin{cases} x^2-3x = u \\ (2x-3)\,dx = du \end{cases}$ que sustituyendo en la integral, nos quedará

$$\int(2x-3)\cdot \mathrm{tg}\left(x^2-3x\right)dx=\int \mathrm{tg}(u)\,du=-\mathrm{Ln}\left|\cos(u)\right|+C=$$

y deshaciendo el cambio

$$=-\mathrm{Ln}\left|\cos(x^2-3x)\right|+C$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el siguiente sistema según los valores del parámetro λ.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x-y-z= -1 \\ x+\lambda y+z= 4 \\ x+y+z= \lambda+2 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \\ \lambda & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Coloquemos la 3ª columna en primer lugar
Coloquemos la 2ª columna en tercer lugar
Coloquemos la 1ª columna en segundo lugar

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 & \lambda & 4 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=1\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 2-\lambda \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right) \end{array}$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 2-\lambda \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} y el a_{33} que pueden serlo, estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 1, que es absurda. El sistema es incompatible, no tiene solución.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda - 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow$ La 3ª ecuación será una ecuación normal, pero pueden presentarse a su vez dos casos, según que a_{22} sea o no cero.

** $a_{22} = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$ La 2ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** $a_{22} \neq 0 \Rightarrow \lambda + 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -1 \Rightarrow$ La 2ª ecuación será una ecuación normal, al igual que la 3ª, por lo que tendremos un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvamos el sistema para $\lambda = 2$, es decir, cuando se trata de un sistema compatible determinado. Sustituyamos $\lambda = 2$ en el sistema triangulado anterior, tendremos:

$$\begin{array}{c} (z)\ (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 2-\lambda \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} (z)\ (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\begin{array}{c} (z)\ (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{array}{c} (z)\ (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $3z = 9 \;;\; 3x = 3 \;;\; y = 0$
es decir: $z = 3 \;;\; x = 1 \;;\; y = 0$

SOLUCIÓ N EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y - 2 = z - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y - 2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Elijamos un punto genérico, P, de la recta; tendrá de coordenadas $(0, \lambda, 1+2\lambda)$.

Expresemos la ecuación de cada uno de los planos en forma general.

$\pi \equiv x + z = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv x + z - 1 = 0$

$\pi' \equiv y - z = 3 \quad \Rightarrow \quad \pi' \equiv y - z - 3 = 0$

Impongamos la condición a este punto P de estar a igual distancia de uno y otro plano:

$$\text{dist}(P,\pi) = \text{dist}(P,\pi') \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{0+1+2\lambda-1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\right| = \left|\frac{\lambda-(1+2\lambda)-3}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}\right| \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{2\lambda}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{-\lambda-4}{\sqrt{2}}\right| \quad \Rightarrow \quad |2\lambda| = |-\lambda-4|$$

esta última ecuación, al ser en valor absoluto, da lugar a dos ecuaciones:

$$2\lambda = -\lambda - 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{4}{3}$$

$$2\lambda = -(-\lambda-4) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4$$

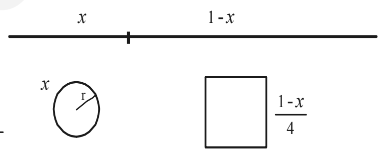
Para cada uno de estos valores de λ obtenemos un punto de la recta que equidista de ambos planos:

$$\lambda = -\frac{4}{3} \Rightarrow P_1(0,\ \lambda,\ 1+2\lambda) \Rightarrow P_1\left(0,\ -\frac{4}{3},\ 1+2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right) \Rightarrow P_1\left(0,-\frac{4}{3},-\frac{5}{3}\right)$$

$$\lambda = 4 \Rightarrow P_2(0,\ \lambda,\ 1+2\lambda) \Rightarrow P_2(0,\ 4,\ 1+2\cdot 4) \Rightarrow P_2(0,4,9)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construimos la función área, que a su vez es la suma de las áreas de la circunferencia y del cuadrado.

$$A(x) = \pi r^2 + \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad A(x) = \pi r^2 + \frac{1+x^2-2x}{16}$$

Expresemos el radio de la circunferencia en función de la longitud de la misma:

$$x = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{x}{2\pi}$$

sustituyamos este valor de r en la función área:

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \frac{1+x^2-2x}{16} \Rightarrow A(x) = \pi\frac{x^2}{4\pi^2} + \frac{1+x^2-2x}{16} \Rightarrow A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1+x^2-2x}{16}$$

El dominio de esta función es el intervalo abierto (0, 1) ya que la longitud de la circunferencia, x, debe ser mayor que cero y menor que 1 para que ambas figuras puedan existir. Se trata de una función cuadrática (aunque no esté ordenada perfectamente), y por tanto es continua y derivable en su dominio.

Calculemos el mínimo absoluto de esta función, que coincidirá con el vértice de la parábola ya que el coeficiente de x^2 es positivo, y siempre que ese mínimo pertenezca al dominio.

$$A'(x) = \frac{2x}{4\pi} + \frac{2x-2}{16} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{x-1}{8}$$

$$\frac{x}{2\pi} + \frac{x-1}{8} = 0 \Rightarrow \frac{4x+\pi x-\pi}{8\pi} = 0 \Rightarrow 4x+\pi x-\pi = 0 \Rightarrow (4+\pi)x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4+\pi}$$

Este valor de x pertenece al dominio, luego es el mínimo absoluto tal como hemos justificado anteriormente.

Calculemos, para este valor de x que hace mínima la suma de las áreas, la longitud del cuadrado y la de la circunferencia:

longitud de la circunferencia $= 2\pi r = x = \dfrac{\pi}{4+\pi}$

longitud del cuadrado $= 4\cdot\dfrac{1-x}{4} = 1-x = 1-\dfrac{\pi}{4+\pi} = \dfrac{4+\pi-\pi}{4+\pi} = \dfrac{4}{4+\pi}$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si la función segunda derivada es $f''(x) = 12x - 6$, la primera derivada la obtendremos integrando la anterior.

$$f'(x) = \int (12x-6)\,dx = \frac{12x^2}{2} - 6x + C = 6x^2 - 6x + C$$

Si la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$, o lo que es lo mismo, $y = 4x - 7$, significa que la pendiente, 4, de esta recta tangente coincide con el valor de la derivada de f en el punto $x = 2$, es decir:

$f'(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 6\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + C \quad \Rightarrow \quad 6\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + C = 4 \quad \Rightarrow \quad C = -8$

La función primera derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x + C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 - 6x - 8$

Integrando esta última función obtendremos la función $f(x)$.

$$f(x) = \int \left(6x^2 - 6x - 8\right) dx = \frac{6x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} - 8x + K = 2x^3 - 3x^2 - 8x + K$$

Como el punto de tangencia es un punto de la recta tangente y de la función, tendremos:

$y = 4x - 7 \quad \Rightarrow \quad y = 4\cdot 2 - 7 = 1 \quad \Rightarrow$

el punto de tangencia es el (2, 1), luego la gráfica de la función pasa por dicho punto, por tanto:

$$f(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + K \quad \Rightarrow \quad f(2) = 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + K \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 16 - 12 - 16 + K \quad \Rightarrow \quad K = 13 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Resolvamos la ecuación matricial $A\,B^t X = -2C$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

Para calcular la matriz X, veamos si la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ admite matriz inversa. Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de dicha matriz la matriz unidad e intentar, mediante el uso transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de la citada matriz, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa buscada.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -6 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 5 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -5 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 28 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 28 · [1ªf.] + 6 · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|cc} -28 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 28 & -5 & 1 \end{array}\right)$ Dividamos la 1ª fila por -28 y la 2ª fila por 28; y simplifiquemos los resultados.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{28} & \frac{1}{28} \end{array}\right)$ La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la matriz inversa que íbamos buscando.

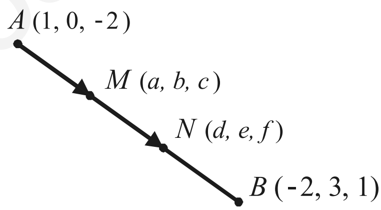
$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-5}{28} & \frac{1}{28} \end{pmatrix}$$

Continuemos desde [1], y multipliquemos a la izquierda por la matriz inversa obtenida

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$I \cdot X = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-5}{28} & \frac{1}{28} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{-2}{14} & \frac{-14}{14} \\ \frac{10}{28} & \frac{42}{28} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & -1 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Según el enunciado del problema y teniendo en cuenta el dibujo, tendremos:
$$\left.\begin{array}{r} 2\,\vec{AM} = \vec{MB} \\ \vec{AN} = 2\,\vec{NB} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\left[(a,b,c)-(1,0,-2)\right] = (-2,3,1)-(a,b,c) \\ (d,e,f)-(1,0,-2) = 2\left[(-2,3,1)-(d,e,f)\right] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2(a-1,\ b,\ c+2) = (-2-a,\ 3-b,\ 1-c) \\ (d-1,\ e,\ f+2) = 2(-2-d,\ 3-e,\ 1-f) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (2a-2,\ 2b,\ 2c+4) = (-2-a,\ 3-b,\ 1-c) \\ (d-1,\ e,\ f+2) = (-4-2d,\ 6-2e,\ 2-2f) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a-2 = -2-a \\ 2b = 3-b \\ 2c+4 = 1-c \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{l} d-1 = -4-2d \\ e = 6-2e \\ f+2 = 2-2f \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{l} d = -1 \\ e = 2 \\ f = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} M(0,\ 1,\ -1) \\ N(-1,\ 2,\ 0) \end{array}\right\}$$

(b) Expresemos la ecuación de la recta en forma continua y en forma paramétrica

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto cualquiera C de esta recta es el $C\,(-\lambda,\ 1+\lambda,\ \lambda)$.

Para calcular el área del triángulo de vértices A, B y C calculemos antes las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$\vec{AB} = (-2,\ 3,\ 1) - (1,\ 0,\ -2) = (-3,\ 3,\ 3)$

$\vec{AC} = (-\lambda,\ 1+\lambda,\ \lambda) - (1,\ 0,\ -2) = (-\lambda - 1,\ 1+\lambda,\ \lambda + 2)$

El área del triángulo ABC es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-3,\ 3,\ 3)\times(-\lambda-1,\ 1+\lambda,\ \lambda+2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1+\lambda & \lambda+2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -\lambda-1 & \lambda+2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -\lambda-1 & 1+\lambda \end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(3\lambda+6-3-3\lambda,\quad 3\lambda+6-3\lambda-3,\quad -3-3\lambda+3\lambda+3\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(3,\ 3,\ 0)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ \text{u}^2.$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 52 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \text{Ln}\,(x^2+1)$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

(a) [1 PUNTO]. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

EJERCICIO 2. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x e^{-x^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) [1 PUNTO]. Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = -1$.

EJERCICIO 3. Sean $\vec{u} = (x, 2, 0)$, $\vec{v} = (x, -2, 1)$ y $\vec{w} = (2, -x, -4x)$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$.

(a) [1 PUNTO]. Determina los valores de x para los que los vectores son linealmente independientes.

(b) [1´5 PUNTOS]. Halla los valores de x para los que los vectores son ortogonales dos a dos.

EJERCICIO 4. Sea r la recta de ecuación $\begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y s la recta de ecuación $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{3}$

(a) [1´5 PUNTOS]. Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.

(b) [1 PUNTO]. Calcula el punto de corte.

Opción B

EJERCICIO 1. Calcula

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\text{Ln}\, x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.

EJERCICIO 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla el valor de a sabiendo que f es continua.

(b) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de f.

(c) [1´25 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x+2=0$ y $x-2=0$.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} \lambda x + y - z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned} \right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) [1 PUNTO]. Resuélvelo para $\lambda=2$.

EJERCICIO 4. Halla un punto A de la recta r de ecuación $x=y=z$ y un punto B de la recta s de ecuación $x = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ de forma que la distancia entre A y B sea mínima.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, debemos tener en cuenta que se trata de una función logaritmo neperiano cuyo dominio es $\mathbb{R}$, ya que el argumento del logaritmo, x^2+1, es una expresión polinómica que siempre será mayor que cero cualquiera que sea el valor de x. Por ello es una función continua también en $\mathbb{R}$.

Para determinar los intervalos de monotonía partimos de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Función que existe para todo $\mathbb{R}$, por no haber ningún valor que anule al denominador.

Los valores que anulan a esta primera derivada, serán: $2x=0 \;\to\; x=0$.

Como es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$, sólo tendremos en cuenta el valor que anula a la primera derivada para construir los intervalos de monotonía, que serán: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -1 y 1, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$f'(-1) = \frac{2(-1)}{(-1)^2+1} = \frac{-2}{2} = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (-\infty, 0)$$

$$f'(1) = \frac{2\cdot 1}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (0, +\infty)$$

Estudiemos los extremos locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, es decir, en el 0, o también en los puntos de no continuidad o en los de no derivabilidad, pero, en este caso, al ser la función continua y derivable en $\mathbb{R}$, los extremos locales sólo los podremos encontrar en el punto 0.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora, podemos asegurar que hay un mínimo relativo o local en $x = 0$, ya que la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer.

La ordenada de este extremo relativo se obtiene sustituyendo la abscisa del mismo en la función *f(x)*, es decir:

$$f(0) = \text{Ln}\left(0^2+1\right) = \text{Ln}(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0) \text{ Mínimo relativo.}$$

(b) Obtengamos en primer lugar los puntos de inflexión de la función *f(x)*, se encontrarán entre los valores que anulando a la segunda derivada no anulen a la tercera.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \Rightarrow \quad -2x^2+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Calculemos la tercera derivada y sustituyamos en ella el valor -1 para comprobar si se corresponde con un punto de inflexión; el otro valor, el 1, no nos interesa en este ejercicio.

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = \frac{-4x\left(x^2+1\right)^2 - \left(-2x^2+2\right)\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$f'''(-1) = \frac{-4(-1)\left((-1)^2+1\right)^2 - \left(-2(-1)^2+2\right)\cdot 2\left((-1)^2+1\right)\cdot 2(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^4} \quad \Rightarrow \quad f'''(-1) = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$$

luego hay un punto de inflexión en $x = -1$.

La ordenada de este punto de inflexión se obtiene sustituyendo la abscisa del mismo en la función *f(x)*, es decir:

$$f(-1) = \text{Ln}\left((-1)^2+1\right) = \text{Ln}(2) \quad \Rightarrow \quad (-1, \text{Ln}(2)) \text{ Punto de inflexión.}$$

Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* el punto de inflexión.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \quad \Rightarrow$$

La derivada de la función en el punto -1, $f'(-1)$, la hemos calculado en el apartado anterior y valía -1.

$$y - \text{Ln}(2) = -1\cdot(x+1) \quad \Rightarrow \quad y - \text{Ln}(2) = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1 + \text{Ln}(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Para estudiar la derivabilidad estudiemos previamente la continuidad.

- Para valores de $x < 0$, la función xe^{-x^2} es continua por ser producto de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $x > 0$, la función $e^x - 1$ es continua por ser suma de funciones continuas, una exponencial y una constante, que lo son en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x = 0$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} (xe^{-x^2}) = 0\cdot e^0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \left(e^x - 1\right) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ f(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 \right.$$

luego la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto podrá ser derivable en $\mathbb{R}$.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua.

- Para valores de $x < 0$, la función xe^{-x^2} es derivable ya que la derivada es $e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x)$ o lo que es lo mismo, $e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$, expresión que existe para todos los valores de $\mathbb{R}$.

- Para valores de $x > 0$, la función $e^x - 1$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, siendo la derivada e^x.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x > 0 \\ e^{-x^2}(1 - 2x^2) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

El problema está en el punto 0 que es donde nos piden que estudiemos la derivabilidad. Será derivable en el punto 0, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(0^-) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \left(e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)\right) = e^0(1 - 2\cdot 0) = 1$$

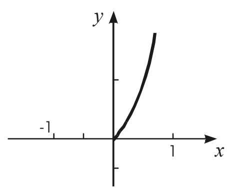
$$f'(0\ ) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$$

podemos observar que: $1 \neq 1 \;\Rightarrow\; f'(0^-) = f'(0^+)$, es decir, que las derivadas laterales coinciden, por tanto la función será derivable en el punto 0, siendo el valor de la derivada 1.

En definitiva, la función derivada de f será, finalmente:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ e^{-x^2}(1 - 2x^2) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(b) Para calcular el área del recinto que se nos pide, dibujaremos primeramente el trozo $e^x - 1$ de la función f para valores de $x \geq 0$, para ello bastará con desplazar la gráfica de e^x una unidad hacia abajo. La gráfica es la situada al lado.



Representemos ahora el trozo de función $x e^{-x^2}$ para valores de $x<0$.

Los puntos de corte con el eje de abscisas serán:

$$\left.\begin{array}{l} y = x e^{-x^2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x e^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow (0,\, 0)$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, partamos de la primera derivada, $e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$. Obtengamos los valores que la anulan:

$$e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 1-2x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Hemos obtenido dos valores que anulan a la derivada, pero sólo nos interesa el que está en su dominio que es el de valor negativo y teniendo en cuenta que la función es continua y derivable en su dominio, construiremos los siguientes intervalos de monotonía: $\left(-\infty\,,\,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\ 0\right)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -1 y $-0'1$, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$f'(-1)=e^{-(-1)^2}\left(1-2(-1)^2\right)=-e^{-1}<0 \qquad \Rightarrow \text{ Decreciente en } \left(-\infty\,,\,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$f'(-0'1)=e^{-(-0'1)^2}\left(1-2(-0'1)^2\right)=e^{-0'01}\cdot 0'08>0 \qquad \Rightarrow \text{ Creciente en} \left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\ 0\right)$$

Al ser la función continua y derivable en su dominio y teniendo en cuenta lo anterior, la función presenta un mínimo relativo en $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

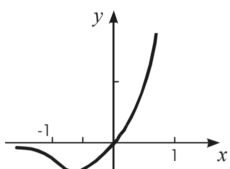
Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

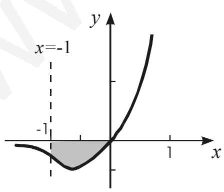
$$\lim_{x\to-\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x}=\frac{1}{-\infty}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{asíntota horizontal} \quad y=0.$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

De acuerdo con todo lo anterior, la gráfica de este otro trozo de función, de forma aproximada, está representada al lado junto al otro trozo que ya teníamos.



El recinto cuya área nos piden es el que se encuentra sombreado y situado al lado. Por lo que tendremos que calcular la siguiente integral definida:



$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{0} x e^{-x^2}\,dx\right|=\left|-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-2x)\,e^{-x^2}\,dx\right|=\left|-\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_{-1}^{0}\right|=$$

$$=\left|-\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_{-1}^{0}\right|=\left|-\frac{1}{2}\left(e^{-0^2}-e^{-(-1)^2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)\ \ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Los valores de x para los que los vectores son linealmente independientes serán los que hagan al determinante formado por sus componentes distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & -2 & 1 \\ 2 & -x & -4x \end{vmatrix} = 8x^2 + 4 + 0 - \left(0 - x^2 - 8x^2\right) = 17x^2 + 4$$

Calculemos los valores que hagan cero al determinante.

$$17x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{-\frac{4}{17}}$$

Como no hay ningún valor que anule al determinante entonces, para cualquier valor que le demos a x, el determinante será distinto de cero y por tanto los tres vectores son linealmente independientes.

(b) Teniendo en cuenta que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero, tendremos:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; (x,\, 2,\, 0)\cdot(x,\, -2,\, 1) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$$

$$\vec{u} \perp \vec{w} \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \;\Rightarrow\; (x,\, 2,\, 0)\cdot(2,\, -x,\, -4x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x - 2x + 0 = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} \;\Rightarrow\; \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \;\Rightarrow\; (x,\, -2,\, 1)\cdot(2,\, -x,\, -4x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 2x - 4x = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0$$

Las dos últimas ecuaciones son triviales por lo que las podemos eliminar, con lo que nos quedaría que los vectores serán ortogonales dos a dos para los valores de $x = \pm 2$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) De la ecuación de la recta s, que está en forma continua, deducimos que un punto de la misma es el $P(1,\, -2,\, 0)$ y un vector de dirección el (2, 1, 3). La forma paramétrica de s será:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Si las rectas r y s se cortan, se ha de verificar que ha de existir un punto común, para obtenerlo identifiquemos las x, las y y las z, de ambas rectas.

$$\begin{cases} a + t = 1 + 2\lambda \\ 1 - 2t = -2 + \lambda \\ 4 - t = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - 2\lambda = 1 - a \\ -2t - \lambda = -3 \\ -t - 3\lambda = -4 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1-a \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1-a \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -3-a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero.
La última ecuación es $0 = 2 - a$.

Pueden ocurrir dos cosas:

* que se verifique la ecuación y por tanto: $0 = 2 - a \Rightarrow a = 2$, lo que implicaría que esta última ecuación sería trivial y la eliminaríamos, quedándonos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, se trataría de un sistema compatible determinado con solución única, lo que supondría que las dos rectas se cortarían.

* que no se verifique la ecuación y por tanto: $0 \neq 2 - a \Rightarrow a \neq 2$, lo que implicaría que la última ecuación sería absurda y las dos rectas se cruzarían en el espacio.

(b) Para calcular el punto de corte, terminemos de resolver el sistema anterior, eliminaremos la última ecuación por ser trivial, ya que $a = 2$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 5.
Triangulemos superiormente.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$-t = -1$; $\lambda = 1$ o lo que es lo mismo: $t = 1$; $\lambda = 1$

Sustituyamos uno cualquiera de estos valores en la ecuación de la recta respectiva y obtendremos el punto de corte:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\cdot 1 \\ y = -2 + 1 \\ z = 3\cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow (3,\ -1,\ 3)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\text{Ln}\,x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x - 1 - \text{Ln}\,x}{(x-1)\,\text{Ln}\,x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{\text{Ln}\,x + (x-1)\,\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\,\text{Ln}\,x + (x-1)}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x\,\text{Ln}\,x + (x-1)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\text{Ln}\,x + \frac{x}{x} + 1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\text{Ln}\,x + 2}\right) = \frac{1}{2}$$

La indeterminación de cero partido por cero se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos el valor de *a* sabiendo que *f* es continua.

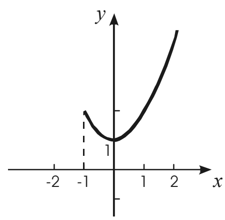
- Para valores de $x < -1$, la función $-\frac{a}{x}$ es continua por ser una función racional, que lo es en todo $\mathbb{R}$ menos en lo valores que anulan al denominador, el 0, pero en nuestro caso este valor no pertenece al dominio particular donde está definida, ya que $0 > -1$.

- Para valores de $x > -1$, la función $x^2 + 1$ es continua por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x = -1$ la función debe ser continua también, para ello, los límites laterales y el valor de la función en dicho punto tienen que coincidir. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1}} \left(-\frac{a}{x}\right) = a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1^+ \\ x>-1}} \left(x^2+1\right) = 2 \\ f(-1) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \quad \Rightarrow \quad a = 2 \right.$$

luego la función *f(x)* es continua en todo $\mathbb{R}$, para el valor de $a = 2$.



(b) Esbocemos la gráfica de *f*.

Para los valores de $x > -1$, el trozo de función $x^2 + 1$ se corresponde con el de una función cuadrática, su gráfica, situada al lado, será la de x^2 desplazada una unidad hacia arriba.

- Para valores de $x \le -1$, la función $-\frac{2}{x}$ (ya que $a = 2$) es una función de proporcionalidad inversa, su gráfica es una hipérbola equilátera situada en el 2º y 3er cuadrante, presenta una asíntota vertical y otra horizontal.

Para que exista asíntota vertical se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos que existe; habrá que buscarla entre los valores que anulen al denominador, en este caso, $x = 0$. Veámoslo.

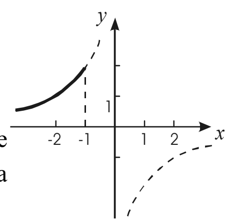
$$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{2}{x}\right) = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{2}{x}\right) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay una asíntota vertical: } x = 0.$$

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

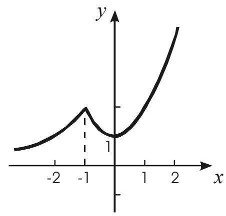
Comprobemos que existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hay una asíntota horizontal } y=0.$$

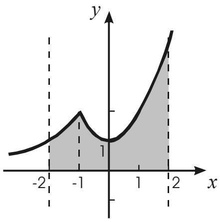


Aunque de todo esto sólo nos interesa lógicamente el trozo de gráfica correspondiente a los valores de $x \le -1$, gráfica que se encuentra situada al lado.

La gráfica, finalmente, de la función *f* es la dibujada a la derecha.



(c) El recinto cuya área nos pide el ejercicio es el que se encuentra sombreado a la izquierda.



$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^{2} f(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-2}^{-1} \frac{-2}{x}\, dx \right| + \left| \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 1\right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[-2 \text{ Ln} \left|x\right|\right]_{-2}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{2} \right| =$$

$$= \left|-2 \text{ Ln} \left|-1\right| - \left(-2 \text{ Ln} \left|-2\right|\right)\right| + \left| \frac{2^3}{3} + 2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1) \right) \right| = 2 \text{ Ln}(2) + 6 \ \ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro λ.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - λ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 - \lambda^2 & 1 - \lambda^3 \end{array} \right)$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 - \lambda & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 \end{array} \right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} y el a_{33}, que pueden serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; -\lambda^2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; -\lambda(\lambda + 1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

** Si $\lambda = 0 \;\Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 1, que es absurda. El sistema es incompatible, no tiene solución.

** Si $\lambda = -1 \;\Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos. El coeficiente $a_{22} = \lambda - 1$, para este valor de λ, es $a_{22} = -1 - 1 = -2 \neq 0$, luego nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, un sistema con infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1 \;\Rightarrow$ La tercera ecuación es una ecuación normal pero el coeficiente a_{22} puede ser cero o no, analicemos lo que puede ocurrir en cada caso.

** $a_{22} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \;\Rightarrow$ La 2ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos, nos quedarían dos ecuaciones, la 1ª y la 3ª, y tres incógnitas por lo que se trataría de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** $a_{22} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq 1 \quad \Rightarrow$ Esta 2ª ecuación sería una ecuación normal por lo que nos quedaría un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible determinado.

(b) Resolvamos el sistema para $\lambda = 2$, para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que habíamos obtenido en el apartado anterior el valor de λ por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{array}\right)$$ Simplifiquemos la 3ª fila por -3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] + [3ªf.]

Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.

La solución es:

$$2x = 3 \quad ; \quad 2y = -1 \quad ; \quad 2z = 3$$

Terminemos de despejar las incógnitas:

$$x = \frac{3}{2} \quad ; \quad y = \frac{-1}{2} \quad ; \quad z = \frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Escribamos las ecuaciones de las rectas r y s en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$$

Estudiemos la posición relativa de ambas rectas. Para ello buscaremos los puntos comunes que puedan tener igualando las x, las y y las z respectivamente.

$$\begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda = -\mu \\ \lambda = -1 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = -1 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, hemos obtenido una sóla ecuación absurda, el sistema es incompatible, luego las dos rectas se cruzan en el espacio.

Al ser dos rectas que se cruzan en el espacio, la mínima distancia entre ambas se corresponderá con la distancia entre los puntos *A* y *B* de cada una de las rectas, puntos que han de determinar un vector perpendicular a cada uno de los vectores de dirección de las rectas.

Un punto cualquiera de *r* será el $A(\lambda, \lambda, \lambda)$ y un punto cualquiera de *s* el $B(\mu, -\mu, -1+2\mu)$.

El vector que determinan ambos puntos será:

$$\vec{AB} = (\mu,\ -\mu,\ -1+2\mu) - (\lambda,\ \lambda,\ \lambda) = (\mu-\lambda,\ -\mu-\lambda,\ -1+2\mu-\lambda)$$

Impongamos la condición de ser perpendiculares a los vectores de dirección de cada una de las rectas.

$$\vec{AB} \perp \vec{u}_r \ \Rightarrow\ \vec{AB}\cdot\vec{u}_r = 0 \ \Rightarrow\ (\mu-\lambda,\ -\mu-\lambda,\ -1+2\mu-\lambda)\cdot(1,\ 1,\ 1) = 0$$

$$\vec{AB} \perp \vec{u}_r \ \Rightarrow\ \vec{AB}\cdot\vec{v}_s = 0 \ \Rightarrow\ (\mu-\lambda,\ -\mu-\lambda,\ -1+2\mu-\lambda)\cdot(1,\ -1,\ 2) = 0$$

efectuemos el producto escalar:

$$\begin{cases} \mu-\lambda-\mu-\lambda-1+2\mu-\lambda = 0 \\ \mu-\lambda+\mu+\lambda-2+4\mu-2\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu-3\lambda = 1 \\ 6\mu-2\lambda = 2 \end{cases}$$

Expresemos el sistema de ecuaciones anterior en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 7 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 7 · [1ªf.] + 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$14\mu = 4 \quad ; \quad 7\lambda = -1.$$

Terminemos de despejar las incógnitas.

$$\mu = \frac{2}{7} \quad ; \quad \lambda = -\frac{1}{7}$$

Sustituyendo cada uno de estos valores en las respectivas coordenadas de los puntos *A* y *B* tendremos:

$$A(\lambda,\ \lambda,\ \lambda) \ \Rightarrow\ A\left(-\frac{1}{7},\ -\frac{1}{7},\ -\frac{1}{7}\right)$$

$$B(\mu,\ -\mu,\ -1+2\mu) \ \Rightarrow\ B\left(\frac{2}{7},\ -\frac{2}{7},\ -1+\frac{4}{7}\right) \ \Rightarrow\ B\left(\frac{2}{7},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{3}{7}\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 53 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. **(a)** [1´5 PUNTOS]. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^2 + b$. Halla los valores de a y b sabiendo que $\int_0^6 f(x)\,dx = 6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12.

(b) [1 PUNTO]. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 + px + q$. Calcula los valores de p y q sabiendo que la función f tiene un extremo en $x = -6$ y su valor en él es -2.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula

$$\int \left(x^2 - 1\right)e^{-x}\,dx$$

EJERCICIO 3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) [1 PUNTO]. Determina los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tiene inversa

(b) [1´5 PUNTOS]. Para $m = 0$ y siendo $X = (x\ \ y\ \ z)$, resuelve $XA = (3\ \ 1\ \ 1)$.

EJERCICIO 4. Sea r la recta de ecuación $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{4}$ y s la recta dada por $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina la posición relativa de ambas rectas.

(b) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

(a) [0´75 PUNTOS]. Estudia si existen y calcula, cuando sea posible, las asíntotas de la gráfica de *f*.

(b) [1´25 PUNTOS]. Determinalos intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los valores que alcanza en ellos la función *f*

(c) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de *f*.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\, x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$.

EJERCICIO 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea *I* la matriz identidad de orden 2.

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $|A - \lambda I| = 0$.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula $A^2 - 7A + 10I$.

EJERCICIO 4. Considera la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y no corta a eje *OZ*.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula la proyección ortogonal del punto *A*(1, 2, 1) sobre la recta *r*.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos la integral.

$$\int_0^6 f(x)\,dx = 6 \Rightarrow \int_0^6 (ax^2 + bx)\,dx = 6 \Rightarrow \left[a\frac{x^3}{3} + bx^2\right]_0^6 = 6 \Rightarrow$$

$$\left(a\frac{6^3}{3} + b\cdot 6^2 - \left(a\frac{0^3}{3} + b\cdot 0^2\right)\right) = 6 \Rightarrow 72a + 36b = 6 \Rightarrow 12a + b = 1 \qquad [1]$$

Si la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 3 vale -12, significa que: *pendiente* $= f´(3) = -12$

Calculemos la función derivada: $f´(x) = 2ax \Rightarrow 2a\cdot 3 = -12 \Rightarrow a = -2$

Sustituyendo este valor en [1], tendremos:

$12a + b = 1 \Rightarrow 12\cdot(-2) + b = 1 \Rightarrow b = 25.$

(b) La función tiene un extremo en (-6, -2), lo que implica dos cosas:

Primera, que al pertenecer a la función sus coordenadas satisfacen la expresión de la función:

$f(x)=x^2+px+q \;\Rightarrow\; f(-6)=-2 \;\Rightarrow\; (-6)^2+p(-6)+q=-2 \;\Rightarrow\; -6p+q=-38$ [1]

Segunda, al ser un extremo y siendo *f* una función polinómica, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, la primera derivada en el punto $x=-6$ vale 0, es decir:

$f'(x)=2x+p \;\Rightarrow\; f'(-6)=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot(-6)+p=0 \;\Rightarrow\; p=12$

Sustituyendo este valor en [1], obtendremos el valor de q.

$-6p+q=-38 \;\Rightarrow\; -6\cdot 12+q=-38 \;\Rightarrow\; q=34.$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la integral indefinida $\int (x^2-1)e^{-x}\,dx$, se trata de una integral por partes.

$u=x^2-1 \qquad du=2x\,dx$

$dv=e^{-x}\,dx \qquad v=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}$

$\int (x^2-1)e^{-x}\,dx=(x^2-1)(-e^{-x})-\int -e^{-x}\,2x\,dx=-(x^2-1)e^{-x}+\int e^{-x}\,2x\,dx=$ [1]

Obtenemos una nueva integral por partes.

$u=2x \qquad du=2\,dx$

$dv=e^{-x}\,dx \qquad v=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}$

Continuando desde [1].

$=-(x^2-1)e^{-x}+2x(-e^{-x})-\int -e^{-x}\,2\,dx=-(x^2-1)e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C=$

$=-e^{-x}(x^2-1+2x+2)+C=-e^{-x}(x^2+x+1)+C$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) La matriz *A* tendrá inversa para los valores de *m* que hagan al determinante asociado a la matriz *A* distinto de cero. Para ello calculemos primeramente los que lo hagan cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=3m+3+(m-3)(m+1)-6=3m+3+m^2-3m+m-3-6=m^2+m-6$$

$$m^2+m-6=0 \;\Rightarrow\; m=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Para todos los valores de $m\neq 2$ y $m\neq -3$ la matriz *A* tiene inversa.

(b) Resolvamos la ecuación $X\,A=(3\;\;1\;\;1)$ para $m=0$ y siendo $X=(x\;\;y\;\;z)$. Sustituiremos $m=0$ en la matriz *A*, tendremos:

$$(x\;\;y\;\;z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=(3\;\;1\;\;1)$$

Multipliquemos a la derecha por la inversa de la matriz *A*, que sabemos que tiene porque el valor de $m=0$ es un valor para el que dicha matriz tiene inversa, según el apartado anterior.

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-3&3\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-3&3\\1&2&0\end{pmatrix}^{-1}=(3\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-3&3\\1&2&0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow$$

$$(x\ y\ z)\,I=(3\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-3&3\\1&2&0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow (x\ y\ z)=(3\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-3&3\\1&2&0\end{pmatrix}^{-1} \qquad [1]$$

Obtengamos la matriz inversa de *A* mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de dicha matriz la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha será la matriz inversa de *A*.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-3&3&0&1&0\\1&2&0&0&0&1\end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-3&3&0&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-3&3&0&1&0\\0&0&6&-3&1&3\end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 6 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 6 · [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&6&0&3&1&3\\0&-6&0&3&1&-3\\0&0&6&-3&1&3\end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -6 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&0&6&2&0\\0&-6&0&3&1&-3\\0&0&6&-3&1&3\end{array}\right)$$

Dividamos las filas 1ª y 3ª por 6.
Dividamos la fila 2ª por -6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de *A*, es decir:

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-3&3\\1&2&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Sustituyendo la matriz inversa que hemos obtenido en [1], tendremos:

$$(x\ y\ z)=(3\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-3&3\\1&2&0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow (x\ y\ z)=(3\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow (x\ y\ z)=(2\ 1\ 1)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Estudiemos la posición relativa de las rectas *r* y *s*. Para ello expresemos la ecuación de la recta *r* en forma de intersección de dos planos.

$$r \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{z}{4} \\ \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 20 = 2z \\ 4y + 8 = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2z = 20 \\ 4y - z = -8 \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} 4x - 2z = 20 \\ 4y - z = -8 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 4 & -1 & -8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 4ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 20 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & -8 & 8 \\ 0 & 8 & -14 & 28 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & -12 & 44 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -7 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: 7 · [4ªf.] - 12 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 116 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y la última ecuación es una ecuación absurda, por lo que el sistema es incompatible, pero como sólo hemos obtenido una ecuación absurda las dos rectas se cruzan en el espacio.

(b) La ecuación del plano que nos piden contiene a la recta *r* por lo que un punto de esta recta, el (5, -2, 0), y su vector de dirección (2, -1, 4) serán también un punto y un vector de dirección de dicho plano.

El plano que nos piden al ser paralelo a la recta *s*, el vector de dirección de esta otra recta, que se cruza con la *r*, será también el otro vector de dirección del plano. Para calcular el vector de dirección de la recta *s* lo haremos mediante el producto vectorial de los vectores normales a los dos planos que definen a dicha recta.

$$s \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (3, -2, 1) \times (-1, 2, -3) \Rightarrow$$

$$\vec{v}_s = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (4, 8, 4)$$

La ecuación del plano que nos pide el ejercicio es: $\begin{cases} x = 5 + 2\lambda + 4\mu \\ y = -2 - \lambda + 8\mu \\ z = 4\lambda + 4\mu \end{cases}$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos las asíntotas verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, al ser una función racional, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow$ no existen.

Calculemos, si existen, las asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{asíntota horizontal } \ y = 1.$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

En este tipo de funciones si existe asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

Analicemos la posición de la gráfica de la función respecto a la asíntota horizontal, sobre todo porque en el apartado c) lo vamos a necesitar.

* Para valores de *x* muy grandes, por ejemplo, $x = 1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(1000) = \dfrac{1000^2 - 1000 + 1}{1000^2 + 1000 + 1} \cong 0'998 \\ y_{\text{asíntota}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1000) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por debajo de la asíntota horizontal.

* Para valores de *x* muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{(-1000)^2 - (-1000) + 1}{(-1000)^2 + (-1000) + 1} \cong 1'002 \\ y_{\text{asíntota}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to -\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

(b) Teniendo en cuenta que es una función racional, continua en todo $\mathbb{R}$ ya que no hay ningún valor que anula al denominador, para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f lo haremos hallando previamente los valores que anulen a la función primera derivada de *f(x)*.

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - x^2 - x - 1 - 2x^3 - x^2 + 2x^2 + x - 2x - 1}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2} \Rightarrow 2x^2-2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Con estos dos puntos, 1 y -1, los ordenamos y construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -2, 0 y 2, respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-2)=\dfrac{2(-2)^2-2}{\left((-2)^2+(-2)+1\right)^2}=\dfrac{6}{9}>0 & \Rightarrow \quad \text{creciente en } (-\infty, -1) \\ f'(0)=\dfrac{2\cdot 0^2-2}{\left(0^2+0+1\right)^2}=\dfrac{-2}{1}<0 & \Rightarrow \quad \text{decreciente en } (-1, 1) \\ f'(2)=\dfrac{2\cdot 2^2-2}{\left(2^2+2+1\right)^2}=\dfrac{6}{49}>0 & \Rightarrow \quad \text{creciente en } (1, +\infty) \end{cases}$$

Calculemos ahora los extremos relativos o locales.

Teniendo en cuenta todos los cálculos realizados hasta el momento y lo dicho sobre la continuidad de esta función racional, podremos concluir lo siguiente:

* En $x=-1$, hay un máximo relativo puesto que la función pasa de crecer a decrecer.

$$f(-1)=\frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1)^2+(-1)+1}=3 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo relativo } (-1, 3)$$

* En $x=1$, hay un mínimo relativo puesto que la función pasa de decrecer a crecer.

$$f(1)=\frac{1^2-1+1}{1^2+1+1}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo relativo } (1, 1/3)$$

(c) Calculemos los posibles puntos de corte con los ejes de la gráfica de *f*.

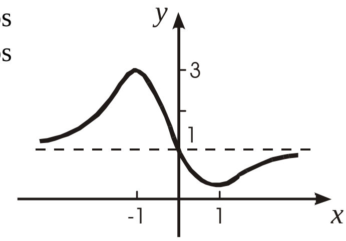
Con el eje *OX*.

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=0 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{No hay puntos} \\ \text{de corte.} \end{cases}$$

Con el eje *OY*.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{0^2-0+1}{0^2+0+1} \Rightarrow y=1 \quad \Rightarrow \quad \text{hay un punto de corte, el } (0, 1).$$

La gráfica de la función teniendo en cuenta los puntos de corte con los ejes y lo estudiado en los apartados anteriores, (a) y (b), se encuentra dibujada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x_0 = 0$.

$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$

$f(x) = \text{sen } x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \cos 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$

$f(0) = \text{sen } 0 = 0$

$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - f(0) = f'(0)\,(x - 0) \;\Rightarrow\; y - 0 = 1(x - 0) \;\Rightarrow\; y = x$

Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x_1 = \pi$.

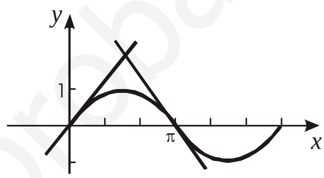
$y - f(x_1) = f'(x_1)\,(x - x_1)$

$f(x) = \text{sen } x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(\pi) = \cos \pi \quad \Rightarrow \quad f'(\pi) = -1$

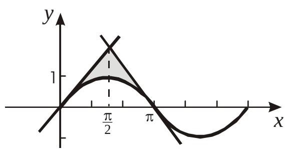
$f(\pi) = \text{sen } \pi = 0$

$y - f(x_1) = f'(x_1)\,(x - x_1) \;\Rightarrow\; y - f(\pi) = f'(\pi)\,(x - \pi) \;\Rightarrow\; y - 0 = -1(x - \pi) \;\Rightarrow\; y = -x + \pi$

Las gráficas de la función $f(x)$ = sen (x), que es una función elemental, y las de las rectas tangentes anteriores están situadas al lado.



El área del recinto que nos piden se encuentra sombreado en la gráfica de la izquierda.



Calculemos el punto donde ambas rectas tangentes se cortan.

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = -x - \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = -x - \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

El área del recinto, al darse una simetría bastará con calcular la mitad y multiplicarla por 2.

$$\text{Área} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \text{sen } x\right) dx = 2\left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{(\pi/2)^2}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \left(\frac{0^2}{2} + \cos 0\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi^2}{8} + 0 - (0 + 1)\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad u^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos los valores de λ que verifiquen que $|A - \lambda I| = 0$, pero antes obtengamos la matriz $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

(b) Calculemos $A^2 - 7A + 10I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica. Para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de la recta que viene dada como intersección de dos planos.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, nos sobra una incógnita, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-z \\ 0 & -3 & -1-2z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2-5z \\ 0 & -3 & -1-2z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es: $3x=2-5z$; $-3y=-1-2z$ o lo que es lo mismo: $x=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}z$; $y=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}z$

designemos a la incógnita secundaria z como un parámetro t; la ecuación de la recta r, será:

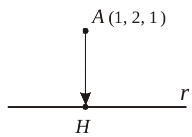
$$r \equiv \begin{cases} x=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t \\ z=t \end{cases}$$

Un punto de esta recta es el $A\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$ y un vector de dirección el $\vec{u}\left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\right)$.

Como el plano que me piden no corta al eje OZ, es que es paralelo a él, por lo que el vector de dirección de este eje, el (0, 0, 1), será un vector de dirección del plano.

La ecuación del plano que contiene a la recta y no corta al eje OZ es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\lambda \\ y=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda+\mu \end{cases}$$



(b) La proyección ortogonal del punto A (1, 2, 1) sobre la recta r será un punto H, tal que el vector $\vec{AH}$ sea perpendicular al vector de dirección de la recta.

El punto genérico, H, de la recta r tendrá de coordenadas $H\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t,\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}t,\ t\right)$ y el vector $\vec{AH}$:

$$\vec{AH}=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t,\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}t,\ t\right)-(1,\ 2,\ 1)=\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}t,\ -\frac{5}{3}+\frac{2}{3}t,\ t-1\right)$$

Apliquemos la condición de que $\vec{AH}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta:

$$\vec{AH}\perp\vec{u}_r \Rightarrow \vec{AH}\bullet\vec{u}_r=0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}t,\ -\frac{5}{3}+\frac{2}{3}t,\ t-1\right)\bullet\left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{9}+\frac{25}{9}t-\frac{10}{9}+\frac{4}{9}t+t-1=0 \Rightarrow \frac{38}{9}t-\frac{14}{9}=0 \Rightarrow t=\frac{14}{38} \Rightarrow t=\frac{7}{19}$$

Luego la proyección ortogonal del punto A sobre la recta r es:

$$H\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t,\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}t,\ t\right) \Rightarrow H\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{19},\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{19},\ \frac{7}{19}\right) \Rightarrow H\left(\frac{1}{19},\ \frac{11}{19},\ \frac{7}{19}\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 54 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Sea $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \dfrac{x\,(\text{Ln}\,x)^2}{(x-1)^2}$, siendo Ln la función logaritmo neperiano. Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de la función. En caso de que exista, hállala.

EJERCICIO 2. Sea f: $[0, 4] \to \mathbb{R}$ una función tal que su función derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \end{cases}$$

(a) [1´75 PUNTOS]. Determina la expresión de f sabiendo que $f(1) = \dfrac{16}{3}$.
(b) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + \lambda y + z &= 8 \\ \lambda x + y + \lambda z &= 10 \end{aligned}\right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
(b) [1 PUNTO]. Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 4, 1)$ y la recta r de ecuación $x = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B.
(b) [1 PUNTO]. Calcula el área del triángulo de vértices ABC.

Opción B

EJERCICIO 1. Se sabe que la función f: $[0, 5] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & \text{si} \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo (0, 5).

(a) [1´75 PUNTOS]. Calcula las constantes a y b.

(b) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sean las funciones f y g : $[0, +\infty] \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=\lambda\sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcula el valor de λ sabiendo que el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es $\frac{1}{3}$.

EJERCICIO 3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) [1 PUNTO]. Halla el valor de $m\in\mathbb{R}$ para el que la matriz A no tiene inversa.

(b) [1´5 PUNTOS]. Resuelve $AX=O$ para $m=3$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano π de ecuación $x+y+z=1$ y forme con los ejes coordenados un triángulo de área $18\sqrt{3}$.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

La función al estar definida en el intervalo $(1,+\infty)$ sólo nos permitirá estudiar la posibilidad de existencia de asíntotas horizontales para $x\to+\infty$.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,(\text{Ln}\,x)^2}{(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\text{Ln}\,x)^2+x\cdot 2(\text{Ln}\,x)\,\frac{1}{x}}{2\,(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\text{Ln}\,x)^2+2(\text{Ln}\,x)}{2\,(x-1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,(\text{Ln}\,x)\,\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,(\text{Ln}\,x)+2}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Las indeterminaciones de infinito partido por infinito se han destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

Hay asíntota horizontal: $y=0$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Para determinar la expresión de la función *f(x)* a partir de la función derivada tendremos que integrar ésta para obtener aquella:

$$f(x)=\begin{cases} \int\left(\frac{2}{3}x\right)dx=\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}+K=\frac{x^2}{3}+K & \text{si } 0\le x<3 \\ \int(-2x+8)\,dx=-2\frac{x^2}{2}+8x+C=-x^2+8x+C & \text{si } 3\le x\le 4 \end{cases}$$

Para calcular C y K tendremos en cuenta dos cosas, la primera es que para determinar el valor de dichas constantes y tal como nos dice el ejercicio, la función en el punto 1 vale $\frac{16}{3}$, es decir, $f(1)=\frac{16}{3}$. Por tanto:

$$f(1)=\frac{1^2}{3}+K \;\Rightarrow\; \frac{16}{3}=\frac{1}{3}+K \;\Rightarrow\; K=\frac{15}{3} \;\Rightarrow\; K=5$$

Al ser $K=5$, la función f tendrá el siguiente aspecto.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{3}+5 & \text{si } 0\le x<3 \\ -x^2+8x+C & \text{si } 3\le x\le 4 \end{cases}$$

Las segunda de las cosas que tendremos en cuenta es que si f es derivable en (0, 4) será continua en [0, 4], ya que la derivabilidad implica continuidad, es decir, ha de serlo en el punto 3 que es donde se produce un cambio en el comportamiento de la función, y para ello, los límites laterales en dicho punto y el valor de la función en dicho punto deben existir y coincidir, veámoslo

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}\left(\frac{x^2}{3}+5\right)=\frac{9}{3}+5=8 \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\left(-x^2+8x+C\right)=-3^3+8\cdot 3+C=15+C \\ f(3)=15+\text{C} \end{array}\right\}\Rightarrow\; 8=15+C \;\Rightarrow\; C=-7$$

La expresión de la función f, finalmente, será: $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{3}+5 & \text{si } 0\le x<3 \\ -x^2+8x-7 & \text{si } 3\le x\le 4 \end{cases}$

(b) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=1.

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0) \;\Rightarrow\; y-f(1)=f'(1)\,(x-1)\Rightarrow$$

$$f'(1)=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3} \quad ; \quad f(1)=\frac{16}{3}$$

$$y-\frac{16}{3}=\frac{2}{3}\cdot(x-1) \;\Rightarrow\; y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+\frac{16}{3} \;\Rightarrow\; y=\frac{2}{3}x+\frac{14}{3}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el sistema según los valores del parámetro λ.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ x+\lambda y+z=8 \\ \lambda x+y+\lambda z=10 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 8 \\ \lambda & 1 & \lambda & 10 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - λ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 6 \\ 0 & 1+\lambda & 0 & 10-2\lambda \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4-2\lambda \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente y todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} que puede serlo o no. Pero además, la última ecuación puede ser trivial o absurda, veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* La última ecuación, $0=4-2\lambda$, es trivial si $\lambda=2$, ya que quedaría una ecuación del tipo, 0=0, la eliminaríamos; y para este valor de $\lambda=2$, a_{22} que es $a_{22}=\lambda+1$, valdría: $a_{22}=2+1=3\neq 0 \Rightarrow$ nos quedaría un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* La última ecuación, $0 = 4 - 2\lambda$, es absurda si $\lambda \neq 2$, ya que quedaría una ecuación del tipo, $0 = n^o \neq 0$, el sistema sería incompatible, no tendría solución.

(b) Terminemos de resolver el sistema para el caso de $\lambda = 2$, que es cuando era un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. En el sistema triangulado inferior anterior sustituyamos el valor de λ por 2 y eliminemos la última ecuación que era absurda, tendremos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente y nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria, nos quedará el siguiente sistema.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2-z \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 12-3z \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado la solución es:

$$3x = 12 - 3z \quad ; \quad 3y = 6$$

o lo que es lo mismo: $x = 4 - z \quad ; \quad y = 2$

Sustituyendo la incógnita secundaria, la *z*, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$, tendremos finalmente la solución del sistema compatible indeterminado uniparamétrico:

$$x = 4 - \alpha \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad z = \alpha.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos la ecuación de la recta *r* en forma paramétrica.

$$x = y - 2 = \frac{z-3}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}$$

Elijamos un punto genérico, C, de la recta; tendrá de coordenadas $(\lambda,\ 2+\lambda,\ 3+2\lambda)$.

Impongamos la condición a este punto C de estar a igual distancia de los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 4, 1)$: dist (A, C) = dist (B, C) $\Rightarrow$

$$\sqrt{(\lambda-2)^2+(2+\lambda-1)^2+(3+2\lambda-2)^2} = \sqrt{(\lambda-0)^2+(2+\lambda-4)^2+(3+2\lambda-1)^2}$$

$$\sqrt{(\lambda-2)^2+(1+\lambda)^2+(1+2\lambda)^2} = \sqrt{\lambda^2+(\lambda-2)^2+(2+2\lambda)^2}$$

$$\sqrt{\lambda^2+4-4\lambda+1+\lambda^2+2\lambda+1+4\lambda^2+4\lambda} = \sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4-4\lambda+4+4\lambda^2+8\lambda}$$

$$\sqrt{6\lambda^2+2\lambda+6} = \sqrt{6\lambda^2+4\lambda+8} \quad \Rightarrow \quad 6\lambda^2+2\lambda+6 = 6\lambda^2+4\lambda+8 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda+6 = 4\lambda+8 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad C\,(\lambda,\ 2+\lambda,\ 3+2\lambda) \quad \Rightarrow \quad C\,(-1,\ 2-1,\ 3+2(-1)) \quad \Rightarrow \quad C\,(-1,\ 1,\ 1).$$

(b) Obtengamos las coordenadas de los vectores $\vec{AC}$ *y* $\vec{BC}$ antes de calcular el área del triángulo *ABC*.

$$\vec{AC} = (-1,\ 1,\ 1) - (2,\ 1,\ 2) = (-3,\ 0,\ -1) \quad ; \quad \vec{BC} = (-1,\ 1,\ 1) - (0,\ 4,\ 1) = (-1,\ -3,\ 0)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{AC}\times\vec{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-3,\ 0,\ -1)\times(-1,\ -3,\ 0)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(-3,\ 1,\ 9)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+1^2+9^2} = \frac{1}{2}\sqrt{91}\ \text{u}^2.$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Nos dicen que la función f es derivable en (0, 5) luego es continua en [0, 5] que es donde está definida, ya que la derivabilidad implica continuidad.

Estudiemos la continuidad.

- Para valores de $0 \le x < 2$, la función $ax + bx^2$ es continua por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $2 < x \le 5$, la función $-4+\sqrt{x-1}$ es continua por ser la suma de una función constante, -4, que lo es en todo $\mathbb{R}$ y de la raíz cuadrada de una función lineal que lo es en su dominio ($x \ge 1$), luego la suma de ambas será continua para $0 < x \le 5$

- Para $x = 2$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}}\left(ax+bx^2\right)=2a+4b\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}}\left(-4+\sqrt{x-1}\right)=-3\\ f(2)=-3\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\quad\Rightarrow\\ \qquad 2a+4b=-3 \qquad\qquad [1]\end{array}\right.$$

Hemos obtenido una primera ecuación o condición que ha de satisfacerse para que la función f sea continua en su dominio. Necesitamos otra ecuación.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua y porque el ejercicio nos dice que es derivable.

- Para valores de $0<x<2$, la función $ax+bx^2$ es derivable por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$, luego f será derivable para todos los valores $0<x<2$, siendo la derivada $a+2bx$.

- Para valores de $2<x\le 5$, la función $-4+\sqrt{x-1}$ es derivable por ser la suma de una función constante, -4, que lo es en todo $\mathbb{R}$ y de la raíz cuadrada de una función lineal que lo es en su dominio salvo para los valores que anulen al radicando ($x>1$), luego la suma de ambas será derivable para $0<x<5$, siendo la derivada $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x)=\begin{cases} a+2bx & \text{si} \quad 0<x<2\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si} \quad 2<x<5\end{cases}$$

El problema está en el punto 2. Como es derivable en el punto 2, las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(a+2bx)=a+4b\\ f'(2^+)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f'(2^-)=f'(2^+)\\ a+4b=\dfrac{1}{2}\qquad [2]\end{array}\right.$$

Hemos obtenido una segunda ecuación. Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2].

$$\left.\begin{array}{r} 2a+4b=-3\\ a+4b=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} 2a+4b=-3\\ 2a+8b=1\end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -3\\ 2 & 8 & 1\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=2\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -3\\ 0 & 4 & 4\end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=4\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -7\\ 0 & 4 & 4\end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$2a=-7 \quad ; \quad 4b=4 \qquad \Rightarrow \qquad a=-\frac{7}{2} \quad ; \quad b=1$$

En definitiva, la función derivada de f será:

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{7}{2}+2x & \text{si} \quad 0<x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si} \quad 2\le x<5 \end{cases}$$

(b) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=2.

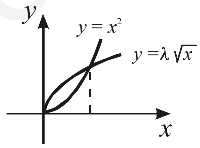
$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0) \;\Rightarrow\; y-f(2)=f'(2)\,(x-2)$$

$$f(2)=-4+\sqrt{2-1}=-3 \quad ; \quad f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2-1}}=\frac{1}{2}$$

$$y-(-3)=\frac{1}{2}(x-2) \;\Rightarrow\; y+3=\frac{1}{2}x-1 \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{2}x-4$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

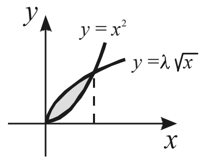
Las gráficas de las funciones f y g están representadas de manera aproximada al lado, ya que se trata de dos funciones prácticamente elementales.



Calculemos el punto de corte de ambas gráficas, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=\lambda\sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=\lambda\sqrt{x} \Rightarrow x^4=\lambda^2 x \Rightarrow x^4-\lambda^2 x=0 \Rightarrow x\left(x^3-\lambda^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3-\lambda^2=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{\lambda^2} \end{cases}$$

El área del recinto limitado por ambas gráficas y que se encuentra sombreado en el dibujo es $\frac{1}{3}$, por tanto, se verificará:



$$\text{Área}=\int_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}}\left(\lambda\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left[\frac{\lambda\, x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}}=\frac{\lambda\left(\sqrt[3]{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{\left(\sqrt[3]{\lambda^2}\right)^3}{3}-0=$$

$$=\frac{2}{3}\lambda\cdot\lambda^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\lambda^2=\frac{2}{3}\lambda^2-\frac{1}{3}\lambda^2=\frac{1}{3}\lambda^2$$

y teniendo en cuenta cuánto vale esta área: $\frac{1}{3}\lambda^2=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \lambda^2=1 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\lambda=1 \\ \lambda=-1\end{cases}$

Luego el valor de λ es 1 ya que según el ejercicio debe ser un número real positivo.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos el valor de m para el que la matriz A no tiene inversa, lo que significa que el determinante asociado debe ser cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{vmatrix}=1-m+m-4-1-2+2m=2m-6 \;\Rightarrow\; 2m-6=0 \;\Rightarrow\; m=3$$

El valor de m para el que la matriz A no tiene inversa es 3.

(b) Resolvamos $A\,X = O$ para $m = 3$. Sabemos por el apartado anterior que la matriz A para este valor de m no tiene inversa por lo que no podremos multiplicar a la izquierda por la inversa de A, porque no existe. Lo haremos de la siguiente manera.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y \quad = 0 \\ 2x+y+z = 0 \\ -x+y-2z = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo anterior en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema homogéneo está triangulado inferiormente. Hemos obtenido una ecuación trivial (la 3ª), 0 = 0, la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. La incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -z \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{c} (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -z \\ 0 & -1 & -z \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado la solución es:

$$x = -z \quad ; \quad -y = -z \quad \Rightarrow \quad x = -z \quad ; \quad y = z$$

Sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por λ.

$$x = -\lambda \quad ; \quad y = \lambda \quad ; \quad z = \lambda \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

La ecuación de un plano paralelo al plano $\pi \equiv x+y+z=1$, sería: $x+y+z+D=0$.

Los puntos de corte de este plano con cada uno de los ejes de coordenadas será:

* Con el eje OX: $\left\{\begin{array}{r} y = 0 \\ z = 0 \\ x+y+z+D = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \ \ 0 \\ z = \ \ 0 \\ x = -D \end{array}\right. \Rightarrow A(-D,\ 0,\ 0)$

* Con el eje OY: $\left\{\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 0 \\ x+y+z+D = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ \ 0 \\ z = \ \ 0 \\ y = -D \end{array}\right. \Rightarrow B(0,\ -D,\ 0)$

* Con el eje OZ: $\left\{\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y+z+D = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ \ 0 \\ y = \ \ 0 \\ z = -D \end{array}\right. \Rightarrow C(0,\ 0,\ -D)$

Obtengamos las coordenadas de los vectores $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ antes de calcular el área del triángulo ABC.

$\vec{AC} = (0,0,-D)-(-D,0,0)=(D,0,-D) \quad ; \quad \vec{BC} = (0,0,-D)-(0,-D,0)=(0,D,-D)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{AC}\times\vec{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|(D,0,-D)\times(0,D,-D)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 0 & -D \\ D & -D \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} D & -D \\ 0 & -D \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(D^2,\ D^2,\ D^2\right)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(D^2\right)^2+\left(D^2\right)^2+\left(D^2\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3\left(D^2\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3\,D^4} = \frac{D^2}{2}\sqrt{3}\ \text{ u}^2.$$

Como el área es $18\sqrt{3}$, identificando el resultado anterior con este valor:

$$\frac{D^2}{2}\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad D^2 = 36 \quad\Rightarrow\quad D = \pm 6$$

y sustituyendo cada uno de estos valores que hemos obtenido para D, en la ecuación del plano que íbamos buscando, tendremos

$$x+y+z+6=0 \qquad ; \qquad x+y+z-6=0$$

es decir, obtenemos dos planos que cumplen las condiciones del ejercicio.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones:
a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 55 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina a y $b\in\mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 2) y tiene un punto de inflexión de abscisa $x=0$.

(b) [1 PUNTO]. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

EJERCICIO 2. Sea $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\text{Ln}\,x & \text{si} \quad 0<x\le 1\\ \text{Ln}\,(2-x) & \text{si} \quad 1<x<2\end{cases}$$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.

(a) [1 PUNTO]. Estudia la derivabilidad de f en el punto $x=1$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula $\int_1^{1'5} f(x)\,dx$.

EJERCICIO 3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla, si existe, la matriz inversa de AB + C.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula, si existen, los números reales x e y que verifican:

$$C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Sea la recta r de ecuación $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$ y el plano π de ecuación $x-y+z+1=0$. Calcula el área del triángulo de vértices ABC, siendo A el punto de corte de la recta r y el plano π, B el punto (2, 1, 2) de la recta r y C la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm^2. Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.

EJERCICIO 2. **(a)** [0´75 PUNTOS]. Haz un esbozo del recinto limitado por las curvas $y = \dfrac{15}{1+x^2}$ e $y = x^2 - 1$.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = \quad -4 \\ 3x + \lambda y + z = \lambda - 1 \\ 2x + \lambda y = \quad -2 \end{array}\right\}$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) [1´25 PUNTOS]. Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta *r* de ecuación $x = y = z$, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el, punto $A(1, 2, -1)$.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Si la gráfica de *f* pasa por el punto (2, 2) significa que las coordenadas de este punto satisfacen la expresión de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

$f(2) = 2 \;\Rightarrow\; f(2) = 2^3 + a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 1 \Rightarrow\; 2 = 8 + 4a + 2b + 1 \Rightarrow\; 4a + 2b = -7$ [1]

Si existe un punto de inflexión en *x*=0, se verificará:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(0) = 0 \;\Rightarrow\; f''(0) = 6\cdot 0 + 2a \;\Rightarrow\; 0 = 2a \;\Rightarrow\; a = 0$$

Sustituyendo este valor de *a* en [1], tendremos:

$$4a + 2b = -7 \;\Rightarrow\; 4\cdot 0 + 2b = -7 \;\Rightarrow\; 2b = -7 \;\Rightarrow\; b = -\frac{7}{2}$$

(b) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de inflexión, punto de abscisa $x = 0$.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(0) = f'(0)\,(x - 0)$$
$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x + 1 \Rightarrow f(0) = 0^3 - \frac{7}{2}\cdot 0 + 1 \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - \frac{7}{2} \quad ; \quad f'(0) = 3\cdot 0^2 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2}$$
$$y - 1 = -\frac{7}{2}\,(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -\frac{7}{2}x \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{7}{2}x + 1$$

La ecuación de la recta normal será:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}\,(x - 0) \quad \Rightarrow$$
$$y - 1 = -\frac{1}{-\frac{7}{2}}\,(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{7}x + 1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Para estudiar la derivabilidad de *f* estudiemos previamente la continuidad, ya que para que una función pueda ser derivable ha de ser previamente continua.

- Para valores de $0 < x < 1$, la función $\text{Ln}\,x$ es continua por ser la función logarítmica elemental que lo es en todo su dominio, el intervalo $(0, +\infty)$, por lo que lo será en el intervalo $0 < x < 1$.

- Para valores de $1 < x < 2$, la función $\text{Ln}\,(2 - x)$ es continua por ser la función logarítmica de una función polinómica que lo es en todo su dominio, el intervalo $(-\infty, 2)$, por lo que lo será en el intervalo $1 < x < 2$.

- Para $x = 1$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} \text{Ln}\,x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \text{Ln}(2 - x) = 0 \\ f(1) = \text{Ln}\,1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \right.$$

luego la función *f(x)* es continua en el intervalo (0, 2), por tanto podrá ser derivable en (0, 2).

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua.

- Para valores de $0 < x < 1$, la función $\text{Ln}\,x$ es derivable por ser la función logarítmica elemental que lo es en todo su dominio, el intervalo $(0, +\infty)$, por lo que lo será en el intervalo $0 < x < 1$, siendo la derivada $\frac{1}{x}\cdot$

- Para valores de $1 < x < 2$, la función $\text{Ln}\,(2 - x)$ es continua por ser la función logarítmica de una función polinómica que lo es en todo su dominio, el intervalo $(-\infty, 2)$, por lo que lo será en el intervalo $1<x<2$, siendo la derivada $-\dfrac{1}{2-x}$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0<x<1 \\ -\dfrac{1}{2-x} & \text{si} \quad 1<x<2\end{cases}$$

El problema está en el punto 1. Será derivable en el punto 1, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(1^-)=\lim_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} \frac{1}{x}=1$$

$$f'(1^+)=\lim_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{2-x}\right)=-1$$

podemos observar que: $-1\neq 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1^-)\neq f'(1^+)$, es decir, que las derivadas laterales no coinciden, por tanto la función no será derivable en el punto 1.

En definitiva, la función derivada de f será, finalmente:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0<x<1 \\ -\dfrac{1}{2-x} & \text{si} \quad 1<x<2\end{cases}$$

(b) Calculemos la integral definida $\int_1^{1'5} f(x)\,dx$.

$$\int_1^{1'5} f(x)\,dx=\int_1^{1'5}\mathrm{Ln}(2-x)\,dx= \qquad [1]$$

Se trata de una integral por partes.

$$u=\mathrm{Ln}\,(2-x) \quad ; \quad du=-\frac{1}{2-x}\,dx$$

$$dv=dx \quad ; \quad v=\int dx=x$$

Continuando desde [1]:

$$=\left[\mathrm{Ln}\,(2-x)\cdot x\right]_1^{1'5}-\int_1^{1'5}x\left(-\frac{1}{2-x}\right)dx=\left[\mathrm{Ln}\,(2-x)\cdot x\right]_1^{1'5}+\int_1^{1'5}\frac{x}{2-x}\,dx= \qquad [2]$$

La última integral definida es una integral racional impropia, efectuemos la división que se encuentra realizada al lado.

$$\begin{array}{r|l} x & 2-x \\ \hline -x+2 & -1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Continuando desde [2]:

$$=\left[\mathrm{Ln}\,(2-x)\cdot x\right]_1^{1'5}+\int_1^{1'5}\left(-1+\frac{2}{2-x}\right)dx=$$

$$=\left[\mathrm{Ln}\,(2-x)\cdot x\right]_1^{1'5}-\int_1^{1'5}dx+\int_1^{1'5}\frac{2}{2-x}\,dx=\left[\mathrm{Ln}\,(2-x)\cdot x\right]_1^{1'5}-\int_1^{1'5}dx-2\int_1^{1'5}\frac{-1}{2-x}\,dx=$$

$$=\left[\mathrm{Ln}\,(2-x)\cdot x\right]_1^{1'5}-\left[x\right]_1^{1'5}-2\left[\mathrm{Ln}\,(2-x)\right]_1^{1'5}=$$

$$= \text{Ln}\,(2-1'5)\cdot 1'5 - \text{Ln}\,(2-1)\cdot 1 - (1'5-1) - 2\big(\text{Ln}\,(2-1'5) - \text{Ln}\,(2-1)\big) =$$
$$= 1'5\,\text{Ln}\,(0'5) - 0 - (0'5) - 2\big(\text{Ln}\,(0'5) - 0\big) = -0'5\,\text{Ln}\,(0'5) - 0'5 =$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Obtengamos la matriz $AB + C$.

$$\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -3\\4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -5\\10 & 8\end{pmatrix}$$

Veamos si ésta matriz tiene inversa y si la tiene la calcularemos. Lo haremos mediante el método de Gauss que consiste en poner a la derecha de dicha matriz la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha será la matriz inversa de $AB + C$.

$\left(\begin{array}{cc|cc}-7 & -5 & 1 & 0\\10 & 8 & 0 & 1\end{array}\right)$ Diagonalicemos

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -7 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: $7 \cdot [2^{a}f.] + 10 \cdot [1^{a}f.]$

$\left(\begin{array}{cc|cc}-7 & -5 & 1 & 0\\0 & 6 & 10 & 7\end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 6 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: $6 \cdot [1^{a}f.] + 5 \cdot [2^{a}f.]$

$\left(\begin{array}{cc|cc}-42 & 0 & 56 & 35\\0 & 6 & 10 & 7\end{array}\right)$ Dividamos las filas 1ª por -42.

Dividamos la fila 2ª por 6.

$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{56}{42} & -\frac{35}{42}\\0 & 1 & \frac{10}{6} & \frac{7}{6}\end{array}\right)$ En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de $AB+C$, es decir:

$$(AB+C)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{56}{42} & -\frac{35}{42}\\ \frac{10}{6} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

(b) Calculemos los números x e y, si es posible, que cumplen $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-x-2y\\6x+6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x-2y=3x\\6x+6y=3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x-2y=0\\6x+3y\ \ =0\end{cases}$$

Expresemos el sistema homogéneo en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$\left(\begin{array}{cc|c}-4 & -2 & 0\\6 & 3 & 0\end{array}\right)$ Simplifiquemos la 1ª fila por 2.

Simplifiquemos la 2ª fila por 3.

$\left(\begin{array}{cc|c}-2 & -1 & 0\\2 & 1 & 0\end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -2 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: $[2^{a}f.] + [1^{a}f.]$

$\left(\begin{array}{cc|c}-2 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right)$ Hemos triangulado inferiormente y la 2ª ecuación es trivial, 0=0, la eliminamos. Nos queda un sistema de una ecuación y dos incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado, con infinitas

$\left(-2 \quad -1 \,\middle|\, 0\right)$ La incógnita que nos sobra, la y, la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria.

$\left(-2 \,\middle|\, y\right)$ La solución es: $-2x = y \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria por un parámetro, por ejemplo, por λ.

$$x = -\frac{1}{2}\lambda \quad ; \quad y = \lambda$$

Luego sí existen números x e y que verifican la ecuación matricial inicial, y además son infinitos, los valores están dados en función de un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Calculemos el punto A de corte de la recta r con el plano π, para ello, expresemos en primer lugar la ecuación de la recta r como intersección de dos planos.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{z-3}{-1} \\ \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+1 = z-3 \\ -y-2 = 3z-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-z = -4 \\ -y-3z = -7 \end{cases}$$

Resolvamos ahora el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\begin{matrix} r \equiv \begin{cases} -x-z = -4 \\ -y-3z = -7 \end{cases} \\ \pi \equiv x-y+z = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-z = -4 \\ -y-3z = -7 \\ x-y+z = -1 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$-3x = -10 \quad ; \quad -y = -5 \quad ; \quad 3z = 2$$

si terminamos de despejar: $x = \frac{10}{3}$; $y = 5$; $z = \frac{2}{3}$

Las coordenadas del punto A de intersección de r con π son: $A\left(\frac{10}{3}, 5, \frac{2}{3}\right)$

Calculemos ahora las coordenadas del punto C, que es la proyección de $B(2,1,2)$ sobre π.

Expresemos antes la ecuación del plano π en forma paramétrica.

$\pi \equiv x - y + z = -1$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(1 \quad -1 \quad 1 \,\middle|\, -1\right)$ El sistema está diagonalizado, se trata de un sistema de una ecuación y tres incógnitas, nos sobran dos, la y y la z, que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$\left(1 \mid -1+y-z\right)$ La solución del sistema es: $x = -1 + y - z$

Sustituyendo las incógnitas secundarias, y y z, por los parámetros, α y β, respectivamente, tendremos las ecuaciones paramétricas del plano π:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

El punto C por ser un punto de este plano π tendrá de coordenadas $C(-1+\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta)$.

El vector $\vec{BC}$ es perpendicular a los dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de dirección del plano, luego el producto escalar de cada uno de estos con aquel será cero.

El vector $\vec{BC}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{BC} = (-1+\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta) - (2,1,2) = (-3+\alpha-\beta,\ \alpha-1,\ \beta-2)$$

El producto escalar del vector $\vec{BC}$ con cada uno de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es cero:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{BC}\bullet\vec{u} = 0 \Rightarrow (-3+\alpha-\beta,\ \alpha-1,\ \beta-2)\bullet(1,1,0) = 0 \\ \vec{BC}\bullet\vec{v} = 0 \Rightarrow (-3+\alpha-\beta,\ \alpha-1,\ \beta-2)\bullet(-1,0,1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -3+\alpha-\beta+\alpha-1 = 0 \\ 3-\alpha+\beta+\beta-2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\alpha-\beta = 4 \\ -\alpha+2\beta = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$ Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot [2^a f.] + [1^a f.]$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $3 \cdot [1^a f.] + [2^a f.]$

$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$ La solución es: $6\alpha = 14$; $3\beta = 2$, es decir: $\alpha = \frac{7}{3}$; $\beta = \frac{2}{3}$

Sustituyamos α y β en el punto C:

$$C(-1+\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta) \Rightarrow C\left(-1+\frac{7}{3}-\frac{2}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right) \Rightarrow C\left(\frac{2}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

Obtengamos las coordenadas de los vectores $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ antes de calcular el área del triángulo ABC.

$$\vec{AC} = \left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{10}{3},5,\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3},-\frac{8}{3},0\right) \quad ; \quad \vec{BC} = \left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right) - (2,1,2) = \left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{AC}\times\vec{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{8}{3},-\frac{8}{3},0\right)\times\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)\right| =$$

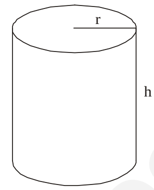
$$= \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{32}{9}, -\frac{32}{9}, -\frac{64}{9}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2 + \left(-\frac{32}{9}\right)^2 + \left(-\frac{64}{9}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2 + \left(\frac{32}{9}\right)^2 + \left(\frac{32}{9}\right)^2 \cdot 2^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2 (1+1+4)} = \frac{1}{2}\,\frac{32}{9}\sqrt{6} = \frac{16}{9}\sqrt{6} \quad u^2.$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construyamos la función volumen del cilindro $V = \pi r^2 h$.

Relacionemos *r* y *h* teniendo en cuenta la superficie total del cilindro.

$S_t = 200 \quad \Rightarrow \quad S_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad 200 = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \quad \Rightarrow$

$h = \dfrac{200 - 2\pi r^2}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{100 - \pi r^2}{\pi r}$

Sustituyamos esta expresión de *h* en la función volumen, tendremos:

$V = \pi r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad V = \pi r^2 \cdot \dfrac{100 - \pi r^2}{\pi r} \quad \Rightarrow \quad V = r\left(100 - \pi r^2\right) \quad \Rightarrow \quad V = 100r - \pi r^3$

En esta función polinómica, el radio ha de ser estrictamente mayor que cero, pero además el volumen nunca podría ser negativo por lo que se ha de verificar igualmente que $\pi r^3 < 100r$, que simplificando por *r*, ya que es positivo, tendremos $\pi r^2 < 100$. Despejemos *r*

$$r^2 < \frac{100}{\pi} \quad \Rightarrow \quad r < \frac{10}{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad r < \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$$

La función volumen es una función polinómica, cuyo dominio es, en consecuencia, el intervalo $\left(0,\ \dfrac{10\sqrt{\pi}}{\pi}\right)$. Al ser polinómica es continua y derivable en todo su dominio.

Calculemos los máximos relativos.

$V(r) = 100r - \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad V'(r) = 100 - 3\pi r^2$

Calculemos los valores que anulan a esta primera derivada

$100 - 3\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{\dfrac{100}{3\pi}} \quad \Rightarrow \quad r = \pm\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}} \quad \Rightarrow \quad r = \pm\dfrac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi}$

aunque sólo tendremos en cuenta el valor positivo de *r*.

Sustituyamos este valor de positivo *r* en la segunda derivada.

$V'(r) = 100 - 3\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad V''(r) = -6\pi r \quad \Rightarrow \quad V''(r) = -6\pi\dfrac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi} < 0$

Luego hay un máximo relativo en $r = \dfrac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi}$.

Comprobemos que también es máximo absoluto. Para ello estudiemos la monotonía de la función en su dominio.

Construimos los siguientes intervalos posibles de monotonía, teniendo en cuenta los puntos que anulan a la primera derivada y el dominio de la función volumen:

$$\left(0,\ \frac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi}\right) \text{ y } \left(\frac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi},\ \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}\right)$$

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 1 y 5, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$V'(1) = 100 - 3\pi \cdot 1^2 = 100 - 3\pi > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } \left(0,\ \dfrac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi}\right)$

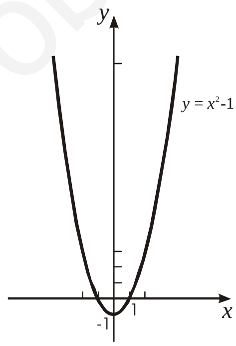
$$V'(5) = 100 - 3\pi \cdot 5^2 = 100 - 75\pi < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } \left(\frac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi}, \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi} \right)$$

Como ya dijimos que la función era continua y derivable en su dominio, resulta que el máximo relativo es también absoluto. Por tanto el radio y la altura que hacen el volumen máximos son:

$$r = \frac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{100 - \pi r^2}{\pi r} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{100 - \pi \left(\frac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi} \right)^2}{\pi \frac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi}} \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{100 - \pi \frac{100 \cdot 3\pi}{9\pi^2}}{\pi \frac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi}} = \frac{100 - \frac{100}{3}}{\frac{10\sqrt{3\pi}}{3}} = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{10\sqrt{3\pi}}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3\pi}} = \frac{20\sqrt{3\pi}}{3\pi}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



(a) La gráfica de la función $y = x^2 - 1$, es una parábola que podemos dibujar fácilmente a partir de la de x^2 desplazando ésta una unidad hacia abajo. Los puntos de corte con el eje de abscisas, serían:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1, 0) \\ (1, 0) \end{cases}$$

y con el eje de ordenadas el $(0, -1)$.

La gráfica se encuentra situada al lado.

Estudiemos más detenidamente la gráfica de la función racional $y = \dfrac{15}{1+x^2}$.

El dominio es todo $\mathbb{R}$ ya que no hay ningún valor que anule al denominador.

Si observamos la función se trata de una función par, es decir, simétrica respecto del eje de ordenadas, veámoslo:

$\forall x \in R \quad \Rightarrow \quad -x \in R$

$$f(x) = \frac{15}{1+x^2} \Rightarrow f(-x) = \frac{15}{1+(-x)^2} \Rightarrow f(-x) = \frac{15}{1+x^2} = f(x)$$

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $1+x^2=0$, pero no hay ningún valor que lo anule, luego no hay asíntota vertical.

Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{15}{1+x^2} = \left[\frac{15}{\infty} \right] = 0$$

luego hay una asíntota horizontal, $y = 0$, cuando x tiene a $\pm\infty$.

En las funciones racionales si existe asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal $y = 0$, cuando x tiene a $-\infty$.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{15}{1+1000^2} = 0.00001499... \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de esta función racional, para $x \to -\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

Por la simetría respecto al eje de ordenadas, ocurre lo mismo cuando $x \to +\infty$.

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, obtengamos la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{-15 \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-30x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

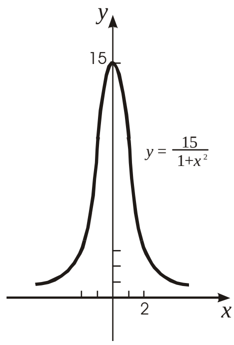
$$\frac{-30x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -30x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Sólo hay un valor que anule a la primera derivada, el x=0, y como el dominio de la función es $\mathbb{R}$, esto nos permite construir los siguientes intervalos de monotonía: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -1 y 1, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(-1) = \frac{-30 \cdot (-1)}{\left(1+(-1)^2\right)^2} = \frac{30}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (-\infty, 0)$$

$$f'(1) = \frac{-30 \cdot 1}{\left(1+1^2\right)^2} = \frac{-30}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (0, +\infty)$$



Teniendo en cuenta lo anterior y el hecho de ser una función racional continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$, podemos deducir que en el punto x=0, la función presenta un máximo relativo, el (0, 15). Donde la ordenada, 15, se obtiene sustituyendo la abscisa 0 en la función.

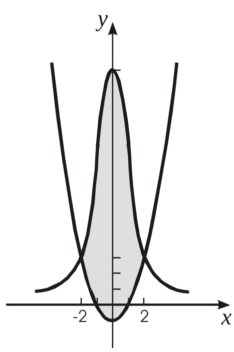
La gráfica se encuentra dibujada al lado.

Para encontrar el recinto limitado por ambas curvas, calculemos el punto donde ambas curvas se cortan.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{15}{1+x^2} \\ y = x^2 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{15}{1+x^2} = x^2 - 1 \Rightarrow \quad 15 = \left(x^2-1\right)\left(1+x^2\right) \Rightarrow$$

$$15 = x^4 - 1 \Rightarrow \quad x^4 = 16 \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt[4]{16} \Rightarrow \quad x = \pm 2 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (0, -2) \\ (0, 2) \end{array}\right.$$



El recinto limitado por ambas gráficas se encuentra sombreado al lado.

(b) Calculemos el área del recinto anterior, para ello construimos la función diferencia:

$$h(x)=\frac{15}{1+x^2}-\left(x^2-1\right)\ \Rightarrow\ h(x)=\frac{15}{1+x^2}-x^2+1$$

Obtengamos los puntos de corte de esta función con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=\dfrac{15}{1+x^2}-x^2+1 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\quad \frac{15}{1+x^2}-x^2+1=0\ \Rightarrow\ \frac{15-x^4+1}{1+x^2}=0\ \Rightarrow$$

$$15-x^4+1=0\ \Rightarrow\ x^4=16\ \Rightarrow\ x=\pm 2$$

Como podemos comprobar, en este caso, no era preciso su cálculo por cuanto estos valores coinciden lógicamente con los puntos de corte de ambas gráficas, calculados en el apartado anterior, y representados igualmente en el dibujo del recinto limitado por dichas gráficas.

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} h(x)\,dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{15}{1+x^2}-x^2+1\right)dx=\left[15\,arctan\,(x)-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=15\,arctan\,(2)-\frac{2^3}{3}+2-\left(15\,arctan\,(-2)-\frac{(-2)^3}{3}-2\right)=$$

$$=15\,arctan\,(2)-15\,arctan\,(-2)-\frac{8}{3}+2-\frac{8}{3}+2=15\,arctan\,(2)-15\,arctan\,(-2)-\frac{4}{3}=$$

$$=15\,arctan\,(2)+15\,arctan\,(2)-\frac{4}{3}=30\,arctan\,(2)-\frac{4}{3}\quad u^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=\ \ -4 \\ 3x+\lambda y+z=\lambda-1 \\ 2x+\lambda y=\ \ -2 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & \lambda & 1 & \lambda-1 \\ 2 & \lambda & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 & 4 & \lambda+11 \\ 0 & \lambda-2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Intercambiemos las columnas 2ª y 3ª entre sí.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & \lambda-3 & \lambda+11 \\ 0 & 2 & \lambda-2 & 6 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & \lambda-3 & \lambda+11 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33}=0\ \Rightarrow\ \lambda-1=0\ \Rightarrow\ \lambda=1\ \Rightarrow$ la última ecuación será: $0=1-1\ \Rightarrow\ 0=0$, que es una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres

incógnitas, por lo que el sistema será un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda - 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow$ la última ecuación sería una ecuación normal, es decir, no sería ni trivial ni absurda, tendríamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, por lo que el sistema sería un sistema compatible determinado.

(b) Resolvamos el sistema anterior para el caso de $\lambda = 1$. Según el apartado anterior para este valor el sistema era compatible indeterminado uniparamétrico y la última ecuación era trivial, por lo que la eliminamos, nos quedará el siguiente sistema una vez que sustituyamos este valor de λ por 1 en el resto del sistema.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & \lambda-3 & \lambda+11 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & 12 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la *y*, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4-y \\ 0 & 4 & 12+2y \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 4 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & -4-2y \\ 0 & 4 & 12+2y \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$4x = -4 - 2y \quad ; \quad 4z = 12 + 2y.$$

Terminemos de despejar las incógnitas.

$$x = -1 - \frac{1}{2}y \quad ; \quad z = 3 + \frac{1}{2}y$$

Sustituyamos la incógnita secundaria, la *y*, por un parámetro, por ejemplo, por α.

$$x = -1 - \frac{1}{2}\alpha \quad ; \quad y = \alpha \quad ; \quad z = 3 + \frac{1}{2}\alpha \qquad \alpha \in R$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos, en primer lugar, la ecuación de la recta *r* en forma paramétrica.

$$r \equiv x = y = z \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El punto de corte de la recta *r* con la *s* que queremos calcular, será de la forma: $H(\lambda, \lambda, \lambda)$

La recta *s* que queremos calcular al ser paralela al plano $\pi \equiv 3x + 2y - z = 4$, se verificará que el vector normal al plano, el $\vec{n_\pi} = (3, 2, -1)$, y el vector de dirección de la recta, el $\vec{AH}$, serán perpendiculares, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

$$\vec{AH} = (\lambda, \lambda, \lambda) - (1, 2, -1) = (\lambda - 1, \lambda - 2, \lambda + 1)$$

$$\vec{AH} \perp \vec{n_\pi} \Rightarrow \vec{AH} \bullet \vec{n_\pi} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1, \lambda - 2, \lambda + 1) \bullet (3, 2, -1) = 0 \Rightarrow$$

$$3\lambda - 3 + 2\lambda - 4 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\vec{AH} = (\lambda - 1, \lambda - 2, \lambda + 1) \Rightarrow \vec{AH} = (2-1, 2-2, 2+1) \Rightarrow \vec{AH} = (1, 0, 3)$$

La ecuación de la recta *s* que nos pide el ejercicio será: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 \\ z = -1 + 3\mu \end{cases}$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN JUNIO 2007

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Determina dos puntos reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

EJERCICIO 2. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3$$

(a) [1´25 PUNTOS] Esboza las gráficas de f y g calculando sus puntos de corte.

(b) [1´25 PUNTOS] Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g.

EJERCICIO 3. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

(a) [1 PUNTO] Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.

(b) [0´75 PUNTOS] Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

(c) [0´75 PUNTOS] Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$.

EJERCICIO 4. Considera los planos de ecuaciones $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$.

(a) [1 PUNTO] Determina la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 3)$ y no corta a ninguno de los dos planos dados.

(b) [1´5 PUNTOS] Determina los puntos que equidistan de $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 1, 0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{Ln}\left(1+x^2\right)$, halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 3. **(a)** [1 PUNTO] Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) [1´5 PUNTOS] Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{r} x+y = 1 \\ y+z = -2 \\ x+z = 3 \end{array}\right\}.$$

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(0, 1, 5)$.

(a) [1´25 PUNTOS] Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices $A(0, 3, -1)$, $B(0, 1, 5)$ y $C(x, 4, 3)$ tiene un ángulo recto en C.

(b) [1´25 PUNTOS] Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0, 1, 5) y (3, 4, 3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\left\{\begin{array}{r} x-y+z = 0 \\ 2x+y = 3 \end{array}\right.$

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Consideremos x e y como los números reales positivos que nos pide el problema.

Construyamos la función producto de sus cuadrados, $P = x^2 \cdot y^2$, función que queremos maximizar. Expresemos el número y en función del x teniendo en cuenta que la suma de ambos es 10: $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x \Rightarrow$ sustituyámoslo en la función producto anterior

$P = x^2 \cdot y^2 \Rightarrow P(x) = x^2 \cdot (10 - x)^2$

El dominio de esta función es el intervalo abierto (0, 10) ya que los números son reales y positivos y la suma de ambos debe ser 10, luego ninguno debe ser mayor o igual a 10.

Se trata de una función polinómica por lo que es continua y derivable en todo su dominio.

Calculemos el máximo absoluto de esta función, para ello obtengamos primeramente los máximos relativos que se encontrarán entre los que anulen a la función primera derivada.

$P(x) = x^2 \cdot (10 - x)^2 \Rightarrow P'(x) = 2x \cdot (10 - x)^2 + x^2 \cdot 2 \cdot (10 - x)(-1) \Rightarrow$

$P'(x) = 2x \cdot (100 + x^2 - 20x) - 20x^2 + 2x^3 \Rightarrow P'(x) = 200x + 2x^3 - 40x^2 - 20x^2 + 2x^3 \Rightarrow$

$P'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x \Rightarrow 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 \Rightarrow 4x\,(x^2 - 15x + 50) = 0 \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, sólo hemos obtenido un posible mínimo relativo, el $x = 5$. Comprobémoslo si lo es estudiando la monotonía de la función.

Los intervalos de monotonía son el (0, 5) y (5, 10).

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de estos intervalos, por ejemplo, el 1 y el 6, en la función primera derivada y según que el valor que obtengamos sea mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente respectivamente:

$P´(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$

$P´(1) = 4\cdot 1^3 - 60\cdot 1^2 + 200\cdot 1 = 144 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en (0, 5)

$P´(6) = 4\cdot 6^3 - 60\cdot 6^2 + 200\cdot 6 = -96 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en (5, 10)

A la vista de todo los resultados anteriores, el valor, $x = 5$, que anulaba a la función primera derivada no sólo es máximo relativo sino también máximo absoluto. Luego los dos números reales positivos que nos pide el problema son el $x=5$, y el $y=10-5=5$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Para dibujar la gráfica de la función $f(x)=x^3+3x^2$ procedemos de la siguiente manera:

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x^3 + 3x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x^2 = 0 & \Rightarrow & x = 0 \\ x + 3 = 0 & \Rightarrow & x = -3 \end{array}\right.$$

Al resolver el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$, obtenemos dos puntos, el (0, 0) y el (-3, 0).

- Punto de corte con el eje de ordenadas. Se resuelve el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = x^3 + 3x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0)$$

2.- Crecimiento y decrecimiento.

Obtengamos la primera derivada y calculemos los valores que la anulan.

$f´(x) = 3x^2 + 6x \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \;;\; x = -2$

Construyamos los posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento, $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, \infty)$. Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de estos intervalos, por ejemplo, -3, -1 y 1, en la función primera derivada y según que el valor que obtengamos sea mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente respectivamente:

$f´(x) = 3x^2 + 6x$

$f´(-3) = 3(-3)^2 + 6(-3) = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $(-\infty, -2)$

$f´(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $(-2, 0)$

$f´(1) = 3\cdot 1^2 + 6\cdot 1 = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $(0, \infty)$

3.- Máximos y mínimos relativos.

Podríamos hallarlos sustituyendo los valores que anulan a la primera derivada en la segunda derivada, y según nos salga mayor o menor que cero será mínimo o máximo. Pero teniendo en cuenta que la función es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica y el estudio sobre el crecimiento y decrecimiento anterior, deducimos que en el punto de abscisa $x=-2$ hay un máximo relativo y en el $x=0$ hay un mínimo relativo.

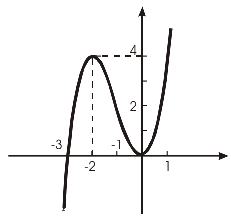
La ordenada del máximo es: $f(-2)=(-2)^3+3\cdot(-2)^2=4 \Rightarrow$

El máximo relativo será el punto $(-2, 4)$.

La ordenada del mínimo es: $f(0)=0^3+3\cdot 0^2=0 \Rightarrow$

El mínimo relativo será el punto $(0, 0)$.

4.- La gráfica aproximada de la función *f* es la situada al lado.



Representemos ahora la gráfica de la función $g(x)=x+3$.

Al tratarse de una función afín, su gráfica es una recta que no pasa por el origen. Los puntos de corte con los ejes coordenados serán:

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas.

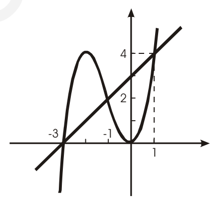
$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3 \quad \Rightarrow \quad (-3,\ 0)$$

Al resolver el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$, obtenemos el punto $(-3, 0)$.

- Punto de corte con el eje de ordenadas. Se resuelve el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 0+3 = 3 \quad \Rightarrow \quad (0, 3)$$

2.- La gráfica aproximada de la función *g* junto con la de la *f* es la situada al lado.



Calculemos, por último, los puntos de corte de ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x+3 \\ y = x^3+3x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^3+3x^2 = x+3 \quad \Rightarrow \quad x^3+3x^2-x-3=0 \quad \Rightarrow$$

Resolvamos la ecuación de tercer grado mediante Ruffini, probando primeramente con los divisores del término independiente, 1, -1, 3, -3.

	1	3	-1	-3
1		1	4	3
	1	4	3	0

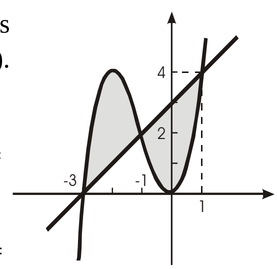
$$\Rightarrow \quad x^2+4x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\begin{cases}-1\\-3\end{cases}$$

Las ordenadas correspondientes a cada una de estas abscisas son:

$g(x)=x+3 \quad \Rightarrow \quad g(-3)=-3+3=0 \quad ; \quad g(-1)=-1+3=2 \quad ; \quad g(1)=1+3=4$

por tanto, los puntos de corte de ambas gráficas son el $(-3, 0)$, $(-1, 2)$ y el $(1, 4)$.

(b) Calculemos el área de cada uno de los recintos limitados por ambas funciones (zonas sombreadas en el dibujo adjunto). Obtengamos, en primer lugar, el del situado a la izquierda.



$$A_1 = \left| \int_{-3}^{-1} \left(x^3+3x^2-(x+3)\right) dx \right| = \left| \int_{-3}^{-1} \left(x^3+3x^2-x-3\right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x \right]_{-3}^{-1} \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x \right]_{-3}^{-1} \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{(-1)^4}{4} + (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} - 3(-1) \right) - \left(\frac{(-3)^4}{4} + (-3)^3 - \frac{(-3)^2}{2} - 3(-3) \right) \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right) - \left(\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9 \right) \right| = \left| \frac{7}{4} + \frac{9}{4} \right| = 4 \text{ u.}^2$$

Calculemos ahora el área del recinto situado a la derecha.

$$A_2 = \left| \int_{-1}^{1} \left(x^3 + 3x^2 - (x+3) \right) dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} \left(x^3 + 3x^2 - x - 3 \right) dx \right| =$$

$$= \left| \left| \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x \right|_{-1}^{1} \right| = \left| \left| \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right|_{-1}^{1} \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1^4}{4} + 1^3 - \frac{1^2}{2} - 3\cdot 1 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} - 3(-1) \right) \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right) \right| = \left| -\frac{9}{4} - \frac{7}{4} \right| = 4 \text{ u.}^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Determinemos la matriz *B*.

$$B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$$

(b) Tanto para saber para qué valores de λ la matriz *B* tiene inversa como para en el caso de tener que calcular dicha inversa (apartado c) lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz *B*, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de *B*, B^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] + (λ-1) · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda - 3 & \lambda - 1 & 2 \end{array} \right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero el a_{22} que puede serlo o no, veamos los diferentes casos que pueden presentarse, ya que si es cero la matriz *B* no tendría inversa y para los valores que lo hagan distinto de cero sí tendría inversa.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$ Para estos dos valores de λ, -3 y 1, la matriz B no tendría inversa.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 3 \Rightarrow$ Para todos los valores de λ distintos de -1 y 3 la matriz B tendría inversa.

(c) Calculemos la matriz inversa de B, B^{-1}, para el valor de $\lambda = 1$. Para ello, continuemos a partir de la última matriz de la página anterior sustituyendo el valor de λ por 1, tendremos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda - 3 & \lambda - 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1^2 - 2\cdot 1 - 3 & 1-1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right)$$ Dividamos la 1ª fila por -2. Dividamos la 2ª fila por -4.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de B, es decir:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) La recta que debemos determinar tiene como vector de dirección al vector $\vec{v} = (a, b, c)$, pero como dicha recta no corta a ninguno de los dos planos del ejercicio, deberá ser paralela a cada uno de ellos, lo que significa que el vector de dirección de la recta y el normal a cada uno de los planos deben ser perpendiculares entre sí, es decir, que su producto escalar es cero:

$x - y + z = 0 \Rightarrow \vec{n_1} = (1, -1, 1) \Rightarrow \vec{n_1} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n_1} \bullet \vec{v} = 0 \Rightarrow (1, -1, 1) \bullet (a, b, c) = 0$

$x + y - z = 2 \Rightarrow \vec{n_2} = (1, 1, -1) \Rightarrow \vec{n_2} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n_2} \bullet \vec{v} = 0 \Rightarrow (1, 1, -1) \bullet (a, b, c) = 0$

Efectuemos los productos escalares:

$$\left.\begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{array}\right\}$$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$ Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$ Es un sistema homogéneo compatible indeterminado uniparamétrico, la incógnita que nos sobra, la c, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -c \\ 0 & 2 & 2c \end{array}\right)$$ Simplifiquemos la 2ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -c \\ 0 & 1 & c \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado. La solución es:
$a = 0 \quad ; \quad b = c$

Sustituyamos la incógnita secundaria, la c, por un parámetro, por ejemplo, por t, la solución finalmente será: $a = 0 \quad ; \quad b = t \quad ; \quad c = t$, siendo t un número real cualquiera.

Para obtener un vector de dirección de la recta basta darle un valor a t, por ejemplo, 1:

$$\vec{v} = (a, b, c) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (0, 1, 1)$$

La ecuación de la recta cuyo vector de dirección es el recién calculado y además pasa por el punto $A(1, 2, 3)$, es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

(b) Expresemos la recta intersección de los dos planos que nos dan en forma paramétrica.

$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan. La solución será la ecuación en paramétricas.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$ Simplifiquemos la 2ª fila por 2.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ Es un sistema compatible indeterminado, la incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -z \\ 0 & 1 & 1+z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+z \end{array}\right)$ La solución del sistema es:
$x = 1 \quad ; \quad y = 1 + z$

Sustituyamos la incógnita secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, por μ; las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los dos planos son:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Elijamos un punto genérico $H(1, 1+\mu, \mu)$ de esta recta e impongamos la condición de que su distancia a los puntos A y B sea igual.

dist (A, H) = dist (B, H) $\Rightarrow$ $\left|\vec{AH}\right| = \left|\vec{BH}\right|$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AH} = (1, 1+\mu, \mu) - (1, 2, 3) = (0, \mu - 1, \mu - 3) \\ \vec{BH} = (1, 1+\mu, \mu) - (2, 1, 0) = (-1, \mu, \mu) \end{array}\right\}$$

$$\left|(0, \mu - 1, \mu - 3)\right| = \left|(-1, \mu, \mu)\right| \Rightarrow \sqrt{0^2 + (\mu - 1)^2 + (\mu - 3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + \mu^2 + \mu^2} \Rightarrow$$

$$(\mu - 1)^2 + (\mu - 3)^2 = (-1)^2 + \mu^2 + \mu^2 \Rightarrow \mu^2 + 1 - 2\mu + \mu^2 + 9 - 6\mu = 1 + \mu^2 + \mu^2 \Rightarrow$$

$$-8\mu = -9 \Rightarrow \mu = \frac{9}{8} \Rightarrow H(1, 1+\mu, \mu) = \left(1, 1+\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right) = \left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right)$$

obtenemos un sólo punto que satisface todas las condiciones del ejercicio.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Obtengamos las sucesivas derivadas de la función *f*.

$f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$; $f'(x)=6x^2+24x+a$; $f''(x)=12x+24$; $f'''(x)=12$

Al tratarse de una función polinómica el punto de inflexión se encuentra entre los valores que anulando a la función segunda derivada no anulen a la tercera:

$12x+24=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2 \quad ; \quad f'''(-2)=12\neq 0$

Hay un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-2$.

Para calcular la ordenada de este punto de inflexión tendremos en cuenta que la recta tangente, $y=2x+3$, y la gráfica de la función tienen a dicho punto como punto común, luego la ordenada de la recta tangente en el punto $x=-2$ coincidirá con la del punto de inflexión:

$y=2x+3 \quad \Rightarrow \quad y=2\cdot(-2)+3=-1 \quad \Rightarrow \quad f(-2)=-1$

Por otro lado sabemos que la pendiente de la recta tangente, que vale 2, coincide con la derivada de la función en el punto de abscisa $x=-2$, es decir:

$f'(-2)=2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=6x^2+24x+a \quad \Rightarrow \quad f'(-2)=6\cdot(-2)^2+24\cdot(-2)+a \quad \Rightarrow$

$2=24-48+a \quad \Rightarrow \quad a=26$

Teniendo en cuenta que las coordenadas del punto de inflexión eran $(-2,-1)$, y éste es un punto de la gráfica de la función *f*, tendremos:

$f(x)=2x^3+12x^2+ax+b \quad \Rightarrow \quad f(-2)=2\cdot(-2)^3+12\cdot(-2)^2+26\cdot(-2)+b \quad \Rightarrow$

$-1=-16+48-52+b \quad \Rightarrow \quad b=19$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Hallemos, en primer lugar, la primitiva de *f*.

$$\int \mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)\,dx$$

Calcularemos la integral mediante el método de integración por partes, para lo cual aplicamos la fórmula siguiente: $\int u\,dv = u\cdot v-\int v\,du$

$$u=\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) \qquad du=\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$dv=dx \qquad v=\int dx = x$$

$$\int \mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)\,dx=\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)\cdot x-\int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)\cdot x-\int\frac{2x^2}{1+x^2}\,dx= \quad [2]$$

La última integral es una integral racional impropia, por lo que efectuamos la división que se encuentra situada a la derecha, y continuamos a partir de [2].

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 & 1+x^2 \\ \hline -2x^2-2 & 2 \\ \hline \quad -2 & \end{array}$$

$$=x\cdot\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)-\int\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx=x\cdot\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)-2x+2\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=$$

$$=x\cdot\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)-2x+2\cdot\mathrm{arctg}(x)+C \quad [3]$$

Obtengamos ahora la primitiva de *f* cuya gráfica pase por el origen de coordenadas, para ello sustituyamos las coordenadas (0, 0) en [3].

$$F(x) = x \cdot \text{Ln}\left(1+x^2\right) - 2x + 2 \cdot \text{arctg}(x) + C \quad \Rightarrow \quad F(0) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$F(0) = 0 \cdot \text{Ln}\left(1+0^2\right) - 2 \cdot 0 + 2 \cdot \text{arctg}(0) + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \cdot \text{Ln}(1) - 0 + 2 \cdot \text{arctg}(0) + C \quad \Rightarrow$$

$$0 = 2 \cdot \text{arctg}(0) + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot \{0 + K\pi\} + C \quad \Rightarrow \quad C = -2K\pi \quad ; \quad K \in Z$$

$$F(x) = x \cdot \text{Ln}\left(1+x^2\right) - 2x + 2 \cdot \text{arctg}(x) - 2K\pi \quad ; \quad K \in Z$$

es decir, obtenemos no una primitiva sino toda una familia de primitivas cuyas gráficas pasan por el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para calcular la inversa de la matriz *A*, lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz *A*, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos ahora superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2.
Dividamos la 2ª fila por 2.
Dividamos la 2ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Escribamos el sistema que nos dan en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para resolver dicho sistema, usando la matriz A^{-1}, lo haremos multiplicando a la izquierda por la inversa de *A*, calculada en el apartado anterior.

$$A^{-1}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\;\Rightarrow\; I\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\qquad [1]$$

Donde hemos tenido en cuenta las siguientes propiedades sobre matrices:

* El producto de una matriz por su inversa es la matriz unidad, I.
* El producto de la matriz unidad por una matriz da como resultado esta matriz.

Continuando desde [1], tendremos:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}-1-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Es decir, la solución del sistema es $x=3$, $y=-2$, y $z=0$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para que el triángulo *ABC* sea rectángulo en *C*, se ha de verificar que los vectores $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ sean perpendiculares, lo que implica que el producto escalar de ambos ha de ser cero:

$$\vec{AC}\perp\vec{BC}\quad\Rightarrow\quad\vec{AC}\bullet\vec{BC}=0$$

$$\vec{AC}=(x,\ 4,\ 3)-(0,\ 3,\ -1)=(x,\ 1,\ 4)\quad;\quad\vec{BC}=(x,\ 4,\ 3)-(0,\ 1,\ 5)=(x,\ 3,\ -2)$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC}=0\Rightarrow(x,1,4)\bullet(x,3,-2)=0\Rightarrow x^2+3-8=0\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

(b) Para hallar la ecuación del plano, necesitamos un punto, que puede ser cualquiera de los dos que nos da el ejercicio, por ejemplo, el (0, 1, 5); y dos vectores de dirección, uno de los cuales, el $\vec{u}$, será el que determinan los dos puntos que nos dan, es decir:

$$\vec{u}=(3,\ 4,\ 3)-(0,\ 1,\ 5)=(3,\ 3,\ -2)$$

y el otro, el $\vec{v}$, será el de la recta o uno proporcional, por ser el plano que nos piden paralelo a dicha recta.

El vector de dirección de la recta lo obtendremos mediante el producto vectorial de los vectores perpendiculares a cada uno de los planos que definen a la recta.

El vector perpendicular a cada uno de los planos que determinan la ecuación de la recta, es:

$$\begin{cases}x-y+z=0\\2x+y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}\vec{n}_1=(1,\ -1,\ 1)\\\vec{n}_2=(2,\ 1,\ 0)\end{array}$$

El vector $\vec{v}$, será:

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(1,\ -1,\ 1)\times(2,\ 1,\ 0)=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\right)=(-1,\ 2,\ 3)$$

La ecuación del plano que nos piden, será:

$$\begin{cases}x=3\alpha-\beta\\y=1+3\alpha+2\beta\\z=5-2\alpha+3\beta\end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2007

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f: (0, +\infty) \to R$ la función definida por $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 PUNTO]. Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

EJERCICIO 2. Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x\,|x-2|$.

(a) [1 PUNTO]. Estudia la derivabilidad de f en $x = 2$.

(b) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de f.

(c) [1 PUNTO]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 3. Sean I la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A - I)^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 2.

(b) [1´25 PUNTOS]. Para $m = 2$, halla la matriz X tal que $AX - 2A^T = O$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A.

EJERCICIO 4. **(a)** [1´25 PUNTOS]. Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$ en tres partes iguales.

(b) [1´25 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 puntos]. Determina una función $f: R \to R$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo).

EJERCICIO 2. Sea $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \text{Ln}\,(x+1)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).

(a) [1 PUNTO]. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x = 1$.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}\right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

(b) [1 PUNTO]. Resuelve el sistema que se obtiene para $a = -2$.

EJERCICIO 4. Considera los vectores $\vec{u} = (1,\ 1,\ m)$, $\vec{v} = (0,\ m,\ -1)$, $\vec{w} = (1,\ 2m,\ 0)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

(b) [1´25 PUNTOS]. Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, debemos tener en cuenta que se trata del cociente de una función polinómica, $3x+1$, y la de la raíz cuadrada de x, ambas funciones son continuas y derivables en el dominio en el que están definidas, es decir, para los valores $x > 0$, siendo también la función cociente continua y derivable en dicho dominio.

Para determinar los intervalos de monotonía partimos de la primera derivada.

$$f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - (3x+1)\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\dfrac{6\sqrt{x}\sqrt{x} - (3x+1)}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$$

El valor o valores que anulan a esta primera derivada, serán: $3x - 1 = 0 \quad \to \quad x = 1/3$.

Al ser la función continua y derivable en (0, +∞), sólo tendremos en cuenta el valor que anula a la derivada para construir los intervalos de monotonía, que serán: (0, 1/3) y (1/3, +∞).

Probemos un valor intermedio, por ejemplo, 1/4 y 1, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3\cdot\frac{1}{4}-1}{2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=-1<0 \quad\Rightarrow\quad \text{Decreciente en } (0,\ 1/3)$$

$$f'(1)=\frac{3\cdot 1-1}{2\cdot 1\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1>0 \quad\Rightarrow\quad \text{Creciente en } (1/3,\ +\infty)$$

Estudiemos los extremos relativos o locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, es decir, en el 1/3, o también en los puntos de no continuidad o en los de no derivabilidad, pero, en este caso, al ser la función continua y derivable en su dominio, los extremos locales sólo los podremos encontrar en el punto 1/3.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora, podemos asegurar que hay un mínimo relativo o local en x = 1/3, ya que la gráfica de la función es continua y pasa de decrecer a crecer.

La ordenada de este extremo relativo se obtiene sustituyendo la abscisa del mismo en la función *f(x)*, es decir:

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3\cdot\frac{1}{3}+1}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{1}{3},\ 2\sqrt{3}\right) \text{ Mínimo relativo.}$$

(b) Obtengamos ahora el punto de inflexión de la gráfica de la función *f(x)*; se encontrará entre los valores que anulando a la segunda derivada no anulen a la tercera.

$$f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{3x-1}{2x\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; f''(x)=\frac{3\cdot 2x\sqrt{x}-(3x-1)\left(2\sqrt{x}+\frac{2x}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(2x\sqrt{x}\right)^2} \;\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{6x\sqrt{x}-(3x-1)\left(2\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}\right)}{4x^3}=\frac{6x\sqrt{x}-(3x-1)\,\frac{2x+x}{\sqrt{x}}}{4x^3}=\frac{6x\sqrt{x}-\frac{(3x-1)\cdot 3x}{\sqrt{x}}}{4x^3} \;\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{\frac{6x^2-9x^2+3x}{\sqrt{x}}}{4x^3} \;\Rightarrow\; f''(x)=\frac{-3x^2+3x}{4x^3\sqrt{x}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -3x^2+3x=0 \;\Rightarrow\; -3x(x-1)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Calculemos la tercera derivada y sustituyamos en ella el valor 1 para comprobar si se corresponde con un punto de inflexión, ya que el cero no pertenece al dominio.

$$f'''(x)=\frac{(-6x+3)\,4x^3\sqrt{x}-\left(-3x^2+3x\right)\left(12x^2+\frac{4x^3}{2\sqrt{x}}\right)}{16x^7}$$

$$f'''(1)=\frac{(-6\cdot 1+3)\,4\cdot 1^3\sqrt{1}-\left(-3\cdot 1^2+3\cdot 1\right)\left(12\cdot 1^2+\dfrac{4\cdot 1^3}{2\sqrt{1}}\right)}{16\cdot 1^7}=\frac{-12-0}{16}=-\frac{3}{4}\neq 0$$

Como la tercera derivada para el valor 1 es distinta de cero, tendremos para dicha abscisa, $x=1$, un punto de inflexión. La ordenada de este punto de inflexión se obtiene sustituyendo la abscisa del mismo en la función *f(x)*, es decir:

$$f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad f(1)=\frac{3\cdot 1+1}{\sqrt{1}} \quad\Rightarrow\quad f(1)=4 \quad\Rightarrow\quad (1,\ 4) \quad \text{Punto de inflexión.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Expresemos la función *f(x)* como una función a trozos:

$$f(x)=x\,|x-2| \quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases} x\left(-(x-2)\right) & \text{si} \quad x-2<0 \\ x(x-2) & \text{si} \quad x-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & \text{si} \quad x<2 \\ x^2-2x & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad en $x=2$ estudiemos previamente la continuidad.

- Para valores de $x<2$, la función $-x^2+2x$ es continua por ser una función polinómica, ya que las funciones polinómicas lo son en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $x>2$, la función x^2-2x es continua por ser una función polinómica, ya que las funciones polinómicas lo son en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x=2$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}}(-x^2+2x)=-4+4=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}}\left(x^2-2x\right)=4-4=0 \\ f(2)=4-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=0 \right.$$

luego la función *f(x)* es continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto podrá ser derivable en 2.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua.

- Para valores de $x<2$, la función $-x^2+2x$ es derivable por ser polinómica, siendo la derivada es $-2x+2$.

- Para valores de $x>2$, la función x^2-2x es derivable por ser polinómica, siendo la derivada $2x-2$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x)=\begin{cases} -2x+2 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

El problema está en el punto 2 que es donde nos piden que estudiemos la derivabilidad. Será derivable en el punto 2, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(2^-) = \lim_{\substack{x \to 2^- \\ x<2}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 2^- \\ x<2}} (-2x+2) = -4+2 = -2$$

$$f'(2^+) = \lim_{\substack{x \to 2^+ \\ x>2}} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 2x) = 4-2 = 2$$

podemos observar que: $-1 \neq 2 \quad \Rightarrow \quad f'(2^-) \neq f'(2^+)$, es decir, que las derivadas laterales no coinciden, por tanto la función no será derivable en el punto 2. En definitiva, la función derivada de f será, finalmente:

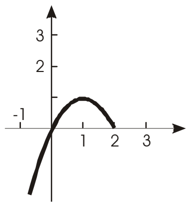
$$f'(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

(b) Representemos primeramente el trozo de función, $y = -x^2+2x$, para valores de $x<2$. Se trata de una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x=0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y=0 \quad \Rightarrow \quad -x^2+2x \quad \Rightarrow \quad x(-x+2)=0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad (0,0) \\ -x+2=0 & \Rightarrow \quad x=2 \quad \Rightarrow \quad (2,0) \end{cases}$$



3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -b/(2a) = -2/(2\cdot(-1)) = 1 \quad \Rightarrow$

$y = -1^2+2\cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad V(1, 1)$

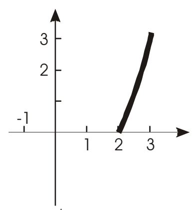
La gráfica de este trozo es la situada al lado.

Representemos ahora el trozo de función, $y=x^2-2x$, para valores de $x>2$, que es otra función cuadrática, cuya gráfica es otra función cuadrática.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x=0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x \quad \Rightarrow \quad x(x-2)=0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad (0,0) \\ x-2=0 & \Rightarrow \quad x=2 \quad \Rightarrow \quad (2,0) \end{cases}$$



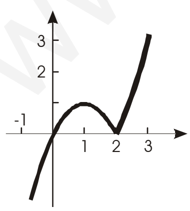
3.- Coordenadas del vértice V:

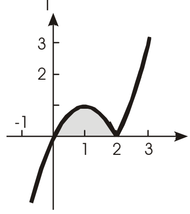
$x = -b/(2a) = -(-2)/(2\cdot 1) = 1 \quad \Rightarrow$

$y = 1^2 - 2\cdot 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad V(1, 1)$

La gráfica de este segundo trozo es la situada a la derecha.

La gráfica pedida es la representada a la izquierda.





(c) El recinto cuya área nos piden es el sombreado y se encuentra situado a la derecha.

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 \left(-x^2+2x\right)dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \right| =$$

$$= -\frac{2^3}{3} + 2\cdot\frac{2^2}{2} - \left(-\frac{0^3}{3} + 2\cdot\frac{0^2}{2} \right) = \frac{4}{3} \ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Encontremos el valor o los valores de m que cumplen que $(A - I)^2 = O$.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; m = 0$$

(b) Hallemos la matriz X, para $m = 2$, de forma que se verifique $AX - 2A^T = O$.

Para ello debemos comprobar primeramente si la matriz A tiene matriz inversa, y si la tiene calcularla. Lo haremos mediante el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de la matriz A la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 2ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que al no salirnos ninguna fila de ceros, la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

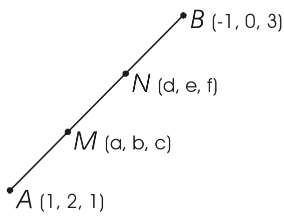
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz X.

$AX - 2A^T = O$	sumemos la matriz opuesta a $-2A^T$
$AX - 2A^T + 2A^T = O + 2A^T$	usemos la propiedad de elemento neutro respecto de la suma
$AX + O = 2A^T \;\Rightarrow\; AX = 2A^T$	multipliquemos a la izquierda por la matriz inversa de A, A^{-1}.
$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot 2A^T$	usemos la propiedad asociativa y la pseudoasociativa.
$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = 2\,(A^{-1} \cdot A^T)$	usemos la propiedad de la matriz inversa
$I \cdot X = 2\,(A^{-1} \cdot A^T)$	usemos la propiedad del elemento unidad (matriz identidad)
$X = 2\,(A^{-1} \cdot A^T)$	calculemos esta matriz X.

$$X = 2(A^{-1} \cdot A^T) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Calculemos las coordenadas de los puntos M y N que dividen al segmento AB en tres partes iguales. Si observamos el dibujo, se verificará: $2\,\vec{AM} = \vec{MB} \quad \Rightarrow$

$$2\left[(a,b,c)-(1,2,1)\right]=(-1,0,3)-(a,b,c)\ \Rightarrow\ 2(a-1,\ b-2,\ c-1)=(-1-a,\ -b,\ 3-c)\ \Rightarrow$$

$$(2a-2,2b-4,2c-2)=(-1-a,-b,3-c)\Rightarrow\begin{cases}2a-2=-1-a\ \Rightarrow\ a=\dfrac{1}{3}\\ 2b-4=-b\quad\ \Rightarrow\ b=\dfrac{4}{3}\\ 2c-2=3-c\quad \Rightarrow\ c=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow\ M\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$$

De igual manera se verificará que $\vec{AN}=2\,\vec{NB}$

$$(d,e,f)-(1,2,1)=2\left[(-1,0,3)-(d,e,f)\right]\Rightarrow(d-1,e-2,\ f-1)=2(-1-d,-e,3-f)\Rightarrow$$

$$(d-1,e-2,\ f-1)=(-2-2d,-2e,6-2f)\Rightarrow\begin{cases}d-1=-2-2d\ \Rightarrow\ a=\dfrac{-1}{3}\\ e-2=-2e\qquad \Rightarrow\ e=\dfrac{2}{3}\\ f-1=6-2f\quad\ \Rightarrow\ f=\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow\ N\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$$

(b) Calculemos las coordenadas del punto medio, *P*, del segmento *AB*. Se verificará que:

$$\vec{AP}=\vec{PB}$$

$$(p,q,r)-(1,2,1)=(-1,0,3)-(p,q,r)$$

$$(p-1,q-2,r-1)=(-1-p,-q,3-r)\Rightarrow\begin{cases}p-1=-1-p\ \Rightarrow\ p=0\\ q-2=-q\qquad \Rightarrow\ q=1\\ r-1=3-r\quad\ \Rightarrow\ r=2\end{cases}\Rightarrow\ P(0,1,2)$$

La ecuación del plano perpendicular al segmento *AB* y que pasa por su punto medio, *P*, será la ecuación del plano que pasa por el punto *P* de coordenadas (0, 1, 2) y cuyo vector normal coincidirá con el vector $\vec{AB}$.

$$\vec{AB}=(-1,0,3)-(1,2,1)=(-2,-2,2)$$

La ecuación del plano en forma general será:

$$Ax+By+Cz+D=0\quad\Rightarrow\quad -2x-2y+2z+D=0$$

Impongamos la condición a este plano que pase por el punto P:

$$-2\cdot0-2\cdot1+2\cdot2+D=0\quad\Rightarrow\quad D=-2$$

La ecuación del plano pedido es finalmente:

$$-2x-2y+2z-2=0\quad\Rightarrow\quad x+y-z+1=0$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la función *f* es derivable en $\mathbb{R}$ también será continua en $\mathbb{R}$, ya que la derivabilidad implica continuidad.

La función *f* la obtendremos, en principio, mediante la integración de su función derivada:

$$f'(x) = x^2 + x - 6 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int \left(x^2 + x - 6\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C$$

Para calcular el valor de C tendremos en cuenta que al ser la función continua y derivable en $\mathbb{R}$, los extremos relativos se encontrarán entre los valores que anulan a la primera derivada, y para distinguirlos sustituiremos estos valores que anulan a la primera derivada en la segunda derivada y según obtengamos un valor mayor o menor que cero, el extremo relativo será respectivamente mínimo o máximo.

$$f'(x) = x^2 + x - 6 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$f''(x) = 2x + 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(2) = 2\cdot 2 + 1 = 5 > 0 & \Rightarrow \text{ Mínimo en } x = 2 \\ f''(-3) = 2\cdot(-3) + 1 = -5 < 0 & \Rightarrow \text{ Máximo en } x = -3 \end{cases}$$

Impongamos ahora la condición que nos da el problema, de que valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo), es decir, que $f(-3) = 3\cdot f(2) \;\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C \;\Rightarrow\; \frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 6(-3) + C = 3\left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 6\cdot 2 + C\right) \;\Rightarrow$$

$$\frac{-27}{3} + \frac{9}{2} + 18 + C = 3\left(\frac{8}{3} + 2 - 12 + C\right) \;\Rightarrow\; 9 + \frac{9}{2} + C = 3\left(\frac{8}{3} - 10 + C\right) \;\Rightarrow$$

$$\frac{27}{2} + C = 3\left(\frac{-22}{3} + C\right) \;\Rightarrow\; \frac{27}{2} + C = -22 + 3C \;\Rightarrow\; \frac{27}{2} + 22 = 2C \;\Rightarrow\; C = \frac{71}{4}$$

La función f será:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{71}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$, es.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(0) = f'(0)\,(x - 0) \quad \Rightarrow$$

La derivada de la función en el punto 0, $f'(0)$, es:

$$f(x) = \text{Ln}\,(x+1) \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{x+1} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

y el valor de la función en dicho punto será:

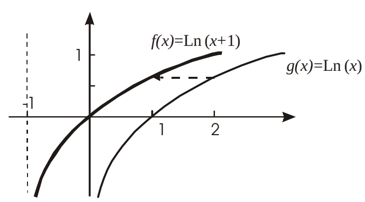
$$f(x) = \text{Ln}\,(x+1) \;\Rightarrow\; f'(x) = \text{Ln}\,(0+1) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$$

La ecuación de la recta tangente será:

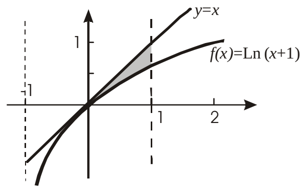
$$y - f(0) = f'(0)\,(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = 1\cdot(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = x$$

(b) Representemos la función $f(x) = \text{Ln}\,(x+1)$. Para ello tendremos en cuenta que coincide con la función elemental, $g(x) = \text{Ln}\,(x)$, desplazando ésta horizontalmente una unidad a la izquierda.

La gráfica de la función tangente, es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



El recinto cuya área nos pide el problema es el que se encuentra sombreado al lado.



$$\text{Área} = \left| \int_0^1 \left(x - \text{Ln}(x+1)\right) dx \right| = \qquad [1]$$

Calcularemos primeramente una primitiva de la integral indefinida.

$$\int \left(x - \text{Ln}(x+1)\right) dx = \frac{x^2}{2} - \int \text{Ln}(x+1)\ dx = \qquad [2]$$

La última integral es una integral indefinida, la haremos por partes.

$$u = \text{Ln}(x+1) \quad ; \quad du = \frac{1}{x+1}\, dx$$
$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

$$\int \text{Ln}(x+1)\ dx = x \cdot \text{Ln}(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\, dx = \qquad [3]$$

La última integral es una integral racional impropia, efectuemos la división.

x	$x+1$
$-x-1$	1
-1	

Continuando desde [3], tendremos:

$$[3] \quad = x \cdot \text{Ln}(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x \cdot \text{Ln}(x+1) - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$
$$= x \cdot \text{Ln}(x+1) - x + \text{Ln}(x+1)$$

Sustituyendo esta última expresión en [2], tendremos:

$$[2] \quad = \frac{x^2}{2} - \left(x \cdot \text{Ln}(x+1) - x + \text{Ln}(x+1)\right) = \frac{x^2}{2} - x \cdot \text{Ln}(x+1) + x - \text{Ln}(x+1)$$

Sustituyendo esta expresión en [1], tendremos:

$$[1] \quad \text{Área} = \left| \int_0^1 \left(x - \text{Ln}(x+1)\right) dx \right| = \left[\frac{x^2}{2} - x \cdot \text{Ln}(x+1) + x - \text{Ln}(x+1)\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1^2}{2} - 1 \cdot \text{Ln}(1+1) + 1 - \text{Ln}(1+1) - \left(\frac{0^2}{2} - 0 \cdot \text{Ln}(0+1) + 0 - \text{Ln}(0+1)\right) =$$
$$= \frac{1}{2} - \text{Ln}(2) + 1 - \text{Ln}(2) - 0 = \frac{3}{2} - 2\text{Ln}(2) \quad \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro a; por último lo resolveremos para el valor que lo haga compatible indeterminado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $a \cdot$ [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -a-1 & 0 & -1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a^2-2a \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & a-1 & a^2+a-5 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a^2-2a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot$ [3ªf.] + $(1 - a) \cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & a-1 & a^2+a-5 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & -a^3-2a^2+2a+3 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

** Si $a = 1 \quad \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, $0 = 2$, que es absurda. El sistema es incompatible, no tiene solución.

** Si $a = -1 \quad \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, $0 = 0$, que es trivial, la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, un sistema con infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 1$ y $a \neq -1 \quad \Rightarrow$ La tercera ecuación es una ecuación normal, tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible determinado.

Resolvamos el sistema para $a = -1$, que es cuando es compatible indeterminado. Para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que hemos obtenido anteriormente el valor de a por -1, y eliminemos la última ecuación directamente ya porque es una ecuación trivial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & a-1 & a^2+a-5 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & -a^3-2a^2+2a+3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Nos sobra una incógnita la z que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-z \\ 0 & -2 & -5+2z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -5+2z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $2x = -3 \quad ; \quad -2y = -5 + 2z$

Terminemos de despejar las incógnitas:

$$x = -\frac{3}{2} \quad ; \quad y = \frac{5}{2} - z$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, por t, la solución del sistema compatible indeterminado, finalmente, será:

$$x = -\frac{3}{2} \quad ; \quad y = \frac{5}{2} - t \quad ; \quad z = t$$

(b) Resolvamos el sistema para $a = -2$, para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que habíamos obtenido inicialmente en el apartado anterior el valor de a por -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & a-1 & a^2+a-5 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & -a^3-2a^2+2a+3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: $3 \cdot$ [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] + 3 \cdot [3^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$ El sistema está diagonalizado.
La solución es:

$$6x = -8 \quad ; \quad -2y = -2 \quad ; \quad -3z = -1$$

Terminemos de despejar las incógnitas:

$$x = -\frac{4}{3} \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad z = \frac{1}{3}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para determinar el valor de *m* de forma que los tres vectores sean linealmente dependientes, lo haremos mediante el cálculo del determinante formado por las coordenadas de dichos vectores y le impondremos la condición de que el determinante tiene que ser cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - \left(m^2 - 2m + 0\right) = -m^2 + 2m - 1 \Rightarrow$$

$$-m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 0}{-2} = 1$$

luego el valor de *m* que hace que los tres vectores sean linealmente dependientes es el 1.

(b) Expresemos el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los otros dos vectores.

$$\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} \Rightarrow (1, 2, 0) = \alpha\,(1, 1, 1) + \beta\,(0, 1, -1) \Rightarrow (1, 2, 0) = (\alpha, \alpha, \alpha) + (0, \beta, -\beta)$$

$$(1, 2, 0) = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha - \beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $[2^a f.] - [1^a f.]$
Sustituyamos la 3ª fila por: $[3^a f.] - [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $[3^a f.] + [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ El sistema está triangulado inferiormente, la última ecuación es trivial, la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, un sistema compatible determinado; pero es que además se encuentra diagonalizado, por lo que la solución es:

$$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = 1$$

Expresemos, finalmente, el vector $\vec{w}$ como combinación de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} \Rightarrow \vec{w} = 1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} \Rightarrow (1, 2, 0) = 1 \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (0, 1, -1) \Rightarrow$$

$$(1, 2, 0) = (1, 1, 1) + (0, 1, -1)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 56 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f:(0,+\infty)\to\mathrm{R}$ la función definida por $f(x)=x^2\,\mathrm{Ln}\,(x)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 PUNTO]. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\sqrt{e}$.

EJERCICIO 2. Considera las funciones $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ y $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ definidas por

$$f(x)=e^{x-1} \quad \text{y} \quad g(x)=e^{1-x}$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Esboza las gráficas de f y g y determina su punto de corte.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y de g.

EJERCICIO 3. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

(b) [1´75 PUNTOS]. Para $\alpha=1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial $AX=B$.

EJERCICIO 4. Sea r la recta definida por $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-k}{4}=\dfrac{z}{5}$ y s la recta definida por $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

(b) [1´25 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por **centímetro cuadrado**, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 **metro**. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

EJERCICIO 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(x-3)^2$.

(a) [1 PUNTO]. Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

(b) [0´5 PUNTOS]. Haz un esbozo de la gráfica de *f*.

(c) [1 PUNTO]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 0 \\ 2x+\lambda y+z &= 2 \\ x+y+\lambda z &= \lambda-1 \end{array}\right\}.$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.

(b) [1 PUNTO]. Resuelve el sistema para $\lambda=1$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x+2y+3z-1=0$ que corta perpendicularmente a la recta definida por $\left\{\begin{array}{l} x=2z+4 \\ y=2z+3 \end{array}\right.$ en el punto (2, 1, -1).

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, debemos tener en cuenta que se trata del producto de una función polinómica, x^2, que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y de la función elemental, logaritmo neperiano de x, que es continua y derivable para todos los valores de $x > 0$; por tanto, la función producto es continua y derivable para estos últimos valores que son además donde está definida.

Para estudiar la monotonía partimos de la primera derivada.

$$f(x) = x^2 \operatorname{Ln}(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \operatorname{Ln}(x) + x^2 \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \operatorname{Ln}(x) + \frac{x^2}{x}$$

Los valores que anulan a esta primera derivada, serán:

$$2x \operatorname{Ln}(x) + \frac{x^2}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 \operatorname{Ln}(x) + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(2 \operatorname{Ln}(x) + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ 2 \operatorname{Ln}(x) + 1 = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \operatorname{Ln}(x) = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = e^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right.$$

Como es una función continua y derivable en (0,+∞), sólo tendremos en cuenta los valores que anulan a la primera derivada para construir los intervalos de monotonía, que serán: $\left(0\,,e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(e^{-\frac{1}{2}},\ +\infty\right)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, e^{-1} y 1, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$f'\left(e^{-1}\right) = 2e^{-1}\ \mathrm{Ln}\left(e^{-1}\right) + \frac{\left(e^{-1}\right)^2}{e^{-1}} = -2e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1} < 0 \Rightarrow \text{ Decreciente en } \left(0,\, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f'(1) = 2\cdot 1\cdot \mathrm{Ln}(1) + \frac{1^2}{1} = 0 + 1 = 1 > 0 \qquad \Rightarrow \text{ Creciente en} \left(e^{-\frac{1}{2}},\ +\infty\right)$$

Estudiemos los extremos locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, es decir, en el 0 y en el $e^{-\frac{1}{2}}$, o también en los puntos de no continuidad o en los de no derivabilidad, pero en este caso al ser la función continua y derivable en (0, +∞), los extremos locales sólo los podremos encontrar en el punto $e^{-\frac{1}{2}}$.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora, podemos asegurar que hay un mínimo relativo o local en $x = e^{-\frac{1}{2}}$, ya que la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer.

La ordenada de este extremo relativo se obtiene sustituyendo la abscisa del mismo en la función *f(x)*, es decir:

$$f(x) = x^2\,\mathrm{Ln}(x) \ \Rightarrow\ f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \mathrm{Ln}\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \ \Rightarrow\ f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{-1}}{2}$$

luego hay un mínimo relativo en $\left(e^{-\frac{1}{2}},\ -\frac{e^{-1}}{2}\right)$.

(b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto de abscisa $x = \sqrt{e}$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \ \Rightarrow\ y - f(\sqrt{e}) = f'(\sqrt{e})\,(x - \sqrt{e})$$

Calculemos $f(\sqrt{e})$ y $f'(\sqrt{e})$.

$$f(x) = x^2\,\mathrm{Ln}(x) \ \Rightarrow\ f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2\,\mathrm{Ln}(\sqrt{e}) = e\,\mathrm{Ln}\left(e^{\frac{1}{2}}\right) \ \Rightarrow\ f(\sqrt{e}) = e\cdot\frac{1}{2} = \frac{e}{2}$$

$$f'(x) = 2x\ \mathrm{Ln}(x) + x \ \Rightarrow\ f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\ \mathrm{Ln}(\sqrt{e}) + \sqrt{e} \ \Rightarrow$$

$$f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\ \frac{1}{2} + \sqrt{e} \ \Rightarrow\ f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}$$

La ecuación de la recta tangente será:

$$y - \frac{e}{2} = 2\sqrt{e}\,(x - \sqrt{e}) \ \Rightarrow\ y - \frac{e}{2} = 2\sqrt{e}\ x - 2\sqrt{e}\,\sqrt{e} \ \Rightarrow$$

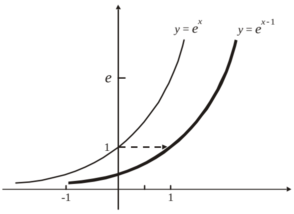
$$y = 2\sqrt{e}\ x - 2e + \frac{e}{2} \ \Rightarrow\ y = 2\sqrt{e}\ x - \frac{3e}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) La gráfica de la función $f(x) = e^{x-1}$ se obtiene desplazando la gráfica de la función elemental $h(x) = e^x$ una unidad a la derecha, ya que si componemos ésta con la *p(x)*=*x* - 1 de la forma:

$$(h \circ p)(x) = h(p(x)) = h(x-1) = e^{x-1}$$

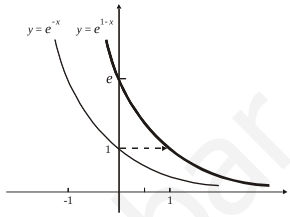
obtenemos la $f(x)$. La gráfica de ésta función está dibujada a la derecha.



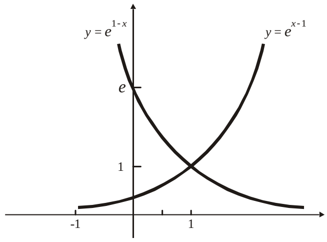
La gráfica de la función $g(x) = e^{1-x}$ se obtiene desplazando la gráfica de la función elemental $q(x) = e^{-x}$ una unidad a la derecha, ya que si componemos ésta con la $p(x) = x - 1$ de la forma:

$$(q \circ p)(x) = q(p(x)) = q(x-1) = e^{-(x-1)} = e^{1-x}$$

obtenemos la $g(x)$. La gráfica de ésta función está representada a la derecha.



Las dos gráficas que hemos de dibujar se encuentran situadas a la izquierda.

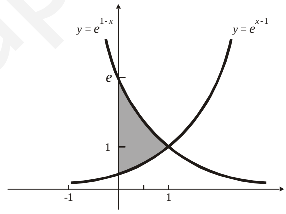


Calculemos el punto de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y = e^{x-1} \\ y = e^{1-x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad e^{x-1} = e^{1-x} \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 1 - x \quad \Rightarrow$$

$$2x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = e^{1-1} = e^{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad (1,\ 1)$$

(b) El recinto cuya área nos piden es el que se encuentra sombreado y situado al lado. Por lo que tendremos que calcular la siguiente integral definida:



$$\text{Área} = \left| \int_0^1 \left(e^{-x+1} - e^{x-1}\right) dx \right| = \left| \int_0^1 e^{-x+1}\, dx - \int_0^1 e^{x-1}\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[-e^{-x+1} - e^{x-1} \right]_0^1 \right| = \left| -e^{-1+1} - e^{1-1} - \left(-e^{-0+1} - e^{0-1}\right) \right| = \left| -1 - 1 - \left(-e - e^{-1}\right) \right| =$$

$$= \left| e + e^{-1} - 2 \right| = e + e^{-1} - 2 \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para determinar los valores de α para los que la matriz A tiene inversa, lo haremos mediante el método de Gauss, ya que tendremos en cuenta el apartado b) en el que se nos pide la matriz inversa para un determinado valor de α. Dicho método consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. En este apartado sólo nos interesa que al triangular inferiormente no aparezca ninguna fila nula para que la matriz A pueda tener inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 2ª.}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot [2^a f.] - \alpha \cdot [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2-3\alpha & 2 & -\alpha \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo o no, veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 2 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2/3$. Para este valor de α la matriz A no tiene inversa.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 2 - 3\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 2/3$. Para todos estos valores de α la matriz A tiene inversa.

(b) Sustituyamos el valor de α por 1 en la última matriz del apartado anterior para poder así terminar de calcular la matriz inversa de A para este valor de α.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2-3\alpha & 2 & -\alpha \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2-3\cdot 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $[1^a f.] + 3 \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 2.
Multipliquemos la 2ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora la ecuación matricial $AX = B$.

Como la matriz A tiene inversa podemos multiplicar a la izquierda por la matriz inversa de A, por A^{-1}.

$AX = B \Rightarrow A\cdot(A^{-1}X) = A^{-1}\cdot B$ por la propiedad asociativa:

$(A\cdot A^{-1})X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow$ por la propiedad de las matrices inversas

$I\,X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow$ por la propiedad de matriz unidad

$X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow$ terminemos de calcular la matriz X.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos la ecuación de cada una de las rectas en forma de intersección de dos planos.

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{z}{5} \\ \dfrac{y-k}{4} = \dfrac{z}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x - 10 = 3z \\ 5y - 5k = 4z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x - 3z = 10 \\ 5y - 4z = 5k \end{array} \right.$$

$$s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4 = -y+1 \\ 3y-3 = 2z-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y = -3 \\ 3y-2z = -3 \end{cases}$$

Estudiemos la posición relativa de ambas rectas según los valores de k, para ello discutiremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

$$\begin{cases} 2x+y = -3 \\ 3y-2z = -3 \\ 5x-3z = 10 \\ 5y-4z = 5k \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -4 & 5k \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - 5 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & 35 \\ 0 & 5 & -4 & 5k \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] + 5 · [2ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: 3 · [4ªf.] - 5 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -28 & 90 \\ 0 & 0 & -2 & 15k+15 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -28 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: -14 · [4ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -28 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & -210k-120 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, y para que las rectas se corten en un punto, el sistema debe ser un sistema compatible determinado; tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas donde todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, por lo que la última ecuación, la cuarta, debe ser una ecuación trivial, es decir, se ha de verificar que:

$$0 = -210\,k - 120 \quad \Rightarrow \quad k = -120/210 \quad \Rightarrow \quad k = -4/7$$

para este valor de *k* las rectas se cortan en un punto.

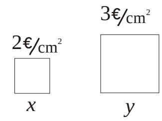
(b) Para calcular la ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s*, elegiremos un punto cualquiera de cualquiera de las dos rectas, por ejemplo, el (-2, 1, 3) de la recta *s*; y el vector de dirección de cada una de ellas que pasarán a ser los vectores de dirección del plano, es decir: el vector de dirección de la recta *r*, $\vec{v}_r(3,4,5)$, y el de la recta *s*, $\vec{u}_s(-1,2,3)$. Estos datos se obtienen de la simple lectura de las ecuaciones en forma continua de ambas rectas.

La ecuación del plano, finalmente será:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\alpha - \beta \\ y = 1 + 4\alpha + 2\beta \\ z = 3 + 5\alpha + 3\beta \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



(a) Llamemos x al lado de la chapa cuadrada de coste 2 euros por centímetro cuadrado e y al de la chapa de coste 3 euros por centímetro cuadrado. Expresaremos todo en centímetros.

Construyamos la función coste, teniendo en cuenta el área de cada chapa y lo que cuesta cada centímetro cuadrado de cada una de ellas:

$$C = 2x^2 + 3y^2$$

La relación entre los lados de las chapas es, según el problema:

$$4x + 4y = 1 \text{ metro} \;\Rightarrow\; 4x + 4y = 100 \text{ centímetros} \;\Rightarrow\; y = \frac{100 - 4x}{4} \;\Rightarrow\; y = 25 - x$$

Sustituyamos este valor en la función coste.

$$C = 2x^2 + 3y^2 \;\Rightarrow\; C(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2 \;\Rightarrow$$
$$C(x) = 2x^2 + 3\left(625 + x^2 - 50x\right) \;\Rightarrow\; C(x) = 2x^2 + 1875 + 3x^2 - 150x \;\Rightarrow$$
$$C(x) = 5x^2 - 150x + 1875$$

Se trata de una función cuadrática, continua y derivable en todo su dominio, que es el intervalo abierto (0, 25).

Calculemos el mínimo relativo o local, ya que de tener sólo tendría uno.

$$C'(x) = 10x - 150 \;\Rightarrow\; 10x - x - 150 = 0 \;\Rightarrow\; x = 15$$
$$C''(x) = 10 \;\Rightarrow\; C''(15) = 10 > 0 \;\Rightarrow$$ luego hay un mínimo relativo en $x = 15$.

Justifiquemos que este mínimo relativo es absoluto, se puede hacer estudiando la monotonía pero en este caso no es necesario ya que es evidente que al ser la gráfica una parábola y su vértice un mínimo relativo, entonces la función pasa de decrecer a crecer, por lo que ese mínimo relativo es absoluto.

Los lados de los cuadrados deben ser el de una, 15 cm., el de la correspondiente a la chapa de 2 euros por centímetro cuadrado; y el de la otra, $y = 25 - x \;\Rightarrow\; y = 25 - 15 = 10$ cm.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, debemos tener en cuenta que se trata de una función polinómica que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Para estudiar la monotonía partimos de la primera derivada.

$$f(x) = x(x-3)^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = (x-3)^2 + x \cdot 2(x-3) \;\Rightarrow$$
$$f'(x) = (x-3)\,(x - 3 + 2x) \;\Rightarrow\; f'(x) = (x-3)\,(3x-3) \;\Rightarrow$$
$$f'(x) = 3(x-3)\,(x-1)$$

Los valores que anulan a esta primera derivada, serán:

$$3(x-3)\,(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x - 3 = 0 & \Rightarrow \quad x = 3 \\ x - 1 = 0 & \Rightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

Como es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$, sólo tendremos en cuenta los valores que anulan a la primera derivada para construir los intervalos de monotonía, que serán: $(-\infty, 1)$, (1, 3) y (3, +∞).

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 0, 2 y 4, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$f'(0) = 3(0-3)\,(0-1) = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en (-∞, 1)

$f'(2) = 3(2-3)\,(2-1) = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en (1, 3)

$f'(4) = 3(4-3)\,(4-1) = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en (3, +∞)

(b) Esbocemos la gráfica de *f*. Teniendo en cuenta el estudio realizado en el apartado anterior y que es una función polinómica, sólo necesitamos conocer los puntos de corte con los ejes y las coordenadas de los máximos y mínimos relativos.

Puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x(x-3)^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0) \\ x = 3 \quad \Rightarrow \quad (3, 0) \end{array}\right.$$

Punto de corte con el eje de ordenadas: (0, 0)

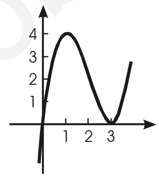
Hay un máximo relativo en $x = 1$, cuya ordenada es:

$f(x) = x(x-3)^2 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1\cdot(1-3)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad (1,\ 4)$

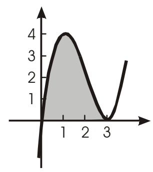
Hay un mínimo relativo en $x = 1$, cuya ordenada es:

$f(x) = x(x-3)^2 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 1\cdot(3-3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,\ 0)$

La gráfica de *f* es la situada al lado.



(c) El recinto cuya área nos pide el ejercicio es el que se encuentra sombreado a la derecha.



$$\text{Área} = \left| \int_0^3 f(x)\,dx \right| = \left| \int_0^3 x(x-3)^2\ dx \right| = \left| \int_0^3 \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) dx \right| =$$

$$= \left| \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} \right|_0^3 = \left| \frac{3^4}{4} - 6\frac{3^3}{3} + 9\frac{3^2}{2} - \left(\frac{0^4}{4} - 6\frac{0^3}{3} + 9\frac{0^2}{2} \right) \right| = \left| \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} \right| = \frac{27}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro λ.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + $(\lambda-1)\cdot$ [2ªf.]

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-3\lambda+2 & 3(\lambda-1) \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$

** Si $\lambda = 2 \quad \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 3, que es absurda. El sistema es incompatible, no tiene solución. Este valor de λ es el que nos pide el ejercicio.

** Si $\lambda = 1 \quad \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, un sistema con infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 1 \quad \Rightarrow$ La tercera ecuación es una ecuación normal, nos quedaría un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas por lo que se trataría de un sistema compatible determinado.

(b) Resolvamos el sistema para $\lambda = 1$, para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que habíamos obtenido en el apartado anterior el valor de λ por 1.

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-2 & 2 \\ 0 & 0 & 1^2-3\cdot 1+2 & 3(1-1) \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminemos la 3ª fila por ser una ecuación trivial, según justificamos en el apartado anterior.

$$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la y, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

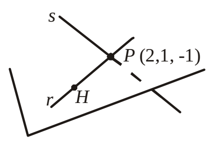
$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -y \\ 0 & -1 & 2+y \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2+y \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución es: $x = 2 \quad ; \quad z = -2-y$
Sustituyamos la incógnita no principal, la y, por un parámetro, por ejemplo por α: $\quad x = 2 \quad ; \quad y = \alpha \quad ; \quad z = -2-\alpha$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



Hemos de calcular una recta r contenida en el plano que nos dan, que corte perpendicularmente a la recta s en un punto P (2, 1, -1).

Elegiremos un punto H cualquiera de dicho plano, e impondremos al vector que determinan los puntos P y H la condición de ser perpendicular a la recta s.

Expresemos la ecuación de la recta *s* que nos dan en forma paramétrica.

$\begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 4 \\ y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, nos sobra una incógnita, la *z*, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4+2z \\ 0 & 1 & 3+2z \end{array}\right)$ La solución es: $x = 4 + 2z$; $y = 3 + 2z$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, *z*, por un parámetro, por ejemplo, por *t*:

$$s \equiv \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Expresemos también la ecuación del plano que nos da el problema en forma paramétrica.

$x + 2y + 3z - 1 = 0$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, nos sobran dos incógnitas, la *y* y la *z*, las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 - 2y - 3z \end{array}\right)$ La solución es: $x = 1 - 2y - 3z$

Sustituyamos cada una de las incógnitas no principales o secundarias, *y* y *z*, por un parámetro, por ejemplo, por α y β respectivamente.

$$\begin{cases} x = 1 - 2\alpha - 3\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Elijamos un punto cualquiera, *H*, de este plano, será de la forma: $H(1-2\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta)$.

El vector que determinan los puntos $P(2, 1, -1)$ y *H* es:

$$\overrightarrow{HP} = (2,\ 1,\ -1) - (1 - 2\alpha - 3\beta,\ \alpha,\ \beta) = (1 + 2\alpha + 3\beta,\ 1 - \alpha,\ -1 - \beta)$$

Impongamos la condición de ser perpendiculares este vector y el vector de dirección de la recta *s*, el vector (2, 2, 1).

$$\overrightarrow{HP} \perp \vec{v}_r \Rightarrow \overrightarrow{HP} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (1 + 2\alpha + 3\beta,\ 1 - \alpha,\ -1 - \beta) \cdot (2,\ 2,\ 1) = 0$$

efectuemos el producto escalar:

$$2 + 4\alpha + 6\beta + 2 - 2\alpha - 1 - \beta = 0 \Rightarrow 2\alpha + 5\beta + 3 = 0$$

Esta última ecuación tiene muchas posibles soluciones, una de ellas puede ser, si $\beta = 1$, entonces $2\alpha = -3 - 5\beta \Rightarrow 2\alpha = -3 - 5 \cdot 1 \Rightarrow 2\alpha = -8 \Rightarrow \alpha = -4$

El vector $\overrightarrow{HP}$ será:

$$\overrightarrow{HP} = (1 + 2\alpha + 3\beta,\ 1 - \alpha,\ -1 - \beta) = (1 + 2(-4) + 3 \cdot 1,\ 1 - (-4),\ -1 - 1) = (-4,\ 5,\ -2)$$

La ecuación de la recta que nos pide el ejercicio es:

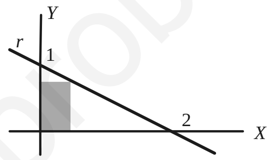
$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 57 DE EXAMEN

Opción A



EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2}+y=1$ (ver figura), determina el que tiene mayor área.

EJERCICIO 2. Sea $I=\int \frac{2}{2-e^x}\,dx$.

(a) [1 PUNTO]. Expresa I haciendo el cambio de variable $t=e^x$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula I.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a.

$$\left.\begin{array}{rl} x+y+z & =0 \\ (a+1)y+2z & =y \\ x-2y+(2-a)z & =2z \end{array}\right\}.$$

EJERCICIO 4. Considera la recta r definida por $\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x-y+\beta z=0$. Determina α y β en cada uno de los siguientes casos:

(a) [1 PUNTO]. La recta r es perpendicular al plano π.

(b) [1´5 PUNTOS]. La recta r está contenida en el plano π.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2e^{-x}$.

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 PUNTO]. Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

EJERCICIO 2. Sea $f:(-2,0)\to\mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x} & \text{si} \quad -2<x\le -1\\[2mm] \dfrac{x^2-\beta}{2} & \text{si} \quad -1<x<0\end{cases}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina α y β sabiendo que es derivable.

(b) [1 PUNTO]. Calcula $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$.

EJERCICIO 3. Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl}-\lambda x+y+(\lambda+1)z & = & \lambda+2\\ x+y+z & = & 0\\ (1-\lambda)x-\lambda y & = & 0\end{array}\right\}.$$

tiene más de una solución.

(a) [1´5 PUNTOS]. Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ.

(b) [1 PUNTO]. Halla todas las soluciones del sistema.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Calcula la distancia del punto $P(1,-3,7)$ a su punto simétrico respecto de la recta definida por

$$\left.\begin{array}{l}3x-y-z-2=0\\ x+y-z+6=0\end{array}\right\}.$$

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Llamemos *x* al lado del rectángulo situado sobre el eje de abscisas, es decir, a la base. La altura de dicho rectángulo se corresponderá con la ordenada del punto de la recta que tiene de abscisa *x*, es decir, *y*.

Construyamos la función área, teniendo en cuenta que es el producto de la base por la altura.

$$A=x\cdot y$$

La relación entre los lados del rectángulo es la que hemos dicho antes:

$$\frac{x}{2}+y=1 \quad\Rightarrow\quad y=1-\frac{x}{2}$$

Sustituyamos este valor en la función área.

$$A(x)=x\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad A(x)=x-\frac{x^2}{2}$$

Se trata de una función cuadrática, continua y derivable en todo su dominio, que es el intervalo abierto (0, 2).

Calculemos el máximo relativo o local, ya que de tener sólo tendría uno.

$A'(x) = 1 - x \;\Rightarrow\; 1 - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$

$A''(x) = -1 \;\Rightarrow\; A''(1) = -1 < 0 \;\Rightarrow$ luego hay un máximo relativo en $x = 1$.

Justifiquemos que este máximo relativo es absoluto; se puede hacer estudiando la monotonía pero en este caso no es necesario ya que es evidente que al ser la gráfica una parábola y su vértice un máximo relativo, entonces la función pasa de crecer a decrecer, por lo que ese máximo relativo es absoluto.

La base del rectángulo de área máxima mide 1, y la altura; $y = 1 - \frac{x}{2} \;\Rightarrow\; y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Hagamos el cambio de variable $t = e^x$.

Diferenciemos la expresión anterior, $dt = e^x\,dx \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{e^x} \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{t}$

La integral I mediante este cambio de variable quedará así:

$$I = \int \frac{2}{2 - e^x}\,dx = \int \frac{2}{2 - t}\,\frac{dt}{t}$$

(b) Terminemos de calcular la integral I. Se trata de una integral racional propia, ya que el grado del polinomio del numerador es de grado menor que el del denominador. Descompongamos la fracción del integrando en una suma de fracciones elementales.

$$\frac{2}{(2-t)\,t} = \frac{-2}{(t-2)\,t} \;\Rightarrow\; \frac{-2}{(t-2)\,t} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t} \;\Rightarrow\; \frac{-2}{(t-2)\,t} = \frac{At + B(t-2)}{(t-2)\,t} \;\Rightarrow$$

$$-2 = At + B(t-2) \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 0 \;\Rightarrow\; -2 = A\cdot 0 + B(0-2) \;\Rightarrow\; B = 1 \\ t = 2 \;\Rightarrow\; -2 = A\cdot 2 + B(2-2) \;\Rightarrow\; A = -1 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{2}{2-e^x}\,dx = \int \frac{2}{2-t}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{-2}{(t-2)\,t}\,dt = \int \frac{A}{t-2}\,dt + \int \frac{B}{t}\,dt =$$

$$= \int \frac{-1}{t-2}\,dt + \int \frac{1}{t}\,dt = -\mathrm{Ln}\left|t-2\right| + \mathrm{Ln}\left|t\right| = -\mathrm{Ln}\left|e^x - 2\right| + \mathrm{Ln}\left|e^x\right| = e^x - \mathrm{Ln}\left|e^x - 2\right|$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Ordenemos el sistema, agrupando las incógnitas que aparecen en el segundo miembro.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ (a+1)y + 2z &= y \\ x - 2y + (2-a)z &= 2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z = 0 \\ ay + 2z = 0 \\ x - 2y - az = 0 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -a & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -a-1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $3 \cdot$ [3ªf.] + $a \cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow -a^2 - a + 6 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \dfrac{1 \pm 5}{-2} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$

** Si $a = 2 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos; nos queda un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** Si $a = -3 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos; nos queda un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ y $a \neq -3 \Rightarrow$ La tercera ecuación es una ecuación normal; nos quedaría un sistema homogéneo de tres ecuaciones y tres incógnitas por lo que se trataría de un sistema que sólo admitiría la solución trivial, es decir, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Resolvamos el sistema para $a = 2$, para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que habíamos obtenido ya el valor de a por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2^2-2+6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por -3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Nos sobra una incógnita, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & 1 & -z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $x = 0$; $y = -z$

Sustituyamos la incógnita no principal, z, por un parámetro, por ejemplo, por λ, la solución finalmente será: $x = 0$; $y = -\lambda$; $z = \lambda$.

Resolvamos ahora el sistema para $a = -3$, para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que habíamos obtenido al pricipio el valor de a por -3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & -(-3)^2-(-3)+6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Nos sobra una incógnita, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & -3 & -2z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $3 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -5z \\ 0 & -3 & -2z \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado.
La solución es: $x = -\frac{5}{3}z \quad ; \quad y = \frac{2}{3}z$

Sustituyamos la incógnita no principal, z, por un parámetro, por ejemplo, por μ, la solución finalmente será:

$$x = -\frac{5}{3}\mu \quad ; \quad y = \frac{2}{3}\mu \quad ; \quad z = \mu$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) La recta r es perpendicular al plano π, si el vector de dirección de la recta y el vector normal al plano tiene la misma dirección, es decir, si las coordenadas de ambas vectores son proporcionales.

De la ecuación de la recta r, deducimos que el vector de dirección es el $(\alpha, 4, 2)$.

De la ecuación general del plano deducimos que el vector normal al mismo es el $(2, -1, \beta)$.

Impongamos la condición de perpendicular de recta y plano que dijimos antes:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{2}{\beta} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{-1} \quad \Rightarrow \quad -\alpha = 8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -8 \\ \frac{4}{-1} = \frac{2}{\beta} \quad \Rightarrow \quad 4\beta = -2 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

(b) Si la recta está contenida en el plano se han de verificar dos cosas. Una, que el vector de dirección de la recta y el normal al pano sean perpendiculares, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero:

$$\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \;\Rightarrow\; (\alpha, 4, 2) \bullet (2, -1, \beta) = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha - 4 + 2\beta = 0 \qquad [1]$$

La otra condición es que un punto cualquiera de la recta al pertenecer también al plano, sus coordenadas (las del punto) han de satisfacer la ecuación del plano:

$$P(1,0,1) \in r \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + \beta z = 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 + \beta \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -2 \end{array} \right.$$

Sustituyendo este valor en [1], tendremos:

$$2\alpha - 4 + 2\beta = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha - 4 + 2(-2) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 4$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función f es el producto de una función polinómica, x^2, continua en todo $\mathbb{R}$, y el de la función exponencial elemental, e^{-x}, continua también en todo $\mathbb{R}$; y como el producto de funciones continuas es continua, resulta que f es contina en todo $\mathbb{R}$.

Como consecuencia de esta continuidad, los extremos relativos de f sólo se encontrarán entre los valores que anulen a la primera derivada o en los puntos de no derivabilidad pero si observamos la función primera derivada veremos que esta función existe para todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = x^2 e^{-x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x\, e^{-x} - x^2 e^{-x}$$

$$2x\, e^{-x} - x^2 e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; x\, e^{-x}(2-x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ 2 - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \\ e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; \text{no hay} \end{cases}$$

$$f''(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} \;\Rightarrow$$

$$f''(x) = e^{-x}\left(2 - 2x - 2x + x^2\right) \;\Rightarrow\; f''(x) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right)$$

$$f''(0) = e^{-0}\left(0^2 - 4\cdot 0 + 2\right) = 2 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Mínimo relativo en } (0,\,0)$$

$$f''(2) = e^{-2}\left(2^2 - 4\cdot 2 + 2\right) = -2e^{-2} < 0 \;\Rightarrow\; \text{Máximo relativo en } (2,\,4e^{-2})$$

Las ordenadas de los extremos relativos se han obtenido sustituyendo cada una de las abscisas en la función:

$$f(x) = x^2 e^{-x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(0) = 0^2 e^{-0} = 0 \\ f(2) = 2^2 e^{-2} = 4e^{-2} \end{cases}$$

(b) Para que exista asíntota vertical se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existe. Para ello expresaremos la función f de la forma siguiente $f(x) = x^2 e^{-x} \;\Rightarrow\; f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$; y buscaremos el punto x_0 entre los valores que anulen al denominador, en este caso no hay ningún valor que anule al denominador. Luego no hay asíntotas verticales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \qquad \Rightarrow$$

Hay una asíntota horizontal $y=0$, cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 e^{-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left((-x)^2 e^{-(-x)}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{x}\right) = \infty^2 e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty$$

No hay asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

Veamos si hay asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(x e^{-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x e^{-(-x)}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x e^{x}\right) = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty$$

No hay asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$, sino una rama parabólica paralela al eje OY.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Para determinar α y β, y antes de estudiar la derivabilidad analizaremos la continuidad, ya que si la función es derivable, es continua.

Para que una función sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- Para valores de $-2<x<-1$, la función $\frac{\alpha}{x}$ es continua por ser una función racional, que lo es en todo $\mathbb{R}$ menos en lo valores que anulan al denominador, el 0, pero en nuestro caso este valor no pertenece al dominio particular donde está definida, ya que $0>-1$.

- Para valores de $-1<x<0$, la función $\frac{x^2-\beta}{2}$ es continua por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x=-1$ la función debe ser continua también, para ello, los límites laterales y el valor de la función en dicho punto tienen que coincidir. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1}} \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{-1} = -\alpha \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1^+ \\ x>-1}} \frac{x^2-\beta}{2} = \frac{(-1)^2-\beta}{2} = \frac{1-\beta}{2} \\ f(-1) = \frac{\alpha}{-1} = -\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow \\ \qquad -\alpha = \frac{1-\beta}{2} \end{array}\right.$$

luego la función *f(x)* es continua en $(-2, 0)$, siempre que se satisfaga $-\alpha = \frac{1-\beta}{2}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales en dicho punto coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente y en todos los casos debemos comprobar que es continua para que pueda ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad.

- Para valores de $-2<x<-1$, la función $\frac{\alpha}{x}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en lo valores que anulan al denominador, el 0, pero en nuestro caso este valor no pertenece al dominio particular donde está definida, ya que $0>-1$. La función derivada es $-\frac{\alpha}{x^2}$.

- Para valores de $-1<x<0$, la función $\frac{x^2-\beta}{2}$ es derivable por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$. La función derivada es *x*.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x^2} & \text{si } -2<x<-1 \\ x & \text{si } -1<x<0 \end{cases}$$

- Para $x=-1$ la función debe ser derivable también, para ello, las derivadas laterales deben coincidir. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1)^- = \lim\limits_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1}} \left(-\frac{\alpha}{x^2}\right) = -\frac{\alpha}{(-1)^2} = -\alpha \\ f'(-1)^+ = \lim\limits_{\substack{x\to -1^+ \\ x>-1}} x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(-1)^- = f'(-1)^+ \Rightarrow \\ -\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 1 \end{array}\right.$$

Para que sea derivable en $(-2, 0)$, α debe valer 1. Calculemos el valor de β teniendo en cuenta que $-\alpha = \frac{1-\beta}{2} \quad\Rightarrow\quad -1 = \frac{1-\beta}{2} \quad\Rightarrow\quad -2 = 1-\beta \quad\Rightarrow\quad \beta = 3$.

Los valores de α y β son $\alpha = 1$ y $\beta = 3$. La función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{x^2} & \text{si} \quad -2 < x \le -1 \\ x & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

(b) Calculemos la integral.

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\,\mathrm{Ln}|x|\,\Big]_{-2}^{-1} = \mathrm{Ln}|-1| - \mathrm{Ln}|-2| = 0 - \mathrm{Ln}|-2| = -\mathrm{Ln}(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro λ, para de esa manera obtener cuál es el valor de λ que hace que el sistema tenga más de una solución, es decir, sea un sistema compatible indeterminado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 1 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas: la 2ª pasa a la 1ª; la 1ª a la 3ª, y la 3ª a la 2ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \lambda+1 & \lambda+2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 1ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (z) & (y) & (x) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1-\lambda & 0 \\ \lambda+1 & 1 & -\lambda & \lambda+2 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - (λ+1) · [1ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (z) & (y) & (x) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -2\lambda-1 & \lambda+2 \end{array}\right) \end{array}$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (z) & (y) & (x) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-2 & \lambda+2 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} y el a_{33}, que pueden serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow -\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial y la podemos eliminar. El coeficiente, $a_{22} = -\lambda$, para este valor de $\lambda = -2$ es distinto de cero $\Rightarrow$ luego nos queda un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, o sea, un sistema con infinitas soluciones o como dice el ejercicio con más de una solución. El valor de $\lambda = -2$ es el que nos pide el problema.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow -\lambda - 2 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -2 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es una ecuación normal pero el coeficiente a_{22} puede ser cero o no, analicemos lo que puede ocurrir en cada caso.

** $a_{22} = 0 \Rightarrow -\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ Sustituyamos este valor de λ en el sistema y veamos lo que ocurre.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -0 & 1-0 & 0 \\ 0 & 0 & -0-2 & 0+2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, La última ecuación es 0 = 2, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema seá un sistema incompatible para el valor de $\lambda = 0$.

** $a_{22} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow$ Esta 2ª ecuación sería una ecuación normal al igual que ya lo era la 3ª ecuación, por lo que nos quedaría un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible determinado, son solución única para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -2$.

(b) Resolvamos el sistema para $\lambda = -2$, que es cuando tiene más de una solución, para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que habíamos obtenido en el apartado anterior el valor de λ por -2.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -(-2) & 1-(-2) & 0 \\ 0 & 0 & -(-2)-2 & -2+2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Eliminemos la 3ª fila por ser una ecuación trivial, tal como lo justificábamos en el apartado anterior **.**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la *x*, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -x \\ 0 & 2 & -3x \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [2ªf.]

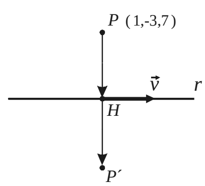
$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & -3x \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $2z = x \quad ; \quad 2y = -3x$

Terminemos de despejar las incógnitas sustituyendo la incógnita secundaria, la *x*, por un parámetro por ejemplo, por α, la solución, finalmente, del sistema será:

$$x = \alpha \quad ; \quad y = \frac{-3}{2}\alpha \quad ; \quad z = \frac{1}{2}\alpha$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



Lo primero es obtener el simétrico del punto *P* respecto de la recta *r*, el punto *P´*(*a*, *b*, *c*), para ello hay calcular un punto *H* de la recta de tal manera que el vector $\overrightarrow{PH}$ sea perpendicular al vector de dirección de la recta y además $\vec{PH} = \vec{HP'}$. Aunque no es preciso calcular el simétrico porque la distancia del punto *P* a su simétrico es el doble de la distancia de *P* al punto *H*.

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los dos planos en que viene definida la recta.

Expresemos dicho sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - z - 2 = 0 \\ x + y - z + 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -20 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la *z*, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2+z \\ 0 & 4 & -20+2z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 4 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 0 & -12+6z \\ 0 & 4 & -20+2z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $12x = -12 + 6z$; $4y = -20 + 2z$

Terminemos de despejar las incógnitas sustituyendo la incógnita secundaria, la *z*, por un parámetro por ejemplo, por *t*, la solución, finalmente, del sistema será:

$$x = -1 + \frac{1}{2}t \quad ; \quad y = -5 + \frac{1}{2}t \quad ; \quad z = t$$

Hemos obtenido la ecuación de la recta *r* en paramétricas

El punto genérico, *H*, tendrá de coordenadas $H\left(-1+\frac{1}{2}t,\ -5+\frac{1}{2}t,\ t\right)$ y el vector $\vec{PH}$:

$$\vec{PH} = H\left(-1+\frac{1}{2}t,\ -5+\frac{1}{2}t,\ t\right) - (1,\ -3,\ 7) = \left(\frac{t}{2}-2,\ \frac{t}{2}-2,\ t-7\right)$$

Apliquemos la condición de que $\vec{PH}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta:

$$\vec{PH} \perp \vec{v_r} \;\Rightarrow\; \vec{PH} \bullet \vec{v_r} = 0 \Rightarrow \left(\frac{t}{2}-2,\ \frac{t}{2}-2,\ t-7\right) \bullet \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},1\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{t}{4} - 1 + \frac{t}{4} - 1 + t - 7 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}t = 9 \;\Rightarrow\; t = 6$$

Luego el vector $\vec{PH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{PH} = \left(\frac{t}{2}-2,\ \frac{t}{2}-2,\ t-7\right) = \left(\frac{6}{2}-2,\ \frac{6}{2}-2,\ 6-7\right) = (1,\ 1,\ -1)$$

La distancia que nos pide el ejercicio es:

$$\text{dist}\,(PP') = \left|\vec{PP'}\right| = 2\left|\vec{PH}\right| = 2\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{3}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 58 DE EXAMEN

Opción A

<u>**EJERCICIO 1**</u>. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-3)e^x$.
(a) [1 PUNTO]. Calcula los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
(b) [1´5 PUNTOS]. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión.

<u>**EJERCICIO 2**</u>. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} 1+\alpha x & \text{si} \quad x<0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

(a) [1 PUNTO]. Determina al valor de α sabiendo que *f* es derivable.
(b) [0´5 PUNTOS]. Haz un esbozo de la gráfica de *f*.
(c) [1 PUNTO]. Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

<u>**EJERCICIO 3**</u>. **(a)** [1´5 PUNTOS]. Calcula el valor de *m* para el que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2 - A = I$ y determina A^{-1} para dicho valor de *m*.
(b) [1 PUNTO]. Si *M* es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de *M* y de *I*.

<u>**EJERCICIO 4**</u>. **(a)** [1´5 PUNTOS]. Encuentra la ecuación de la recta *r* que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de ecuación $x+y+z=3\sqrt{3}$ y π_2 de ecuación $-x+y+z=2$.
(b) [1 PUNTO]. Halla la distancia de la recta *r* al plano π_1.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$.

(a) [1 PUNTO]. Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

(b) [1 PUNTO]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(c) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de *f*.

EJERCICIO 2. Calcula

(a) [1 PUNTO]. $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx$.

(b) [1´5 PUNTOS]. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx$.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de m que lo hacen compatible

$$\left.\begin{array}{rcl} x+my &=& m \\ mx+y &=& m \\ mx+my &=& 1 \end{array}\right\}.$$

EJERCICIO 4. Considera el punto $P(1, 0, -2)$ y la recta definida por $\left.\begin{array}{rcl} 2x-y &=& 5 \\ 2x+y-4z &=& 7 \end{array}\right\}$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina la recta perpendicular a r que pasa por P.

(b) [1 PUNTO]. Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función *f* es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, ya que es el producto de dos funciones que también lo son, el de una función polinómica y el de la función exponencial elemental e^x.

En consecuencia, los extremos locales sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, ya que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

$f(x) = (x-3)e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + (x-3)e^x \Rightarrow f'(x) = e^x(1+x-3) \Rightarrow$
$f'(x) = e^x(x-2)$

$e^x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow \text{No hay valores} \\ x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

Sustituyamos este valor que anula a la primera derivada en la segunda.

$f''(x) = e^x(x-2) + e^x \Rightarrow f''(x) = e^x(x-2+1) \Rightarrow$

$f''(x) = e^x(x-1)$

$f''(2) = e^2(2-1) = e^2 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo o local en $(2, -e^2)$.

La ordenada de este extremo relativo se obtiene sustituyendo la abscisa del mismo en la función *f(x)*, es decir:

$f(x) = (x-3)e^x \Rightarrow f(2) = (2-3)e^2 = -e^2$

(b) Obtengamos en primer lugar las coordenadas del punto de inflexión de la función *f(x)*. Este punto se encontrará entre los valores que anulando a la segunda derivada no anule a la tercera derivada.

$f''(x) = e^x(x-1)$

$$e^x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow \text{ No hay valores} \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$f'''(x) = e^x(x-1) + e^x \Rightarrow f'''(x) = e^x(x-1+1) = xe^x$

$f'''(1) = e^1(1-1) + e^1 = e \neq 0$

luego hay un punto de inflexión en $x=1$.

La ordenada de este punto de inflexión se obtiene sustituyendo la abscisa del mismo en la función *f(x)*, es decir:

$f(x) = (x-3)e^x \Rightarrow f(1) = (1-3)e^1 = -2e \Rightarrow$ $(1, -2e)$ Punto de inflexión.

Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de inflexión.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(1) = f'(1)(x-1) \quad \Rightarrow$ [1]

Calculemos la derivada de la función en el punto 1, $f'(1)$.

$f'(x) = e^x(x-2) \Rightarrow f'(1) = e^1(1-2) = -e$

Continuando desde [1], tendremos:

$\Rightarrow \quad y - (-2e) = -e(x-1) \quad \Rightarrow \quad y + 2e = -ex + e \quad \Rightarrow \quad y = -ex - e$

que es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Para estudiar la derivabilidad estudiemos previamente la continuidad.

- Para valores de $x<0$, la función $1+\alpha x$ es continua por ser una función polinómica ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $x>0$, la función e^{-x} es continua por ser una función exponencial elemental que lo es en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x=0$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} (1+\alpha x) = 1+\alpha\cdot 0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} e^{-x} = e^{-0} = 1 \\ f(0) = e^{-0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \right.$$

luego la función *f(x)* es continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto podrá ser derivable también en $\mathbb{R}$.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua.

- Para valores de $x < 0$, la función $1 + \alpha x$ es derivable por ser una función polinómica, ya que las funciones polinómicas lo son en todo $\mathbb{R}$, siendo la función derivada, α.

- Para valores de $x > 0$, la función e^{-x} es derivable en todo $\mathbb{R}$, por ser una función exponencial elemental, siendo la función derivada, $-e^{-x}$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

El problema está en el punto 0. Será derivable en el punto 0, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(0^-) = \lim_{\substack{x \to 0^- \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0^- \\ x < 0}} \alpha = \alpha$$

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(-e^{-x}\right) = -e^{-0} = -1$$

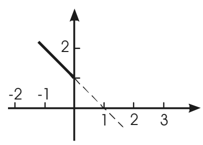
Igualando las derivadas laterales: $f'(0^-) = f'(0^+) \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$, podemos deducir que la función será derivable en el punto 0, si $\alpha = -1$, siendo el valor de la derivada -1.

En definitiva, la función *f* será derivable si $\alpha = -1$, siendo la función derivada, finalmente:

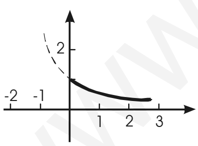
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(b) La función *f*, después de sustituir α por -1, es: $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

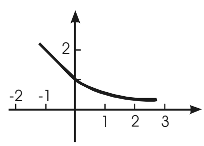
Representemos el primer trozo, $1 - x$, para los valores de $x < 0$. se trata de una función afín cuya gráfica pasa por los puntos (0, 1) y (1, 0), que son los puntos de corte con los ejes, pero sólo nos quedaremos con el trozo de gráfica correspondiente a los valores de $x < 0$, y que hemos dibujado al lado.



El trozo, e^{-x}, es una función exponencial elemental, estrictamente decreciente, por ser la base, e^{-1}, un número menor que 1 y mayor que cero. La gráfica se encuentra representada a la izquierda.



La gráfica de *f(x)* es la situada a continuación.



(c) Calculemos la integral.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (1 - x)\,dx + \int_{0}^{1} e^{-x}dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-x} \right]_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \frac{0^2}{2} - \left(-1 - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \left(-e^{-1} - \left(-e^{-0}\right)\right) = -\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-e^{-1} + 1\right) = \frac{5}{2} - e^{-1}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Determinemos el valor de m para que la matriz A verifique la relación $2A^2 - A = I$.

Sustituyamos la matriz A en dicha relación.

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow 2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1+m & m^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 0\\ 2+2m & 2m^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1+2m & 2m^2 - m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2m = 0 \;\Rightarrow\; m = -\dfrac{1}{2} \\ 2m^2 - m = 1 \Rightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{cases}$$

El único valor que verifica ambas ecuaciones es el de $m = -\frac{1}{2}$.

Calculemos la matriz inversa de A, A^{-1}, para el valor de m antes hallado. Se puede hacer mediante el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de la matriz A la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1\end{array}\right)$$

Multipliquemos la fila 2ª por -2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2\end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de A, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

También se puede obtener la matriz inversa partiendo de la relación matricial inicial.

$$2A^2 - A = I \;\Rightarrow\; A\cdot(2A - I) = I \;\Rightarrow\; A\cdot A^{-1} = I \;\Rightarrow\; A^{-1} = 2A - I$$
$$\Rightarrow\; (2A - I)\cdot A = I \;\Rightarrow\; A^{-1}\cdot A = I \;\Rightarrow\; A^{-1} = 2A - I$$

$$A^{-1} = 2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

(b) Bastará sacar factor común la matriz M tanto por la derecha como por la izquierda.

$$2M^2 - M = I \;\Rightarrow\; M\cdot(2M - I) = I \;\Rightarrow\; M\cdot M^{-1} = I \;\Rightarrow\; M^{-1} = 2M - I$$
$$\Rightarrow\; (2M - I)\cdot M = I \;\Rightarrow\; M^{-1}\cdot M = I \;\Rightarrow\; M^{-1} = 2M - I$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Si la recta r es paralela a los planos π_1 y π_2 debe ser paralela a la recta intersección de ambos planos, o lo que es lo mismo, el vector de dirección de ambas rectas lo podemos obtener mediante el producto vectorial de los vectores normales a cada uno de los planos.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = (1,1,1)\times(-1,1,1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0,-2,2)$$

La ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas, $O(0, 0, 0)$, y su vector de dirección es el que acabamos de obtener es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 + 0\lambda \\ y = 0 - 2\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

(b) Escribamos en primer lugar la ecuación del plano π_1 en forma paramétrica. Para ello expresaremos el sistema formado sólo por la ecuación de dicho plano en forma matricial. Lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$$x + y + z = 3\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\sqrt{3} \end{array}\right)$$

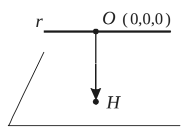
El sistema está diagonalizado, nos sobran dos incógnitas, la y y la z, que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 3\sqrt{3} - y - z \end{array}\right)$$

La solución es: $x = 3\sqrt{3} - y - z$

Sustituyamos cada una de las incógnitas no principales o secundarias, la y y la z, por un parámetro, por ejemplo, por α y β respectivamente.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 3\sqrt{3} - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$



Para hallar la distancia de la recta r al plano π_1, basta elegir un punto cualquiera de dicha recta, por ejemplo, el $O(0, 0, 0)$, y hallar la distancia de este punto al plano, ya que la recta y el plano son paralelos.

Elegiremos un punto genérico, H, del plano y le impondremos la condición al vector $\vec{OH}$ de ser perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, el $\vec{u}$ y el $\vec{w}$.

El punto H, por pertenecer al plano, tendrá las coordenadas genéricas siguientes:

$$H = (3\sqrt{3} - \alpha - \beta,\ \alpha,\ \beta)$$

$$\vec{OH} = (3\sqrt{3} - \alpha - \beta,\ \alpha,\ \beta) - (0,\ 0,\ 0) = (3\sqrt{3} - \alpha - \beta,\ \alpha,\ \beta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{OH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{OH} \bullet \vec{u} = 0 \\ \vec{OH} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{OH} \bullet \vec{w} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (3\sqrt{3} - \alpha - \beta,\ \alpha,\ \beta) \bullet (-1,\ 1,\ 0) = 0 \\ (3\sqrt{3} - \alpha - \beta,\ \alpha,\ \beta) \bullet (-1,\ 0,\ 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -3\sqrt{3} + \alpha + \beta + \alpha = 0 \\ -3\sqrt{3} + \alpha + \beta + \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 3\sqrt{3} \\ \alpha + 2\beta = 3\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{3} \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot$ [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3\sqrt{3} \\ 0 & 3 & 3\sqrt{3} \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 6\sqrt{3} \\ 0 & 3 & 3\sqrt{3} \end{array}\right)$ La solución es: $6\alpha = 6\sqrt{3}$; $3\beta = 3\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \sqrt{3}$; $\beta = \sqrt{3}$

El vector $\vec{OH}$ tendrá de coordenadas:

$\vec{OH} = \left(3\sqrt{3} - \alpha - \beta,\ \alpha,\ \beta\right) = \left(3\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$

La distancia pedida será:

dist (r, π_1) = dist (O, π_1) = dist (O, H) = $\left|\vec{OH}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9} = 3$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para que exista asíntota vertical se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos que existen; habrá que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, en este caso, $x = 2$ y $x = -2$. Veámoslo.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0} = \pm\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

luego hay dos asíntotas verticales, $x = 2$ y $x = -2$.

La posición de la gráfica de la función con respecto a cada una de las asíntotas es:

$$\lim_{\substack{x \to 2^- \\ x<2}} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 2^+ \\ x>2}} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2^- \\ x<-2}} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to -2^+ \\ x>-2}} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos que existe.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Hay una asíntota horizontal } \ y = 1.$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La posición de la gráfica de la función con respecto a la asíntota horizontal es:

$$\left.\begin{array}{l} f(100) = \dfrac{100^2+3}{100^2-4} = \dfrac{10003}{9996} > 1'0007 \\ y_{asintota}(100) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$f(100) > y_{\text{asíntota}}$ $\Rightarrow$ la gráfica de la función, cuando $x \to +\infty$ va por encima de la asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} f(-100) = \dfrac{(-100)^2+3}{(-100)^2-4} = \dfrac{10003}{9996} > 1'0007 \\ y_{asintota}(-100) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$f(-100) > y_{\text{asíntota}}$ $\Rightarrow$ la gráfica de la función, cuando $x \to -\infty$ va por encima de la asíntota horizontal.

Esta función racional al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

(b) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, debemos tener en cuenta que se trata de una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}-\{2,\ -2\}$, es decir todo $\mathbb{R}$ menos los valores, 2 y -2, que anulan al denominador. Por ello es una función continua también en $\mathbb{R}-\{2,\ -2\}$.

Para determinar los intervalos de monotonía partimos de la primera derivada.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x\left(x^2-4-x^2-3\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Función que existe para todo $\mathbb{R}$ menos para los valores, 2 y -2, por ser valores que anulan al denominador y donde la función además no existía. Por tanto el dominio de derivabilidad es $\mathbb{R}-\{2,\ -2\}$.

Los valores que anulan a esta primera derivada, serán: $-14x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$.

Como es una función continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2,\ -2\}$, deberemos tener en cuenta el valor, 0, que anula a la primera derivada y los valores, 2 y -2, donde la función no existe para construir los intervalos de monotonía, que serán: $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$ y $(2,\ +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -3, -1, 1 y 3, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$f'(-3)=\frac{-14\cdot(-3)}{\left((-3)^2-4\right)^2}=\frac{42}{25}>0 \quad\Rightarrow\quad \text{Creciente en } (-\infty,\ -2)$$

$$f'(-1)=\frac{-14\cdot(-1)}{\left((-1)^2-4\right)^2}=\frac{14}{9}>0 \quad\Rightarrow\quad \text{Creciente en } (-2,\ 0)$$

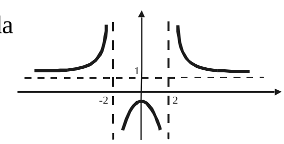
$$f'(1)=\frac{-14\cdot 1}{\left(1^2-4\right)^2}=\frac{-14}{9}<0 \quad\Rightarrow\quad \text{Decreciente en } (0,\ 2)$$

$$f'(3)=\frac{-14\cdot 3}{\left(3^2-4\right)^2}=\frac{-42}{25}<0 \quad\Rightarrow\quad \text{Decreciente en } (2,\ +\infty)$$

Los extremos relativos, teniendo en cuenta todo lo estudiado anteriormente, sólo pueden darse en los puntos de derivada cero, es decir, en $x = 0$. Como además, en dicho punto la función pasa de creciente a decreciente, podemos concluir que la gráfica de la función en $x = 0$ presenta un máximo relativo o local. La ordenada de este punto será:

$$f(0)=\frac{0^2+3}{0^2-4}=-\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad \text{hay un máximo relativo en } \left(0,\ -\frac{3}{4}\right)$$

(c) La gráfica aproximada de la función *f* es la representada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la integral.

$$\int\frac{3x+4}{x^2+1}\,dx=\int\frac{3x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{4}{x^2+1}\,dx=3\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+4\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\text{Ln}\left|x^2+1\right| + 4\text{ arc tg}(x) + C$$

(b) Calculemos la integral definida siguiente.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx.$$

Lo haremos calculando previamente la correspondiente integral indefinida, que como podemos comprobar se trata de una integral por partes.

$$\int x\cos(2x)\,dx = \qquad [1]$$

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = \cos(2x) \qquad v = \int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cdot\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$= \frac{1}{2}x\,\text{sen}(2x) - \int \frac{1}{2}\text{sen}(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\,\text{sen}(2x) - \frac{1}{2}\int \text{sen}(2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\,\text{sen}(2x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\,\text{sen}(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\,\text{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$$

La integral definida será:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x\,\text{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\text{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\text{sen}(2\cdot 0) + \frac{1}{4}\cos(2\cdot 0)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro m. Posteriormente lo resolveremos para los valores de m que hagan al sistema compatible

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - m · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ 0 & 1-m^2 & m-m^2 \\ 0 & m-m^2 & 1-m^2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} y el a_{33}, que pueden serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; m - m^2 = 0 \;\Rightarrow\; m(1-m) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$

** Si $m = 0 \;\Rightarrow\;$ La 3ª ecuación es, 0 = 1, que es absurda. El sistema es incompatible, no tiene solución.

** Si $m = 1 \;\Rightarrow\;$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos. La segunda ecuación es, 0 = 0, que también sería trivial, la eliminamos, por lo que nos queda un sistema de una ecuación y dos incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq 0$ y $m \neq 1 \quad \Rightarrow$ como $m \neq 1$, entonces $1 - m \neq 0$, por lo que podremos simplificar la 2ª y 3ª ecuación por $1 - m$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ 0 & 1-m^2 & m-m^2 \\ 0 & m-m^2 & 1-m^2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ 0 & (1+m)(1-m) & m(1-m) \\ 0 & m(1-m) & (1+m)(1-m) \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ 0 & 1+m & m \\ 0 & m & 1+m \end{array}\right)$$

Y como el coeficiente $a_{33} = m \neq 0$, intercambiamos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ 0 & m & 1+m \\ 0 & 1+m & m \end{array}\right)$$

Terminemos de triangular inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = m \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $m \cdot [3^a f.] - (1+m) \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ 0 & m & 1+m \\ 0 & 0 & -1-2m \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que es cero. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse analizando la 3ª ecuación.

La tercera ecuación es, $0 = -1 - 2m$, analicemos lo que puede ocurrir dependiendo de los valores de m que verifiquen o no esta 3ª ecuación.

** $0 = -1 - 2m \quad \Rightarrow \quad 2m = -1 \quad \Rightarrow \quad m = -1/2 \quad \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, $0 = 0$, que es trivial, la eliminamos, nos quedarían dos ecuaciones y dos incógnitas por lo que se trataría de un sistema compatible determinado.

** $0 \neq -1 - 2m \quad \Rightarrow \quad 2m \neq -1 \quad \Rightarrow \quad m \neq -1/2 \quad \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, $0 = (n^o \neq 0)$, se trata de una ecuación absurda, por lo que el sistema sería un sistema incompatible.

Resolvamos, en primer lugar, el sistema para el valor de $m = 1$, teniendo en cuenta que se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ 0 & 1-m^2 & m-m^2 \\ 0 & m-m^2 & 1-m^2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1^2 & 1-1^2 \\ 0 & 1-1^2 & 1-1^2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido un sistema de una ecuación y dos incógnitas, nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1-y \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $x = 1 - y$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la y, por un parámetro, por ejemplo, por α, tendremos: $x = 1 - \alpha \quad ; \quad y = \alpha$.

Resolvamos ahora el sistema para el valor de $m = -1/2$, teniendo en cuenta que se trata de un sistema compatible determinado.

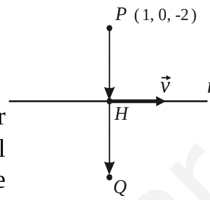
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ 0 & m & 1+m \\ 0 & 0 & -1-2m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1-2\cdot\frac{-1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Multipliquemos las filas 1ª y 2ª por 2.

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado.
La solución es: $2x = -2$; $-y = 1$ $\Rightarrow$
$x = -1$; $y = -1$



SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Supongamos que la recta que queremos calcular perpendicular a r, la corte. Lo primero es obtener un punto H de la recta r de tal manera que el vector $\overrightarrow{PH}$ sea perpendicular al vector de dirección de la recta.

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los dos planos en que viene definida la recta.

Expresemos dicho sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de reducción de Gauss-Jordan.

$\left.\begin{array}{l} 2x - y \quad = 5 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 7 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2+4z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 12+4z \\ 0 & 2 & 2+4z \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado.
La solución es: $4x = 12 + 4z$; $2y = 2 + 4z$ $\Rightarrow$
$x = 3 + z$; $y = 1 + 2z$

Terminemos de despejar las incógnitas sustituyendo la incógnita secundaria, la z, por un parámetro por ejemplo, por t, la solución del sistema, finalmente, será:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{array}\right.$$

Hemos obtenido la ecuación de la recta r en paramétricas

El punto genérico, H, tendrá de coordenadas $H(3+t,\ 1+2t,\ t)$ y el vector $\overrightarrow{PH}$:

$\overrightarrow{PH} = H(3+t,\ 1+2t,\ t) - (1,\ 0,\ -2) = (2+t,\ 1+2t,\ t+2)$

Apliquemos la condición de que $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta:

$\overrightarrow{PH} \perp \vec{v}_r \Rightarrow \overrightarrow{PH} \bullet \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (2+t,\ 1+2t,\ t+2) \bullet (1,\ 2,\ 1) = 0 \Rightarrow$

$2 + t + 2 + 4t + t + 2 = 0 \Rightarrow 6t = -6 \Rightarrow t = -1$

Luego el vector $\overrightarrow{PH}$ tendrá de coordenadas:

$\overrightarrow{PH} = (2+t,\ 1+2t,\ t+2) = (2-1,\ 1+2(-1),\ -1+2) = (1,\ -1,\ 1)$

La ecuación de la recta perpendicular a *r* y que pase por el punto *P* es:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

(b) No es preciso calcular el simétrico, *Q*, del punto *P* respecto de *r* porque la distancia del punto *P* a su simétrico es el doble de la distancia de *P* al punto *H*.

La distancia que nos pide el ejercicio es:

$$\text{dist}\ (PQ) = \left|\vec{PQ}\right| = 2\ \left|\vec{PH}\right| = 2\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = 2\sqrt{3}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 59 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=x^2-1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es la recta $y=1$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula $\beta>0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=-x^2+2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

EJERCICIO 3. Sea A la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A-2I$ es cero.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula la matriz inversa de $A-2I$ para $\lambda=-2$.

EJERCICIO 4. Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y el punto $P(1,0,-1)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π.

(b) [1´25 PUNTOS]. Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?

EJERCICIO 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$.
(a) [0´75 PUNTOS]. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
(b) [1´75 PUNTOS]. Dibuja el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje *OX*. Calcula su área.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y+mz = 1 \\ my-z = -1 \\ x+2my = 0 \end{array}\right\}.$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Clasifica el sistema según los valores de *m*.
(b) [1 PUNTO]. Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4. Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y la recta *r* definida por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.
(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula, razonadamente, la distancia de la recta *r* al plano π.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la función segunda derivada es, $f''(x) = x^2 - 1$, la función primera derivada la obtendremos mediante integración.

$$f'(x) = \int \left(x^2 - 1\right) dx = \frac{x^3}{3} - x + C$$

Como la recta tangente a la gráfica de *f* en $x=0$ es la recta $y=1$, que es una recta paralela al eje de abscisas y por tanto de pendiente 0, lo que significa que la derivada de la función *f* en el punto 0 es cero, es decir, $f'(0)=0$, por tanto:

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - x + C \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{0^3}{3} - 0 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

luego la función primera derivada será:

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - x + C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

La función *f* la obtendremos mediante integración de *f´*.

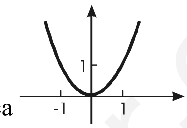
$$f(x) = \int \left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + K$$

Sabemos que la recta tangente a la gráfica de f en $x=0$ es la recta $y=1$, por tanto el punto de tangencia tiene de coordenadas (0, 1), esto implica que $f(0)=1$.

$$f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+\mathrm{K} \quad\Rightarrow\quad f(0)=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{0^4}{12}-\frac{0^2}{2}+\mathrm{K}=1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{K}=1 \quad\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+1$$

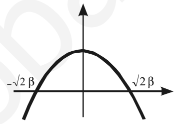
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



La función $f(x)=x^2$ es una función cuadrática elemental, su gráfica es una parábola que se encuentra dibujada al lado.

La función $g(x)=-x^2+2\beta^2$ es una función cuadrática, su gráfica también es una parábola.

El vértice de esta parábola es:



$$\text{abscisa del vértice} \;=-\frac{b}{a}=-\frac{0}{-1}=0$$

$$\text{ordenada del vértice} = g(0)=-0^2+2\beta^2=2\beta^2$$

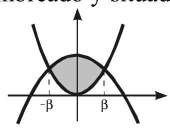
Luego el vértice es el punto $(0,\,2\beta^2)$, que es el punto de corte con el eje de ordenadas.

Los puntos de corte con el eje de abscisas son:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+2\beta^2 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -x^2+2\beta^2=0 \Rightarrow x^2=2\beta^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\,\beta \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(-\sqrt{2}\,\beta,\ 0\right) \\ \left(\sqrt{2}\,\beta,\ 0\right) \end{array}\right.$$

La gráfica está representada al lado de forma aproximada y bajo el hecho de que $\beta>0$.

El recinto limitado por ambas gráficas, de forma aproximada, es el sombreado y situado al lado. Los puntos de corte de ambas gráficas son:



$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+2\beta^2 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+2\beta^2=x^2 \Rightarrow 2x^2=2\beta^2 \Rightarrow x=\pm\beta \left\{\begin{array}{l} (-\beta,\,0) \\ (\beta,\,0) \end{array}\right.$$

El área del recinto anterior sabemos que es 72, por lo que tendremos que calcular la siguiente integral definida:

$$\text{Área}=\int_{-\beta}^{\beta}\left(-x^2+2\beta^2-x^2\right)dx=\int_{-\beta}^{\beta}\left(-2x^2+2\beta^2\right)dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+2\beta^2x\right]_{-\beta}^{\beta}=$$

$$=-2\frac{\beta^3}{3}+2\beta^2\cdot\beta-\left(-2\frac{(-\beta)^3}{3}+2\beta^2(-\beta)\right)=-2\frac{\beta^3}{3}+2\beta^3-2\frac{\beta^3}{3}+2\beta^3=\frac{8}{3}\beta^3$$

$$\frac{8}{3}\beta^3=72 \quad\Rightarrow\quad \beta^3=\frac{3\cdot 72}{8} \quad\Rightarrow\quad \beta^3=27 \quad\Rightarrow\quad \beta=3$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos, en primer lugar, la matriz A - $2I$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora el valor de λ para que el determinante de A - $2I$ sea cero

$$\left| A-2I \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda-2-\lambda^2(\lambda-2) = \lambda-2-\lambda^3+2\lambda^2 = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$$

$-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0$, resolvamos esta ecuación mediante Ruffini:

	-1	2	1	-2
1		-1	1	2
	-1	1	2	0

Terminemos de resolver la ecuación de segundo grado.

$$-\lambda^2+\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)} = \frac{-1\pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Los valores de λ para los que el determinante de A - $2I$ es cero son el -1, 1 y 2.

(b) Sustituyamos en la matriz A - $2I$ el valor de λ por -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -2-2 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz inversa de A - $2I$ mediante el método de Gauss, para ello pondremos a la derecha de dicha matriz la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de A - $2I$, $(A-2I)^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 5 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 5 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] - 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 3.
Dividamos la 2ª fila por -4.
Dividamos la 3ª fila por -3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & 1/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa que queríamos calcular, es decir:

$$(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ 5/4 & 1/4 & 5/4 \\ -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) La recta que pasa por P(1, 0, -1) y es perpendicular al plano π, tiene como vector de dirección al vector normal al plano, el (2, 2, -1), o a uno proporcional, que es la condición de perpendicularidad entre recta y plano.

La ecuación en forma continua de dicha recta es: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

(b) Escribamos en primer lugar la ecuación del plano π en forma paramétrica. Para ello expresaremos el sistema formado sólo por la ecuación de dicho plano en forma matricial. Lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

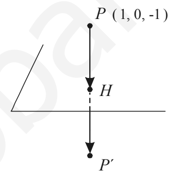
$2x+2y-z-6=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las columnas 1ª y 3ª

$\begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, nos sobran dos incógnitas, la y y la x, que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales.

$\left(\begin{array}{c|c} -1 & 6-2y-2x \end{array}\right)$ La solución es: $-z=6-2y-2x \quad \Rightarrow \quad z=-6+2y+2x$

Sustituyamos cada una de las incógnitas no principales o secundarias, la y y la x, por un parámetro, por ejemplo, por α y β respectivamente.

$$\pi \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=-6+2\alpha+2\beta \end{cases}$$



El simétrico del punto P respecto del plano π es otro punto P' de tal manera que el vector $\vec{PH}$ es perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, el $\vec{u}$ y el $\vec{v}$, y además $\vec{PH}=\vec{HP'}$. Siendo H un punto del plano.

El punto H inicialmente tendrá las coordenadas genéricas siguientes: $H(\alpha,\ \beta,\ -6+2\alpha+2\beta)$

$$\vec{PH}=(\alpha,\ \beta,\ -6+2\alpha+2\beta)-(1,\ 0,\ -1)=(\alpha-1,\ \beta,\ -5+2\alpha+2\beta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{PH}\perp\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{PH}\bullet\vec{u}=0 \\ \vec{PH}\perp\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{PH}\bullet\vec{v}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\alpha-1,\ \beta,\ -5+2\alpha+2\beta)\bullet(1,\ 0,\ 2)=0 \\ (\alpha-1,\ \beta,\ -5+2\alpha+2\beta)\bullet(0,\ 1,\ 2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\left.\begin{array}{r} \alpha-1-10+4\alpha+4\beta=0 \\ \beta-10+4\alpha+4\beta=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\alpha+4\beta=11 \\ 4\alpha+5\beta=10 \end{array}\right\}$ Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 10 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=5\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $5\cdot[2^a f.]-4\cdot[1^a f.]$

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 11 \\ 0 & 9 & 6 \end{array}\right)$ Simplifiquemos la 3ª fila por 3.

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=5\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $3\cdot[1^a f.]-4\cdot[2^a f.]$

$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$ Simplifiquemos la 1ª fila por 5.

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$ La solución es: $3\alpha=5 \quad ; \quad 3\beta=2 \quad \Rightarrow$
$\alpha=5/3 \quad ; \quad \beta=2/3$

Sustituyamos estos valores que hemos obtenido en el vector $\vec{PH}$ y en el punto H.

$$\vec{PH}=(\alpha-1,\ \beta,\ -5+2\alpha+2\beta)=\left(\frac{5}{3}-1,\ \frac{2}{3},\ -5+2\cdot\frac{5}{3}+2\cdot\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

$$H=(\alpha,\ \beta,\ -6+2\alpha+2\beta)=\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ -6+2\cdot\frac{5}{3}+2\cdot\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$$

Supongamos que P' tiene de coordenadas $(a,\ b,\ c)$, y como $\vec{PH}=\vec{HP'}$, tendremos:

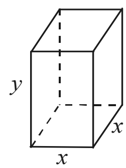
$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)=(a,\ b,\ c)-\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{4}{3}\right)\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}=a-\frac{5}{3} \ \Rightarrow\ a=\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3}=b-\frac{2}{3} \ \Rightarrow\ b=\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3}=c+\frac{4}{3} \ \Rightarrow\ c=-\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow\ P'\left(\frac{7}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Construyamos la función superficie, que es la que me piden que sea mínima.

$$S=x\cdot x+4x\cdot y \quad \Rightarrow \quad S=x^2+4x\cdot y$$



Busquemos la relación existente entre la x y la y. Para lo cual nos basamos en la condición que nos da el ejercicio y es que el volumen del depósito es de 500 m^3.

$500=x^2\cdot y$

Despejemos la y y sustituyámosla en la función superficie.

$$y=\frac{500}{x^2}\ \Rightarrow\ S(x)=x^2+4x\cdot\frac{500}{x^2}\ \Rightarrow\ S(x)=x^2+\frac{2000}{x}$$

El dominio de esta función es el intervalo abierto que va desde 0 hasta $\sqrt{500}$, es decir:

$$\text{Dom}\,S(x)=\left(0,\ \sqrt{500}\right)$$

La función $S(x)$ es una función continua y derivable en su dominio ya que es la suma de una función polinómica que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y de una función de proporcionalidad inversa que lo sería también en todo $\mathbb{R}$ salvo en el cero, pero este valor no pertenece al dominio que estamos considerando.

Calculemos los mínimos relativos o locales, que se encontrarán entre los que anulen a la primera derivada.

$$S(x)=x^2+\frac{2000}{x}\ \Rightarrow\ S'(x)=2x-\frac{2000}{x^2}$$

Obtengamos los valores que anulen a la primera derivada

$$2x-\frac{2000}{x^2}=0\ \Rightarrow\ \frac{2x^3-2000}{x^2}=0\ \Rightarrow\ 2x^3-2000=0\ \Rightarrow\ 2x^3=2000\ \Rightarrow\ x=10$$

Comprobemos que es el mínimo relativo y absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía. Construimos los dos intervalos posibles de monotonía dentro de su dominio, el (0, 10) y el $\left(10,\ \sqrt{500}\right)$. Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de esos intervalos, por ejemplo, el 1 y el 20, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero en el intervalo correspondiente la gráfica de la función será creciente o decreciente.

$$S'(1)=2\cdot 1-\frac{2000}{1^2}=-1998<0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (0,10)$$

$$S'(20)=2\cdot 20-\frac{2000}{20^2}=35>0\ \Rightarrow \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } \left(10,\ \sqrt{500}\right)$$

A la vista de todo lo anterior el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es mínimo relativo sino también mínimo absoluto. En definitiva las dimensiones que ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima son:

$$x = 10 \;\Rightarrow\; y = \frac{500}{x^2} = \frac{500}{10^2} = 5$$

es decir, el lado del cuadrado de la base es 10 *m*. y la altura 5 *m*.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$ es:

$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(1) = f'(1)\,(x - 1) \quad \Rightarrow$

Calculemos la derivada de la función en el punto 1, $f'(1)$, y el valor de la función en el punto 1, $f(1)$:

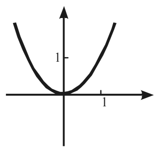
$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$

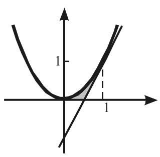
$f(1) = 1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 2\cdot 1 = 2$

$y - f(1) = f'(1)\,(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 2\,(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1$

que es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

(b) La función $f(x) = x^2$ es una función cuadrática elemental, su gráfica es el de una parábola y se encuentra situada a la derecha.





La recta tangente $y = 2x - 1$ pasa por los puntos $(0, -1)$, $(½, 0)$ que son los puntos de corte con los ejes y el $(1, 1)$ que es el de tangencia. El recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente y el eje OX, es el que se encuentra sombreado a la izquierda.

El área del recinto anterior es:

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 x^2\,dx\right| - \left|\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right| - \left|\left[\frac{2x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{2}}^1\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right| - \left|\left[\frac{2x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{2}}^1\right| =$$

$$= \left|\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right| - \left|\frac{2\cdot 1^2}{2} - 1 - \left(\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{3} - 0\right| - \left|0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ unidades de área}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro m.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & -1 & -1 \\ 1 & 2m & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & -1 & -1 \\ 0 & 2m-1 & -m & -1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{ccc|c} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ 0 & -m & 2m-1 & -1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [2ªf.]

$$\begin{array}{ccc|c} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ 0 & 0 & -m^2+2m-1 & -1+m \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow -m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = 1$

** Si $m = 1 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, un sistema con infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow m \neq 1 \Rightarrow$ La tercera ecuación es una ecuación normal por lo que nos quedaría un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible determinado.

(b) Resolvamos el sistema para m = 1, que es cuando el sistema es compatible indeterminado, para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que habíamos obtenido en el apartado anterior el valor de m por 1.

$$\begin{array}{ccc|c} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ 0 & 0 & -m^2+2m-1 & -1+m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminemos la 3ª fila, tal como lo habíamos obtenido en el apartado anterior .

$$\begin{array}{ccc|c} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc|c} (x) & (z) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-y \\ 0 & -1 & -1-y \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{cc|c} (x) & (z) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2y \\ 0 & -1 & -1-y \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $x = -2y$; $-z = -1-y$
o lo que es lo mismo: $x = -2y$; $z = 1+y$

Terminemos de despejar las incógnitas, para ello sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la y, por un parámetro, por ejemplo, por α:

$$x = -2\alpha \;\; ; \;\; y = \alpha \;\; ; \;\; z = 1 + \alpha$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Calculemos el punto de corte del plano π con cada uno de los ejes coordenados.

Para obtener el punto de corte con el eje OX resolveremos el sistema formado por la ecuación del plano y por la ecuación del eje OX:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=6 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 2x=6 \;\Rightarrow\; x=3 \;\Rightarrow\; P(3,0,0)$$

Con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=6 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 2y=6 \;\Rightarrow\; y=3 \;\Rightarrow\; Q(0,3,0)$$

Con el eje OZ:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=6 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; -z=6 \;\Rightarrow\; z=-6 \;\Rightarrow\; R(0,0,-6)$$

El área del triángulo PQR es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left| PQ \times PR \right|$$

$$\vec{PQ} = (0,3,0)-(3,0,0) = (-3,3,0) \qquad ; \qquad \vec{PR} = (0,0,-6)-(3,0,0) = (-3,0,-6)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left| PQ \times PR \right| = \frac{1}{2}\left|(-3,3,0)\times(-3,0,-6)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(-18,\ -18,\ 9)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-18)^2+(-18)^2+9^2} = \frac{27}{2} \text{ unidades cuadradas}$$

(b) Estudiemos primeramente la posición relativa de la recta y el plano.

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=2t \end{array}\right.$$

Discutamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=2t \\ 2x+2y-z-6=0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; 2(1+2t)+2(-1-t)-2t-6=0 \;\Rightarrow\; 2+4t-2-2t-2t-6=0 \;\Rightarrow\; 0=6$$

Obtenemos una ecuación absurda, el sistema es incompatible, luego la recta y el plano son paralelos.

Escribamos ahora la ecuación del plano π en forma paramétrica. Lo haremos expresando el sistema, formado sólo por la ecuación de dicho plano, en forma matricial. Lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$$2x+2y-z-6=0 \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right)$$ Intercambiemos entre sí las columnas 1ª y 3ª

$$\begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

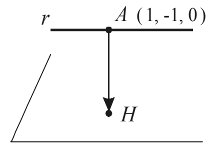
El sistema está diagonalizado, nos sobran dos incógnitas, la x y la y, que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$$\left(\begin{array}{c|c} -1 & 6-2x-2y \end{array}\right)$$

La solución es: $-z=6-2x-2y$, o lo que es lo mismo: $z=-6+2x+2y$

Sustituyamos cada una de las incógnitas no principales o secundarias, la x y la y, por un parámetro, por ejemplo, por α y β respectivamente.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -6 + 2\alpha + 2\beta \end{cases}$$



Hallemos ahora la distancia de la recta al plano, que al ser paralelos, bastará elegir un punto cualquiera de la recta r, por ejemplo, el $A(1, -1, 0)$ y un punto genérico H del plano, y calcular la distancia entre ambos puntos.

Al punto genérico H del plano le impondremos la condición de que el vector $\vec{AH}$ ha de ser perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, el $\vec{u}$ y el $\vec{w}$.

El punto H, por pertenecer al plano, tendrá las coordenadas genéricas siguientes:

$$H = (\alpha, \beta, -6+2\alpha+2\beta)$$

$$\vec{AH} = (\alpha, \beta, -6+2\alpha+2\beta) - (1, -1, 0) = (\alpha-1, \beta+1, -6+2\alpha+2\beta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{AH} \bullet \vec{u} = 0 \\ \vec{AH} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{AH} \bullet \vec{w} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\alpha-1, \beta+1, -6+2\alpha+2\beta) \bullet (1, 0, 2) = 0 \\ (\alpha-1, \beta+1, -6+2\alpha+2\beta) \bullet (0, 1, 2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - 1 - 12 + 4\alpha + 4\beta = 0 \\ \beta + 1 - 12 + 4\alpha + 4\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\alpha + 4\beta = 13 \\ 4\alpha + 5\beta = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 13 \\ 4 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 13 \\ 0 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 9 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 9 · [1ªf.] - 4 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 45 & 0 & 105 \\ 0 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 15.
Simplifiquemos la 2ª fila por 3.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

La solución es: $3\alpha = 7 \;;\; 3\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{7}{3} \;;\; \beta = \frac{1}{3}$

El vector $\vec{AH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{AH} = (\alpha-1, \beta+1, -6+2\alpha+2\beta) = \left(\frac{7}{3}-1, \frac{1}{3}+1, -6+2\cdot\frac{7}{3}+2\cdot\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La distancia pedida será:

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(A, \pi_1) = \text{dist}(A, H) = \left|\vec{AH}\right| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = 2$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN JUNIO 2008

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Sea f la función definida para $x \neq 0$, por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de f.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Calcula

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2 - x)(x-1)}$$

EJERCICIO 3. Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

(a) [1´25 PUNTOS] ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

(b) [1´25 PUNTOS] Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuántos billetes hay de cada tipo.

EJERCICIO 4. Dada la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

(a) [1´25 PUNTOS] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.

(b) [1´25 PUNTOS] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

EJERCICIO 2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=e^{-2x}$

(a) [1 PUNTO] Justifica que la recta de ecuación $y=-2ex$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-\frac{1}{2}$.

(b) [1´25 PUNTOS] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

EJERCICIO 3. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m^2 & m^2\\ m & m & m^2\end{pmatrix}$.

(a) [1 PUNTO] Halla los valores de parámetro *m* para los que el rango de *A* es menor que 3.

(b) [1´5 PUNTOS] Estudia si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de *m* obtenidos en el apartado anterior.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS] Dados los puntos $A(2, 1, 1)$ y $B(0, 0, 1)$, halla los puntos *C* en el eje *OX* tales que el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* es 2.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

- Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "*a*" tal que se satisfaga: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$

Comprobemos si existen. Al tratarse del producto de una función polinómica, *x*, por una función exponencial, $e^{\frac{1}{x}}$, los posibles valores de "*a*" hay que buscarlos entre los que anulan al denominador del exponente, en nuestro caso, el cero. Lo haremos primero a la izquierda del cero y después a la derecha.

Veámoslo.

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}\left(x e^{\frac{1}{x}}\right)=0^-\cdot e^{\frac{1}{0^-}}=0^-\cdot e^{-\infty}=0^-\cdot 0=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\left(x e^{\frac{1}{x}}\right)=0^+\cdot e^{\frac{1}{0^+}}=0^+\cdot e^{+\infty}=[0\cdot\infty]=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{+\infty}=+\infty$$

La indeterminación de $[0\cdot\infty]$ la hemos transformado en otra del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, para poderla destruir aplicando la regla de L´Hôpital, que consiste en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro.

En consecuencia, la función $f(x)$ tiende a 0 cuando x se acerca a 0 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha. Por tanto, sólo hay asíntota vertical, $x = 0$, para x tendiendo a 0 por la derecha, es decir, cuando $x \to 0^+$.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Calculemos estos límites para comprobar si existen o no asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x e^{\frac{1}{x}}\right) = \infty \cdot e^{\frac{1}{\infty}} = \infty \cdot e^0 = \infty \cdot 1 = \infty$$

luego no hay asíntota horizontal por la derecha, para $x\to+\infty$, veamos si la hay por la izquierda.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x e^{\frac{1}{x}}\right) = -\infty \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty \cdot e^0 = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

tampoco la hay por la izquierda, para $x\to-\infty$. En definitiva, no hay asíntota horizontal, sin embargo se dan las condiciones necesarias para que puedan existir asíntotas oblicuas.

- Asíntota oblicua.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = mx + n$, en primer lugar para $x\to+\infty$. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right) = \infty \cdot \left(e^{\frac{1}{\infty}} - 1\right) = \infty \cdot \left(e^0 - 1\right) = \infty \cdot 0 =$$

esta indeterminación de $\infty\cdot 0$ la transformamos en otra de $\left[\frac{0}{0}\right]$, que destruiremos aplicando la regla de L´Hôpital, consistente en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro.

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}\right) = \left[\frac{e^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\frac{1}{\infty}}\right] = \left[\frac{e^0 - 1}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

luego hay una asíntota oblicua, $y = x + 1$, para $x\to+\infty$.

Calculemos la ecuación de la otra posible asíntota oblicua: $y = mx + n$, para $x\to-\infty$. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n.

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right) = -\infty \cdot \left(e^{\frac{1}{-\infty}} - 1\right) = -\infty \cdot 0 =$$

esta indeterminación de $\infty\cdot 0$ la transformamos en otra de $\left[\frac{0}{0}\right]$, que destruiremos aplicando la regla de L´Hôpital, consistente en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro.

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}\right) = \left[\frac{e^{\frac{1}{-\infty}} - 1}{\frac{1}{-\infty}}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1$$

luego también hay una asíntota oblicua, $y = x + 1$, para $x\to-\infty$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos, primeramente, la integral indefinida siguiente:

$$\int \frac{1}{(x^2-x)(x-1)}\,dx$$

Se trata de una integral racional propia, por lo que calcularemos los valores que anulan al denominador del integrando.

$$(x^2-x)(x-1)=0 \;\Rightarrow\; x(x-1)(x-1)=0=\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Hemos obtenido una raíz simple, $x = 0$, y otra doble, $x = 1$.

Descompongamos la fracción del integrando en fracciones elementales en función de sus raíces.

$$\frac{1}{(x^2-x)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(x^2-x)(x-1)}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} \;\Rightarrow$$

Calculemos los coeficientes.

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \;\Rightarrow\; 1=A(0-1)^2+B\cdot 0\cdot(0-1)+C\cdot 0 \;\Rightarrow\; 1=A \\ x=1 \;\Rightarrow\; 1=A(1-1)^2+B\cdot 1\cdot(1-1)+C\cdot 1 \;\Rightarrow\; 1=C \\ x=2 \;\Rightarrow\; 1=A(2-1)^2+B\cdot 2\cdot(2-1)+C\cdot 2 \;\Rightarrow\; 1=A+2B+2C \;\Rightarrow \\ \qquad 1=1+2\cdot B+2 \;\Rightarrow \\ \qquad B=-1 \end{cases}$$

Terminemos de calcular la integral indefinida.

$$\int \frac{1}{(x^2-x)(x-1)}\,dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\right)dx=\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx=$$

$$=\mathrm{Ln}|x|-\mathrm{Ln}|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=\mathrm{Ln}|x|-\mathrm{Ln}|x-1|-\frac{1}{x-1}$$

Calculemos ahora la integral definida que nos pide el ejercicio.

$$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{(x^2-x)(x-1)}\,dx=\left[\mathrm{Ln}|x|-\mathrm{Ln}|x-1|-\frac{1}{x-1}\right]_{-2}^{-1}=$$

$$=\mathrm{Ln}|-1|-\mathrm{Ln}|-1-1|-\frac{1}{-1-1}-\left(\mathrm{Ln}|-2|-\mathrm{Ln}|-2-1|-\frac{1}{-2-1}\right)=$$

$$=\mathrm{Ln}|-1|-\mathrm{Ln}|-1-1|-\frac{1}{-1-1}-\left(\mathrm{Ln}|-2|-\mathrm{Ln}|-2-1|-\frac{1}{-2-1}\right)=$$

$$=-\mathrm{Ln}(2)+\frac{1}{2}-\left(\mathrm{Ln}(2)-\mathrm{Ln}(3)+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}+\mathrm{Ln}(3)-2\cdot\mathrm{Ln}(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Llamemos x al número de billetes de 10 euros que hay en el cajero, y a los que hay de 20 y z a los de halla de 50 euros.

La ecuaciones que podemos establecer según las condiciones del enunciado del problema son:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 130 \\ 10x+20y+50z &= 3000 \end{aligned}\right\}$$

Supongamos ahora, según la pregunta, que sí sea posible que haya triple número de billetes de 10 que de 50, es decir, se habría de cumplir: $x = 3z$. Lo que daría lugar a la 3ª ecuación:

$$x - 3z = 0.$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z = 130 \\ 10x+20y+50z = 3000 \\ x-3z = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y veamos si admite solución, es decir, se trata de un sistema compatible. Lo haremos mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 10 & 20 & 50 & 3000 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 10 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 10 & 40 & 1700 \\ 0 & -1 & -4 & -130 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 10 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 10 · [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 10 & 40 & 1700 \\ 0 & 0 & 0 & 400 \end{array}\right)$$

La última ecuación, $0 = 400$, es una ecuación absurda por lo que el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución, por lo que no es posible que haya el triple número de billetes de 10 que de 50.

(b) Imponiendo la condición de este otro apartado, que el número de billetes de 10 es el doble que el de billetes de 50, $x = 2z$, la 3ª ecuación sería: $x - 2z = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z = 130 \\ 10x+20y+50z = 3000 \\ x-2z = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 10 & 20 & 50 & 3000 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 10 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 10 & 40 & 1700 \\ 0 & -1 & -3 & -130 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 10 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 10 · [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 10 & 40 & 1700 \\ 0 & 0 & 10 & 400 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 10.
Simplifiquemos la 3ª fila por 10.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 1 & 4 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

La solución es: $x = 80$; $y = 10$; $z = 40$.
Nº de billetes de 10 euros: 80
Nº de billetes de 20 euros: 10
Nº de billetes de 50 euros: 40

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para hallar la ecuación del plano que nos piden necesitamos conocer un punto y dos vectores de dirección. Como contiene a la recta r, un punto de esta recta, el $A(1, -1, 2)$ y el vector de dirección de la misma, el $\vec{v} = (2, 3, 1)$, serán también un punto y un vector de dirección del plano.

Por otro lado, como el plano pasa por el origen, $O(0, 0,,0)$, el otro vector de dirección será el vector que determinen el punto A de la recta y el origen, es decir:

$$\vec{OA} = (1, -1, 2) - (0, 0, 0) = (1, -1, 2)$$

vector que es linealmente independiente del de dirección de la recta $\vec{v} = (2, 3, 1)$, ya que sus coordenadas no son proporcionales.

La ecuación del plano es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 + 3\lambda - \mu \\ z = \ \ 2 + \lambda + 2\mu \end{cases}$$

(b) Para hallar la ecuación del plano que nos piden necesitamos conocer un punto, el origen $O(0, 0, 0)$, y un vector perpendicular al mismo. Como la recta r es perpendicular al plano, el vector de dirección de la misma, el $\vec{v} = (2, 3, 1)$, será un vector normal al plano.

La ecuación general del plano es:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde A, B y C representan las coordenadas de un vector normal al plano, por tanto:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y + z + D = 0$$

Necesitamos calcular D, para lo cual le imponemos la condición al plano de pasar por el punto $O(0, 0, 0)$.

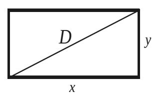
$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

La ecuación del plano, finalmente será:

$$2x + 3y + z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y + z = 0$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construyamos la función longitud de la diagonal, que es lo que me piden que sea mínimo; tomemos como variable independiente la base, x, del rectángulo.

$$D(x) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad [1]$$

donde hemos aplicado el teorema de Pitágoras.

Busquemos la relación existente entre la x y la y, altura del rectángulo, es decir, la condición que nos da el problema y es que el perímetro 8 cm.

$8 = 2x + 2y \ \Rightarrow \ 4 = x + y \ \Rightarrow \ y = 4 - x \quad \Rightarrow$ Sustituyamos este valor de y en [1]

$$D(x) = \sqrt{x^2 + y^2} \ \Rightarrow \ D(x) = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2} \ \Rightarrow \ D(x) = \sqrt{x^2 + 16 + x^2 - 8x} \ \Rightarrow$$

$$D(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$$

Calculemos el dominio de esa función. De entrada, los valores de x tendrán que ser mayores que cero y menores que 4 debido a las condiciones del problema (x es la base del rectángulo y el perímetro es 8). Pero obtengamos también los que hagan al radicando mayor que cero. Para lo cual resolveremos la siguiente inecuación.

$$2x^2-8x+16>0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2-8x+16=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x+8=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}$$

luego no hay ningún valor que anule a la expresión, por lo que sólo tendremos un intervalo posible de solución, el (0, 4), teniendo en cuenta la restricción que ya tenemos del dominio.

Sustituyamos un punto cualquiera de dicho intervalo, por ejemplo el 1, en la inecuación:

$2x^2-8x+16>0 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 1^2-8\cdot 1+16=10>0 \quad\Rightarrow$ Dom $D(x)$ = (0, 4).

La función $D(x)$ al tratarse de la raíz cuadrada de una función polinómica, será continua y derivable, en este caso, para todos los valores de su dominio; ya que no sería derivable para los valores que anulasen al radicando pero en nuestro caso no los hay.

Calculemos los mínimos relativos o locales. Obtengamos la función primera derivada.

$$D'(x)=\frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+16}}$$

Calculemos el valor o los valores que anulen a esta primera derivada.

$$4x-8=0 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

Es el único valor que anula a la derivada y que pertenece al dominio.

Comprobemos que es el mínimo relativo y absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: (0, 2) y (2, 4).

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 1 y 3, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$D'(1)=\frac{4\cdot 1-8}{2\sqrt{2\cdot 1^2-8\cdot 1+16}}=\frac{-4}{2\sqrt{10}}<0 \quad\Rightarrow\quad \text{decreciente en } (0, 2)$$

$$D'(3)=\frac{4\cdot 3-8}{2\sqrt{2\cdot 3^2-8\cdot 3+16}}=\frac{4}{2\sqrt{10}}>0 \quad\Rightarrow\quad \text{creciente en } (2, 4)$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es mínimo relativo sino también mínimo absoluto. En definitiva, las dimensiones del rectángulo que tiene la diagonal de menor longitud son:

* Base del rectángulo: x = 2 cm.
* Altura del rectángulo: $y = 4 - x = 4 - 2 = 2$ cm.

Se trata de un cuadrado.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x_0=-\frac{1}{2}$.

$$y-y_0=f'(x_0)\,(x-x_0)$$

La derivada de la función $f(x)=e^{-2x}$ en el punto $x_0=-\frac{1}{2}$ es:

$$f(x)=e^{-2x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-2e^{-2x} \Rightarrow\quad f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-2e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} \quad\Rightarrow\quad f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-2e$$

Si el punto de tangencia tiene de abscisa $x_0=-\frac{1}{2}$, la ordenada de dicho punto es:

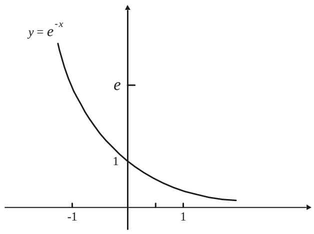
$$f(x)=e^{-2x} \quad\Rightarrow\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} \quad\Rightarrow\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=e$$

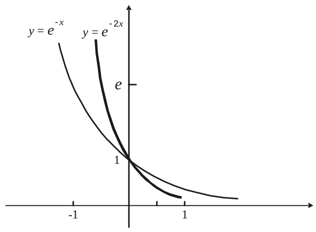
Luego la ecuación de la recta tangente es:

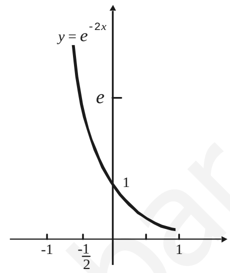
$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - e = -2e\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \;\Rightarrow\; y - e = -2ex - e \;\Rightarrow\; y = -2ex$$

precisamente la misma que nos da el problema.

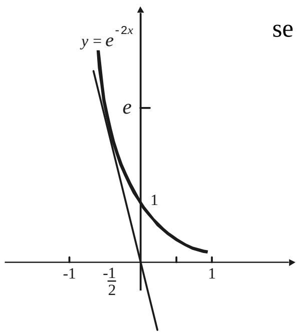
(b) La gráfica de $f(x) = e^{-2x}$ la obtendremos a partir de la de exponencial elemental $g(x) = e^{-x}$ mediante una contracción de ésta a la mitad.







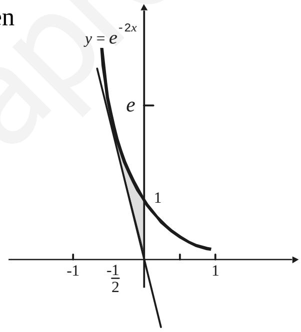
Representemos ahora la recta tangente, $y = -2ex$, a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x_0 = -\frac{1}{2}$. Se trata de una recta que pasa por origen de coordenadas.



El área del recinto que nos piden se encuentra sombreado al lado.

Calculemos dicha área.

$$\text{Área} = \int_{-1/2}^{0} \left(e^{-2x} - (-2ex)\right)dx = \int_{-1/2}^{0} \left(e^{-2x} + 2ex\right)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + 2\frac{ex^2}{2}\right]_{-1/2}^{0} =$$



$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + ex^2\right]_{-1/2}^{0} = -\frac{1}{2}e^{-2\cdot 0} + e\cdot 0^2 - \left(-\frac{1}{2}e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} + e\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}e = \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para calcular los valores de *m* para los que el rango de la matriz *A* sea menor que 3, lo haremos mediante la obtención, por Gauss, de una matriz triangulada inferiormente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - m · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2 - m & m^2 - m \\ 0 & 0 & m^2 - m \end{pmatrix}$$

La matriz está triangulada inferiormente. Pero no todos los coeficientes de la diagonal principal son distintos de cero, estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - m = 0 \quad \Rightarrow \quad m(m-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad ; \quad m = 1$

** Si $m = 0 \quad \Rightarrow$ La matriz A quedaría así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2-m & m^2-m \\ 0 & 0 & m^2-m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0^2-0 & 0^2-0 \\ 0 & 0 & 0^2-0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, sólo habría una fila linealmente independiente, ya que el resto de filas son ceros, por lo que el rango de la matriz A es 1.

** Si $m = 1 \quad \Rightarrow$ La matriz A quedaría así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2-m & m^2-m \\ 0 & 0 & m^2-m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1^2-1 & 1^2-1 \\ 0 & 0 & 1^2-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, sólo habría una fila linealmente independiente, ya que el resto de filas son ceros, por lo que el rango de la matriz A es 1.

* $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq 0$ y $m \neq 1 \quad \Rightarrow$ La matriz A quedaría así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2-m & m^2-m \\ 0 & 0 & m^2-m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \neq 0 & \neq 0 \\ 0 & 0 & \neq 0 \end{pmatrix}$$

es decir, habría tres filas linealmente independientes, por lo que el rango de la matriz A sería 3.

(b) El sistema que nos dan en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m^2 & m^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

Estudiémoslo para $m = 0$, para ello sustituyamos este valor en el sistema anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 0 &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Se trata de un sistema con dos ecuaciones absurdas, por lo que es un sistema incompatible, no tiene solución.

Para $m = 1$, sustituyamos este valor en el sistema [1].

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Discutamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss, para ello lo pondremos en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido dos ecuaciones triviales, la 2ª y 3ª, que podemos eliminarlas, quedando un sistema de una ecuación con tres incógnitas. Se trata de un sistema compatible indeterminado biparamétrico, con infinitas soluciones.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Los puntos C del eje OX serán de la forma $C(a, 0, 0)$

Para calcular el área del triángulo ABC, obtengamos antes los vectores:

$$\vec{BA} = (2, 1, 1) - (0, 0, 1) = (2, 1, 0)$$

$$\vec{BC} = (a, 0, 0) - (0, 0, 1) = (a, 0, -1)$$

Área del triángulo ABC = $\frac{1}{2}\left|\vec{BA} \times \vec{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|(2, 1, 0) \times (a, 0, -1)\right| =$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ a & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(-1, -(-2), -a\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(-1, 2, -a\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-a)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5 + a^2}$$

El área de este triángulo es 2 según los datos del problema, por tanto:

$$\frac{1}{2}\sqrt{5+a^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5+a^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad 5 + a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 11 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{11}$$

Los puntos C del eje OX que hacen que el área del triángulo ABC sea 2 son:

$$C_1 = \left(\sqrt{11}, 0, 0\right) \quad \text{y} \quad C_2 = \left(-\sqrt{11}, 0, 0\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2008

Opción A

EJERCICIO 1. Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Halla a y b sabiendo que f es derivable en $\mathbb{R}$.
(b) [1 PUNTO]. Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

EJERCICIO 2. Dada la función $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$.
(a) [1 PUNTO]. Esboza la gráfica de g.
(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula $\int_0^2 g(x)\,dx$.

EJERCICIO 3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a-1 \\ 2x+y+az & = & a \\ x+ay+z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Discútelo según los valores del parámetro a.
(b) [1 PUNTO]. Resuélvelo en el caso $a=2$.

EJERCICIO 4. Sea la recta s dada por $\begin{cases} x-z = -1 \\ 2y+z = 3 \end{cases}$

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y que contiene a la recta r, dada por $x - 1 = -y+2 = z - 3$.
(b) [1´25 PUNTOS]. Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2, de ecuación $x+y=3$, y deduce la distancia entre ambos.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto (1,2), encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

EJERCICIO 2. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=x^2-1 \quad \text{y} \quad g(x)=2x+2$$

(a) [0´5 PUNTOS]. Esboza las gráficas de *f* y *g*.
(b) [2 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

EJERCICIO 3. Sabemos que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=1 \\ x+2y-z=2 \end{array}\right\}$$

tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$.
(a) [1´25 PUNTOS]. Determina el valor de *a*.
(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

EJERCICIO 4. Dados los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(1, -1, 1)$.
(a) [1´5 PUNTOS]. Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.
(b) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano que contiene al punto *A* y es perpendicular a la recta determinada por *B* y *C*.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Si la función *f(x)* es derivable en todo $\mathbb{R}$ tiene que ser continua también en $\mathbb{R}$.

Calculemos *a* y *b* sabiendo que *f* es derivable, estudiando previamente la continuidad.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de *x* menores que 2, $x<2$, es una función cuadrática, que es continua en todo $\mathbb{R}$, luego la función es continua para $x<2$.

- El trozo de función para valores de *x* mayores que 2, $x>2$, es una función polinómica, que es continua en todo $\mathbb{R}$, luego la función es continua para $x>2$.

- El problema de la continuidad está en el punto 2, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver que existen y que han de coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} \left(ax^2+3x\right) = 4a+6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} \left(x^2-bx-4\right) = 4-2b-4 = -2b \\ f(2) = a\cdot 2^2 + 3\cdot 2 = 4a+6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \\ 4a+6 = -2b \;\Rightarrow\; 4a+2b = -6 \end{array}\right.$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 2, cuando se verifique que: $4a + 2b = -6$. [1]

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$, siempre que se cumpla la condición anterior.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, pero en nuestro caso como es continua se ha verificar la condición [1].

- Para valores de $x<2$, f al ser una función cuadrática es derivable en $\mathbb{R}$, luego la función es derivable para $x<2$, siendo la derivada, $2ax + 3$.

- Para valores de $x>2$, f es derivable por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $2x - b$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+3 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x-b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

- El problema está en el punto 2.

En el punto 2 será derivable, si las derivadas laterales coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x>2}} (2ax+3) = 4a+3 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x<2}} (2x-b) = 4-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(2^-) = f'(2^+) \;\Rightarrow \\ 4a+3 = 4-b \;\Rightarrow\; 4a+b = 1 \end{array}\right.$$

luego la función *f(x)* será derivable en $x = 2$ siempre y cuando $4a + b = 1$. [2]

En definitiva *f(x)* será derivable en $\mathbb{R}$ cuando se satisfagan las condiciones [1] y [2].

Resolvamos el sistema formado por ambas ecuaciones para calcular el valor de *a* y *b*.

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b=-3 \\ 4a+b=\;\;1 \end{array}\right\}$$

Lo haremos mediante el método de reducción de Gauss.

Diagonalicemos.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

La solución es: $2a = 4$; $-b = 7$ $\Rightarrow$ $a = 2$; $b = -7$

Estos son los valores de *a* y *b* para los que la función *f* es derivable.

La función derivada será:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+3 & \text{si} \quad x\le 2\\ 2x-b & \text{si} \quad x>2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases}4x+3 & \text{si} \quad x\le 2\\ 2x+7 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

(b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$, es:

$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(3) = f'(3)\,(x - 3) \quad \Rightarrow$

La derivada de la función en el punto 3, $f'(3)$, es:

$$f'(x)=\begin{cases}4x+3 & \text{si} \quad x\le 2\\ 2x+7 & \text{si} \quad x>2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(3)=2\cdot 3+7=13$$

y el valor de la función en dicho punto será:

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+3x & \text{si} \quad x\le 2\\ x^2-bx-4 & \text{si} \quad x>2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases}2x^2+3x & \text{si} \quad x\le 2\\ x^2+7x-4 & \text{si} \quad x>2\end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(3)=x^2+7x-4=3^2+7\cdot 3-4=26$$

La ecuación de la recta tangente será:

$y - f(3) = f'(3)\,(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y - 26 = 13\cdot(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = 13x - 13$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$, es:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad y-f(3)=-\frac{1}{f'(3)}(x-3) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y-26=-\frac{1}{13}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{13}x+\frac{341}{13}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

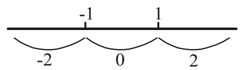
(a) Expresemos la función $g(x)$ como una función a trozos, teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto:

$$g(x) = 2x + |x^2 - 1| \quad \Rightarrow \quad g(x)=\begin{cases}2x-\left(x^2-1\right) & \text{si} \quad x^2-1\le 0\\ 2x+\left(x^2-1\right) & \text{si} \quad x^2-1>0\end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1 & \text{si} \quad x^2-1\le 0\\ x^2+2x-1 & \text{si} \quad x^2-1>0\end{cases}$$

Resolvamos las inecuaciones correspondientes a los dominios de cada trozo de función, para lo cual resolveremos, en primer lugar, la ecuación $x^2 - 1 = 0$.

$$x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x=1\\ x=-1\end{cases}$$



estos valores, -1 y 1, que anulan a la ecuación, los situamos ordenadamente en la recta real y construimos los posibles intervalos de solución, $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$; elegimos valores intermedios de los mismos, por ejemplo, -2, 0 y 2, y los probamos en las inecuaciones, viendo qué intervalos satisfacen a una u otra inecuación.

Si $x = -2 \quad \Rightarrow \quad (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 > 0$ en $(-\infty, -1)$

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 < 0$ en $(-1, 1)$

Si $x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 > 0$ en $(1, +\infty)$

A la vista de estos intervalos, podemos definir la función $g(x)$ más correctamente en función de los mismos.

$$g(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & \text{si} \quad x<-1\\ -x^2+2x+1 & \text{si} \quad -1\le x\le 1\\ x^2+2x-1 & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

Representemos primeramente el trozo de función, $y = x^2 + 2x - 1$, para valores de $x < -1$. Se trata de una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{matrix} y = x^2 + 2x - 1 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad y = 0^2 + 2\cdot 0 - 1 \;\Rightarrow\; y = -1 \;\Rightarrow\; (0, -1)$$

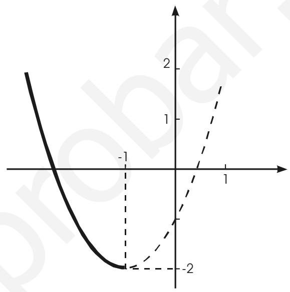
2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{matrix} y = x^2 + 2x - 1 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \;\Rightarrow \begin{cases} \left(-1-\sqrt{2},\ 0\right) \\ \left(-1+\sqrt{2},\ 0\right) \end{cases}$$

3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -b/(2a) = -2/(2\cdot 1) = -1 \quad \Rightarrow$

$y = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad V(-1, -2)$



La gráfica de este trozo es la situada al lado y que hemos destacado en negrita, aunque se ha punteado el resto de la gráfica.

Representemos el siguiente trozo, $y = -x^2 + 2x + 1$, para valores de $-1 \le x \le 1$. Se trata de una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{matrix} y = -x^2 + 2x + 1 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad y = -0^2 + 2\cdot 0 + 1 \;\Rightarrow\; y = 1 \;\Rightarrow\; (0, 1)$$

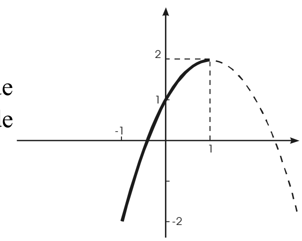
2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{matrix} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad -x^2 + 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2} \;\Rightarrow \begin{cases} \left(1-\sqrt{2},\ 0\right) \\ \left(1+\sqrt{2},\ 0\right) \end{cases}$$

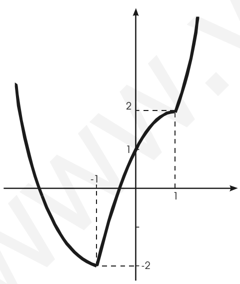
3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -b/(2a) = -2/(2\cdot(-1)) = 1 \quad \Rightarrow$

$y = -1^2 + 2\cdot 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad V(1, 2)$



La gráfica de este otro trozo es la situada al lado y que hemos destacado en negrita, aunque se ha punteado el resto de la gráfica.



El tercer trozo, $y = x^2 + 2x - 1$, para valores de $x < 1$, sería la continuación de la primera de las gráficas para estos valores de $x < 1$.

En definitiva la gráfica de la función *g(x)* es la situada al lado.

(b) Calculemos la integral.

$$\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx = \int_0^1 \left(-x^2 + 2x + 1\right)dx + \int_1^2 \left(x^2 + 2x - 1\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_1^2 = -\frac{1^3}{3} + 1^2 + 1 - \left(-\frac{0^3}{3} + 0^2 + 0\right) + \frac{2^3}{3} + 2^2 - 2 - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2 - 1\right) = 6.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (a - 1) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & a(2-a) \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; (a-1)(a-2) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

** Si $a = 1$ ⇒ La 3ª ecuación es, $0 = 1\cdot(2-1)$ ⇒ $0 = 1$, que es absurda. El sistema es incompatible, no tiene solución.

** Si $a = 2$ ⇒ La 3ª ecuación es, $0 = 0$, que es trivial, la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, un sistema con infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0$ ⇒ $a \neq 1$ y $a \neq 2$ ⇒ La tercera ecuación es una ecuación normal, tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible determinado.

(b) Resolvamos el sistema para $a=2$, para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que habíamos obtenido inicialmente en el apartado anterior el valor de a por -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & a(2-a) \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminemos la última ecuación que es trivial, tal como habíamos justificado en el apartado anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, la incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-z \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-z \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $x = 1 - z$; $-y = 0$.

Terminemos de despejar las incógnitas: $x = 1 - z$; $y = 0$.

Sustituyamos la incógnita secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, por $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$x = 1 - \lambda \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = \lambda$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Si el plano π_1 es paralelo a la recta s, el vector de dirección de ésta lo podemos tomar como uno de los vectores de dirección del plano. Teniendo en cuenta que la ecuación de s viene dada como intersección de dos planos, el vector de dirección de la recta s lo obtendremos mediante el producto vectorial del vector normal a uno de los planos por el vector normal al otro.

$$s \equiv \begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = (1,\ 0,\ -1) \\ \vec{n}_2 = (0,\ 2,\ 1) \end{cases} \quad \vec{v}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2,\ -1,\ 2)$$

Expresemos ahora la recta r de ecuación, $x - 1 = -y+2 = z - 3$, en forma continua.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

Si el plano π_1 contiene a la recta r, contendrá a un punto de ésta, el $(1, 2, 3)$, y el vector de dirección de la recta, el $(1, -1, 1)$ será un vector de dirección del plano.

Los dos vectores de dirección del plano obtenidos, el $(2, -1, 2)$ y el $(1, -1, 1)$, son vectores linealmente independientes, ya que sus componentes no son proporcionales.

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{1}$$

La ecuación del plano π_1 es: $\begin{cases} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ y = 2 - \alpha - \beta \\ z = 3 + \alpha + 2\beta \end{cases}$

(b) Para estudiar la posición relativa de la recta s y el plano π_2 de ecuación $x+y=3$, lo haremos discutiendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\left. \begin{array}{r} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \\ x + y = 3 \end{array} \right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

El sistema está triangulado inferiormente y todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, por tanto se trata de un sistema compatible determinado, con solución única, es decir la recta y el plano se cortan en un punto. En consecuencia, la distancia entre ambos es cero.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

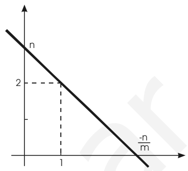
Construyamos la función área de un triángulo.

$$\text{Área} = \frac{base \times \ altura}{2}$$

Las rectas que pasan por el punto (1, 2) y cortan a las partes positivas de los ejes coordenados serán funciones afines, ya que no pasan por el origen de coordenadas. La expresión de las mismas será de la forma: $y = mx + n$.

Los puntos de corte de estas rectas con cada uno de los ejes coordenados será, con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y = mx+n \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = m\cdot 0 + n \ \Rightarrow \ y = n \ \Rightarrow \ (0, n)$$



y con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{l} y = mx+n \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = m\cdot x + n \ \Rightarrow \ x = -\frac{n}{m} \ \Rightarrow \ \left(-\frac{n}{m}, 0\right)$$

Teniendo en cuenta el dibujo situado al lado, la función área del triángulo será:

$$\text{Área} = \frac{base \times \ altura}{2} = \frac{-\frac{n}{m} \times n}{2} = -\frac{n^2}{2m}$$

Busquemos la relación existente entre la n y la m, es decir, la condición que nos da el problema y es que las rectas pasan por el punto (1, 2).

$$y = mx + n \quad \Rightarrow \quad 2 = m\cdot 1 + n \quad \Rightarrow \quad 2 = m + n \quad \Rightarrow \quad m = 2 - n$$

$$A(n) = -\frac{n^2}{2(2-n)} \quad \Rightarrow \quad A(n) = \frac{n^2}{2n-4}$$

Calculemos el dominio de esta función. De entrada, los valores de n tendrán que ser mayores que cero, es decir, estrictamente positivos debido a las condiciones del problema. Pero por pasar las rectas por el punto (1, 2) el valor de n ha de ser necesariamente mayor que 2.

Por otro lado, como la función *A(n)* es una función racional, los valores que anulen al denominador no pertenecen al dominio, calculémoslos: $2n - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 2$

En definitiva, el dominio de la función *A(n)* es: Dom *A(n)* = (2, +∞).

La función al ser racional, será continua y derivable en todo su dominio excepto para aquellos valores que anulen al denominador, o sea, será continua y derivable en (2, +∞).

Calculemos los mínimos relativos o locales. Obtengamos la función primera derivada.

$$A'(n) = \frac{2n(2n-4) - n^2\cdot 2}{(2n-4)^2} = \frac{4n^2 - 8n - 2n^2}{(2n-4)^2} = \frac{2n^2 - 8n}{(2n-4)^2}$$

Calculemos el valor o los valores que anulen a esta primera derivada.

$$2n^2 - 8n = 0 \quad \Rightarrow \quad 2n(n-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n = 0 \\ n = 4 \end{cases}$$

El único valor que anula a la derivada y que pertenece al dominio es el $n = 4$.

Comprobemos que es el mínimo relativo y absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: (2, 4) y (4, +∞).

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 3 y 5, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$A'(3) = \frac{2\cdot 3^2 - 8\cdot 3}{(2\cdot 3 - 4)^2} = \frac{-6}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{decreciente en } (2, 4)$$

$$A'(5) = \frac{2\cdot 5^2 - 8\cdot 5}{(2\cdot 5 - 4)^2} = \frac{10}{36} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{creciente en } (4, +\infty)$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es mínimo relativo sino también mínimo absoluto.

La recta que determina un área mínima con las partes positivas de los ejes de coordenadas, será:

$n = 4 \quad \Rightarrow \quad m = 2 - n \quad \Rightarrow \quad m = 2 - 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad y = mx + n \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 4.$

El área del triángulo es:

$$A(n) = \frac{n^2}{2n-4} \quad \Rightarrow \quad \text{Area} = A(4) = \frac{4^2}{2\cdot 4 - 4} = \frac{16}{4} = 4\ u^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Representemos primeramente la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$. Se trata de una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ y = 0^2 - 1 \Rightarrow \ y = -1 \quad \Rightarrow \quad (0, -1)$$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

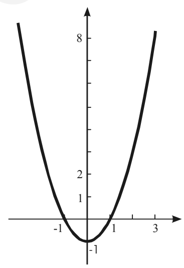
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 = 1 \ \Rightarrow \ \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (1,\ 0) \\ (-1,\ 0) \end{array}\right.$$

3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -b/(2a) = -0/(2\cdot 1) = 0 \quad \Rightarrow$

$y = 0^2 - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad V(0, -1)$

La gráfica de esta función es la situada al lado.



Representemos la gráfica de $g(x) = 2x + 2$. Se trata de una función afín, cuya gráfica es una recta.

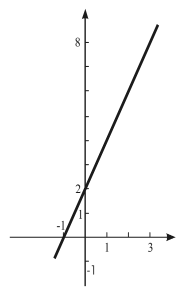
1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ y = 2\cdot 0 + 2 \Rightarrow \ y = 2 \quad \Rightarrow \quad (0, 2)$$

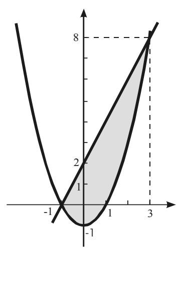
2.- Punto de corte con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 2x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ 2x = -2 \ \Rightarrow \ x = -1 \ \Rightarrow (-1,\ 0)$$

La gráfica de la función g se encuentra situada al lado.



(b) El recinto limitado por ambas gráficas es el que se encuentra sombreado al lado.



La función diferencia es: $h(x) = x^2 - 1 - (2x + 2) = x^2 - 2x - 3$

Calculemos los puntos de corte de esta función con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x^2 - 2x - 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\{\begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array}\right.$$

El área del recinto sombreado cuya área nos pide el problema será:

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}-3x\right]_{-1}^{3}\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^{3}\right| =$$

$$= \left|\frac{3^3}{3}-3^2-3\cdot 3-\left(\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2-3(-1)\right)\right| = \left|9-9-9-\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)\right| = \left|-9-\frac{5}{3}\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}\ u^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema inicial en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero; nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, luego se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

Discutamos ahora el sistema formado por el sistema inicial al que le vamos a añadir la ecuación $ax+y+7z=7$. Lo haremos mediante el método de reducción de Gauss, para ello expresaremos el sistema en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ a & 1 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - a · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 2+a & 14-3a & 14-a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 5 · [3ªf.] - (2 + a) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 80-10a & 64-8a \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse teniendo en cuenta que lo que buscamos es un sistema con el mismo conjunto de soluciones que el inicial, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 80 - 10a = 0 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, o sea, el mismo sistema inicial.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow a \neq 8 \Rightarrow$ La tercera ecuación es una ecuación normal, tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible determinado.

El valor de a que nos pide el ejercicio es el 8.

(b) Resolvamos el sistema inicial, continuando a partir de la triangulación inferior realizada.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1-3z \\ 0 & 5 & 3+5z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $5 \cdot$ [1ªf.] +[2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 8-10z \\ 0 & 5 & 3+5z \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado.
La solución es: $10x = 8 - 10z \quad ; \quad 5y = 3 + 5z$

Terminemos de despejar las incógnitas principales.

$$x = \frac{8}{10} - \frac{10}{10}z \quad ; \quad y = \frac{3}{5} + \frac{5}{5}z \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{4}{5} - z \quad ; \quad y = \frac{3}{5} + z$$

Sustituyamos la incógnita no principal, la z, por un parámetro, por ejemplo por λ.

$$x = \frac{4}{5} - \lambda \quad ; \quad y = \frac{3}{5} + \lambda \quad ; \quad z = \lambda \qquad [1]$$

El problema nos dice que hay una condición más y es que la suma de los valores de las incógnitas es igual a la unidad: $x + y + z = 1 \Rightarrow \frac{4}{5} - \lambda + \frac{3}{5} + \lambda + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{7}{5} = -\frac{2}{5}$

Sustituyamos este valor de λ en el conjunto de soluciones [1] del sistema.

$$\Rightarrow \quad x = \frac{4}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{5} \quad ; \quad y = \frac{3}{5} + \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5} \quad ; \quad z = -\frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{5} \; ; \; y = \frac{1}{5} \; ; \; z = -\frac{2}{5}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para determinar si los tres puntos A, B y C están o no alineados, construimos los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ y comprobamos si son o no linealmente independientes.

$$\vec{AB} = (1,\,1,\,2) + (1,\,1,\,0) = (0,\,0,\,2) \quad ; \quad \vec{AC} = (1,\,-1,\,1) + (1,\,1,\,0) = (0,\,-2,\,1)$$

$$\vec{AB} = k \cdot \vec{AC} \quad \Rightarrow \quad (0,\,0,\,2) = k \cdot (0,\,-2,\,1) \quad \Rightarrow \begin{cases} 0 = k \cdot 0 & \Rightarrow \quad 0 = 0 \\ 0 = -2k & \Rightarrow \quad k = 0 \\ 2 = k \cdot 1 & \Rightarrow \quad k = 2 \end{cases}$$

deben existir dos valores de k distintos para que se pueda verificar la dependencia lineal, por tanto los vectores son linealmente independientes y en consecuencia los tres puntos no están alineados.

El área del triángulo ABC es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,\,0,\,2) \times (0,\,-2,\,1)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},\; -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(4,\,0,\,0)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} = 2 \; u^2$$

(b) El vector $\vec{BC}$ de dirección de la recta será el vector normal al plano que nos piden.

$$\vec{BC} = (1,\,-1,\,1) + (1,\,1,\,2) = (0,\,-2,\,-1)$$

La ecuación general del plano es: $Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B y C representan las coordenadas de un vector normal al plano, por tanto:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot x - 2y - z + D = 0 \;\Rightarrow\; -2y - z + D = 0$$

Para calcular D, le imponemos la condición al plano de pasar por el punto $A(1, 1, 0)$.

$$-2 \cdot 1 - 0 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 2$$

La ecuación del plano, finalmente será: $-2y - z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -2y - z + 2 = 0$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 60 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=x^2+ax+b \qquad \text{y} \qquad g(x)=ce^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

(a) [2 PUNTOS]. Calcula los valores de a, b y c.

(b) [0´5 PUNTOS]. Halla la ecuación de dicha recta tangente.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Dadas las funciones $f:[0, +\infty)\to R$ y $g:[0, +\infty)\to R$ definidas por

$$f(x)=\sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

EJERCICIO 3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} x+\lambda y-z &=& 0 \\ 2x+y+\lambda z &=& 0 \\ x+5y-\lambda z &=& \lambda+1 \end{array}\right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Clasifícalo según los valores del parámetro λ.

(b) [1 PUNTO]. Resuélvelo para $\lambda=-1$.

EJERCICIO 4. Los puntos $A(-2, 3, 1)$, $B(2, -1, 3)$ y $C(0, 1, -2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

(a) [1 PUNTO]. Halla las coordenadas del vértice D.

(b) [1 PUNTO]. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

(c) [0´5 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

Se sabe que f tiene un máximo local en $x=1$, que el punto (0, 1) es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)=\frac{9}{4}\cdot$ Calcula a, b, c y d.

EJERCICIO 2. Sea g:(0, +∞) → R la función dada por $g(x)=\ln x$ (ln denota logaritmo neperiano)

(a) [0´75 PUNTOS]. Justifica que la recta de ecuación $y=\frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x=e$.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

calcula la matriz P que verifica $AP - B=C^T$ (C^T es la matriz traspuesta de C).

EJERCICIO 4. Sea la recta r dada por $\begin{cases}2x+y-mz=2\\x-y-z=-m\end{cases}$

y el plano π definido por $x+my-z=1$

(a) [1 PUNTO]. ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?

(b) [1 PUNTO]. ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?

(c) [0´5 PUNTOS]. ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m=0$?

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Las gráficas de f y g se cortan en el mismo punto (-1, 2), lo que significa que:

$$\begin{cases}f(x)=x^2+ax+b \Rightarrow f(-1)=2 \Rightarrow (-1)^2+a(-1)+b=2 \Rightarrow b-a=1\\ g(x)=ce^{-(x+1)} \Rightarrow g(-1)=2 \Rightarrow ce^{-(-1+1)}=2 \Rightarrow c=2\end{cases} \quad [1]$$

Dichas gráficas tienen la misma recta tangente en el citado punto, luego las pendientes al ser iguales significa que las derivadas de cada una de las funciones en el punto de abscisa, $x=-1$, son también iguales, es decir, $f'(-1)=g'(-1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax + b \Rightarrow & f'(x) = 2x + a & \Rightarrow & f'(x) = 2x + a & \Rightarrow \\ g(x) = ce^{-(x+1)} & \Rightarrow g'(x) = ce^{-(x+1)}(-1) & \Rightarrow & g'(x) = -2e^{-(x+1)} & \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(-1) = 2(-1) + a = a - 2 & \Rightarrow & f'(-1) = a - 2 \\ g'(-1) = -2e^{-(-1+1)} = -2 & \Rightarrow & g'(-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad a - 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

sustituyendo este valor de a en [1], tendremos

$b - a = 1 \quad \Rightarrow \quad b - 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$

Los valores de a, b y c, son: $a = 0$; $b = 1$; $c = 2$.

(b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$ es:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$

Calculemos $f(-1)$ y $f'(-1)$.

$f(x) = x^2 + ax + b \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = (-1)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = 2$

$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = 2\cdot(-1) \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = -2$

La ecuación de la recta tangente será:

$y - 2 = -2\left(x - (-1)\right) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -2x - 2 \quad \Rightarrow \quad y = -2x$

La misma recta obtendríamos si hubiéramos calculado la recta tangente a la gráfica de g.

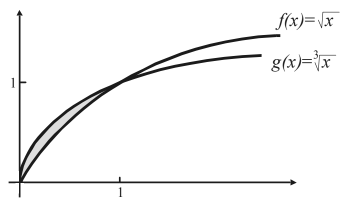
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos los puntos en los que se cortan ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \sqrt[3]{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad x^3 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

puntos que se encuentran dentro del dominio en el que están definidas, $[0, +\infty)$.

El área del recinto limitado por ambas gráficas (que se encuentra dibujado al lado) será el área de la región limitada por la gráfica de la función diferencia y las ordenadas en los puntos de abscisa 0 y 1, es decir



$$\text{Área} = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}\right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\frac{3}{2}} - (0 - 0) = \frac{1}{12} \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro k.

$$\left.\begin{array}{rcl} x + \lambda y - z & = & 0 \\ 2x + y + \lambda z & = & 0 \\ x + 5y - \lambda z & = & \lambda + 1 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 5 & -\lambda & \lambda+1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2·[1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 1-\lambda & \lambda+1 \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2·[3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 3\lambda & -2\lambda-2 \\ 0 & 5-\lambda & 1-\lambda & \lambda+1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -9 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 9·[3ªf.] + (5-λ) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 3\lambda & -2\lambda-2 \\ 0 & 0 & -3\lambda^2+6\lambda+9 & 2\lambda^2+\lambda-1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; -3\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+108}}{-6} = \dfrac{-6 \pm 12}{-6} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

** Si $\lambda = -1 \;\Rightarrow$ La 3ª ecuación es, $0 = 2(-1)^2 + (-1) - 1 \;\Rightarrow\; 0 = 0$, que es una ecuación trivial, la eliminamos; nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, un sistema con infinitas soluciones.

** Si $\lambda = 3 \;\Rightarrow$ La 3ª ecuación es, $0 = 2\cdot 3^2 + 3 - 1 \;\Rightarrow\; 0 = 20$, que es una ecuación absurda. El sistema es incompatible, no tiene solución.

(b) Resolvamos el sistema para $\lambda = -1$, para ello sustituiremos en el sistema triangulado inferiormente que habíamos obtenido en el apartado anterior el valor de λ por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 3\lambda & -2\lambda-2 \\ 0 & 0 & -3\lambda^2+6\lambda+9 & 2\lambda^2+\lambda-1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminemos la 3ª fila por ser una ecuación trivial, según justificamos en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (x) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & z \\ 0 & -9 & 3z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -9 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 9·[1ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (x) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 0 & 6z \\ 0 & -9 & 3z \end{array}\right)$$

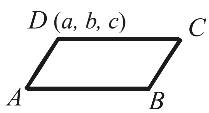
El sistema está diagonalizado. La solución es: $9x = 6z$; $-9y = 3z$
Terminemos de despejar las incógnitas.

$$x = \frac{6}{9}z \;\; ; \;\; y = -\frac{3}{9}z \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}z \;\; ; \;\; y = -\frac{1}{3}z$$

Sustituyamos la incógnita no principal, la z, por un parámetro, por ejemplo por t:

$$x = \frac{2}{3}t \;\; ; \;\; y = -\frac{1}{3}t \;\; ; \;\; z = t$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Tengamos el paralelogramo $ABCD$ situado al lado.

Supongamos que el vértice D tenga de coordenadas (a, b, c). Se verificará que

$\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow (a,b,c)-(-2,3,1)=(0,1,-2)-(2,-1,3) \Rightarrow$

$$(a+2,\ b-3,\ c-1)=(-2,\ 2,\ -5) \Rightarrow \begin{cases} a+2=-2 & \Rightarrow\ a=-4 \\ b-3=\ 2 & \Rightarrow\ b=5 \\ c-1=-5 & \Rightarrow\ c=-4 \end{cases} \Rightarrow \quad D(-4,\ 5,\ -4)$$

(b) La recta que nos piden es paralela a la diagonal AC, luego el vector $\vec{AC}$ lo podemos tomar como vector de dirección de la recta que hemos de calcular.

$\vec{AC}=(0,\ 1,\ -2)-(-2,\ 3,\ 1)=(2,\ -2,\ -3)$

y como pasa por el punto $B(2,\ -1,\ 3)$, la ecuación de dicha recta será

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-3}$$

(c) La ecuación del plano que contiene al paralelogramo, es la ecuación del plano que pasa por uno de sus vértices, por ejemplo, por el $A(-2,\ 3,\ 1)$, y los dos vectores de dirección, linealmente independientes, pueden ser el $\vec{AB}$ y el $\vec{AC}$.

$\vec{AB}=(2,\ -1,\ 3)-(-2,\ 3,\ 1)=(4,\ -4,\ 2) \quad ; \quad \vec{AC}=(0,\ 1,\ -2)-(-2,\ 3,\ 1)=(2,\ -2,\ -3)$

La ecuación del plano será:

$$\begin{cases} x=-2+4\alpha+2\beta \\ y=\ 3-4\alpha-2\beta \\ z=\ 1+2\alpha-3\beta \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Si la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un máximo relativo o local en $x = 1$, significa que la derivada de la función en el punto 1 es cero:

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0$ [1]

Si la función presenta un punto de inflexión en (0, 1), significa que la segunda derivada en dicho punto es cero:

$f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(0)=0 \Rightarrow 6a\cdot 0+2b=0 \Rightarrow b=0$ [2]

y además ese punto (0, 1) pertenece a la función, es decir:

$f(0)=1 \Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=1 \Rightarrow d=1$ [3]

Sustituyendo [2] y [3] en [1] nos quedará la condición: $3a+c=0$ [4]

Calculemos la integral siguiente y cuyo resultado nos lo da el ejercicio, pero sustituyendo b y d por los valores obtenidos anteriormente:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{9}{4} \Rightarrow \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)\,dx=\frac{9}{4} \Rightarrow \int_0^1 (ax^3+cx+1)\,dx=\frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{cx^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{9}{4} \;\Rightarrow\; \frac{a\cdot 1^4}{4}+\frac{c\cdot 1^2}{2}+1-\left(\frac{a\cdot 0^4}{4}+\frac{c\cdot 0^2}{2}+0\right)=\frac{9}{4} \;\Rightarrow\; \frac{a}{4}+\frac{c}{2}+1=\frac{9}{4} \;\Rightarrow$$

$$a+2c=5 \qquad [5]$$

Resolvamos el sistema formado por las condiciones [4] y [5]:

$\left.\begin{array}{l} a+2c=5 \\ 3a+c=0 \end{array}\right\}$ Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3·[1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$ Tiangulemos superiormente
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 5·[1ªf.] + 2·[2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:
$5a = -5 \;\; ; \;\; -5c = -15 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \;\; ; \;\; c = 3$

En resumen, los valores de los coeficientes son: $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$, $d = 1$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = e$ y comprobemos si obtenemos la misma que nos dice el ejercicio.

$y - g(x_0) = g'(x_0)\,(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - g(e) = g'(e)\,(x - e)$

Calculemos $g(e)$ y $g'(e)$.

$g(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; g(e) = \ln(e) = 1$

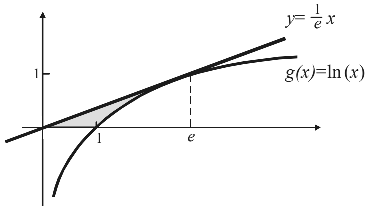
$g'(x) = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; g'(e) = \frac{1}{e}$

La ecuación de la recta tangente será:

$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \;\Rightarrow\; y - 1 = \frac{1}{e}x - 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{e}x$

que es la misma que nos dice el ejercicio.

(b) La gráfica de la función g es la gráfica de la función elemental logaritmo neperiano de x. La recta tangente en el punto $x = e$, es una función lineal por lo que su gráfica es una recta que pasa por el origen. El recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta tangente es el sombreado y situado al lado.



El área de dicho recinto es el área del triángulo de base e y altura 1, menos el área limitada por la gráfica de la función g y las ordenadas en las abscisas $x = 1$ y $x = e$.

Área del triángulo = $\frac{e\cdot 1}{2} = \frac{e}{2}$

El área limitada por la gráfica de g y las ordenadas en las abscisas $x = 1$ y $x = e$ es:

$$\text{Área} = \int_1^e \ln(x)\, dx = \qquad [1]$$

Se trata de una integral por partes.

$$u = \ln(x) \ ; \ du = \frac{1}{x} dx$$
$$dv = dx \ ; \ v = \int dx = x$$

Continuando desde [1], tendremos

$$= \left[x \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x}\, dx = \left[x \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e dx = \left[x \ln(x)\right]_1^e - [x]_1^e = e \cdot \ln(e) - 1 \cdot \ln(1) - (e-1) = 1$$

luego el área del recinto que nos pide el ejercicio es:

$$\text{Área} = \frac{e}{2} - 1 \ \text{ unidades de área}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para calcular la matriz P que verifica $AP - B = C^T$, procedemos de la siguiente manera.

$AP - B = C^T$ $\Rightarrow$ sumamos a ambos miembros la matriz B.

$AP - B + B = C^T + B$ $\Rightarrow$ por la existencia de matriz opuesta.

$AP + O = C^T + B$ $\Rightarrow$ por la existencia de la matriz nula.

$AP = C^T + B$ $\Rightarrow$ multiplicamos a la izquierda por la inversa de A, si existe.

$A^{-1} \cdot (AP) = A^{-1} \cdot (C^T + B)$ $\Rightarrow$ por la propiedad asociativa del producto de matrices.

$(A^{-1} \cdot A)\, P = A^{-1} \cdot (C^T + B)$ $\Rightarrow$ por la existencia de la matriz unidad.

$I \cdot P = A^{-1} \cdot (C^T + B)$ $\Rightarrow$ $P = A^{-1} \cdot (C^T + B)$

En principio parece que podemos obtener la matriz P a partir de las matrices que nos dan, lo que hay que comprobar antes es si A tiene o admite matriz inversa, según dijimos más arriba, y si tiene calcularla, procedamos a ello mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no puede tener matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

No ha salido ninguna fila de ceros, luego la matriz A admite inversa.
Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sí podemos terminar de calcular la matriz P, sabiendo que $P = A^{-1} \cdot (C^T + B)$ y que la inversa de A existe.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 1+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 2 \\ 0\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot(-2)+0\cdot 2 \\ -1\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot 1 & -1\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Estudiemos la posición relativa de la recta y el plano para los diversos valores de m, especialmente en este apartado nos interesará ver si es posible que sean paralelos.

Lo haremos discutiendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-mz = 2 \\ x-y-z = -m \\ x+my-z = 1 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro m, con lo que obtendremos las diversas posiciones relativas de la recta y el plano.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -m & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -m \\ 1 & m & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot$ [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot$ [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -m & 2 \\ 0 & -3 & m-2 & -2m-2 \\ 0 & 2m-1 & m-2 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $3 \cdot$ [3ªf.] + $(2m - 1) \cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -m & 2 \\ 0 & -3 & m-2 & -2m-2 \\ 0 & 0 & 2m^2-2m-4 & -4m^2-2m+2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{4} = \dfrac{2 \pm 6}{4} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

** Si $m = 2 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, $0 = -4\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 2 \Rightarrow 0 = -18$, es una ecuación absurda. El sistema es incompatible, no tiene solución, luego la recta y el plano son paralelos, Este valor de m es el que nos pide el ejercicio.

** Si $m = -1 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, $0 = -4\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 2 \Rightarrow 0=0$, que es trivial, la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, un sistema con infinitas soluciones, la recta está contenida en el plano, ya que la solución es precisamente la propia recta.

* $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq 2$ y $m \neq -1 \quad \Rightarrow$ La tercera ecuación es una ecuación normal, nos quedaría un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas por lo que se trataría de un sistema compatible determinado, con solución única, la recta y el plano se cortan en un punto.

(b) Según el apartado anterior el valor de *m* para el que la recta esté contenida en el plano es el de -1.

(c) Según el apartado (a) para cualquier valor de $m \neq 2$ y $m \neq -1$ la recta y el plano se cortan en un punto, luego para $m = 0$ que es distinto de 2 y de -1, también se cortarán en un punto.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 61 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

EJERCICIO 2. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=x^3-4x \qquad \text{y} \qquad g(x)=3x-6$$

(a) [0´75 PUNTOS]. Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

EJERCICIO 3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y \qquad\quad &= 1 \\ ky+\ z &= 0 \\ x+(k+1)y+kz &= k+1 \end{aligned}\right\}$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina el valor del parámetro k para que sea incompatible.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga z=2.

EJERCICIO 4. Considera la recta r definida por $\begin{cases} x=0 \\ 3y+z=3 \end{cases}$
y la recta s definida por $\begin{cases} 2x-z=3 \\ y=0 \end{cases}$

(a) [1 PUNTO]. Estudia la posición relativa de r y s.

(b) [1´5 PUNTOS]. Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si} \quad 0\leq x<2 \\ cx+1 & \text{si} \quad 2\leq x\leq 4 \end{cases}$$

(a) [2 PUNTOS]. Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado [0, 4], derivable en el abierto (0, 4) y que $f(0)=f(4)$.
(b) [0´5 PUNTOS]. ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

<u>EJERCICIO 2</u>. Calcula

$$\int_0^1 x\ \ln(x+1)\,dx$$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

<u>EJERCICIO 3</u>. [2´5 PUNTOS]. Halla los valores del parámetro m que hacen compatible el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} -x+2y-2z=2 \\ 2x+y+z=m \\ x+3y-z=m^2 \end{array}\right\}$$

<u>EJERCICIO 4</u>. [2´5 PUNTOS]. Sea la recta r definida por $\begin{cases} x=1 \\ x-y=0 \end{cases}$

y sean los planos π_1, de ecuación $x+y+z=0$, y π_2, de ecuación $y+z=0$. Halla la recta contenida en el plano π_1, que es paralela al plano π_2 y que corta a la recta r.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Los puntos de inflexión deben localizarse entre los valores que anulando a la segunda derivada no anulen a la tercera. Calculemos el punto de inflexión que nos dice el ejercicio.

$$f(x)=\frac{x+1}{e^x}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-(x+1)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{-x\,e^x}{e^{2x}}=-xe^{-x}$$

$$f''(x)=-1\cdot e^{-x}-x\,e^{-x}(-1)=(x-1)\,e^{-x}$$

Veamos qué valores anulan a la segunda derivada.

$$(x-1)\,e^{-x}=0 \quad\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 & \Rightarrow \quad x=1 \\ e^{-x}=0 & \Rightarrow \quad \text{no hay} \end{cases}$$

Sustituyamos este valor que anula a la segunda derivada en la tercera

$$f'''(x)=e^{-x}+(x-1)\,e^{-x}(-1)=(-x+2)\,e^{-x}$$

$$f'''(1)=(-1+2)\,e^{-1}=e^{-1}\neq 0$$

luego hay un punto de inflexión en $x = 1$.

Calculemos la ordenada del punto de inflexión.

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{1+1}{e^1} = \frac{2}{e}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de inflexión de abscisa $x = 1$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(1) = f'(1)\,(x-1) \qquad [1]$$

Calculemos $f'(1)$.

$$f'(x) = -xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -1 \cdot e^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -\frac{1}{e}$$

Sustituyamos $f(1)$ y $f'(1)$ en [1] para terminar de calcular la ecuación de la recta tangente.

$$y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos los puntos de corte de ambas gráficas resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 4x \\ y = 3x - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x^3 - 4x = 3x - 6 \;\Rightarrow\; x^3 - 7x + 6 = 0$$

hemos obtenido una ecuación de tercer grado, la resolveremos mediante la Regla de Ruffini.

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0

Una solución es $x = 1$, las demás las obtendremos resolviendo la ecuación de segundo grado obtenida, $x^2 + x - 6 = 0$.

$$x^2 + x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Los puntos de corte de ambas gráficas son (1, -3), (2, 0) y (-3, -15) donde las ordenadas de cada uno de los puntos se han obtenido sustituyendo las abscisas obtenidas, 1, 2 y -3, en una cualquiera de las funciones, es decir:

$$g(x) = 3x - 6 \;\Rightarrow \begin{cases} g(1) = 3 \cdot 1 - 6 = -3 \\ g(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0 \\ g(-3) = 3 \cdot (-3) - 6 = -15 \end{cases}$$

(b) Para calcular el área encerrada por ambas gráficas, construimos la función diferencia, y la integraremos entre -3 y 1 y entre 1 y 2, que eran los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{1} (x^3 - 7x + 6)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} (x^3 - 7x + 6)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right]_{1}^{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1^4}{4} - \frac{7 \cdot 1^2}{2} + 6 \cdot 1 - \left(\frac{(-3)^4}{4} - \frac{7 \cdot (-3)^2}{2} + 6 \cdot (-3)\right)\right| + \left|\frac{2^4}{4} - \frac{7 \cdot 2^2}{2} + 6 \cdot 2 - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{7 \cdot 1^2}{2} + 6 \cdot 1\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 6 - \left(\frac{81}{4} - \frac{63}{2} - 18\right)\right| + \left|4 - 14 + 12 - \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 6\right)\right| =$$

$$=\left|\frac{1-14+24}{4}-\left(\frac{81-126-72}{4}\right)\right|+\left|2-\left(\frac{1-14+24}{4}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{11}{4}-\frac{-117}{4}\right|+\left|2-\frac{11}{4}\right|=\left|\frac{128}{4}\right|+\left|\frac{-3}{4}\right|=\frac{131}{4}\text{ unidades de área}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Vamos a determinar el valor del parámetro k para que el sistema sea incompatible.

$$\left.\begin{array}{l} x+y = 1 \\ ky+z = 0 \\ x+(k+1)y+kz = k+1 \end{array}\right\}$$

Expresaremos el sistema en forma matricial, lo discutiremeros mediante el método de reducción de Gauss y lo clasificaremos según los diversos valores del parámetro k.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k & k+1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & k & k & k \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} (x)\ (z)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & k & k \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - k · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} (x)\ (z)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k-k^2 & k \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; k - k^2 = 0 \;\Rightarrow\; k(1-k) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases}$

** Si $k=0$ ⇒ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos; nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** Si $k=1$ ⇒ La 3ª ecuación es, 0 = 1, que es absurda, estamos ante un sistema incompatible, no tiene solución. Éste será pues el valor de k que nos pide el ejercicio.

** Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$ ⇒ La 3ª ecuación es una ecuación normal, nos quedará un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible determinado.

(b) Para determinar el valor de k para que la solución del sistema tenga $z = 2$, lo haremos a partir del sistema triangulado inferiormente al que habíamos llegado en el apartado anterior, sabiendo además que $k \neq 0$ y $k \neq 1$.

$$\begin{array}{c} (x)\ (z)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k-k^2 & k \end{array}\right) \end{array}$$

Simplifiquemos la 3ª fila por k ya que es distinto de 0 y de 1

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 - k \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $(1 - k) \cdot$ [2ªf.] $- k \cdot$ [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: $(1 - k) \cdot$ [1ªf.] $-$ [3ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1-k & 0 & 0 & -k \\ 0 & 1-k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1-k & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado; como debemos calcular el valor de k para que la solución del sistema tenga $z = 2$ y tenemos que:

$$(1 - k)\, z = -k$$

sustituimos z por 2 y calculamos el valor de k.

$$(1-k)\cdot 2 = -k \;\Rightarrow\; 2 - 2k + k = 0 \;\Rightarrow\; k = 2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s lo haremos analizando el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 3y + z = 3 \\ 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Expresaremos el sistema en forma matricial y veremos cuál es la solución del sistema de ecuaciones mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] $- 2 \cdot$ [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: $3 \cdot$ [4ªf.] $-$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] $-$ [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. La 4ª ecuación es una ecuación absurda, y como sólo hay una ecuación absurda las dos rectas se cruzan en el espacio.

(b) Hallaremos el haz de planos que contiene a la recta s, y después le impondremos la condición a este haz de ser paralelo a r por lo que obtendremos el plano de dicho haz que cumple la condición que nos dice el problema.

Como la recta s viene dada como intersección de dos planos el haz de planos que contiene a s será:

$$(2x - z - 3) + \alpha\,(y) = 0 \;\Rightarrow\; 2x - z - 3 + \alpha\, y = 0 \;\Rightarrow\; 2x + \alpha y - z - 3 = 0 \qquad [1]$$

El vector genérico normal a este haz de planos es el $(2, \alpha, -1)$.

Calculemos ahora el vector de dirección de la recta r, que al venir expresada como intersección de dos planos, será el producto vectorial de cada uno de los vectores normales a los dos planos que definen a r:

$$\vec{v}_r = (1,0,0)\times(0,3,1) = \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\right) = (0,-1,3)$$

El plano del haz que contiene a s y es paralelo a r, será aquel cuyo vector normal sea perpendicular al vector de dirección de r, es decir, se ha de cumplir que el producto escalar de ambos vectores sea cero.

$$\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \;\Rightarrow\; (0,-1,3)\bullet(2,\alpha,-1) = 0 \;\Rightarrow\; 2\cdot 0 - 1\cdot\alpha + 3\cdot(-1) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = -3$$

Sustituyendo este valor en [1], tendremos:

$$2x + \alpha y - z - 3 = 0 \;\Rightarrow\; 2x - 3y - z - 3 = 0$$

que es la ecuación general del plano que contiene a s y es paralelo a r

---

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función $f(x)$ es continua en el intervalo [0, 4], evidentemente lo es en los intervalos [0, 2) y (2, 4] por tratarse de funciones polinómicas que los son en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto en sus respectivos dominios particulares, el problema podría presentarse en el punto 2, pero como también es continua, según el problema, se ha de verificar que el valor de la función en dicho punto debe coincidir con los límites laterales de la función en el citado punto, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}} (x^2+ax+b) = 4+2a+b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}} (cx+1) = 2c+1 \\ f(2) = c\cdot 2 + 1 = 2c+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \\ 4+2a+b = 2c+1 \;\Rightarrow\; 2a+b-2c = -3 \qquad [1] \end{array}\right.$$

Hemos obtenido una primera condición, obtengamos más. El ejercicio nos dice que es derivable en el intervalo (0, 4). Estudiemos la derivabilidad

Evidentemente lo es en los intervalos (0, 2) y (2, 4) por tratarse de funciones polinómicas que los son en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto en los respectivos intervalos anteriores, siendo la función derivada, en una primera aproximación:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si} \quad 0<x<2 \\ c & \text{si} \quad 2<x<4 \end{cases}$$

El problema podría presentarse en el punto 2, pero como también es derivable, según el problema, se ha de verificar que (siendo ya continua) las derivadas laterales de la función en dicho punto deben coincidir, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2)^- = \lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<-2}} (2x+a) = 4+a \\ f'(2)^+ = \lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}} c = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(2)^- = f'(2)^+ \Rightarrow \\ 4+a = c \Rightarrow\; a-c = -4 \qquad [2] \end{array}\right.$$

Hemos obtenido una segunda condición, necesitamos una tercera, y es que $f(0)=f(4)$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } 0\le x<2 \\ cx+1 & \text{si } 2\le x\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0^2+a\cdot 0+b=b \\ f(4)=c\cdot 4+1=4c+1 \end{cases} \Rightarrow b=4c+1 \Rightarrow b-4c=1 \qquad [3]$$

Resolvamos ahora el sistema formado por las tres condiciones, [1], [2] y [3].

$$\left.\begin{array}{r} 2a+b-2c=-3 \\ a-c=-4 \\ b-4c=1 \end{array}\right\}$$

Expresaremos el sistema en forma matricial, y lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=2\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2\cdot[2^a f.]-[1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=-1\neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $[3^a f.]+[2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33}=-4\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2\cdot[1^a f.]-[3^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=-1\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $[1^a f.]+2\cdot[2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$4a=-12 \quad ; \quad -b=-5 \quad ; \quad -4c=-4 \quad \Rightarrow$

$a=-3 \quad ; \quad b=5 \quad ; \quad c=1$

(b) Teníamos una primera aproximación de la función derivada, que era:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } 0<x<2 \\ c & \text{si } 2<x<4 \end{cases}$$

Si sustituimos los valores de a, b y c obtenidos anteriormente y sabiendo que la función también era derivable en el punto 2, tendremos que la función derivada es finalmente:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } 0<x<2 \\ 1 & \text{si } 2\le x<4 \end{cases}$$

Calculemos el valor que anula a la primera derivada.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } 0<x<2 \\ 1 & \text{si } 2\le x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}\in(0,\,2) \\ 1\neq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Antes de calcular la integral definida

$$\int_0^1 x\,\ln(x+1)\,dx$$

calcularemos la integral indefinida correspondiente.

$$\int x\,\ln(x+1)\,dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u=\ln(x+1) \quad ; \quad du=\frac{1}{x+1}dx$$

$$dv=x\,dx \quad ; \quad v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$$

$$\int x \;\ln(x+1)\, dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\, dx = \qquad [1]$$

la última integral es una integral racional impropia, efectuemos la división.

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & & x+1 \\ \hline -x^2 - x & & x-1 \\ \hline -x & & \\ x+1 & & \\ \hline 1 & & \end{array}$$

Continuando desde [1]

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\int (x-1)\, dx + \int \frac{1}{x+1}\, dx\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

La integral definida que se nos pide será

$$\int_0^1 x\ln(x+1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1^2}{2}\ln(1+1) - \frac{1^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+1) - \left(\frac{0^2}{2}\ln(0+1) - \frac{0^2}{4} + \frac{0}{2} - \frac{1}{2}\ln(0+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) - 0 = \frac{1}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro m, para de esa manera obtener cuál o cuáles valores de m hacen que el sistema sea un sistema compatible.

$$\left(\begin{array}{rrr|l} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & 3 & -1 & m^2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] +2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] +[1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|l} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & m+4 \\ 0 & 5 & -3 & m^2+2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|l} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & m+4 \\ 0 & 0 & 0 & m^2-m-2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que es cero. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; 0 = m^2 - m - 2 \;\Rightarrow\; m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \dfrac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \;\Rightarrow$ Para estos dos valores de m, 2 y -1, la 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial y la podemos eliminar. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible o más precisamente un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, o sea, un sistema con infinitas soluciones.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; 0 = m^2 - m - 2 \;\Rightarrow$ Si $m \neq 2$ y $m \neq -1 \;\Rightarrow$ La 3ª ecuación es una ecuación absurda, y el sistema sería un sistema incompatible, no tendría solución.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta *r* en forma paramétrica resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los dos planos en que viene definida la recta.

Expresemos dicho sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left.\begin{array}{r} x=1 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2^a fila por: $[2^a f.] - [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la *z*, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $x = 1$; $y = 1$

Terminemos de despejar las incógnitas sustituyendo la incógnita secundaria, la *z*, por un parámetro por ejemplo, por *α*, la solución, finalmente, del sistema será:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Hemos obtenido la ecuación de la recta *r* en paramétricas

Elegimos de esta recta un punto genérico, *H*, que tendrá de coordenadas $H(1,\ 1,\ \alpha)$.

Expresemos ahora la ecuación del plano π_1 en forma paramétrica resolviendo el sistema de ecuaciones formado por la ecuación del plano que viene dada en forma general.

Expresemos dicho sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left. x+y+z=0 \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobran dos incógnitas, la *y* y la *z*, que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -y-z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $x = -y - z$

Terminemos de despejar las incógnitas sustituyendo las incógnitas secundarias, la *y* y la *z*, por un parámetro cada una, por ejemplo, por *β* y *γ* respectivamente, la solución, finalmente, del sistema será:

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = -\beta - \gamma \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$$

Elegimos de este plano π_1 un punto genérico, *A*, que tendrá de coordenadas $A(-\beta-\gamma,\ \beta,\ \gamma)$.

La recta *s* que nos pide el ejercicio, al estar contenida en el plano π_1 pasará por el punto *A* y al cortar a la recta *r*, en un punto por ejemplo, el *H*, tendrá un vector de dirección, el vector $\overrightarrow{AH}$, que va a ser perpendicular al vector normal del plano π_1. Como además la recta *s* es paralela al plano π_2, significa igualmente que el vector normal a este plano y el de dirección de la recta son perpendiculares. Teniendo en cuenta que la condición de perpendicularidad de vectores se traduce en que el producto escalar de dichos vectores es cero, tendremos:

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{AH} = (1,\ 1,\ \alpha) - (-\beta-\gamma,\ \beta,\ \gamma) = (1+\beta+\gamma,\ 1-\beta,\ \alpha-\gamma)$$

$\vec{n}_{\pi_1} = (1,\ 1,\ 1) \quad ; \quad \vec{n}_{\pi_2} = (0,\ 1,\ 1)$

Apliquemos las condiciones, ya mencionadas, de que $\vec{AH}$ es perpendicular a los vectores normales de cada uno de los planos π_1 y π_2.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AH} \perp \vec{n}_{\pi_1} \ \Rightarrow \ \vec{AH} \bullet \vec{n}_{\pi_1} = 0 \Rightarrow \ (1+\beta+\gamma,\ 1-\beta,\ \alpha-\gamma)\bullet(1,\ 1,\ 1) = 0 \\ \vec{AH} \perp \vec{n}_{\pi_2} \ \Rightarrow \ \vec{AH} \bullet \vec{n}_{\pi_2} = 0 \Rightarrow \ (1+\beta+\gamma,\ 1-\beta,\ \alpha-\gamma)\bullet(0,\ 1,\ 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 1+\beta+\gamma+1-\beta+\alpha-\gamma = 0 \\ 1-\beta+\alpha-\gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha = -2 \\ \alpha-\beta-\gamma = -1 \end{array}\right\}$$

Expresaremos el sistema en forma matricial, y lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la γ, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1+\gamma \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $\alpha = -2 \quad ; \quad -\beta = 1+\gamma$

Terminemos de despejar las incógnitas.

$$\alpha = -2 \quad ; \quad \beta = -1-\gamma$$

El punto H será:

$H(1,\ 1,\ \alpha) = (1,\ 1,\ -2)$

El vector $\vec{AH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{AH} = (1+\beta+\gamma,\ 1-\beta,\ \alpha-\gamma) = (1+(-1-\gamma)+\gamma,\ 1-(-1-\gamma),\ -2-\gamma) = (0,\ 2+\gamma,\ -2-\gamma)$$

De todos los vectores de dirección elegimos uno, para ello basta asignar a γ un valor cualquiera, por ejemplo, el 0, tendremos entonces el vector de dirección $(0, 2, -2)$

La ecuación en paramétricas de la recta s que pasa por el punto $H(1, 1, -2)$ y tiene como vector de dirección al vector $\vec{AH}$ $(0, 2, -2)$ es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+2\lambda \\ z = -2-2\lambda \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 62 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 \qquad y \qquad g(x) = a \quad (\text{con } a > 0)$$

Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f y g es 4/3. Calcula el valor de la constante a.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula.

EJERCICIO 4. Se sabe que los planos de ecuaciones $x + 2y + bz = 1$, $2x + y + bz = 0$, $3x + 3y - 2z = 1$ se cortan en una recta r.

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula el valor de b

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) [0´75 PUNTOS]. Esboza la gráfica de f.

(b) [1 PUNTO]. Estudia la derivabilidad de f.

(c) [0´75 PUNTOS]. Calcula el área comprendida entre la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$$

(ln denota la función logaritmo neperiano)

EJERCICIO 3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 PUNTO]. Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B.
(b) [1´5 PUNTOS]. Resuelve la ecuación matricial $AX+B=A+I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Dados los puntos $A(2, 1, -1)$ y $B(-2, 3, 1)$ y la recta r definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3x - 2z = -5 \end{cases}$$

halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función *f(x)* es el producto de la función exponencial elemental e^x, que es continua y derivable en todo ℝ, y de la función sen x + cos x que es a su vez suma de dos funciones trigonométricas elementales, que son continuas y derivables en ℝ, por lo que su suma seguirá siendo continua y derivable en ℝ, y por tanto el producto de ambas funciones lo será también en ℝ, es decir, *f(x)* es una función continua y derivable en todo ℝ y por supuesto lo será en el dominio en la que está definida que es $[0, 2\pi]$.

Obtengamos la primera derivada.

$f(x) = e^x(\text{sen } x + \cos x) \Rightarrow f'(x) = e^x(\text{sen } x + \cos x) + e^x(\cos x - \text{sen } x) = 2e^x \cos x$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

$$2e^x \cos x = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{imposible} \\ \cos(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Sólo hay dos valores que anulen a la primera derivada y que pertenezcan al dominio de la función, el $\frac{\pi}{2}$ y el $\frac{3\pi}{2}$. Estudiemos la monotonía de la función *f(x)*, en los intervalos, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, ya que al ser continua y derivable en su dominio y no existir, por tanto, puntos de no continuidad y de no derivabilidad, los valores que anulan a la derivada son los únicos puntos que nos sirven de referencia para la construcción de dichos intervalos.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, $\frac{\pi}{4}$, π y $\frac{7\pi}{4}$, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\pi/4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,e^{\pi/4} > 0 \qquad \Rightarrow \text{ Creciente en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'(\pi) = 2e^{\pi}\cos(\pi) = 2e^{\pi}(-1) = -2\,e^{\pi} < 0 \qquad \Rightarrow \text{ Decreciente en } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2e^{7\pi/4}\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2e^{7\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,e^{7\pi/4} > 0 \qquad \Rightarrow \text{ Creciente en } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

(b) Al ser la función continua y derivable en su dominio, los puntos de inflexión se encontrarán entre los valores que anulando a la segunda derivada no anulen a la tercera.

$$f'(x) = 2e^{x}\cos x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 2e^{x}\cos x + 2e^{x}(-\operatorname{sen} x) = 2e^{x}(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$2e^{x}(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{x} = 0 \qquad \text{imposible} \\ \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$f'''(x) = 2e^{x}(\cos x - \operatorname{sen} x) + 2e^{x}(-\operatorname{sen} x - \cos x) = 2e^{x}(-2\operatorname{sen} x) = -4e^{x}\operatorname{sen} x$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4e^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4e^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0 \qquad \Rightarrow \text{Punto de inflexión en } \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$f'''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4e^{\frac{5\pi}{4}}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4e^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0 \qquad \Rightarrow \text{Punto de inflexión en } \left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}}\right)$$

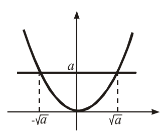
Las ordenadas de los puntos de inflexión se han obtenido sustituyendo las abscisas de dichos puntos en la función, es decir:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{\frac{5\pi}{4}}\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}\right) = e^{\frac{5\pi}{4}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos inicialmente los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.



$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2 = a \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{a} \quad \Rightarrow \begin{cases} (-\sqrt{a}, 0) \\ (\sqrt{a}, 0) \end{cases}$$

La situación gráfica es la representada al lado.

Según el ejercicio el área del recinto limitado por ambas gráficas es 4/3, es decir:

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} - \left(a(\sqrt{a}) - \frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right) =$$

$$= a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} - \left(a(-\sqrt{a}) - \frac{(-\sqrt{a})^3}{3}\right) = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = a\sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

Igualando este valor obtenido del área con el que nos dice el ejercicio, tendremos:

$$\frac{4}{3}a\sqrt{a}=\frac{4}{3} \Rightarrow a\sqrt{a}=1 \Rightarrow \sqrt{a^3}=1 \Rightarrow a^3=1 \Rightarrow a=1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Obtengamos la matriz $(A - kI)^2$ e igualémosla a la matriz nula, y comprobemos si ello es posible.

$$A-kI=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{pmatrix}$$

$$(A-kI)^2=\begin{pmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}k^2+1-2&k+k-2&2k+2-6+2k\\k+k-2&1+k-2&2+2k-6+2k\\-k-1+3-k&-1-k+3-k&-2-2+9-6k+k^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}k^2-1&2k-2&4k-4\\2k-2&k-1&4k-4\\-2k+2&-2k+2&k^2-6k+5\end{pmatrix}$$

Igualemos esta matriz a la matriz nula.

$$\begin{pmatrix}k^2-1&2k-2&4k-4\\2k-2&k-1&4k-4\\-2k+2&-2k+2&k^2-6k+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

Identificando los elementos correspondientes, obtendremos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl}k^2-1=0&\Rightarrow&k=\pm 1\\2k-2=0&\Rightarrow&k=1\\4k-4=0&\Rightarrow&k=1\\2k-2=0&\Rightarrow&k=1\\k-1=0&\Rightarrow&k=1\\4k-4=0&\Rightarrow&k=1\\-2k+2=0&\Rightarrow&k=1\\-2k+2=0&\Rightarrow&k=1\\k^2-6k+5=0&\Rightarrow&k=\dfrac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\begin{cases}5\\1\end{cases}\end{array}\right.$$

El único valor de k que satisface todas las ecuaciones es el 1, éste será el valor de k que nos pide el ejercicio.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Estudiemos la posición relativa de los tres planos para determinar el valor de b que hace que se corten en una recta. Discutiremos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+bz=1\\2x+y+bz=0\\3x+3y-2z=1\end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro b.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & | & 1 \\ 2 & 1 & b & | & 0 \\ 3 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & | & 1 \\ 0 & -3 & -b & | & -2 \\ 0 & -3 & -2-3b & | & -2 \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & | & 1 \\ 0 & -3 & -b & | & -2 \\ 0 & 0 & -2-2b & | & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow -2 - 2b = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Lo que significa que los tres planos se cortan en una recta r. Éste sería el valor de b que nos pide el ejercicio.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow -2 - 2b \neq 0 \Rightarrow b \neq -1 \Rightarrow$ La 3ª ecuación no sería ni trivial ni absurda; los elementos de la diagonal principal son todos distintos de cero, se trataría de un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es decir, sería un sistema compatible determinado. Los tres planos se cortarían en un punto.

(b) Terminemos de resolver el sistema anterior para el valor de $b = -1$, teniendo en cuenta que se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, y que la solución del sistema serán todos los puntos comunes a los tres planos, en este caso se trataría de la recta r.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & | & 1 \\ 0 & -3 & -b & | & -2 \\ 0 & 0 & -2-2b & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -(-1) & | & -2 \\ 0 & 0 & -2-2\cdot(-1) & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1+z \\ 0 & -3 & | & -2-z \end{pmatrix}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & | & -1+z \\ 0 & -3 & | & -2-z \end{pmatrix}$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $3x = -1 + z$; $-3y = -2 - z \Rightarrow$

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z \quad ; \quad y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, por α, tendremos finalmente la ecuación de la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha \\ y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

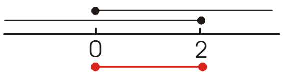
SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Lo primero que haremos es desdoblar el trozo de función valor absoluto en dos nuevos trozos, teniendo en cuenta la definición de la función valor absoluto.

$$f(x)=\begin{cases} x|x| & \text{si} \quad x\le 2 \\ 6-x & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x\cdot(-x) & \text{si} \quad x\le 2 \text{ y } x<0 \\ x\cdot x & \text{si} \quad x\le 2 \text{ y } x\ge 0 \\ 6-x & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \Rightarrow$$

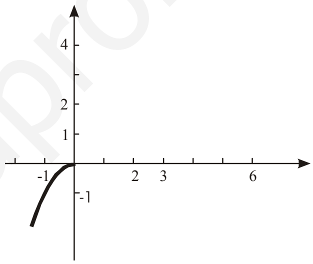
El sistema de inecuaciones, $x\le 2$ y $x<0$, cuya solución gráfica está situada a la derecha son los valores $x<0$.



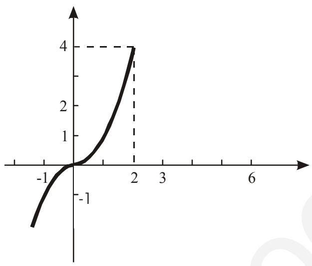
El sistema de inecuaciones, $x\le 2$ y $x\ge 0$, cuya solución gráfica está situada a la izquierda son los valores $0\le x\le 2$.

La función será finalmente la siguiente.

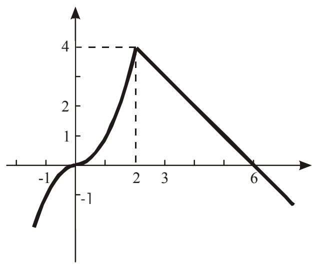
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ 6-x & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$



Comencemos representando la gráfica de $-x^2$ para valores de $x<0$. Se trata de una función cuadrática elemental, cuya gráfica es una parábola de vértice el (0, 0).



El siguiente trozo, x^2, para valores $0\le x\le 2$, es otra parábola elemental.



El último trozo, 6 - x, definido para $x>2$, es una función afín cuya gráfica es una recta que pasa por los puntos (2, 4) y (6, 0). La gráfica de *f(x)* está representada a la derecha.

(b) Para estudiar la derivabilidad estudiemos previamente la continuidad.

- Para valores de $x<0$ la función, $-x^2$, es continua por ser una función polinómica ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $0<x<2$ la función, x^2, es continua por ser una función polinómica ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $x>2$ la función, $6-x$, es continua por ser una función polinómica ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

El problema puede estar en los puntos 0 y 2.

- Para $x=0$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}\left(-x^2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} x^2=0\\ f(0)=0^2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0\right.$$

La función es continua en el punto 0.

- Para $x=2$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}} x^2=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}}(6-x)=4\\ f(2)=2^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=4\right.$$

La función también es continua en el punto 2

Luego la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto podrá ser derivable también en $\mathbb{R}$.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua.

- Para valores de $x<0$ la función, $-x^2$, es derivable por ser una función polinómica, ya que las funciones polinómicas lo son en todo $\mathbb{R}$, siendo la función derivada, $-2x$.

- Para valores de $0<x<2$ la función, x^2, es derivable por ser una función polinómica ya que las funciones polinómicas lo son en todo $\mathbb{R}$, siendo la función derivada, $2x$.

- Para valores de $x>2$ la función, 6

las funciones polinómicas lo son en todo $\mathbb{R}$, sieno la función derivada, -1.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si} \quad x<0\\ 2x & \text{si} \quad 0<x<2\\ -1 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

El problema puede estar en los puntos 0 y 2.

Estudiemos la derivabilidad en el punto 0. Será derivable en el punto 0, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(0^-)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}(-2x)=0$$

$$f'(0^+)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}(2x)=0$$

Las derivadas laterales coinciden: $f'(0^-)=f'(0^+)=0$, podemos deducir que la función será derivable en el punto 0.

Estudiemos la derivabilidad en el punto 2. Será derivable en el punto 2, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(2^-) = \lim_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} (2x) = 4$$

$$f'(2^+) = \lim_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} (-1) = -1$$

Las derivadas laterales no coinciden: $f'(2^-) = 4 \neq f'(2^+) = -1$, podemos deducir que la función no será derivable en el punto 2.

En definitiva, la función *f* será derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en el punto 2, siendo la función derivada, finalmente:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

(c) Teniendo en cuenta la gráfica realizada en el apartado (a), el área que nos piden será:

$$\text{Área} = \int_0^6 f(x)dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^6 (6-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_2^6 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} + 6\cdot 6 - \frac{6^2}{2} - \left(6\cdot 2 - \frac{2^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 36 - 18 - (12-2) = \frac{32}{3} \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la integral definida siguiente

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\,dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u = \ln(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^2\,dx \quad ; \quad v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e \frac{x^2}{3}dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3}\ln(e) - \frac{1^3}{3}\ln(1) - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}e^3$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos, si existe, la matriz inversa de *A*. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz *A*, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz *A* no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz *A* admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Multipliquemos la 3ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Procedamos de igual manera con la matriz *B*.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Como ha salido una fila nula, la matriz *B* no admite inversa.

(b) Resolvamos la ecuación matricial $AX + B = A + I$, procederemos de la siguiente manera.

$AX+B=A+I$	$\Rightarrow$	sumamos a ambos miembros la matriz $-B$.
$AX+B-B=A+I-B$	$\Rightarrow$	por la existencia de matriz opuesta.
$AX+O=A+I-B$	$\Rightarrow$	por la existencia de la matriz nula.
$AX=A+I-B$	$\Rightarrow$	multiplicamos a la izquierda por la inversa de *A*.
$A^{-1}\cdot(AX)=A^{-1}\cdot(A+I-B)$	$\Rightarrow$	por la propiedad asociativa del producto de matrices.
$(A^{-1}\cdot A)\,X=A^{-1}\cdot(A+I-B)$	$\Rightarrow$	por la existencia de la matriz unidad.
$I\cdot X=A^{-1}\cdot(A+I-B)$	$\Rightarrow$	$X=A^{-1}\cdot(A+I-B)$

Ahora sí podemos terminar de calcular la matriz *X*, sabiendo que $X = A^{-1}\cdot(A+I-B)$.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+3\cdot 2 & (-1)\cdot 1+(-1)\cdot 3+3\cdot 0 & (-1)\cdot 0+(-1)\cdot(-3)+3\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & 0\cdot 1+1\cdot 3+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot(-3)+(-1)\cdot 1 \\ 1\cdot 1+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & 1\cdot 1+0\cdot 3+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot(-3)+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

En primer lugar, expresemos la ecuación de la recta en forma paramétrica, resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1+z \\ 0 & 3 & -2-z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -5+2z \\ 0 & 3 & -2-z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $3x = -5 + 2z$; $3y = -2 - z$ $\Rightarrow$

$$x=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}z \quad ; \quad y=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}z$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, por α, tendremos finalmente la ecuación de la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\alpha \\ y=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

Elijamos un punto genérico $H\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\alpha,\ -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\alpha,\ \alpha\right)$ de esta recta e impongámosle la condición de equidistar de los puntos $A(2, 1, -1)$ y $B(-2, 3, 1)$.

Se ha de verificar que dist (A, H) = dist (B, H), o lo que es lo mismo $|\vec{AH}|=|\vec{BH}|$.

$$\vec{AH}=\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\alpha,\ -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\alpha,\ \alpha\right)-(2,\ 1,\ -1)=\left(-\frac{11}{3}+\frac{2}{3}\alpha,\ -\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\alpha,\ \alpha+1\right)$$

$$\vec{BH}=\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\alpha,\ -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\alpha,\ \alpha\right)-(-2,\ 3,\ 1)=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\alpha,\ -\frac{11}{3}-\frac{1}{3}\alpha,\ \alpha-1\right)$$

$$\sqrt{\left(-\frac{11}{3}+\frac{2}{3}\alpha\right)^2+\left(-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\alpha\right)^2+(\alpha+1)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\alpha\right)^2+\left(-\frac{11}{3}-\frac{1}{3}\alpha\right)^2+(\alpha-1)^2}$$

$$\left(-\frac{11}{3}+\frac{2}{3}\alpha\right)^2+\left(-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\alpha\right)^2+(\alpha+1)^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\alpha\right)^2+\left(-\frac{11}{3}-\frac{1}{3}\alpha\right)^2+(\alpha-1)^2$$

$$\frac{121}{9}+\frac{4}{9}\alpha^2-\frac{44}{9}\alpha+\frac{25}{9}+\frac{1}{9}\alpha^2+\frac{10}{9}\alpha+\alpha^2+1+2\alpha=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\alpha^2+\frac{4}{9}\alpha+\frac{121}{9}+\frac{1}{9}\alpha^2+\frac{22}{9}\alpha+\alpha^2+1-2\alpha$$

$$\frac{14}{9}\alpha^2-\frac{16}{9}\alpha+\frac{155}{9}=\frac{14}{9}\alpha^2+\frac{8}{9}\alpha+\frac{131}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{3}\alpha=\frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha=1$$

Luego el punto H de r que equidista de los puntos A y B tendrá de coordenadas:

$$\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\alpha,\ -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\alpha,\ \alpha\right)=\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\cdot 1,\ -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot 1,\ 1\right)=(-1,\ -1,\ 1)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora científica (**no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos**), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 63 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\left(3x-2x^2\right)e^x$.

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) [1 PUNTO]. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 2. Considera las funciones $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$ y $g(x)=x^3\ln x$ (ln denota la función logaritmo neperiano)

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x=\frac{\pi}{3}$.
(se puede hacer el cambio de variable $t=\cos x$).

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula $\int g(x)\,dx$.

EJERCICIO 3. **(a)** [1 PUNTO]. Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& mx \\ x+2y+z &=& my \\ x+2y+4z &=& mz \end{array}\right\}$$

(b) [1´5 PUNTOS]. Resuelve el sistema anterior para el caso $m=0$ y para el caso $m=1$.

EJERCICIO 4. Se considera la recta r definida por $mx=y=z+2$, $(m\neq 0)$, y la recta s definida por $\dfrac{x-4}{4}=y-1=\dfrac{z}{2}$

(a) [1´5 PUNTOS]. Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.

(b) [1 PUNTO]. Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Dada la función f definida, para $x \neq 0$, por $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ determina las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(a) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de g.

(b) [0´75 PUNTOS]. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 2$.

(c) [1´25 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g y el eje de abscisas.

EJERCICIO 3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

(a) [1´25 PUNTOS]. Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.

(b) [1´25 PUNTOS]. Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(2, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(2, 2, 1)$ y $D(3, 1, 0)$.

(a) [1 PUNTO]. Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B, C y D.

(b) [1´5 PUNTOS]. Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función *f(x)* es el producto de la función exponencial elemental e^x, que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y de una función polinómica, que es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo que el producto de ambas seguirá siendo continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Obtengamos la primera derivada.

$f(x) = (3x - 2x^2)\, e^x \Rightarrow f'(x) = (3 - 4x)\, e^x + (3x - 2x^2)\, e^x = (-2x^2 - x + 3)\, e^x$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

$$(-2x^2 - x + 3)\, e^x = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{imposible} \\ -2x^2 - x + 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 3}}{2\cdot(-2)} = & \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Sólo hay dos valores que anulen a la primera derivada el 1 y el $-\dfrac{3}{2}$. Estudiemos la monotonía de la función *f(x)*, en los intervalos $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$, ya que al ser continua y derivable en su dominio y no existir, por tanto, puntos de no continuidad y de no derivabilidad, los valores que anulan a la derivada son los únicos puntos que nos sirven de referencia para la construcción de dichos intervalos.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, - 2, 0 y 2, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(-2)=\left(-2\cdot(-2)^2-(-2)+3\right)e^{-2}=-3\,e^{-2}<0 \quad\Rightarrow\ \text{Decreciente en } \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$$

$$f'(0)=\left(-2\cdot 0^2-0+3\right)e^{0}=3>0 \quad\Rightarrow\ \text{Creciente en } \left(-\frac{3}{2},1\right)$$

$$f'(2)=\left(-2\cdot 2^2-2+3\right)e^{2}=-7e^{2}<0 \quad\Rightarrow\ \text{Decreciente en } \left(1,+\infty\right)$$

(b) Teniendo en cuenta todo lo expuesto en el apartado anterior deduciremos que:

Máximo relativo en $(1,\ e)$; Mínimo relativo en $\left(-\frac{3}{2},\ -9e^{-\frac{3}{2}}\right)$

Las ordenadas de los extremos relativos se han obtenido sustituyendo las abscisas de dichos puntos en la función, es decir:

$$f(1)=\left(3\cdot 1-2\cdot 1^2\right)e^{1}=e$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)e^{-\frac{3}{2}}=-9e^{-\frac{3}{2}}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Hallemos, en primer lugar, todas las primitivas de la función *f*.

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)}\,dx=$$

Lo haremos mediante el método de sustitución, usando el cambio de variable: $t=\cos(x)$

$$\cos(x)=t$$
$$-\operatorname{sen}(x)\,dx=dt$$

$$=\int\frac{-dt}{t^3}=-\int t^{-3}\,dt=-\frac{t^{-2}}{-2}=\frac{1}{2t^2}+\mathrm{K}$$

Deshaciendo el cambio, tendremos que la integral indefinida de la función *f* es:

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\frac{1}{2\cos^2(x)}+\mathrm{K}$$

Calculemos ahora la primitiva que toma el valor 1 cuando $x=\frac{\pi}{3}$.

$$F(x)=\frac{1}{2\cos^2(x)}+\mathrm{K}\ \Rightarrow\ F\left(\frac{\pi}{3}\right)=1\ \Rightarrow\ \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}+\mathrm{K}=1\ \Rightarrow\ \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\mathrm{K}=1\ \Rightarrow\ \mathrm{K}=-1$$

La primitiva será, finalmente:

$$F(x)=\frac{1}{2\cos^2(x)}-1$$

(b) Calculemos la integral siguiente.

$\int g(x)\,dx = \int x^3 \ln(x)\,dx =$

Se trata de una integral por partes.

$u = \ln(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^3\,dx \quad ; \quad v = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \ln(x)\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16} + C$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Ordenemos, en primer lugar, el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+z = mx \\ x+2y+z = my \\ x+2y+4z = mz \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (2-m)x+y+z=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+2y+(4-m)z=0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema de ecuaciones lineales y homogéneo en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro m.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4-m & 0 \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 1 & 2-m & 1 & 0 \\ 2-m & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - (2-m) · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 0 & -m & -3+m & 0 \\ 0 & 2m-3 & -m^2+6m-7 & 0 \end{array}\right)$ Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] + [3ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 0 & -3 & -m^2+8m-13 & 0 \\ 0 & 2m-3 & -m^2+6m-7 & 0 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] + (2m-3) · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 0 & -3 & -m^2+8m-13 & 0 \\ 0 & 0 & -2m^3+16m^2-32m+18 & 0 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; -2m^3 + 16m^2 - 32m + 18 = 0 \;\Rightarrow\; m^3 - 8m^2 + 16m - 9 = 0$

Resolveremos la ecuación de tercer grado mediante la Regla de Ruffini; probando con los divisores del término independiente, uno de ellos que es solución es el 1:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -8 & 16 & -9 \\ 1 & & 1 & -7 & 9 \\ \hline & 1 & -7 & 9 & 0 \end{array} \Rightarrow m^2 - 7m + 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

** Si $m = 1$ ó $m = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ ó $m = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$, $\Rightarrow$ La 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos. Nos queda un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, un sistema con infinitas soluciones, o como dice el ejercicio con más de una solución.

* $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq 1$ y $m \neq \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$ y $m \neq \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \quad \Rightarrow$ La tercera ecuación es una ecuación normal por lo que nos quedaría un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema homogéneo que sólo admitiría la solución trivial, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

(b) Resolvamos el sistema para $m=0$.

Como este valor de m es distinto de 1, de $\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$ y de $\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$, y teniendo en cuenta el apartado anterior, estamos ante un sistema homogéneo que sólo admite la solución trivial, es decir, $x = 0, y = 0$ y $z = 0$.

Resolvamos el sistema para el valor de $m = 1$.

Sustituyamos el valor de m por 1 en el sistema triangulado inferior obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4-m & 0 \\ 0 & -3 & -m^2+8m-13 & 0 \\ 0 & 0 & -2m^3+16m^2-32m+18 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminemos la 3ª fila, tal como lo habíamos obtenido en el apartado anterior .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3z \\ 0 & -3 & 6z \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $3 \cdot [1^a f.] + 2 \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 3z \\ 0 & -3 & 6z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $3x = 3z \quad ; \quad -3y = 6z$
o lo que es lo mismo: $x = z \quad ; \quad y = -2z$

Terminemos de despejar las incógnitas, para ello sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo, por α:

$$x = \alpha \quad ; \quad y = -2\alpha \quad ; \quad z = \alpha$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos la recta r en forma continua.

$$mx = y = z+2, \quad (m \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{1}{m}} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Elijamos de esta recta un vector de dirección, por ejemplo, $\left(\frac{1}{m}, 1, 1\right)$.

De la recta s definida por $\dfrac{x-4}{4} = y-1 = \dfrac{z}{2}$, elijamos un vector de dirección, por ejemplo, (4, 1, 2).

Para que las rectas sean perpendiculares, sus vectores de dirección lo han de ser también, por lo que el producto escalar de los vectores de dirección debe ser cero:

$$r \perp s \;\Rightarrow\; \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \;\Rightarrow\; \vec{v}_r \bullet \vec{v}_s = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{m},\ 1,\ 1\right)\bullet(4,\ 1,\ 2)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{m}+1+2=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{m}=-3 \quad \Rightarrow \quad m=-\frac{4}{3}$$

(b) Para que las rectas r y s sean paralelas se ha de verificar que las coordenadas de sus vectores de dirección han de ser proporcionales, es decir:

$$\frac{4}{\frac{1}{m}}=\frac{1}{1}=\frac{2}{1}$$

pero se puede observar que no existe ningún valor de m que lo cumpla porque hay una proporción, $\frac{1}{1}=\frac{2}{1}$, que no se va a satisfacer nunca ya que $\frac{1}{1}\neq\frac{2}{1}$.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

- Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "a" tal que se satisfaga: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$

Comprobemos si existen. Al tratarse de una función cociente, los posibles valores de "a" hay que buscarlos entre los que anulan al denominador.

$$e^x-1=0 \quad \Rightarrow \quad e^x=1 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

Hemos obtenido el cero. Haremos los límites a la izquierda del cero y después a la derecha. Veámoslo.

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{e^{0^-}+1}{e^{0^-}-1}=\frac{1+1}{1^--1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{e^{0^+}+1}{e^{0^+}-1}=\frac{1+1}{1^+-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

En consecuencia, la función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 0 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha. Por tanto, hay asíntota vertical, $x=0$.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b \in \mathrm{R}$

Calculemos estos límites para comprobar si existen o no asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{e^{\infty}+1}{e^{\infty}-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty} 1=1$$

luego hay asíntota horizontal, $y=1$, por la derecha, para $x\to+\infty$, veamos si la hay por la izquierda.

La indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, la hemos destruido aplicando la regla de L´Hôpital, que consiste en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

luego hay asíntota horizontal, $y = -1$, por la izquierda, para $x \to -\infty$.

Al haber asíntota horizontal por la derecha e izquierda no puede haber asíntotas oblicuas.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Se trata de una función polinómica de tercer grado, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Analicemos diversos aspectos de las características de esta función necesarias para su representación gráfica.

- Puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x = 0 \ \Rightarrow \ x \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2 \end{cases}$$

hemos obtenido dos puntos de corte con el eje de abscisas el (0, 0) y el (2, 0).

- Punto de corte con el eje de ordenadas, el (0, 0)

- Estudiemos la monotonía.

Obtengamos la primera derivada.

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \ \Rightarrow \ g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

$$\frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2 \pm 1}{\frac{3}{2}} = \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Sólo hay dos valores que anulen a la primera derivada el 2 y el $\frac{2}{3}$. Estudiemos la monotonía de la función $f(x)$, en los intervalos $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ y $(2, +\infty)$, ya que al ser continua y derivable en su dominio y no existir, por tanto, puntos de no continuidad y de no derivabilidad, los valores que anulan a la derivada son los únicos puntos que nos sirven de referencia para la construcción de dichos intervalos.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 0, 1 y 3, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$g'(0) = \frac{3}{4} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$$

$$g'(1) = \frac{3}{4} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = -\frac{1}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } \left(\frac{2}{3}, 2\right)$$

$$g'(3) = \frac{3}{4} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = \frac{7}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (2, +\infty)$$

- Extremos locales.

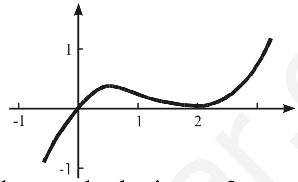
Teniendo en cuenta todo lo expuesto hasta ahora sobre continuidad y monotonía, deduciremos que:

Máximo relativo en $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)$; Mínimo relativo en (2, 0)

Las ordenadas de los extremos relativos se han obtenido sustituyendo las abscisas de dichos puntos en la función, es decir:

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$; $g(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-2^2+2=0$

Un esbozo de la gráfica es la situada al lado.



(b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x=2$ es:

$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - g(2) = g'(2)(x - 2) \quad \Rightarrow$

Teniendo en cuenta los cálculos del apartado anterior, nos quedará:

$y - 0 = 0 \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 0$

que es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x=2$. Cosa previsible por cuanto en el punto de abscisa 2 hay un mínimo relativo y la tangente es horizontal siendo además el punto de corte con el eje de abscisas, por lo que la recta tangente no es otra que el propio eje de abscisas.

(c) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, el área del recinto limitado por la gráfica de g y el eje de abscisas será:

$$\text{Área}=\left|\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3-x^2+x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2\right|=\left|\frac{2^4}{16}-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}-\left(\frac{0^4}{16}-\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}\right)\right|=\frac{1}{3} \text{ unidades de área}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Estudiaremos el rango de la matriz A mediante el método de Gauss.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & k\\ k & 1 & 3\\ 1 & 7 & k\end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - k · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & k\\ 0 & 1-3k & 3-k^2\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & k\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 1-3k & 3-k^2\end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 4 · [3ªf.] - (1 - 3k) · [3ªf.]

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & k\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 12-4k^2\end{pmatrix}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 12 - 4k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = 3 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ Para estos dos valores de k el rango de A es 2, ya que quedarían sólo dos filas linealmente independientes.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 12 - 4k^2 \neq 0 \Rightarrow k^2 \neq 3 \Rightarrow k \neq \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ Para todos estos otros valores de k el rango de la matriz A es tres.

(b) Sustituyamos el valor de k por 0 en la matriz A; y calcularemos la inversa de A, que sabemos por el apartado anterior que sí tiene inversa, mediante el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de la matriz A la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&k\\k&1&3\\1&7&k\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&3\\1&7&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&1&3&0&1&0\\1&7&0&0&0&1\end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&1&3&0&1&0\\0&4&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 4 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&1&3&0&1&0\\0&0&-12&-1&-4&1\end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -12 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 4 · [2ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&4&0&-1&0&1\\0&0&-12&-1&-4&1\end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 4 · [1ªf.] - 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&0&0&7&0&-3\\0&4&0&-1&0&1\\0&0&-12&-1&-4&1\end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 4.
Dividamos la 2ª fila por 4.
Dividamos la 3ª fila por -12.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7/4&0&-3/4\\0&1&0&-1/4&0&1/4\\0&0&1&1/12&1/3&-1/12\end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa que queríamos calcular, es decir:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7/4&0&-3/4\\-1/4&0&1/4\\1/12&1/3&-1/12\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

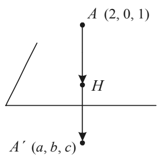
(a) Para calcular la ecuación del plano que contiene a los puntos B, C y D, lo haremos en forma paramétrica, a partir de un punto, el B, por ejemplo, y dos vectores de dirección del plano, que pueden ser el $\vec{BC}$ y el $\vec{BD}$, que son linealmente independientes, sus coordenadas no son proporcionales. $\vec{BC}=(2,2,1)-(-1,1,2)=(3,1,-1)$; $\vec{BD}=(3,1,0)-(-1,1,2)=(4,0,-2)$

$$\frac{4}{3}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{-2}{-1} \quad ; \quad \pi\equiv\begin{cases}x=-1+3\lambda+4\mu\\y=1+\lambda\\z=2-\lambda-2\mu\end{cases}$$

que es la ecuación del plano que contiene a los puntos B, C y D.

(b) Hallemos el punto simétrico A' del punto A respecto del plano π obtenido en (a).

Elegimos un punto genérico H del plano, al que le impondremos la condición de que el vector $\vec{AH}$ ha de ser perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, el $\vec{BC}$ y el $\vec{BD}$.



El punto H, por pertenecer al plano, tendrá las coordenadas genéricas siguientes:

$$H=(-1+3\lambda+4\mu,\quad 1+\lambda,\quad 2-\lambda-2\mu)$$

El vector $\vec{AH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{AH}=(-1+3\lambda+4\mu,\ 1+\lambda,\ 2-\lambda-2\mu)-(2,\ 0,\ 1)=(3\lambda+4\mu-3,\ 1+\lambda,\ -\lambda-2\mu+1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AH}\perp\vec{BC}\Rightarrow\ \vec{AH}\bullet\vec{BC}=0\\ \vec{AH}\perp\vec{BD}\Rightarrow\ \vec{AH}\bullet\vec{BD}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}(3\lambda+4\mu-3,\ 1+\lambda,\ -\lambda-2\mu+1)\bullet(3,1,-1)=0\\ (3\lambda+4\mu-3,\ 1+\lambda,\ -\lambda-2\mu+1)\bullet(4,0,-2)=0\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}9\lambda+12\mu-9+1+\lambda+\lambda+2\mu-1=0\\ 12\lambda+16\mu-12+2\lambda+4\mu-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}11\lambda+14\mu=9\\ 14\lambda+20\mu=14\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-

$$\left(\begin{array}{cc|c}11&14&9\\14&20&14\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=11\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $11\cdot[2^a f.]-14\cdot[1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c}11&14&9\\0&24&28\end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=24\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $24\cdot[1^a f.]-14\cdot[2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c}264&0&-176\\0&24&28\end{array}\right)$$ La solución es: $264\lambda=-176$; $24\mu=28\ \Rightarrow\ \lambda=-\dfrac{176}{264}=-\dfrac{2}{3}$; $\mu=\dfrac{28}{24}=\dfrac{7}{6}$

El vector $\vec{AH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{AH}=(3\lambda+4\mu-3,\ 1+\lambda,\ -\lambda-2\mu+1)=\left(3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+4\cdot\frac{7}{6}-3,\ 1+\left(-\frac{2}{3}\right),\ -\left(-\frac{2}{3}\right)-2\cdot\frac{7}{6}+1\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$$

El punto H tendrá de coordenadas:

$$H=(-1+3\lambda+4\mu,\quad 1+\lambda,\quad 2-\lambda-2\mu)=\left(-1+3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+4\cdot\frac{7}{6},\ 1+\left(-\frac{2}{3}\right),\ 2-\left(-\frac{2}{3}\right)-2\cdot\frac{7}{6}\right)=$$
$$=\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

Supongamos que el simétrico de A, el A', tiene de coordenadas $A'(a,b,c)$

Se verificará que $\vec{AH}=\vec{HA'}$, es decir:

$$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)=(a,b,c)-\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\quad\Rightarrow\quad\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)=\left(a-\frac{5}{3},\ b-\frac{1}{3},\ c-\frac{1}{3}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{3}=a-\dfrac{5}{3}\\[2mm] \dfrac{1}{3}=b-\dfrac{1}{3}\\[2mm] -\dfrac{2}{3}=c-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4}{3}\\[2mm] b=\dfrac{2}{3}\\[2mm] c=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\qquad A'\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN JUNIO 2009

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Calcula el siguiente límite (ln denota logaritmo neperiano),

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

EJERCICIO 2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=x|x-1|$.

(a) [0´5 PUNTOS] Esboza la gráfica de *f*.

(b) [0´75 PUNTOS] Comprueba que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.

(c) [1´25 PUNTOS] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la de dicha tangente.

EJERCICIO 3. Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

(a) [0´5 PUNTOS] El determinante de B^{-1}.

(b) [0´5 PUNTOS] El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de *B*).

(c) [0´5 PUNTOS] El determinante de $2B$.

(d) [1 PUNTO] El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son respectivamente, $5F_1-F_3$, $3F_3$, F_2.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS] Se considera la recta *r* definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y la recta *s* definida por $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$ Halla la ecuación de la recta perpendicular común a *r* y *s*.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x<0\\ x^2-3x-1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

(a) [0´75 PUNTOS] Estudia su continuidad y derivabilidad.

(b) [1´25 PUNTOS] Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.

(c) [0´5 PUNTOS] Esboza la gráfica de *f*.

EJERCICIO 2. Considera la curva de ecuación $y=x^3-3x$.

(a) [0´5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=-1$.

(b) [2 PUNTOS] Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y=2$.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS] Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30% de las cajas.

EJERCICIO 4. Considera la recta *r* definida por $\begin{cases}x+y=2\\ y+z=0\end{cases}$ y la recta *s* que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$.

(a) [1 PUNTO] Estudia la posición relativa de ambas rectas.

(b) [1´5 PUNTOS] Determina un punto *C* de la recta *r* tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\left[\frac{1}{0}-\frac{2}{0}\right]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1-2\ln(x)}{(x^2-1)\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-2\cdot\frac{1}{x}}{2x\,\ln(x)+(x^2-1)\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{2x^2-2}{x}}{\frac{2x^2\ln(x)+x^2-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-2}{2x^2\ln(x)+x^2-1}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x}{4x\ln(x)+\frac{2x^2}{x}+2x}\right)=$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{4x}{4x\ln(x)+2x+2x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{4x}{4x\ln(x)+4x}\right) = \frac{4}{0+4} = 1 .$$

La indeterminación de [∞ - ∞] se ha destruido efectuando la diferencia y expresando el resultado en una sola fracción, con lo que la hemos transformado en otra indeterminación del tipo, $\left[\frac{0}{0}\right]$, y ésta a su vez la hemos destruido mediante la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f (x) y g (x) continuas y derivables en x = c, si f (x) y g (x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f (x) y g (x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f (x) y g (x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En este caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones $f(x) = 2x^2 - 2$ y $g(x) = 2x^2\ln(x) + x^2 - 1$ son continuas y derivables en $x=1$, la primera por ser polinómica, y la segunda es la suma de una que es el producto de una polinómica por la logaritmo neperiano, $2x^2\cdot\ln(x)$, y otra que es polinómica, $x^2 - 1$; y tanto la suma como el producto de dichas funciones sigue siendo contina y derivable en $x=1$, por lo que se puede aplicar la Regla de L´Hôpital.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Expresemos *f (x)* como una función a trozos, teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto:

$$f(x) = x|x-1| = \begin{cases} -x(x-1) & \text{si} \quad x-1 < 0 \\ x(x-1) & \text{si} \quad x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dibujemos, en primer lugar, el trozo, $-x^2+x$, para valores de $x<1$. Se trata de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \quad\Rightarrow\quad (0, 0)$

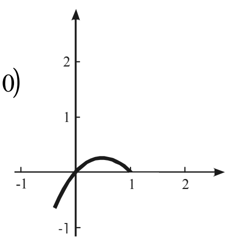
2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$y = 0 \;\Rightarrow\; -x^2 + x = 0 \;\Rightarrow\; -x(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; (0, 0) \text{ y } (1, 0)$

3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -b/(2a) = -1/(2\cdot(-1)) = 1/2 \quad\Rightarrow$

$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$



La gráfica de este trozo es la situada al lado.

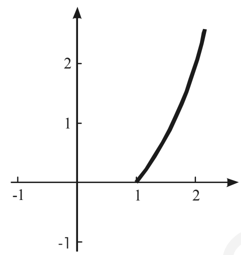
Representemos ahora el segundo trozo, $x^2 - x$, para valores de $x \geq 1$. Se trata también de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \quad\Rightarrow\quad (0, 0)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$y=0 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ y $(1,0)$



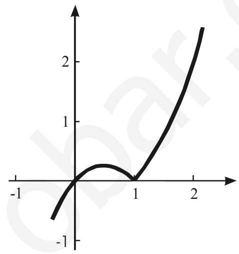
3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -b/(2a) = -(-1)/(2\cdot 1) = 1/2 \quad \Rightarrow$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad V\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

La gráfica de este otro trozo es la situada al lado.

La gráfica de la función $f(x)$ es la situada al lado.



(b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto x_0 es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad [1]$$

El punto de abscisa $x_0=0$, tiene de ordenada,

$f(x) = -x^2+x \quad \Rightarrow \quad y_0 = -0^2+0 = 0$

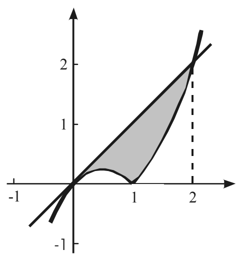
La derivada de la función en el punto 0 es:

$f'(x) = -2x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -2\cdot 0 + 1 = 1$

La ecuación de la recta tangente será: $y - 0 = 1\,(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = x$ c.q.d.

(c) Dibujemos sobre la gráfica de la función $f(x)$ anterior, la recta tangente $y = x$.

Calculemos el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta tangente, recinto que se encuentra sombreado al lado.



Construyaos la función diferencia $x - f(x)$:

$$x-f(x)=\begin{cases} x-(-x^2+x) & \text{si} \quad x<1 \\ x-(x^2-x) & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x-f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ -x^2+2x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

El área del recinto será:

$$\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(-x^2+2x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_1^2=\frac{1}{3}-0+\left(-\frac{8}{3}+4-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right)=\frac{1}{3}-\frac{7}{3}+3=1 \quad u^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, se verifica que:

$$\det(A \cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

En el caso de dos matrices, una inversa de la otra, B y B^{-1}, se verificará:

$\det(B\cdot B^{-1}) = \det(B)\cdot\det(B^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \det(I) = \det(B)\cdot\det(B^{-1}) \quad \Rightarrow$

$1 = \det(B)\cdot\det(B^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \det(B^{-1}) = 1/\det(B) \quad \Rightarrow$

$\det(B^{-1}) = 1/(-2) = -1/2$

Donde I es la matriz unidad cuyo determinante vale 1.

(b) *"El valor de un determinante no varía si intercambiamos entre sí todas las filas por las columnas y todas las columnas por las filas, o lo que es lo mismo, el determinante asociado a una matriz cuadrada y el correspondiente a la matriz traspuesta son iguales":*

$$\det(B) = \det(B^t)$$

Es decir: $\det(B^t) = \det(B) = -2$

$\det(B^t)^4 = \det(B^t \cdot B^t \cdot B^t \cdot B^t) = \det(B^t) \cdot \det(B^t) \cdot \det(B^t) \cdot \det(B^t) = (-2)^4 = 16$

(c) La matriz $2B$ se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz B, que es de orden 3, por 2.

"Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna por un mismo número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número".

"Para multiplicar un determinante por un número basta multiplicar una sola fila o columna".

Por tanto si la matriz B la multiplicamos por 2, el determinante asociado a B quedaría multiplicado por $2{\cdot}2{\cdot}2 = 8$, ya que es de orden 3, es decir:

$\det(2B) = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot} \det(B) = 8{\cdot}(-2) = -16$

(d) Escribamos la matriz B en la forma

$$B = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

El determinante que nos piden que calculemos, es el asociado a la matriz

$$\begin{pmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta la siguiente propiedad:

"Si los elementos de cualquier fila o columna de un determinante son sumas de igual nº de términos, entonces el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de las filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada por sumandos, la cual, es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos sumandos para el 2º determinante y así sucesivamente, hasta el último sumando".

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Podremos entonces calcular el determinante que se nos pide:

$$\begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

Apliquemos esta otra propiedad para calcular el segundo de los determinantes obtenidos: *"Si dos filas o dos columnas de un determinante son proporcionales, el determinante vale cero".*

Efectivamente, las filas 1ª y 2ª son proporcionales, luego ese determinante vale cero, nos quedará:

$$\begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} - 0 = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

Apliquemos al determinante obtenido cualquiera de las siguientes propiedades:

"Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna por un mismo número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número".

"Para multiplicar un determinante por un número basta multiplicar una sola fila o columna".

"Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante".

$$\begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

Apliquemos ahora al último determinante esta otra propiedad:

"Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo".

$$\begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 15 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix}$$

El último determinante vale -2, luego el determinante que se nos pide será:

$$\begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = -15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -15 \cdot (-2) = 30$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Las ecuaciones de las rectas r y s en forma paramétrica son:

$$r = \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Elijamos de la recta r un punto genérico, P, de coordenadas $P(1,\ 1,\ \lambda - 2)$; y de la recta s otro, H, de coordenadas $H(\mu,\ \mu - 1,\ -1)$.

Se ha de verificar que el vector $\vec{PH}$ que determinan estos dos puntos genéricos, ha de ser perpendicular al vector de dirección de cada una de las rectas, y por tanto, los productos escalares respectivos serán cero:

$$\vec{PH} = (\mu,\ \mu - 1,\ -1) - (1,\ 1,\ \lambda - 2) = (\mu - 1,\ \mu - 2,\ 1 - \lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{PH}\perp\vec{u}_r \;\Rightarrow\; \vec{PH}\bullet\vec{u}_r=0 \;\Rightarrow\; (\mu-1,\ \mu-2,\ 1-\lambda)\bullet(0,0,1)=0\\ \vec{PH}\perp\vec{v}_s \;\Rightarrow\; \vec{PH}\bullet\vec{v}_s=0 \;\Rightarrow\; (\mu-1,\ \mu-2,\ 1-\lambda)\bullet(1,1,0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}1-\lambda=0\\ \mu-1+\mu-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\lambda=1\\ 2\mu=3\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda=1\\ \mu=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}$$

La ecuación de la recta que se apoya perpendicularmente en r y s, es la recta que pasa por el punto, por ejemplo, el P, y tiene como vector de dirección el vector $\vec{PH}$, es decir:

$$P(1,1,\lambda-2) \;\Rightarrow\; P(1,1,1-2) \;\Rightarrow\; P(1,1,-1)$$

$$\vec{PH}=(\mu-1,\ \mu-2,\ 1-\lambda)=\left(\frac{3}{2}-1,\ \frac{3}{2}-2,\ 1-1\right)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}\beta\\ y=1-\dfrac{1}{2}\beta\\ z=-1\end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para que la función f sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de x menores que 0, $x<0$, es una función racional, que es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo para los valores que anulen al denominador, en este caso es el 1, pero este valor no pertenece al dominio particular que estamos considerando; luego la función f es continua para $x<0$.

- El trozo de función para valores de x mayores que 0, $x>0$, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función f es continua para $x>0$.

- El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Estudiemos la continuidad en el punto 0.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0^-\\x<0}}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\x>0}}(x^2-3x-1)=-1\\ f(0)=0^2-3\cdot0-1=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\;\Rightarrow\\ \qquad -1=-1=-1\end{cases}$$

Luego la función f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, pero en nuestro caso es continua.

- Para valores de $x < 0$, f al ser una función racional es derivable en $\mathbb{R}$ salvo para el uno que es el valor que anula al denominador, pero este valor no pertenece al dominio que estamos considerando, luego la función es derivable para $x < 0$., siendo la derivada, $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

- Para valores de $x > 0$, f es derivable por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $2x - 3$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

- El problema está en el punto 0.

En el punto 0 será derivable, si las derivadas laterales coinciden.

$$\left.\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1 \\ f'(0^+) &= \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} (2x-3) = 0-3 = -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \\ -1 \neq -3 \end{cases}$$

luego la función $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo en el punto $x = 0$.

La función $f(x)$ y su derivada serán:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

(b) - Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "a" tal que se satisfaga: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen. En el primero de los trozos, para $x < 0$, la función es una función racional, y sólo podrá haber asíntotas verticales para el valor que anule al denominador, el 1, pero este valor no pertenece al dominio particular que estamos considerando; luego la función f no presenta asíntotas verticales para valores de $x < 0$.

En el segundo de los trozos, para $x > 0$, la función es una función polinómica y por tanto no presenta asíntotas de ningún tipo.

En el punto cero, tampoco, ya que f es continua en dicho punto.

Podíamos haber justificado la no existencia de asíntotas verticales desde un principio sin más que haber recordado que se trata de una función continua en todo $\mathbb{R}$.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathrm{R}$

Calculemos estos límites para comprobar si existen o no asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)= \lim_{x\to+\infty}\left(x^2-3x-1\right)= \lim_{x\to+\infty} x^2=\infty^2=\infty$$

luego no hay asíntota horizontal por la derecha, para $x\to+\infty$, veamos si la hay por la izquierda.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-\infty-1}=\frac{1}{-\infty}=0$$

luego hay una asíntota horizontal, $y=0$, por la izquierda, para $x\to-\infty$.

- Asíntotas oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y=mx+n$, sólo para $x\to+\infty$, ya que para $x\to-\infty$, hay ya una asíntota horizontal. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x-3-\frac{1}{x}\right)=\infty-3-\frac{1}{\infty}=\infty-3-0=\infty$$

luego no hay asíntota oblicua para $x\to+\infty$, sino una rama parabólica de eje paralelo al eje de ordenadas.

Los extremos relativos de una función pueden alcanzarse en los puntos de no continuidad, de no derivabilidad o de derivabilidad cero.

Esta función al ser continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$, sólo presentará extremos relativos en el punto 0 y en los puntos de derivabilidad cero.

Calculemos los puntos donde la derivada se anula.

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x<0\\ 2x-3 & \text{si} \quad x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{(x-1)^2}=0 & \Rightarrow \quad \text{No hay}\\ 2x-3=0 & \Rightarrow \quad x=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Al ser la función continua podemos estudiar los extremos relativos a través de la monotonía, para lo cual construimos los siguientes intervalos de monotonía a partir de los puntos de no derivabilidad, en nuestro caso el 0, que son donde se producen un cambio en el comportamiento de la función, y los de derivabilidad cero, el 3/2: $(-\infty, 0)$, $(0, 3/2)$ y $(3/2, +\infty)$.

Elegimos valores intermedios de los mismos, por ejemplo, -1, 1 y 2, respectivamente para cada uno de los intervalos y los sustituimos en la primera derivada, según salga un valor positivo o negativo la función será creciente o decreciente:

$$f'(-1)=-\frac{1}{(-1-1)^2}=-\frac{1}{4}<0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (-\infty, 0)$$

$$f'(1)=2\cdot1-3=-1<0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (0, 3/2)$$

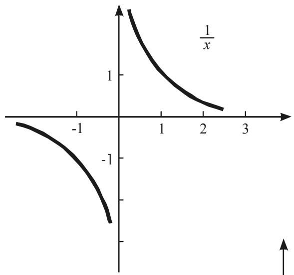
$$f'(2)=2\cdot2-3=1>0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (3/2, +\infty)$$

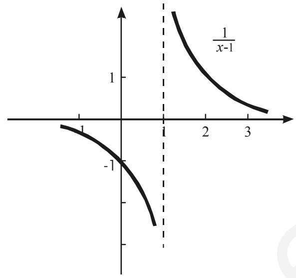
A la vista de estos intervalos de monotonía, podemos concluir diciendo que hay un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right)$.

La ordenada del mínimo relativo se ha obtenido sustituyendo la abscisa, 3/2, en la función:

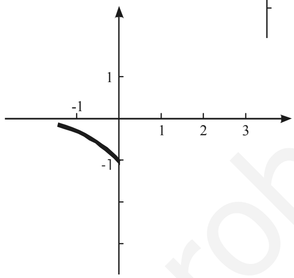
$$f(x)=x^2-3x-1 \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-1=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}-1=\frac{9-18-4}{4}=-\frac{13}{4}$$

(c) Esbocemos la gráfica de *f(x)*. Comencemos con el primer trozo, $\frac{1}{x-1}$, se trata de una función de proporcionalidad inversa, su gráfica es la misma que la de la función de proporcionalidad inversa elemental $\frac{1}{x}$ pero desplazada una unidad a la derecha.





Pero nos hemos de quedar sólo con la parte de la gráfica correspondiente a los valores de $x < 0$. Este trozo de gráfica es el situado al lado.



Representemos ahora el segundo de los trozos, $x^2 - 3x - 1$, para $x > 0$. Es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -0'302... \\ x = 3'302... \end{cases} \Rightarrow$$

$(-0'302,\ 0)$ y $(3'302,\ 0)$

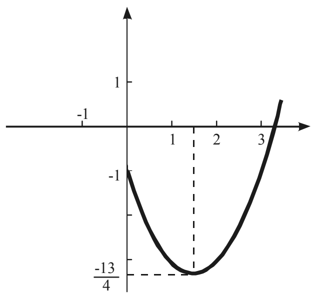
3.- Coordenadas del vértice V:

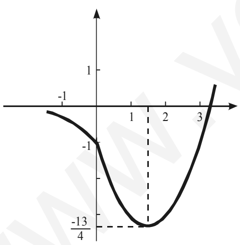
$x = -b/(2a) = -(-3)/(2\cdot 1) = 3/2 \Rightarrow$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{9 - 18 - 4}{4} = \frac{-13}{4} \Rightarrow$$

$$V\left(\frac{3}{2},\ -\frac{13}{4}\right)$$

La gráfica de este trozo es la situada al lado.





Finalmente, la gráfica de *f(x)* es la situada a la izquierda donde ya están representados los dos trozos de la misma.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

La derivada de la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto $x_0 = -1$ es:

$f(x) = x^3 - 3x \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 \;\;\Rightarrow\;\; f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; f'(-1) = 0$

Si el punto de tangencia tiene de abscisa $x_0 = -1$, la ordenada de dicho punto es:

$f(x) = x^3 - 3x \;\Rightarrow\; f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$

Luego la ecuación de la recta tangente es:

$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \;\;\Rightarrow\;\; y - 2 = 0\cdot(x - (-1)) \;\;\Rightarrow\;\; y - 2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y = 2$

(b) Antes de calcular el área del recinto limitado por la curva, $y = x^3 - 3x$, que es una función polinómica, y la recta $y = 2$, intentaremos representar la gráfica de la función y después la recta. Para ello obtengamos, en primer lugar, los puntos en los que la curva corta al eje de abscisas, lo haremos resolviendo el sistema formado por dicha función y la ecuación del eje, y=0.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x^3 - 3x = 0 \;\Rightarrow\; x\left(x^2 - 3\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Estudiemos la monotonía.

La función primera derivada es: $y' = 3x^2 - 3$. Los valores que anulen a esta derivada son:

$3x^2 - 3 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = 1 \;\;\text{y}\;\; x = -1$

Con estos dos puntos construimos los intervalos de monotonía: $(-\infty,\; -1)$, $(-1,\; 1)$ y $(1,\; +\infty)$.

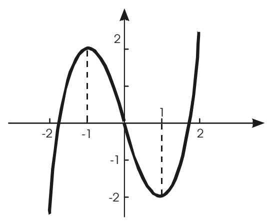
Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -2, 0 y 2, respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$y'(x) = 3x^2 - 3$

$y'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0 \quad \Rightarrow$ creciente en $(-\infty,\; -1)$

$y'(0) = 3\cdot 0^2 - 3 = -3 < 0 \quad \Rightarrow$ decreciente en $(-1,\; 1)$

$y'(2) = 3\cdot 2^2 - 3 = 9 > 0 \quad \Rightarrow$ creciente en $(1,\; +\infty)$.



Como es una función polinómica, es continua, y por tanto los extremos relativos serán:

* máximo relativo en $(-1,\; 2)$

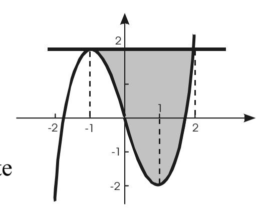
* mínimo relativo en $(1,\; -2)$

Las ordenadas de los extremos relativos se han obtenido sustituyendo cada una de las abscisas en la función.

$f(x) = x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2 \quad ; \quad f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 = -2$

La gráfica aproximada de $f(x)$ es la situada un poco más arriba.

El recinto limitado por esta curva y la recta $y = 2$, es el que se encuentra sombreado al lado.



Calculemos el área de dicho recinto.

Construyamos la función diferencia entre la recta y la curva:

$h(x) = 2 - (x^3 - 3x) = -x^3 + 3x + 2$

e integremos esta función entre -1 y 2, que serían los puntos de corte de ambas funciones.

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2}\left(-x^3+3x+2\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2} = -\frac{2^4}{4}+\frac{3\cdot 2^2}{2}+2\cdot 2-\left(-\frac{(-1)^4}{4}+\frac{3(-1)^2}{2}+2(-1)\right) =$$

$$= -4+6+4-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2\right) = 6-\left(\frac{-1+6-8}{4}\right) = 6-\left(\frac{-3}{4}\right) = 6+\frac{3}{4} = \frac{27}{4} \quad u^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Llamemos x al número de cajas que la empresa ha comprado en el primer mercado, el A, sea y el número de cajas compradas en el mercado B y z las compradas en el C.

Según el enunciado tendremos:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 1500 \\ 30x+20y+40z &= 40500 \\ x &= \frac{30}{100}\cdot 1500 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z &= 1500 \\ 3x+2y+4z &= 4050 \\ x &= 450 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 450+y+z &= 1500 \\ 3\cdot 450+2y+4z &= 4050 \\ x &= 450 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y+z &= 1050 \\ 2y+4z &= 2700 \\ x &= 450 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y+z &= 1050 \\ y+2z &= 1350 \\ x &= 450 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y+z &= 1050 \\ y+2z &= 1350 \end{aligned}\right\}$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan, para lo cual expresaremos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1050 \\ 1 & 2 & 1350 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1050 \\ 0 & 1 & 300 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, se trata de un sistema compatible determinado.
Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 750 \\ 0 & 1 & 300 \end{array}\right)$$

La solución es:

$x = 450 \quad ; \quad y = 750 \quad ; \quad z = 300$

La empresa ha pagado en el primer mercado, el A: $30 \cdot x = 30 \cdot 450 = 13500$ €
La empresa ha pagado en el segundo mercado, el B: $20 \cdot y = 20 \cdot 750 = 15000$ €
La empresa ha pagado en el tercer mercado, el C: $40 \cdot z = 40 \cdot 300 = 12000$ €

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Obtengamos la ecuación de la recta s que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 0, -1)$.

$$s \equiv \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z+1}{0+1} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} \\ \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = y \\ y = z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 1 \\ y-z = 1 \end{cases}$$

Discutamos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas para estudiar la posición relativa de las mismas.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \\ x-y=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y discutámoslo mediante el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [2ªf.]

Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido una ecuación trivial, la 4ª, que la eliminamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero. Se trata pues de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, o sea, de un sistema compatible determinado con una única solución, es decir, las dos rectas se cortan en un único punto.

(b) Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica. Para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de la recta que viene dada como intersección de dos planos.

$$r \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Expresamos el sistema en forma matricial y lo resolvemos mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, nos sobra una incógnita, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.].

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2+z \\ 0 & 1 & -z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = 2+z \quad ; \quad y = -z$$

Terminemos de despejar las incógnitas sustituyendo la incógnita secundaria, z, por un parámetro t.

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Un punto C genérico de la recta tendrá de coordenadas $(2+t,\ -t,\ t)$. Calculemos qué punto o puntos *C* determinan que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

Calculemos las coordenadas de estos dos vectores.

$\vec{CA} = (2,\ 1,\ 0) - (2+t,\ -t,\ t) = (-t,\ 1+t,\ -t)$

$\vec{CB} = (1,\ 0,\ -1) - (2+t,\ -t,\ t) = (-1-t,\ t,\ -1-t)$

Impongamos la condición de perpendicularidad de ambos vectores, es decir, que su producto escalar sea cero.

$\vec{CA} \perp \vec{CB} \Rightarrow \vec{CA} \bullet \vec{CB} = 0 \Rightarrow (-t,\ 1+t,\ -t) \bullet (-1-t,\ t,\ -1-t) = 0 \Rightarrow$

$-t(-1-t) + (1+t)t - t(-1-t) = 0 \Rightarrow t + t^2 + t + t^2 + t + t^2 = 0 \Rightarrow 3t^2 + 3t = 0 \Rightarrow$

$3t(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t+1 = 0 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$

Sustituyamos cada uno de estos valores obtenidos para *t* en las coordenadas genéricas del punto *C*.

Para t = 0.

$C\ (2+t,\ -t,\ t) \Rightarrow C\ (2+0,\ -0,\ 0) \Rightarrow C_1\ (2,\ 0,\ 0)$

Para t = -1.

$C\ (2+t,\ -t,\ t) \Rightarrow C\ (2+(-1),\ -(-1),\ -1) \Rightarrow C_2\ (1,\ 1,\ -1)$

Hemos obtenido dos puntos que satisfacen las condiciones del problema.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2009

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Se considera la función $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$$

Determina la asíntota de la gráfica de *f*.

EJERCICIO 2. La curva $y=\frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $A=(0,0)$, $B=(2,0)$, $C=(2,1)$ y $D=(0,1)$ en dos recintos.

(a) [0´75 PUNTOS]. Dibuja dichos recintos.

(b) [1´75 PUNTOS]. Halla el área de cada uno de ellos.

EJERCICIO 3. **(a)** [1´75 PUNTOS]. Discute según los valores del parámetro λ el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3x+\lambda y = 0 \\ x +\lambda z=\lambda \\ x+y+3z=1 \end{array}\right\}$$

(b) [0´75 PUNTOS]. Resuélvelo para $\lambda=0$.

EJERCICIO 4. Considera el punto $P(1,0,0)$, la recta r definida por $x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y la recta s definida por $(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Estudia la posición relativa de *r* y *s*.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que pasando por *P* es paralelo a *r* y *s*.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 puntos]. De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sea f la función definida por

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$$

Halla la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$. (Sugerencia: utiliza el cambio de variable $t=\frac{3}{2}x^2\Big)$.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

EJERCICIO 4. Considera la recta r definida por

$$\begin{cases} x-y+3 = 0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$$

y la recta s definida por

$$\begin{cases} 2y+1 = 0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

(b) [1 PUNTO]. ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s? Razona la respuesta.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

- Asíntotas verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$

Por el tipo de función que nos da el problema no existe ningún valor de x que haga que la función se aproxime a infinito.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$

Comprobemos si existe, pero sólo para $x\to+\infty$, ya que para $-\infty$ la función no está definida.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}+\lim_{x\to+\infty}x=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)}+\lim_{x\to+\infty}x=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}x^2}+\lim_{x\to+\infty}x=$$

$$=\infty+\infty=\infty \quad \Rightarrow \quad \text{No existe asíntota horizontal.}$$

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua, es decir, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

- Asíntotas oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: y = mx + n. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n, pero sólo para $x \to +\infty$, ya que para $-\infty$ la función no está definida.

$$\text{m} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}+\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right) = \sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+1 = \sqrt{1-0}+1 = 2$$

La indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ se ha destruido haciendo diversas operaciones.

Calculemos ahora n:

$$\text{n} = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\text{m}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right) = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} =$$

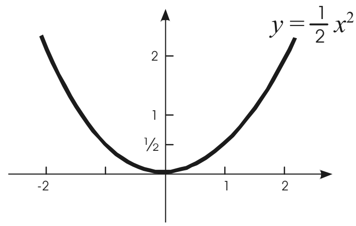
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}+\frac{x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+1} = \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} = -\frac{1}{2}$$

La asíntota oblicua es: $y = 2x - \frac{1}{2}$.

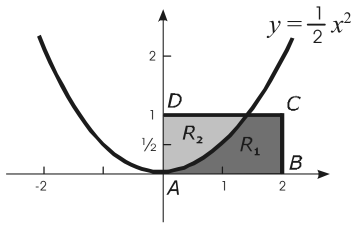
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Representemos en primer lugar la gráfica de la función cuadrática elemental $y = \frac{1}{2}x^2$ que es una parábola, donde el punto de corte con el eje de ordenadas y con el eje de abscisas es el mismo, el (0, 0), que es a su vez el vértice de la parábola.



La gráfica de esta función es la situada al lado.

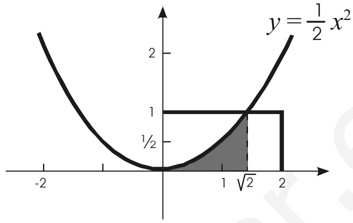
Al dibujar el rectángulo delimitado por los vértices A, B, C y D, obtenemos los dos recintos, R_1 y R_2, que nos pide el ejercicio, y que se encuentran dibujados al lado, sombreados con distinta intensidad.



(b) Para calcular el área del recinto R_1, lo haremos desdoblándolo en dos nuevos recintos.

Para ello calcularemos el punto de corte de la función con el lado que pasa por el punto D(0, 1), de ecuación $y = 1$. El punto de corte entre esta recta y la función $y = \frac{1}{2}x^2$ es:

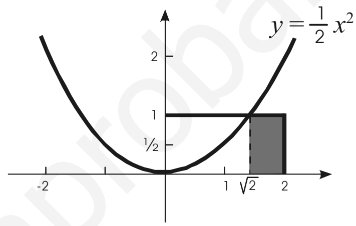
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, 1) \\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow (-\sqrt{2}, 1) \end{array}\right.$$



El área de este nuevo recinto sombreado y situado al lado es:

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\left[x^3\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\left((\sqrt{2})^3 - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{2^3} = \frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

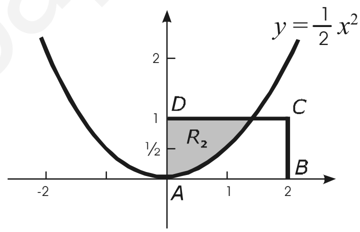


El otro recinto en que hemos descompuesto el recinto R_1 es el que se encuentra situado al lado; se trata de un rectángulo cuya área es:

$$A_2 = (2 - \sqrt{2})\cdot 1 = 2 - \sqrt{2}$$

El área del recinto R_1 será la suma de las áreas de estos dos últimos recintos, es decir:

Área del recinto $R_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{3} + 2 - \sqrt{2} = \left(2 - \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\right)$ u^2.



El área del recinto R_2, será el área del rectángulo *ABCD* menos el área del recinto R_1, o sea:

Área del recinto $R_2 = 2\cdot 1 - \left(2 - \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\right) = 2 - 2 + \dfrac{2}{3}\sqrt{2} =$

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ u^2.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el siguiente sistema para los diversos valores del parámetro λ.

$$\left.\begin{array}{l} 3x + \lambda y = 0 \\ x + \lambda z = \lambda \\ x + y + 3z = 1 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ 3 & \lambda & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 3 & -9 & -3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (λ-3) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-6\lambda & \lambda^2-4\lambda \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Discutamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \;;\; \lambda = 6$

** Si $\lambda = 0 \Rightarrow$ la última ecuación será $0 = 0^2 - 4\cdot 0$, es decir, $0 = 0$, se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, nos quedará un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

** Si $\lambda = 6 \Rightarrow$ la última ecuación será $0 = 6^2 - 4\cdot 6$, es decir, $0 = 12$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6 \Rightarrow$ la última ecuación no es ni absurda ni trivial, nos queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

(b) Resolvamos el sistema para $\lambda=0$, para ello sustituyamos este valor en la matriz triangulada inferior del apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-6\lambda & \lambda^2-4\lambda \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0-3 & 0-1 \\ 0 & 0 & 0^2-6\cdot 0 & 0^2-4\cdot 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Al estar el sistema triangulado inferiormente, y ser un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, la incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-3z \\ 0 & -1 & -1+3z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+3z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución es:

$$x = 0 \quad ; \quad -y = -1 + 3z$$

o lo que es lo mismo:

$$x = 0 \quad ; \quad y = 1 - 3z$$

sustituyendo la incógnita z por un parámetro t, tendremos la solución final:

$$x = 0 \quad ; \quad y = 1 - 3t \quad ; \quad z = t$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos cada una de las rectas r y s en forma paramétrica.

La recta r será: $x-3 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3+\mu \\ y = 2\mu \\ z = -1-2\mu \end{cases}$

La recta s será:

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0) \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Calculemos los puntos (x, y, z) comunes a r y a s, para deducir la posición relativa de ambas rectas, para ello, igualemos las x, las y, y las z:

$$\begin{cases} 3 + \mu = 1 - \lambda \\ 2\mu = 1 + 2\lambda \\ -1 - 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu + \lambda = -2 \\ 2\mu - 2\lambda = 1 \\ -2\mu = 1 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -4 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente.
Hemos obtenido una última ecuación, $0 = -1$, que es absurda, luego el sistema es incompatible, pero al obtenerse una sóla ecuación absurda las dos rectas se cruzan en el espacio.

(b) Hallemos la ecuación del plano,π, que pasa por $P(1, 0, 0)$ y es paralelo a r y s.
Si es paralelo a r y a s, el vector de dirección de cada una de estas rectas lo será del plano.

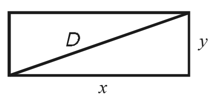
$$r \equiv x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_r = (1, 2, -2)$$

$$s \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_s = (-1, 2, 0)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 0 + 2\alpha + 2\beta \\ z = 0 - 2\alpha + 0 \cdot \beta \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 2\alpha + 2\beta \\ z = -2\alpha \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



(a) Construyamos la función diagonal, que es la que me piden que sea mínima.

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Busquemos la relación existente entre la x y la y. Para lo cual nos basamos en la condición que nos da el ejercicio y es que el área del rectángulo es de 16 cm^2.

$$16 = x \cdot y$$

Despejemos la y y sustituyámosla en la función diagonal.

$$16 = x \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16}{x} \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 256}{x^2}} \quad \Rightarrow$$

$$D(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 256}}{x}$$

El dominio de esta función es el intervalo abierto que va desde 0 hasta +∞, es decir:

$$\text{Dom}\, D(x) = (0,\ +\infty)$$

La función *D(x)* es una función continua y derivable en su dominio ya que es el cociente de la raíz cuadrada de una función polinómica, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ (ya que el radicando, en este caso, no toma nuca valores negativos) entre otra función polinómica, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, luego la función cociente es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en el valor 0 que es el que anula a la función del denominador, luego la función *D(x)* es continua y derivable en (0, +∞).

Calculemos los mínimos relativos o locales, que se encontrarán entre los que anulen a la primera derivada.

$$D(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 256}}{x} \quad \Rightarrow \quad D'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+256}} \cdot x - \sqrt{x^4+256} \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{2x^4}{\sqrt{x^4+256}} - \sqrt{x^4+256}}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{2x^4 - (x^4 + 256)}{\sqrt{x^4+256}}}{x^2} = \frac{x^4 - 256}{x^2\sqrt{x^4+256}} \quad \Rightarrow \quad D'(x) = \frac{x^4 - 256}{x^2\sqrt{x^4+256}}$$

Obtengamos los valores que anulen a la primera derivada.

$$\frac{x^4 - 256}{x^2\sqrt{x^4+256}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 256 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 256 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{256} = \pm 4$$

Aunque hemos obtenido dos valores sólo el +4 es el que pertenece al dominio de la función, comprobemos que es el mínimo relativo y absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Con este valor, 4, que anula a la función primera derivada construimos los dos intervalos posibles de monotonía dentro de su dominio, el (0, 4) y el (4, +∞). Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de esos intervalos, por ejemplo, el 1 y el 5, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero en el intervalo correspondiente la gráfica de la función será creciente o decreciente.

$$D'(1) = \frac{1^4 - 256}{1^2\sqrt{1^4 + 256}} = \frac{-255}{\sqrt{257}} < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (0\ ,4)$$

$$D'(5) = \frac{5^4 - 256}{5^2 \cdot \sqrt{5^4 + 256}} = \frac{369}{5^2 \cdot \sqrt{881}} > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (4, +\infty)$$

A la vista de todo lo anterior el valor que anulaba a la primera derivada, el 4, no sólo es mínimo relativo sino también mínimo absoluto. En definitiva las dimensiones que ha de tener el rectángulo para que su diagonal sea mínima son:

$$x = 4 \ \Rightarrow \ y = \frac{16}{x} = \frac{16}{4} = 4$$

es decir, el rectángulo debe ser un cuadrado.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

La integral indefinida *F(x)* de *f(x)* será:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}\,dx=$$

Hagamos el cambio de variable: $t=\frac{3}{2}x^2$.

Diferenciemos la expresión anterior: $dt=\frac{3}{2}\cdot 2x\,dx=3x\,dx \quad\Rightarrow\quad x\,dx=\frac{1}{3}dt$

La integral anterior mediante este cambio de variable quedará así:

$$=\int\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}\,dx=\int\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{4-9\cdot\left(\frac{2}{3}t\right)^2}}\,dt=\int\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{4-9\cdot\frac{4}{9}t^2}}\,dt=\int\frac{1}{3\sqrt{4-4t^2}}\,dt=\int\frac{1}{3\sqrt{4\left(1-t^2\right)}}\,dt=$$

$$=\int\frac{1}{6\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{1}{6}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{1}{6}\,arc\ sen\,(t)=\frac{1}{6}\,arc\ sen\left(\frac{3}{2}x^2\right)+\mathrm{K}\quad\Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{1}{6}\,arc\ sen\left(\frac{3}{2}x^2\right)+\mathrm{K}$$

La primitiva de f que cumple $F(0)=3$, es:

$$F(0)=\frac{1}{6}\,arc\ sen\left(\frac{3}{2}\cdot 0^2\right)+\mathrm{K}\;\Rightarrow\; 3=0+\mathrm{K}\;\Rightarrow\;\mathrm{K}=3\;\Rightarrow\; F(x)=\frac{1}{6}\,arc\ sen\left(\frac{3}{2}x^2\right)+3$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Calculemos la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$.

$AX - B^t = 2C$	sumamos a ambos miembros la matriz B^t.
$AX - B^t + B^t = 2C + B^t$	usamos la propiedad de elemento neutro respecto de la suma.
$AX + O = 2C + B^t \;\Rightarrow$	
$AX = 2C + B^t$	multiplicamos a la izquierda por la matriz inversa de A, A^{-1}.
$A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot(2C + B^t)$	usamos la propiedad asociativa.
$(A^{-1}\cdot A)\cdot X = A^{-1}\cdot(2C+B^t)$	usamos la propiedad de la matriz inversa
$I\cdot X = A^{-1}\cdot(2C + B^t)$	usamos la propiedad del elemento unidad (matriz identidad)
$X = A^{-1}\cdot(2C + B^t)$	calculemos esta matriz X.

Pero antes de calcular esta matriz X hemos de calcular, si existe, la matriz inversa de A, A^{-1}. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $5 \cdot [3^a f.] + 2 \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz *A* admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -4 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $4 \cdot [2^a f.] + 3 \cdot [3^a f.]$
Sustituyamos la 1ª fila por: $4 \cdot [1^a f.] + [3^a f.]$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & -8 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -20 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Dividamos la 2ª fila por 5.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & -8 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $[1^a f.] - 2 \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 4.
Dividamos la 2ª fila por -4.
Dividamos la 3ª fila por -4.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -2/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -2/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -2/4 & -5/4 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz X $\Rightarrow$ $X = A^{-1} \cdot (2C + B^t)$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para determinar la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*, expresaremos en primer lugar la ecuación de la recta *r* en forma paramétrica, y después calcularemos el vector de dirección de la recta *s*.

$$r \equiv \begin{cases} x-y+3 = 0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = -3 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Terminemos de resolverlo. La incógnita que nos sobra, la *z*, la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4+z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -2+z \\ 0 & 2 & 4+z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $2x = -2 + z$; $2y = 4 + z$
que terminado de despejar las incógnitas, tendremos:

$$x = -1 + \frac{1}{2}z \quad ; \quad y = 2 + \frac{1}{2}z$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria por un parámetro, por ejemplo, por t.

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}t \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

El vector director de la recta *s* definida por

$$\begin{cases} 2y+1 = 0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$$

lo obtendremos mediante el producto vectorial de cada uno de los vectores normales a los planos que definen la recta:

$$\vec{v}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (0,\ 2,\ 0) \times (1,\ 0,\ -2) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-4,\ 0,\ -2)$$

El plano π que nos piden pasará por un punto de la recta r, y los dos vectores de dirección del mismo serán, uno el de la recta r y el otro el de la recta s.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}\alpha - 4\beta \\ y = 2 + \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$$

(b) Hallamos el haz de planos que contenga a r.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha(x - y + 3) + \beta(x + y - z - 1) = 0 \quad \text{con } \alpha \neq 0 \text{ o } \beta \neq 0 \Rightarrow$$

$$\alpha x - \alpha y + 3\alpha + \beta x + \beta y - \beta z - \beta = 0 \Rightarrow \quad (\alpha + \beta)x + (-\alpha + \beta)y - \beta z + 3\alpha - \beta = 0$$

El plano de este haz que sea perpendicular a s debe cumplir la condición de que el vector normal al plano y el vector de dirección de la recta deben ser paralelos y por tanto las coordenadas de dichos vectores proporcionales.

$$\vec{n} = (\alpha + \beta,\ -\alpha + \beta,\ -\beta) \quad ; \quad \vec{v}_s = (-4,\ 0,\ -2)$$

Si estos dos vectores son proporcionales se verificará:

$$\frac{-4}{\alpha + \beta} = \frac{0}{-\alpha + \beta} = \frac{-2}{-\beta} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-4}{\alpha + \beta} = \dfrac{0}{-\alpha + \beta} \\ \dfrac{-4}{\alpha + \beta} = \dfrac{-2}{-\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 4\beta = 0 \\ 4\beta = -2\alpha - 2\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ 2\alpha = -6\beta \end{cases} \Rightarrow \quad 2\alpha = -6\alpha \quad \Rightarrow \quad 8\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$$

Esto implica que α y β tienen que ser simultáneamente cero, lo que contradice la hipótesis inicial, o si sustituimos estos valores en la ecuación del haz de planos no obtenemos nada, y por tanto no existe ningún plano que cumpla las condiciones del ejercicio.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 64 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que f verifica:

- El punto (0, 1) es un punto de inflexión de la gráfica de f.
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=1$.
- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 1.

EJERCICIO 2. Considera las funciones $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=|x|$, $g(x)=6-x^2$.

(a) [1 PUNTO]. Esboza el recinto limitado por sus gráficas.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3. Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A, B y C.

- Pista 1: Si compramos una unidad de A, dos de B y una de C gastamos 118 euros.
- Pista 2: Si compramos n unidades de A, $n+3$ de B y tres de C gastamos 390 euros.

(a) [1´5 PUNTOS]. ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles?

(b) [1 PUNTO]. Sabiendo que $n=4$ y que el producto C cuesta el triple que el producto A, calcula el precio de cada producto.

EJERCICIO 4. Considera el punto $A(1, -2, 1)$ y la recta r definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x+y = 2 \\ 2x+y+z = 7 \end{cases}$$

(a) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula la distancia del punto A a la recta r.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se divide un segmento de longitud $L = 20$ cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

EJERCICIO 2. La recta tangente a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^2 + nx - 3$, en el punto $(1, -6)$, es paralela a la recta de ecuación $y = -x$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina las constantes m y n. Halla la ecuación de dicha recta tangente.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas.

EJERCICIO 3. Sean A, B, C y X matrices cualesquiera que verifican $AXB = C$.

(a) [1 PUNTO]. Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el de C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Considera la recta r definida por

$$\begin{cases} y = -1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$$

y la recta s definida por

$$\begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Como la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en $(0,1)$, se cumplirá que:

- $f(0) = 1$ por pertenecer el punto (0, 1) a la gráfica de la función f.
- $f''(0) = 0$ y $f'''(0) \neq 0$ por ser el punto (0, 1) un punto de inflexión.

Calculemos las derivadas sucesivas de f y apliquemos las condiciones anteriores.

Tendremos en cuenta que las funciones polinómicas son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow$

$f''(x) = 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = 6a$

Apliquemos ahora las citadas condiciones:

$f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 1$ [1]

$f''(0) = 0 \Rightarrow \quad 6a\cdot 0 + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$ [2]

$f'''(0) = 6a \quad \Rightarrow \quad 6a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 0$ [3]

esta última condición es evidente que se satisface ya que la función es polinómica de grado tres y por tanto el coeficiente del término de grado tres, a, tiene que ser distinto de cero.

La segunda condición que se verifica, según el problema, es que tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x = 1$, es decir, se ha de cumplir que $f'(1)=0$ y que $f''(1)>0$, por tanto:

· $f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0 \quad \Rightarrow$

que teniendo en cuenta [2], $b=0$, $\quad \Rightarrow \quad 3a+c=0$ [4]

· $f''(1)>0 \quad \Rightarrow \quad 6a\cdot 1 + 2b > 0 \quad \Rightarrow \quad 6a > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0$ [5]

La tercera condición que nos dice el problema es que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 1, lo que implica que $f'(2)=1$, o sea:

· $f'(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 3a\cdot 2^2 + 2b\cdot 2 + c = 1 \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b + c = 1 \quad \Rightarrow$

que teniendo en cuenta [2], $b=0$, $\quad \Rightarrow \quad 12a+c=1$ [6]

Hemos calculado que $b=0$, $d=1$ y $a \geq 0$; resolvamos ahora el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que forman las ecuaciones [4] y [6] que se han obtenido.

$$\left.\begin{array}{r} 3a + c = 0 \\ 12a + c = 1 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 12 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es: $9a=1$; $-3c=1 \quad \Rightarrow$

$a=1/9$; $c=-1/3$.

Los valores de a, b, c y d, finalmente son: $a = \frac{1}{9}$; $b = 0$; $c = -\frac{1}{3}$; $d = 1$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Dibujemos en primer lugar la gráfica de $g(x) = 6 - x^2$ que se corresponde con la de una parábola.

1.- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que se trata de una función polinómica definida en $\mathbb{R}$.

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 6 - x^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = 6 - x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = \left(\sqrt{6} + x\right)\left(\sqrt{6} - x\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{cases}$$

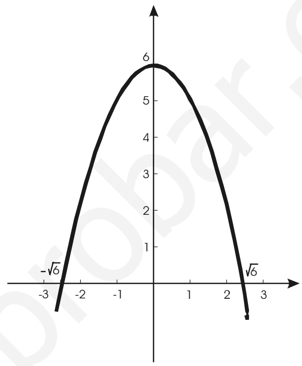
luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: $A\left(-\sqrt{6}, 0\right)$ y $B\left(\sqrt{6}, 0\right)$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = 6 - x^2 \;\Rightarrow\; y = 6 - 0 = 6 \;\Rightarrow$ el punto es el (0, 6).

3.- El máximo se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-0}{-2} = 0$, siendo la ordenada: $y = 6 - x^2 \;\Rightarrow\; y = 6 - 0 = 6$, por tanto, el máximo es el punto (0, 6).

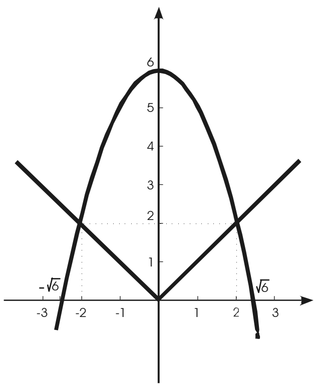
La gráfica es la situada a la derecha.



Representemos ahora la gráfica *f(x)* $=|x|$, que es la función valor absoluto de *x*, y cuya expresión analítica es:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

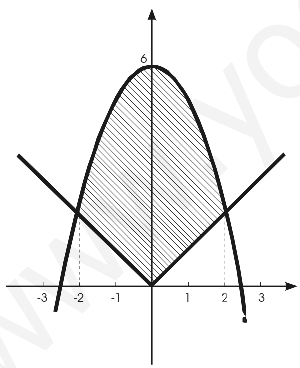
La gráfica de esta otra función, que se corresponde con las de las rectas bisectrices del segundo y primer cuadrante, la hemos representado junto a la que ya teníamos representada, y se encuentra situada a la izquierda.



Para una mayor precisión y porque los necesitaremos en el apartado siguiente, calculemos los puntos de corte de la primera gráfica con cada uno de los trozos de la gráfica de *f(x)*:

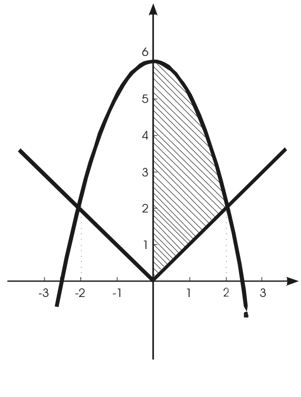
$$\left.\begin{array}{l} y = 6 - x^2 \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \; 6 - x^2 = -x \;\Rightarrow\; x^2 - x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Con el trozo, $y=x$, los puntos que obtendríamos serían $x=2$ y $x=-3$. En definitiva los puntos de corte de ambas gráficas son el (-2, 2) y el (2, 2), tal como están representados en la gráfica conjunta.



El recinto limitado por ambas gráficas se corresponde con la zona rayada en la gráfica situada al lado.

(b) Para calcular el área del recinto anterior, calcularemos el de este otro recinto y el resultado lo multiplicamos por dos.



$$\int_0^2 \left(6 - x^2 - x\right)dx = \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(12 - \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - 0 = \frac{22}{3}$$

El área será: $\frac{22}{3} \cdot 2 = \frac{44}{3}\; u^2$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Llamemos x al precio del producto A, y al del producto B y z al del producto C. Haciendo la traducción correspondiente de las pistas llegamos al sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z &= 118 \\ nx+(n+3)y+3z &= 390 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema anterior en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ n & n-3 & 3 & 390 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.
Intercambiemos entre sí las columnas 1ª y 2ª.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 118 \\ 3 & n & n+3 & 390 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 118 \\ 0 & n-3 & n-3 & 36 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{22} = 0 \Rightarrow n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow$ la 2ª ecuación es, $0 = 36$, que es absurda, por lo que el sistema es incompatible y no tiene solución, o como dice el ejercicio, para este valor de $n = 3$, las dos pistas son incompatibles.

* $a_{22} \neq 0 \Rightarrow n - 3 \neq 0 \Rightarrow n \neq 3 \Rightarrow$ la 2ª ecuación sería una ecuación normal y el sistema sería un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

(b) Añadamos las condiciones que nos indica el ejercicio en este apartado al sistema que teníamos inicialmente.

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z &= 118 \\ nx+(n+3)y+3z &= 390 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+2y+z &= 118 \\ 4x+7y+3z &= 390 \\ z &= 3x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+2y+z &= 118 \\ 4x+7y+3z &= 390 \\ -3x+z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema anterior en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 4 & 7 & 3 & 390 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & -1 & -1 & -82 \\ 0 & 6 & 4 & 354 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 6 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & -1 & -1 & -82 \\ 0 & 0 & -2 & -138 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la tercera fila por -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & -1 & -1 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 69 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 49 \\ 0 & -1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 69 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & -1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 69 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es: $x = 23$; $-y = -13$; $z = 69$
o lo que es lo mismo: $x = 23$€ ; $y = 13$€ ; $z = 69$€

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular a r, expresaremos, en primer lugar, la ecuación de la recta r en forma paramétrica para elegir después el vector de dirección de la misma y hacerlo coincidir con el vector normal al plano que me piden, ya que es la condición para que el plano y la recta sean perpendiculares.

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria, nos quedará el siguiente sistema.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3-z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5-z \\ 0 & -1 & 3-z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es: $x = 5 - z$; $-y = 3 - z$,
o lo que es lo mismo, $x = 5 - z$; $y = -3 + z$.

Sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones paramétricas de r serán:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 - \alpha \\ y = -3 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El vector de dirección de la recta r es el $(-1, 1, 1)$, y que como dijimos al principio, podemos tomarlo como el vector normal al plano que nos pide el problema; sustituyamos las coordenadas de este vector por los coeficientes de las incógnitas en la ecuación general del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y + z + D = 0$$

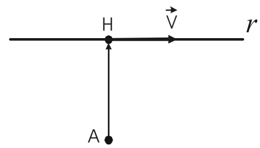
Impongamos ahora la condición a este plano de que pase por el punto $A(1, -2, 1)$:

$$-x + y + z + D = 0 \Rightarrow \quad -1 - 2 + 1 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 2$$

La ecuación del plano que nos piden, finalmente es: $-x + y + z + 2 = 0$

(b) La ecuación de la recta r en forma paramétrica era:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 - \alpha \\ y = -3 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$



El vector de dirección de la recta r es $\vec{v} = (-1,\ 1,\ 1)$

Sea H la proyección del punto $A = (1,\ -2,\ 1)$ sobre la recta r, se cumple la condición de que el vector $\overrightarrow{AH}$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ de dirección de la recta, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto H por pertenecer a la recta tendrá de coordenadas $(5-\alpha,\ -3+\alpha,\ \alpha)$.

El vector $\overrightarrow{AH}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{AH} = (5-\alpha,\ -3+\alpha,\ \alpha) - (1,\ -2,\ 1) = (4-\alpha,\ -1+\alpha,\ \alpha-1)$$

El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AH}$ y $\vec{v}$ es cero:

$$\overrightarrow{AH} \bullet \vec{v} = 0 \ \Rightarrow\ (4-\alpha,\ -1+\alpha,\ \alpha-1) \bullet (-1,\ 1,\ 1) = 0 \ \Rightarrow$$

$$-4 + \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 = 0 \ \Rightarrow\ 3\alpha = 6 \ \Rightarrow\ \alpha = 2$$

Sustituyamos α en el vector $\overrightarrow{AH}$:

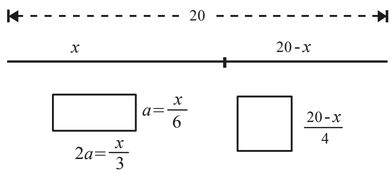
$$\overrightarrow{AH} = (4-\alpha,\ -1+\alpha,\ \alpha-1) = (4-2,\ -1+2,\ 2-1) = (2,\ 1,\ 1)$$

Calculemos la distancia del punto A a la recta r

$$dist(A, r) = \left|\overrightarrow{AH}\right| = \left|(2,\ 1,\ 1)\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construimos la función área, que es la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo.

En el dibujo se encuentran reflejados los datos del problema y las diversas relaciones entre ellos.

$$A(x) = \left(\frac{20-x}{4}\right)^2 + \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{6} \ \Rightarrow\ A(x) = \frac{400 + x^2 - 40x}{16} + \frac{x^2}{18} \ \Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{3600 + 9x^2 - 360x + 8x^2}{144} \ \Rightarrow\ A(x) = \frac{17x^2 - 360x + 3600}{144}$$

El dominio de esta función es el intervalo abierto (0, 20) como se puede deducir fácilmente de la observación del dibujo; se trata de una función cuadrática (aunque no esté ordenada perfectamente), y por tanto es continua y derivable en su dominio.

Calculemos el mínimo absoluto de esta función, que coincidirá con el vértice de la parábola ya que el coeficiente de x^2 es positivo, y siempre que ese mínimo pertenezca al dominio.

$$A'(x) = \frac{34x - 360}{144}$$

$$\frac{34x-360}{144}=0 \Rightarrow 34x-360=0 \Rightarrow 34x=360 \Rightarrow x=\frac{360}{34} \Rightarrow x=\frac{180}{17}$$

Este valor de x pertenece al dominio, luego es el mínimo absoluto tal como hemos justificado anteriormente.

A este mismo resultado habríamos llegado si hubiésemos estudiado la monotonía, puesto que la función $A(x)$ sería:

· decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{180}{17}\right)$

· creciente en el intervalo $\left(\frac{180}{17}, 20\right)$

La longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima es para el trozo correspondiente al rectángulo de $x=\frac{180}{17}$ cm, y para el trozo del cuadrado de $20-x$, es decir, $20-\frac{180}{17}=\frac{160}{17}$ cm.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Como la función polinómica $f(x)=mx^2+nx-3$ tiene una recta tangente a la gráfica de f en el punto (1, -6) que es paralela a la recta $y=-x$, podemos deducir varias cosas.

Primeramente, el punto (1, -6) al ser un punto de tangencia de la gráfica de la función se satisfará que $f(1)=-6$, es decir:

$$f(1)=-6 \quad \Rightarrow \quad m\cdot 1^2+n\cdot 1-3=-6 \quad \Rightarrow \quad m+n=-3 \qquad [1]$$

En segundo lugar, como la recta tangente es paralela a la recta $y=-x$, las pendientes de ambas son iguales y por tanto valen -1; pero como la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente en dicho punto, tendremos que: $f'(1)=-1$, o sea:

$$f(x)=mx^2+nx-3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2mx+n \quad \Rightarrow$$
$$f'(1)=-1 \quad \Rightarrow \quad 2m\cdot 1+n=-1 \quad \Rightarrow \quad 2m+n=-1 \qquad [2]$$

Resolvamos ahora el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que forman las ecuaciones [1] y [2] que se han obtenido.

$$\left.\begin{aligned} m+n&=-3\\ 2m+n&=-1\end{aligned}\right\}$$
Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{array}\right)$$
Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{array}\right)$$
Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=-1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 5\end{array}\right)$$
La solución del sistema es: $m=2$; $-n=5$ $\Rightarrow$
$m=2$; $n=-5$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (1, -6) es:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0) \Rightarrow y-f(1)=f'(1)\,(x-1) \Rightarrow y-(-6)=(-1)\cdot(x-1) \Rightarrow$$
$$y+6=-x+1 \Rightarrow y=-x-5$$

(a) La gráfica de f se corresponde con la de una función polinómica de segundo grado y por tanto con la de una parábola. Representemos la función $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = -3 \quad \Rightarrow \quad (0, -3)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$y = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 5x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4\cdot 2\cdot 3}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} x = 3 \;\Rightarrow\; (3, 0) \\ x = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

3.- Coordenadas del vértice V:

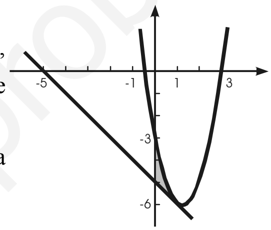
abscisa del vértice $= \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{5}{4}$

ordenada del vértice $= f(x) = 2\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\dfrac{5}{4}\right) - 3 = 2\cdot\dfrac{25}{16} - \dfrac{25}{4} - 3 = -\dfrac{49}{8}$

Luego el vértice V tiene de coordenadas $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{49}{8}\right)$.

Dibujemos la recta tangente, $y = -x - 5$.

Se trata de una recta que pasa por los puntos, $(0, -5)$ y $(-5, 0)$, además de por el punto de tangencia $(1, -6)$. Las gráficas de f y la de la recta tangente son las situadas al lado.



El recinto cuya área nos pide el ejercicio es el que se encuentra sombreado. Calculemos dicha área.

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 \left(-x - 5 - \left(2x^2 - 5x - 3\right)\right) dx\right| = \left|\int_0^1 \left(-x - 5 - 2x^2 + 5x + 3\right) dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \left(-2x^2 + 4x - 2\right) dx\right| = \left|\left[-2\cdot\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1\right| = \left|-2\cdot\frac{1^3}{3} + 4\cdot\frac{1^2}{2} - 2\cdot 1 - \left(-2\cdot\frac{0^3}{3} + 4\cdot\frac{0^2}{2} - 2\cdot 0\right)\right| = \frac{2}{3} \text{ u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Una propiedad de los determinantes dice:

Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, se verifica que:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Partimos de $AXB = C$, luego se verificará que:

$\det(A \cdot X \cdot B) = \det(C)$

y según la propiedad anterior

$\det(A \cdot X \cdot B) = \det(A) \cdot \det(X) \cdot \det(B)$

$\det(A) \cdot \det(X) \cdot \det(B) = \det(C)$

sustituyendo el valor de cada uno de estos determinantes, tendremos

$3 \cdot \det(X) \cdot (-1) = 6 \quad \Rightarrow \quad -3 \cdot \det(X) = 6 \quad \Rightarrow \quad \det(X) = -2$

El determinante de la matriz X es -2.

Calculemos ahora el determinante de la matriz $2X$.

La matriz $2X$ se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz X, que es de orden 3, por 2, es decir, todas las filas quedan multiplicadas por 2.

Hay otra propiedad de los determinantes que dice:

"Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna por un mismo número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número".

Y esta otra:

"Para multiplicar un determinante por un número basta multiplicar una sola fila o columna".

Por tanto si la matriz X la multiplicamos por 2, el determinante asociado a B quedaría multiplicado por $2{\cdot}2{\cdot}2 = 8$, ya que es de orden 3, es decir:

$$\det(2X) = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}\det(X) = 8{\cdot}(-2) = -16$$

Luego el determinante de la matriz $2X$ es -16.

(b) Resolvamos la ecuación matricial $A\,X\,B = C$, procederemos de la siguiente manera.

$A\,X\,B = C$	$\Rightarrow$	multiplicamos a la izquierda por la inversa de A.
$A^{-1}\cdot A\,X\,B = A^{-1}\cdot C$	$\Rightarrow$	por la propiedad asociativa del producto de matrices.
$(A^{-1}\cdot A)\,X\,B = A^{-1}\cdot C$	$\Rightarrow$	por la existencia de la matriz unidad.
$I\cdot X\,B = A^{-1}\cdot C$	$\Rightarrow$	simplificando
$X\,B = A^{-1}\cdot C$	$\Rightarrow$	multiplicamos a la derecha por la inversa de B.
$X\,B\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$	$\Rightarrow$	por la propiedad asociativa del producto de matrices.
$X\,(B\cdot B^{-1}) = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$	$\Rightarrow$	por la existencia de la matriz unidad.
$X\cdot I = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$	$\Rightarrow$	simplificando
$X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$		

Ahora sí podemos calcular la matriz X, sabiendo que $X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$. Pero antes hemos de justificar que las matrices A y B admiten inversa.

Calculemos en primer lugar, si existe, la matriz inversa de A. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente y no hay ninguna fila de ceros, por lo que la matriz A tendrá inversa.

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: $2\cdot[1^{a}f.] + [2^{a}f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2 y la 2ª fila por -2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Procedamos de igual manera para obtener si es posible la matriz inversa de B.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz B admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de B, B^{-1}, es decir:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la matriz X, que era $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Hallaremos el haz de planos que contiene a la recta r, y después le impondremos la condición a este haz de ser paralelo a s por lo que obtendremos el plano de dicho haz que cumple la condición que nos dice el problema.

Como la recta r viene dada como intersección de dos planos el haz de planos que contiene a r será:

$$(y+1) + \alpha(2x - z - 2) = 0 \;\Rightarrow\; y + 1 + 2\alpha x - \alpha z - 2\alpha = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha x + y - \alpha z + 1 - 2\alpha = 0 \qquad [1]$$

El vector genérico normal a este haz de planos es el $(2\alpha, 1, -\alpha)$.

Calculemos ahora el vector de dirección de la recta s, que al venir expresada en forma paramétrica, las coordenadas de dicho vector coincidirán con los coeficientes del parámetro λ, es decir $(3, -1, 4)$.

El plano del haz que contiene a r y es paralelo a s, será aquel cuyo vector normal sea perpendicular al vector de dirección de s, es decir, se ha de cumplir que el producto escalar de ambos vectores sea cero.

$$\vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi \;\Rightarrow\; (3, -1, 4) \bullet (2\alpha, 1, -\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; 6\alpha - 1 - 4\alpha = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo este valor en [1], tendremos:

$$2 \cdot \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \;\Rightarrow\; x + y - \frac{1}{2}z = 0$$

que es la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 65 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2|x-3|$.

(a) [1 PUNTO]. Estudia la continuidad y derivabilidad de f.

(b) [1´5 PUNTOS]. Estudia el crecimiento y decrecimiento de f. Calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 2. Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=1+\ln(x)$, siendo ln la función logaritmo neperiano.

(a) [1 PUNTO]. Comprueba que la recta de ecuación $y=1+\frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=e$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta tangente del apartado (a).

EJERCICIO 3. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3&7\\1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-3\\-4&2\end{pmatrix}$

(a) [1 PUNTO]. Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula las matrices X e Y que satisfacen las ecuaciones matriciales $XA=A+2B$ y $AY=A+2B$.

EJERCICIO 4. Considera el punto $P(1,0,-2)$, la recta r definida por $\begin{cases}x-2y-1=0\\y+z-2=0\end{cases}$ y el plano π de ecuación $2x+y+3z-1=0$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a r y es perpendicular a π.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta que pasa por P, corta a r y es paralela a π.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(a) [1´25 PUNTOS]. Sabiendo que *f* es continua, calcula *a* (ln denota el logaritmo neperiano).
(b) [1´25 PUNTOS]. Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

EJERCICIO 2. Se consideran las funciones $f: [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{3x}, \quad g(x) = \frac{1}{3}x^2$$

(a) [0´5 PUNTOS]. Haz un esbozo de sus gráficas.
(b) [2 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

EJERCICIO 3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 4 \\ x + 3y + z &= 5 \\ \lambda x + y + z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

(a) [1´75 PUNTOS]. Discútelo según los valores del parámetro λ.
(b) [0´75 PUNTOS]. Resuélvelo en el caso $\lambda = 1$.

EJERCICIO 4. Considera el plano π de ecuación $3x - 2y - 2z = 7$ y la recta *r* definida por

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano paralelo a π que contiene a *r*.
(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano ortogonal a π que contiene a *r*.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Expresemos la función *f(x)* como una función a trozos:

$$f(x) = x^2\,|x - 3| \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x^2(-(x-3)) & \text{si } x - 3 < 0 \\ x^2(x-3) & \text{si } x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad.

- Para valores de $x < 3$, la función $-x^3 + 3x^2$ es continua por ser una función polinómica, ya que las funciones polinómicas lo son en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $x > 3$, la función $x^3 - 3x^2$ es continua por ser una función polinómica, ya que las funciones polinómicas lo son en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x = 3$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} \left(-x^3+3x^2\right) = -3^3+3\cdot 3^2 = -27+27=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3}} \left(x^3-3x^2\right) = 3^3-3\cdot 3^2 = 27-27=0 \\ f(3) = 3^3-3\cdot 3^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = 0 \right.$$

luego la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto podrá ser derivable en $\mathbb{R}$.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua.

- Para valores de $x < 3$, la función $-x^3 + 3x^2$ es derivable por ser polinómica, siendo la derivada es $-3x^2 + 6x$.

- Para valores de $x > 3$, la función $x^3 - 3x^2$ es derivable por ser polinómica, siendo la derivada $3x^2 - 6x$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2+6x & \text{si} \quad x<3 \\ 3x^2-6x & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

El problema está en el punto 3. Será derivable en el punto 3, si las derivadas laterales existen y coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(3^-) = \lim_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} \left(-3x^2+6x\right) = -3\cdot 3^2 + 6\cdot 3 = -27+18 = -9$$

$$f'(3^+) = \lim_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3}} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(3x^2-6x\right) = 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3 = 27-18 = 9$$

podemos observar que: $-9 \neq 9 \;\Rightarrow\; f'(3^-) \neq f'(3^+)$, es decir, que las derivadas laterales no coinciden, por tanto la función no será derivable en el punto 3. En definitiva, la función derivada de f será, finalmente:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2+6x & \text{si} \quad x<3 \\ 3x^2-6x & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

(b) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, debemos tener en cuenta que se trata de una función continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en el punto 3.

Necesitamos calcular los valores que anulan a la función primera derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2+6x & \text{si} \quad x<3 \\ 3x^2-6x & \text{si} \quad x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2+6x=0 & \text{si} \quad x<3 \\ 3x^2-6x=0 & \text{si} \quad x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x\,(x-2) & \text{si} \quad x<3 \\ 3x\,(x-2) & \text{si} \quad x>3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3x\,(x-2) & \text{si} \quad x<3 \\ 3x\,(x-2) & \text{si} \quad x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \;\; ; \;\; x=2 & \text{si} \quad x<3 & [1] \\ x=0 \;\; ; \;\; x=2 & \text{si} \quad x>3 & [2] \end{cases}$$

Observamos que los únicos valores que anulan a la función derivada son x=0 y x=2, correspondientes al trozo de función definida para valores menores que 3, es decir, el representado con [1]; mientras que los valores para el caso [2], no pertenecen al dominio particular del segundo trozo.

Para construir los intervalos de monotonía lo haremos con los valores que anulan a la primera derivada, el 0 y el 2, y el valor donde la función no es derivable, el 3. En consecuencia, los intervalos de monotonía son: $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio, por ejemplo, -1, 1, 2´5 y 4, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$f'(-1) = -3(-1)^2 + 6(-1) = -9 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $(-\infty, 0)$

$f'(1) = -3\cdot 1^2 + 6\cdot 1 = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $(0, 2)$

$f'(2'5) = -3\cdot 2'5^2 + 6\cdot 2'5 = -3'75 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $(2, 3)$

$f'(4) = 3\cdot 4^2 - 6\cdot 4 = 24 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $(3, +\infty)$

Como la función es continua en todo $\mathbb{R}$, y teniendo en cuenta los resultados anteriores, los máximos y mínimos relativos se alcanzarán allí donde la función cambia su monotonía, es decir:

Mínimo relativo en (0, 0) ; Máximo relativo en (2, 4) ; Mínimo relativo en (3, 0)

Las ordenadas de estos extremos relativos se obtienen sustituyendo las abscisas de los mismos en la función $f(x)$, es decir:

$f(0) = -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \quad ; \quad f(2) = -2^3 + 3\cdot 2^2 = 4 \quad ; \quad f(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 = 0$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = e$ y comprobemos si obtenemos la misma que nos dice el ejercicio.

$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - f(e) = f'(e)\,(x - e)$

Calculemos $f(e)$ y $f'(e)$.

$f(x) = 1 + \ln(x) \;\Rightarrow\; f(e) = 1 + \ln(e) = 1 + 1 = 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(e) = \dfrac{1}{e}$

La ecuación de la recta tangente será:

$y - 2 = \dfrac{1}{e}(x - e) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = \dfrac{1}{e}x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{e}x + 1$

que es la misma que nos dice el ejercicio.

(b) La gráfica de la función f es la gráfica de la función elemental logaritmo neperiano de x desplazada una unidad hacia arriba.

Para representarla necesitaremos el punto de corte de la función con el eje de abscisas, lo haremos resolviendo el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, x=0.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1+\ln(x) \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1+\ln(x)=0 \;\Rightarrow\; \ln(x)=-1 \;\Rightarrow\; x=e^{-1} \;\Rightarrow\; (e^{-1},\,0) \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{e},\,0\right)$$

La recta tangente en el punto $x=e$, es una función afín por lo que su gráfica es una recta que no pasa por el origen. Para representarla necesitamos dos puntos, uno de ellos es el de tangencia, el (e, 2), obtenido en el apartado anterior, y otro puede ser el de corte con el eje de ordenadas o con el del eje de abscisas.

- Punto de corte con el eje de abscisas.

Resolveremos el sistema formado por la ecuación de la recta tangente y la ecuación del eje de abscisas, y = 0.

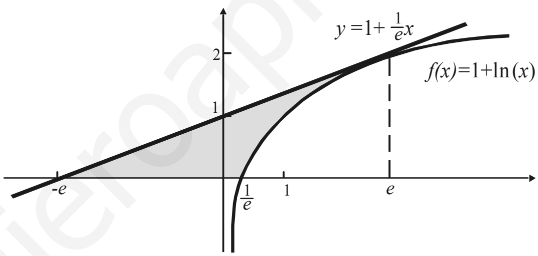
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{e}x+1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{e}x+1=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{e}x=-1 \;\Rightarrow\; x=-e \;\Rightarrow\; (-e,\,0)$$

hemos obtenido un punto de corte con el eje de abscisas el ($-e$, 0).

- Punto de corte con el eje de ordenadas, el (0, 1).

Las gráficas de f y la de la recta tangente se encuentran situadas al lado.

El recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta tangente es el sombreado y situado al lado.



Calculemos su área.

El área de dicho recinto es el área del triángulo de base 2e y altura 2, menos el área limitada por la gráfica de la función f y las ordenadas en las abscisas $x=1/e$ ó e^{-1} y $x=e$.

Área del triángulo = $\dfrac{2e\cdot 2}{2}=2e$

El área limitada por la gráfica de f y las ordenadas en las abscisas $x=1/e$ y $x=e$ es:

$$\text{Área} = \int_{e^{-1}}^{e} \big(1+\ln(x)\big)\,dx = \qquad [1]$$

Se trata de una integral por partes.

$$\begin{array}{llll} u= 1+\ln(x) & ; & du= \frac{1}{x}dx \\ dv= dx & ; & v= \int dx = x \end{array}$$

Continuando desde [1], tendremos

$$= \Big[x\big(1+\ln(x)\big)\Big]_{e^{-1}}^{e} - \int_{e^{-1}}^{e} x\frac{1}{x}\,dx = \Big[x\big(1+\ln(x)\big)\Big]_{e^{-1}}^{e} - \int_{e^{-1}}^{e} dx = \Big[x\big(1+\ln(x)\big)\Big]_{e^{-1}}^{e} - [x]_{e^{-1}}^{e} =$$

$$= e\cdot\big(1+\ln(e)\big) - e^{-1}\cdot\big(1+\ln(e^{-1})\big) - \big(e-e^{-1}\big) = 2e - e^{-1}\cdot 0 - e + e^{-1} = e + e^{-1}$$

luego el área del recinto que nos pide el ejercicio es:

Área = $2e - (e+e^{-1}) = e - e^{-1}$ unidades de área

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos, si existe, la matriz inversa de A. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $3 \cdot$ [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + $7 \cdot$ [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -6 & 21 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$ Dividamos la 1ª fila por 3
Multipliquemos la 2ª fila por -1

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) Calculemos la matriz X, que satisface $XA = A + 2B$.

$XA = A + 2B$ $\Rightarrow$ multipliquemos a la derecha por la inversa de A, por A^{-1}.
$XAA^{-1} = (A + 2B) \cdot A^{-1}$ $\Rightarrow$ por la propiedad asociativa del producto de matrices.
$X(A \cdot A^{-1}) = (A + 2B) \cdot A^{-1}$ $\Rightarrow$ por la existencia de la matriz unidad.
$X \cdot I = (A + 2B) \cdot A^{-1}$ $\Rightarrow$ simplificando
$X = (A + 2B) \cdot A^{-1}$

Ahora sí podemos calcular la matriz X, sabiendo que $X = (A + 2B) \cdot A^{-1}$.

$$X = \left[\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+1 & 35-3 \\ 14+6 & -49-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 32 \\ 20 & -67 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora la ecuación matricial $AY = A + 2B$.

$AY = A + 2B$ $\Rightarrow$ multipliquemos a la izquierda por la inversa de A, por A^{-1}.
$A^{-1}AY = A^{-1} \cdot (A + 2B)$ $\Rightarrow$ por la propiedad asociativa del producto de matrices.
$(A^{-1} \cdot A) \cdot Y = A^{-1} \cdot (A+2B)$ $\Rightarrow$ por la existencia de la matriz unidad.
$I \cdot Y = A^{-1} \cdot (A+2B)$ $\Rightarrow$ simplificando
$Y = A^{-1} \cdot (A+2B)$

Ahora sí podemos calcular la matriz Y, sabiendo que $Y = A^{-1} \cdot (A+2B)$.

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10-49 & -2+42 \\ 5+21 & 1-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -59 & 40 \\ 26 & -17 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) El plano que nos piden ha de ser paralelo a r, por lo que el vector de dirección de la recta r será uno de los vectores de dirección del plano que hemos de calcular. Expresemos la ecuación de r en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z-2\ =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ \quad y+z=2 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, la incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2-z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5-2z \\ 0 & 1 & 2-z \end{array}\right)$$

La solución es: $x = 5 - 2z$; $y = 2 - z$

Susituyamos la incógnita no principal o secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por λ, tendremos finalmente la ecuación de la recta r en paramétricas:

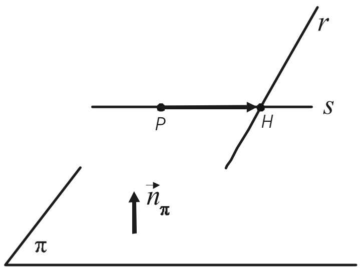
$$r \equiv \begin{cases} x = 5-2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El vector de dirección de esta recta r, el $(-2, -1, 1)$, será pues uno de los vectores de dirección de la ecuación del plano que nos piden.

El otro vector de dirección que necesitamos para obtener el plano que buscamos vendrá dado por la condición que nos dice el ejercicio, la de ser perpendicular al plano π, por lo que el vector normal a este plano $\pi \equiv 2x+y+3z-1=0$, el vector $(2, 1, 3)$, lo podemos tomar como ese otro vector de dirección del plano buscado.

La ecuación del plano que pasa por $P(1, 0, -2)$, es paralelo a r y perpendicular a π, es:

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 1-2\alpha+2\beta \\ y = -\alpha+\beta \\ z = -2+\alpha+3\beta \end{cases}$$



(b) Para calcular la ecuación de la recta, llamémosla s, que nos pide el ejercicio, necesitamos el punto de corte de esta recta s con la recta r, este punto por pertenecer a r será de la forma: $H(5-2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$.

La recta s que queremos calcular al ser paralela al plano $\pi \equiv 2x+y+3z-1=0$, se verificará que el vector normal al plano, el $\vec{n}_\pi = (2, 1, 3)$, y el vector de dirección de la recta, el $\overrightarrow{PH}$, serán perpendiculares, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

$$\overrightarrow{AH} = (5-2\lambda,\ 2-\lambda,\ \lambda) - (1, 0, -2) = (4-2\lambda,\ 2-\lambda,\ \lambda+2)$$

$$\overrightarrow{PH} \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \overrightarrow{PH} \bullet \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow (4-2\lambda,\ 2-\lambda,\ \lambda+2) \bullet (2, 1, 3) = 0 \Rightarrow$$

$$8-4\lambda+2-\lambda+3\lambda+6=0 \Rightarrow -2\lambda=-16 \Rightarrow \lambda=8$$

$$\overrightarrow{PH} = (4-2\lambda, 2-\lambda, \lambda+2) \Rightarrow \overrightarrow{PH} = (4-2\cdot 8,\ 2-8,\ 8+2) \Rightarrow \overrightarrow{PH} = (-12, -6, 10)$$

La ecuación de la recta s que nos pide el ejercicio será la que pase por el punto P y tenga como vector de dirección el vector $\vec{PH} = (-12, -6, 10)$: $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 12\mu \\ y = -6\mu \\ z = -2 + 10\mu \end{cases}$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos el valor de a para que la función sea continua en $(0, +\infty)$.

Para que la función f sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de $x \neq 1$ y evidentemente mayores que cero, es una función racional por la función $(\ln x)^2$. La primera es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en el valor que anula al denominador, el 1; la segunda lo es para todos los valores mayores que cero, por tanto, el producto de funciones continuas lo seguirá siendo en el dominio común, es decir para todos los valores mayores que cero y distintos de 1.

- El problema de la continuidad está precisamente en el punto 1. Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1^- \\ x<1}} \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} = \frac{1 \cdot (\ln(1))^2}{(1^- - 1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\substack{x \to 1^- \\ x<1}} \frac{(\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot (\ln x)\frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{\substack{x \to 1^- \\ x<1}} \frac{(\ln x)^2 + 2(\ln x)}{2(x-1)} =$$

$$= \frac{(\ln(1))^2 + 2 \cdot \ln(1)}{2(1^- - 1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\substack{x \to 1^- \\ x<1}} \frac{2(\ln x)\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x}}{2} = \frac{2(\ln(1))\frac{1}{1} + 2 \cdot \frac{1}{1}}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1^+ \\ x>1}} \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} = \frac{1 \cdot (\ln(1))^2}{(1^+ - 1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\substack{x \to 1^+ \\ x>1}} \frac{(\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot (\ln x)\frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{\substack{x \to 1^+ \\ x>1}} \frac{(\ln x)^2 + 2(\ln x)}{2(x-1)} =$$

$$= \frac{(\ln(1))^2 + 2 \cdot \ln(1)}{2(1^+ - 1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\substack{x \to 1^+ \\ x>1}} \frac{2(\ln x)\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x}}{2} = \frac{2(\ln(1))\frac{1}{1} + 2 \cdot \frac{1}{1}}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

$f(1) = a$

La indeterminación de $\left[\frac{0}{0}\right]$ la hemos destruido aplicando la regla de L´Hôpital, que consiste en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f (x) y g (x) continuas y derivables en x = c, si f (x) y g (x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f (x) y g (x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f (x) y g (x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En este caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones $f(x)=x(\ln x)^2$ y $g(x)=(x-1)^2$ son continuas y derivables en $x=1$; la primera por ser el producto de una función polinómica por la función logaritmo neperiano, y el producto de dichas funciones sigue siendo contina y derivable en $x=1$, y la segunda es polinómica, por lo que definitivamente se puede aplicar la Regla de L´Hôpital.

Igualemos los límites laterales y el valor de la función.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \quad\Rightarrow\quad 1=1=a$$

Luego para que la función f sea continua en 1 el valor de a debe ser 1.

La función f sea continua en $(0, +\infty)$ siempre que el valor de a sea 1.

(b) - Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b \in \mathrm{R}$

Calculemos este límite, sólo cuando $x \to +\infty$, para comprobar si existe o no asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}=\frac{\infty\cdot(\ln(\infty))^2}{(\infty-1)^2}=\frac{\infty\cdot\infty^2}{(\infty-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2+x\cdot 2\cdot(\ln x)\frac{1}{x}}{2(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2+2\cdot(\ln x)}{2(x-1)}=\frac{\infty^2+2\cdot(\ln(\infty))}{2(\infty-1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\ln x)\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\ln x)+2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+1}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

Luego hay una asíntota horizontal, $y = 0$, por la derecha, para $x\to+\infty$.

La indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, la hemos destruido aplicando la regla de L´Hôpital, que consiste en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x = c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

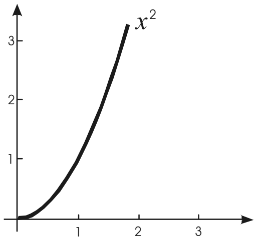
En este caso, se ha podido usar esta regla debido a razones similares a las expuestas con anterioridad.

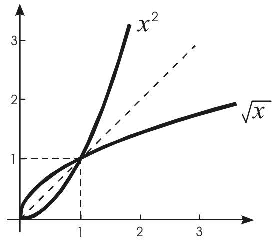
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

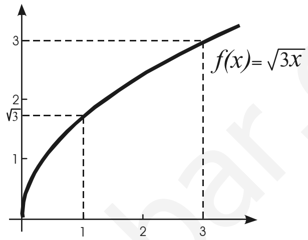
(a) La gráfica de la función f la haremos a partir de la de x^2. Sabemos que la función inversa de x^2 para valores de $x \geq 0$ es la función $\sqrt{x}$ y las gráficas de ambas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

La función f la podemos escribir así: $f(x) = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\,\sqrt{x}$, lo que nos permite deducir que la gráfica de f en cualquier punto x del dominio de $\sqrt{x}$ coincide con la de $\sqrt{x}$ en el mismo punto pero multiplicando la ordenada de la función $\sqrt{x}$ por $\sqrt{3}$.

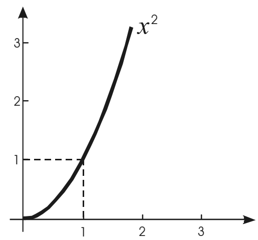
La gráfica de f será, teniendo en cuenta todo lo anterior, la siguiente:







Dibujemos ahora la gráfica de la función $g(x) = \frac{1}{3}x^2$. Se trata de una parábola, cuya gráfica en cualquier punto x de su dominio coincide con la de x^2 en el mismo punto pero multiplicando la ordenada de la función x^2 por $\frac{1}{3}$, es decir, reduciendo a la tercera parte $\left(\frac{1}{3}\right)$ la distancia al eje OX de la de x^2; no obstante calculemos el vértice y algún punto más:



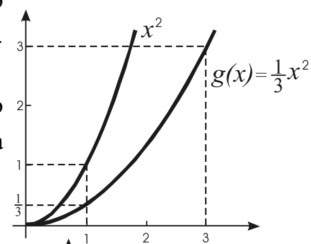
abscisa del vértice = $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2\cdot\frac{1}{3}} = 0$

ordenada del vértice $= g(0) = \frac{1}{3}\cdot 0^2 = 0$

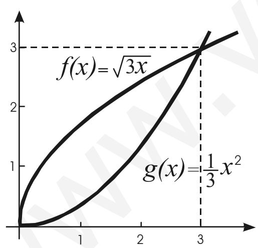
Luego el vértice V tiene de coordenadas (0, 0).

Otros puntos de interés son el $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ y el (3, 3).

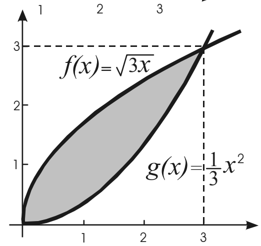
La gráfica de g, según lo anterior sería la situada a la derecha.



La gráfica de la función g junto con la de la f están representadas a la izquierda.



(b) El recinto cuya área nos piden es el sombreado y situado a la derecha.



Calculemos los puntos de corte de ambas gráficas, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos funciones, aunque gráficamente ya los sabemos, el (0, 0) y el (3, 3).

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = \sqrt{3x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 = \sqrt{3x} \Rightarrow \frac{1}{9}x^4 = 3x \Rightarrow x^4 = 27x \Rightarrow x^4 - 27x = 0 \Rightarrow x\left(x^3 - 27\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases}$$

El área del recinto limitado por ambas gráficas y que se encuentra sombreado es:

$$\text{Área} = \int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2\right) dx = \int_0^3 \left(\sqrt{3}\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^2\right) dx = \left[\frac{\sqrt{3}\,x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9}\cdot 3^3 - 0 =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 3^2 - 3 = 3 \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para poder discutir el sistema lo expresaremos en forma matricial y aplicaremos el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ \lambda & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & \lambda & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -\lambda+1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - (1 - λ) · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -\lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda-3 & \lambda-1 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el elemento a_{33} que puede serlo o no, estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-3)}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$

** Si $\lambda = 1 \Rightarrow$ La 3ª ecuación será, $0 = 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0$, es decir, trivial y la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** Si $\lambda = 3 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es $0 = 3 - 1 \Rightarrow 0 = 2$, es decir, una ecuación absurda. El sistema es un sistema incompatible.

* $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3 \quad \Rightarrow$ Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. Se trata de un sistema compatible determinado.

(b) Resolvamos el sistema para el caso de $\lambda = 1$. Sustituyamos este valor en la última matriz que hemos obtenido, en la que hemos triangulado inferiormente.

$$\begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -\lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda-3 & \lambda-1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminemos la 3ª fila.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, me sobra una incógnita, la x, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4-x \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] - [2^a f.]$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 7-2x \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema esta diagonalizado.

La solución es: $2z = 7 - 2x \quad ; \quad 2y = 1.$

Terminemos de despejar las incógnitas, z e y:

$$z = \frac{7}{2} - x \quad ; \quad y = \frac{1}{2}$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, x, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$, la solución, finalmente será:

$$x = \alpha \quad ; \quad y = \frac{1}{2} \quad ; \quad z = \frac{7}{2} - \alpha$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) El plano que nos piden como debe ser paralelo al plano π y contener a la recta r, necesariamente esta recta debe ser paralela al plano π. Comprobémoslo imponiendo la condición de paralelismo de recta y plano, es decir, que el vector de dirección de la recta y el normal al plano deben ser perpendiculares, o sea, que el producto escalar de ambos vectores tiene que ser cero:

$$\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \bullet \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow (2,\ 1,\ 2) \bullet (3, -2, -2) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 6 - 2 - 4 = 0$$

Efectivamente, la recta r y el plano π son paralelos, por lo que para calcular el plano que nos piden obtendremos la ecuación de todos los planos paralelos a π y después le impondremos la condición de pasar por un punto cualquiera de la recta r.

El plano que nos piden, π_1, es paralelo al plano π, luego teniendo en cuenta la condición de paralelismo de planos, deducimos que la ecuación del plano será, inicialmente, de la forma:

$$\pi \equiv 3x - 2y - 2z - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 \equiv 3x - 2y - 2z + D = 0$$

Para calcular D le impondremos la condición que nos dice el problema, la de contener a la recta r, luego le haremos pasar por un punto de la misma, por ejemplo, por el $(2, -1, 2)$.

$3x - 2y - 2z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\cdot 2 - 2(-1) - 2\cdot 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 + 2 - 4 + D = 0 \quad \Rightarrow$
$D = -4 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 \equiv 3x - 2y - 2z - 4 = 0$

(b) El plano que nos piden al contener a la recta r, permitirá conocer del mismo un punto, el (2, -1, 2), y un vector de dirección, el (2, 1, 2), ambos elementos petenecientes a la recta y que los obtenemos leyendo en la ecuación de la recta r que nos da el problema.

El plano que piden al ser perpendicular al plano π nos permitirá deducir que el vector normal a éste, el (3, -2, -2), será el otro vector de dirección que nos quedaba por conocer del plano; por tanto la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π es:

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -1 + \lambda - 2\mu \\ z = 2 + 2\lambda - 2\mu \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 66 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+bx+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ ax^2-5x+2a & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

es derivable. Determina los valores de a y b.

EJERCICIO 2. **(a)** [1´25 PUNTOS]. Calcula $\int x\,\text{sen}x\,dx$.

(b) [1´25 PUNTOS]. Sean las funciones $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=-x^2+1, \qquad g(x)=x-1$$

Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas.

EJERCICIO 3. **(a)** [1´25 PUNTOS]. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{rl} x \qquad + z &= 2 \\ -x+\ \ y+2z &= 0 \\ -x+2y+5z &= 2 \end{array}\right\}$$

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado (a)

$$\left.\begin{array}{rl} x+\ \ y+\ \ z &= 1 \\ -x+\ \ y+3z &= 1 \\ x+2y+\lambda z &= -3 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 1, -1)$, es paralela al plano de ecuación $x-y+z=1$ y corta al eje Z.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

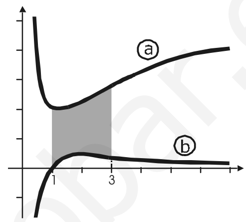
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

tiene extremos relativos en (0, 0) y en (2, 2). Calcula a, b, c y d.

EJERCICIO 2. Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\frac{2}{x}+2\ln(x)$$

y a la de su derivada $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ (ln denota logaritmo neperiano).



(a) [0´5 PUNTOS]. Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.

(b) [2 PUNTOS]. Calcula el área de la región sombreada.

EJERCICIO 3. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

(a) [1 PUNTO]. Calcula, si existe, A^{-1}.

(b) [1´5 PUNTOS]. Resuelve el sistema $AX=3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de sus soluciones.

EJERCICIO 4. Sea la recta r definida por $\begin{cases}3x+2y=0\\3x+z\ \ =0\end{cases}$

(a) [1 PUNTO]. Determina la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1,1,1)$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 4 unidades.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Nos dicen que la función f es derivable en $\mathbb{R}$ luego es continua en $\mathbb{R}$ que es donde está definida, ya que la derivabilidad implica continuidad.

Estudiemos la continuidad.

- Para valores de $x<1$, la función $-x^2+bx+1$ es continua por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $x > 1$, la función $ax^2 - 5x + 2a$ es continua por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x = 1$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} \left(-x^2 + bx + 1\right) = -1^2 + b\cdot 1 + 1 = b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \left(ax^2 - 5x + 2a\right) = a\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 2a = 3a - 5 \\ f(1) = -1^2 + b\cdot 1 + 1 = b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \\ b = 3a - 5 \qquad [1] \end{array}\right.$$

Hemos obtenido una primera ecuación o condición que ha de satisfacerse para que la función *f* sea continua en su dominio. Necesitamos otra ecuación.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua y porque el ejercicio nos dice que es derivable.

- Para valores de $x < 1$, la función $-x^2 + bx + 1$ es derivable por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$, luego f será derivable para todos los valores $x < 1$, siendo la derivada $-2x + b$.

- Para valores de $x > 1$, la función $ax^2 - 5x + 2a$ es derivable por ser polinómica, ya que las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$, luego f será derivable para todos los valores $x > 1$, siendo la derivada $2ax - 5$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2ax - 5 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

El problema está en el punto 1. Como es derivable en el punto 1, las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-2x + b) = -2 + b \\ f'(1^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2ax - 5) = 2a - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-) = f'(1^+) \\ -2 + b = 2a - 5 \qquad [2] \end{array}\right.$$

Hemos obtenido una segunda ecuación. Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2].

$$\left.\begin{array}{r} 3a - 5 = b \\ -2 + b = 2a - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a - b = 5 \\ 2a - b = 3 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $3 \cdot$ [2ªf.] $- 2 \cdot$ [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] $-$ [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$3a = 6 \quad ; \quad -b = -1 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad ; \quad b = 1$$

En definitiva, la función derivada de f será:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + b & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2ax - 5 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la integral siguiente.

$$\int x \ sen(x) \ dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$

$$dv = sen(x) \ dx \quad ; \quad v = \int sen(x) \ dx = -\cos(x)$$

$$\int x \ sen(x) \ dx = x \cdot (-\cos(x)) - \int -\cos(x) \ dx = -x \cdot \cos(x) + sen(x) + C$$

(b) Dibujemos en primer lugar la gráfica de $f(x) = -x^2 + 1$ que se corresponde con la de una parábola.

- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{\pm 2}{-2} = \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

luego los puntos de corte con el eje de abscisas son el $(-1, 0)$ y el $(1, 0)$.

- Punto de corte con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$$y = -x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad y = -0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{el punto es el } (0, 1).$$

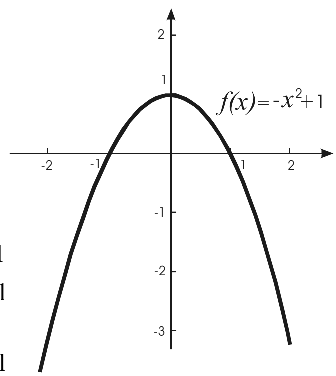
- El vértice de la parábola es:

$$\text{abscisa del vértice} = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$$

ordenada del vértice: $y = -x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad y = -0 + 1 = 1$,

por tanto, el vértice es el punto $(0, 1)$.

La gráfica se encuentra situada a la derecha.



Dibujemos ahora la gráfica de la función afín $g(x) = x - 1$ que se corresponde con la de una recta que no pasa por el origen.

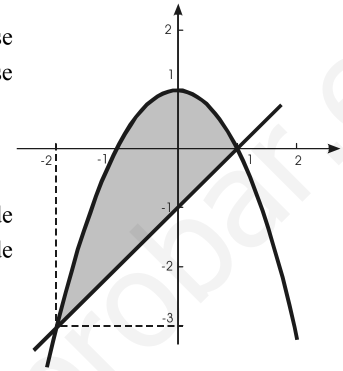
- Punto de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x-1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1 \quad \Rightarrow \quad \text{el punto es el } (1,\,0).$$

- Punto de corte con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$$y = x - 1 \;\Rightarrow\; y = 0 - 1 = -1 \;\Rightarrow\; \text{el punto es el } (0,\,-1).$$

La gráfica de esta recta junto con gráfica anterior se encuentran situadas al lado y donde el recinto, cuya área se nos pide, está sombreado.



Construyamos la función diferencia

$$h(x) = f(x) - g(x) \;\Rightarrow\; h(x) = -x^2 + 1 - (x-1) = -x^2 - x + 2$$

y calculemos los puntos de intersección de $h(x)$ con el eje de abscisas que no son otros que los puntos de intersección de la gráfica de f con la de g.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2+1 \\ y = x-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; -x^2+1 = x-1 \;\Rightarrow\; -x^2 - x + 2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)} = \frac{1\pm 3}{-2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

El área del recinto será:

$$\int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2\cdot 1\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2\cdot(-2)\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = \frac{-2-3+12}{6} - \frac{16-12-24}{6} = \frac{7}{6} + \frac{20}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}\ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Resolvamos el sistema de ecuaciones mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido una fila de ceros, es decir, una ecuación trivial. La eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-z \\ 0 & 1 & 2-3z \end{array}\right)$ El sistema esta diagonalizado.

La solución es: $x = 2 - z$; $y = 2 - 3z$.

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo por $\alpha \in \mathbb{R}$, tendremos finalmente la solución del sistema:

$$x = 2 - \alpha \quad ; \quad y = 2 - 3\alpha \quad ; \quad z = \alpha.$$

(b) Para poder calcular λ de forma que el sistema que nos dan en este apartado tenga alguna solución común con el sistema del apartado anterior, lo que haremos será sustituir la solución encontrada en el sistema del apartado (a) en el sistema de este otro apartado.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ -x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + \lambda z = -3 \end{array}\right\}$$

Sustituyamos la solución del sistema del apartado (a) en este sistema: $x = 2 - \alpha$; $y = 2 - 3\alpha$; $z = \alpha$.

$$\left.\begin{array}{rcr} 2-\alpha+2-3\alpha+\alpha & = & 1 \\ -(2-\alpha)+2-3\alpha+3\alpha & = & 1 \\ 2-\alpha+2(2-3\alpha)+\lambda\alpha & = & -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} -3\alpha & = & -3 \\ \alpha & = & 1 \\ -7\alpha+\lambda\alpha & = & -9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} \alpha & = & 1 \\ \alpha & = & 1 \\ -7\alpha+\lambda\alpha & = & -9 \end{array}\right\}$$

Sustituyamos $\alpha = 1$ en la tercera ecuación.

$$-7\alpha + \lambda\alpha = -9 \Rightarrow -7\cdot 1 + \lambda\cdot 1 = -9 \Rightarrow \lambda = -9 + 7 \Rightarrow \lambda = -2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

La ecuación del eje Z es: $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{array}\right.$

Elijamos un punto H cualquiera del eje, tendrá de coordenadas genéricas $H(0, 0, \alpha)$.

La recta que pasa por A y corta al eje Z, por ejemplo, en el punto H, tendrá como vector de dirección al vector $\vec{AH}$ de coordenadas:

$$\vec{AH} = (0,\ 0,\ \alpha) - (1,\ 1,\ -1) = (-1,\ -1,\ \alpha+1)$$

Impongamos ahora la condición de paralelismo entre recta y plano, es decir, que el vector de dirección de la recta r y el normal al plano π son perpendiculares y por tanto su producto escalar será cero.

$$r // \pi \Rightarrow \vec{v_r} \perp \vec{n_\pi} \Rightarrow \vec{v_r} \bullet \vec{n_\pi} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1,\ -1,\ \alpha+1) \bullet (1,\ -1,\ 1) = 0 \Rightarrow -1+1+\alpha+1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

El vector de dirección de la recta será:

$$\vec{AH} = (-1,\ -1,\ \alpha+1) \Rightarrow \vec{AH} = (-1,\ -1,\ -1+1) = (-1,\ -1,\ 0)$$

La ecuación de la recta r que nos piden será:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1-\mu \\ y = 1-\mu \\ z = -1 \end{array}\right.$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la función f tiene extremos relativos en (0, 0) y en (2, 2), significa dos cosas, la primera es que las coordenadas de esos puntos satisfacen la ecuación de la función f, es decir:

$$f(0)=0 \;\Rightarrow\; f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \;\Rightarrow\; f(0)=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d \;\Rightarrow\; 0=d \qquad [1]$$

$$f(2)=2 \;\Rightarrow\; f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \;\Rightarrow\; f(2)=a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d \;\Rightarrow$$
$$2=8a+4b+2c+d \;\Rightarrow\; 2=8a+4b+2c+0 \;\Rightarrow$$
$$8a+4b+2c=2 \;\Rightarrow\; 4a+2b+c=1 \qquad [2]$$

y la segunda es que la primera derivada es nula en $x=0$ y en $x=2$, y la segunda distinta de cero, es decir:

$$f'(0)=0 \;\Rightarrow\; f'(x)=3ax^2+2bx+c \;\Rightarrow\; f'(0)=3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c \;\Rightarrow\; 0=c \qquad [3]$$

$$f'(2)=0 \;\Rightarrow\; f'(x)=3ax^2+2bx+c \;\Rightarrow\; f'(2)=3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c \;\Rightarrow$$
$$0=12a+4b+0 \;\Rightarrow\; 0=12a+4b=0 \;\Rightarrow\; 3a+b=0 \qquad [4]$$

Ya sabemos por [1] y [3] que $d=0$ y que $c=0$, sustituyamos estos valores en [2] y [4].

$$\left.\begin{array}{r} 4a+2b+c=1 \\ 3a+2b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4a+2b=1 \\ 3a+2b=0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=4\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 4 · [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=-2\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

El sistema esta diagonalizado.
La solución es: $4a=-2$; $-2b=-3$.

Terminemos de despejar: $a=-\dfrac{1}{2}$; $b=\dfrac{3}{2}$

Resumiendo, los valores de a, b, c y d son: $a=-\dfrac{1}{2}$; $b=\dfrac{3}{2}$; $c=0$; $d=0$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) La función $f(x)$ es: $f(x)=\dfrac{2}{x}+2\ln(x)$

La función derivada será: $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+2\cdot\dfrac{1}{x}$

Calculemos el valor de cada una de estas funciones en el punto $x=1$:

$$f(x)=\frac{2}{x}+2\ln(x) \;\Rightarrow\; f(1)=\frac{2}{1}+2\ln(1) \;\Rightarrow\; f(1)=2+2\cdot 0 \;\Rightarrow\; f(1)=2$$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(1)=-\frac{2}{1^2}+2\cdot\frac{1}{1} \;\Rightarrow\; f'(1)=-2+2 \;\Rightarrow\; f'(1)=0$$

Luego según el dibujo donde están representadas las dos gráficas, podemos deducir que la gráfica a se corresponde con la función f y la b con la f'.

(b) El área de la región sombreada se corresponde con la de la de la función f menos la de la función derivada f' entre 1 y 3.

$$A = \int_1^3 \left(\frac{2}{x} + 2\ln(x) - \left(-\frac{2}{x^2} + 2\cdot\frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_1^3 \left(\frac{2}{x} + 2\ln(x) + \frac{2}{x^2} - 2\cdot\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^3 \left(2\ln(x) + \frac{2}{x^2}\right) dx =$$

$$= \int_1^3 2\ln(x)\,dx + \int_1^3 \frac{2}{x^2}\,dx = \int_1^3 2\ln(x)\,dx + \int_1^3 2\,x^{-2}\,dx = \int_1^3 2\ln(x)\,dx + \left[2\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3 =$$

$$= \int_1^3 2\ln(x)\,dx + \left[\frac{-2}{x}\right]_1^3 = = \int_1^3 2\ln(x)\,dx + \left(\frac{-2}{3} - \frac{-2}{1}\right) = \int_1^3 2\ln(x)\,dx + \frac{4}{3} = \qquad [1]$$

Calcularemos ahora la integral indefinida $\int 2\ln(x)\,dx$ mediante el método de la integración por partes.

$$u = 2\ln(x) \qquad du = \frac{2}{x}dx$$
$$dv = dx \qquad v = \int dx = x$$

$$\int 2\ln(x)\,dx = 2x\ln(x) - \int x\cdot\frac{2}{x}dx = 2x\ln(x) - 2\int dx = 2x\ln(x) - 2x \qquad [2]$$

Continuando desde [1], y teniendo en cuenta [2]:

$$= \left[2x\ln(x) - 2x\right]_1^3 + \frac{4}{3} = \left(2\cdot 3\cdot\ln(3) - 2\cdot 3 - \left(2\cdot 2\cdot\ln(1) - 2\cdot 1\right)\right) + \frac{4}{3} =$$

$$= 6\ln(3) - 6 - (2\cdot 2\cdot 0 - 2) + \frac{4}{3} = 6\ln(3) - 6 + 2 + \frac{4}{3} = \left(6\ln(3) - \frac{8}{3}\right)\ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para calcular, si existe, la matriz inversa de A, A^{-1}, lo haremos mediante el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

La matriz A tiene inversa porque al triangular inferiormente no nos ha salido ninguna fila de ceros.
Triangulemos superiormente para calcular la inversa.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -9 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 9 · [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -18 & -18 & 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 9 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -18 & 0 & 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Simpliquemos la 1ª fila por 2

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -9 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Hemos diagonalizado.
Dividamos la 1ª fila por -9
Dividamos la 2ª fila por 9
Dividamos la 3ª fila por -9

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2/9 & -2/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & -2/9 & -2/9 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa que queríamos calcular, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/9 & -2/9 & 1/9 \\ -2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 1/9 & -2/9 & -2/9 \end{pmatrix}$$

(b) Resolvamos el sistema $AX = 3X$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x-2y+z \\ -2x+y-2z \\ x-2y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y+z = 3x \\ -2x+y-2z = 3y \\ x-2y-2z = 3z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -5x-2y+z &= 0 \\ -2x-2y-2z &= 0 \\ x-2y-5z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolvamos el sistema homogéneo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 5 · [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -6 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Simpliquemos la 2ª fila por -6

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido una ecuación trivial, la 3ª, que la eliminamos, nos queda un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. La incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{rr|r} -5 & -2 & -z \\ 0 & 1 & -2z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} -5 & 0 & -5z \\ 0 & 1 & -2z \end{array}\right)$$

La solución es: $-5x = -5z$; $y = -2z$
Terminemos de despejar: $x = z$; $y = -2z$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo por $\lambda\in\mathbb{R}$, la solución, finalmente será:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La interpretación geométrica del conjunto de sus soluciones es que los tres planos se cortan en una recta, ya que la solución se corresponde con la ecuación de una recta en el espacio.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a r, expresaremos la ecuación de la recta r en forma paramétrica para elegir después el vector de dirección de la misma y hacerlo coincidir con el vector normal al plano que me piden, ya que es la condición para que el plano y la recta sean perpendiculares.

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Pasamos la 1ª columna a ocupar la 3ª columna
Pasamos la 2ª columna a ocupar la 1ª columna
Pasamos la 3ª columna a ocipar la 2ª columna

$$\begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria, nos quedará el siguiente sistema.

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -3x \\ 0 & 1 & -3x \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es: $2y = -3x$; $z = -3x$.

Terminemos de despejar: $y = -\frac{3}{2}x$; $z = -3x$

Sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones paramétricas de r serán:

$$r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{3}{2}\alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$$

El vector de dirección de la recta r es el $\left(1, -\frac{3}{2}, -3\right)$, y que como dijimos al principio, podemos tomarlo como el vector normal al plano que nos pide el problema; sustituyamos las coordenadas de este vector por los coeficientes de las incógnitas en la ecuación general del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 1\cdot x - \frac{3}{2}y - 3z + D = 0 \;\Rightarrow\; 2x - 3y - 6z + D = 0$$

Impongamos ahora la condición a este plano de que pase por el punto $P(1, 1, 1)$:

$$2x - 3y - 6z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 1 - 3\cdot 1 - 6\cdot 1 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 7$$

La ecuación del plano que nos piden, finalmente es: $2x - 3y - 6z + 7 = 0$.

(b) La ecuación de la recta *r* en forma paramétrica era:

$$r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\dfrac{3}{2}\alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$$

Un punto genérico *H* de la recta *r* tendrá de coordenadas $H\left(\alpha,\ -\frac{3}{2}\alpha,\ -3\alpha\right)$. Impongamos la condición de que su distancia al origen $O(0,\ 0,\ 0)$ sea 4 unidades.

$$dist\,(O, H) = \left|\vec{OH}\right| = 4 \qquad [1]$$

El vector $\vec{OH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{OH} = \left(\alpha, -\frac{3}{2}\alpha,\ -3\alpha\right) - (0,\ 0,\ 0) = \left(\alpha, -\frac{3}{2}\alpha,\ -3\alpha\right)$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$dist\,(O, H) = \left|\vec{OH}\right| \;\Rightarrow\; \sqrt{\alpha^2 + \left(-\frac{3}{2}\alpha\right)^2 + (-3\alpha)^2} = 4 \;\Rightarrow\; \alpha^2 + \left(-\frac{3}{2}\alpha\right)^2 + (-3\alpha)^2 = 16 \;\Rightarrow$$

$$\alpha^2 + \frac{9}{4}\alpha^2 + 9\alpha^2 = 4 \;\Rightarrow\; \frac{4\alpha^2 + 9\alpha^2 + 36\alpha^2}{4} = 16 \;\Rightarrow\; \frac{49\alpha^2}{4} = 16 \;\Rightarrow\; 49\alpha^2 = 64 \;\Rightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{64}{49} \;\Rightarrow\; \alpha = \pm\sqrt{\frac{64}{49}} \;\Rightarrow\; \alpha = \pm\frac{8}{7}$$

Sustituyamos estos dos valores de α obtenidos en las coordenadas genéricas del punto *H* de la recta *r*.

$$H_1\left(\alpha,\ -\frac{3}{2}\alpha,\ -3\alpha\right) = \left(\frac{8}{7},\ -\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{7},\ -3\cdot\frac{8}{7}\right) = \left(\frac{8}{7},\ -\frac{24}{14},\ -\frac{24}{7}\right) = \left(\frac{8}{7},\ -\frac{12}{7},\ -\frac{24}{7}\right)$$

$$H_2\left(\alpha,\ -\frac{3}{2}\alpha,\ -3\alpha\right) = \left(-\frac{8}{7},\ -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right),\ -3\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)\right) = \left(-\frac{8}{7},\ \frac{24}{14},\ \frac{24}{7}\right) = \left(-\frac{8}{7},\ \frac{12}{7},\ \frac{24}{7}\right)$$

Hemos obtenido dos puntos que satisfacen las condiciones del ejercicio.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 67 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + e^{-x}$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, así como los extremos relativos o locales de *f*.

(b) [0´5 PUNTOS]. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de *f*.

(c) [0´75 PUNTOS]. Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

(d) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de *f*.

EJERCICIO 2. Sean $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 + |x|, \qquad g(x) = 2$$

(a) [1 PUNTO]. Calcula los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza dichas gráficas.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

EJERCICIO 3. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kI$, donde k es una constante e I es la matriz unidad de orden 2.

(a) [0´75 PUNTOS]. Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.

(b) [0´5 PUNTOS]. Calcula B^{-1} para $k = -1$.

(c) [1´25 PUNTOS]. Determina las constantes α y β para las que se cumple $A^2 + \alpha A = \beta I$.

EJERCICIO 4. Sean la recta r definida por $\begin{cases} x - y = -2 \\ x - z = -3 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$

(a) [1 PUNTO]. Estudia la posición relativa de r y s.

(b) [1´5 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm ¿qué base tiene el de área máxima?

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula un número positivo a, menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$ y las dos rectas de ecuaciones $y = 4$ e $y = a$, tenga un área de $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 3. Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x + y = m+1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y - z = m \end{array}\right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina los valores de m para los que el sistema es compatible.

(b) [1 PUNTO]. Resuelve el sistema en el caso $m = -1$.

EJERCICIO 4. Sea el punto $P(2, 3, -1)$ y la recta r definida por $\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{array}\right.$

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla el punto de r que está más cerca de P.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Se trata de una función continua y derivable en todo su dominio que es ℝ, por tratarse de la suma de una función polinómica, x, que lo es en todo ℝ, y de una función exponencial elemental, e^{-x}, que también lo es en todo ℝ; y la suma de funciones continuas y derivables en todo ℝ lo sigue siendo en todo ℝ. Calculemos los intervalos de monotonía.

$$f(x) = x + e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

Este valor que anula a la función primera derivada, lo llevamos sobre la recta real y construimos los intervalos de monotonía $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. Probamos valores intermedios, por ejemplo, -1 y 1, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$f'(-1) = 1 - e^{-(-1)} = 1 - e^{1} = 1 - e < 0$ $\Rightarrow$ Decreciente en $(-\infty, 0)$

$f'(1) = 1 - e^{-1} = 1 - e^{-1} > 0$ $\Rightarrow$ Creciente en $(0, +\infty)$

Veamos ahora los extremos locales o relativos. Como la función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, los extremos sólo pueden presentarse en los puntos donde la primera derivada es cero, o bien, por las mismas razones de continuidad y derivabilidad al pasar de decreciente a creciente en el punto $x = 0$ la función presenta un mínimo relativo o local.

$f(x) = x + e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow f''(x) = e^{-x}$

Sustituyamos el valor 0 que anulaba a la primera derivada en la función segunda derivada:

$f''(0) = e^{-0} = 1 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo o local en $(0, 1)$

La ordenada del extremo relativo se ha obtenido sustituyendo el valor de la abscisa en la función *f(x)*.

$f(0) = 0 + e^{-0} = 1$

(b) Al ser la función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, para obtener los intervalos de concavidad y convexidad, sólo tendremos en cuenta los valores que anulen a la segunda derivada.

$f''(x) = e^{-x} \Rightarrow e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} \neq 0 \Rightarrow$ No hay ningún valor que anule a la segunda derivada, por lo que sólo hay un posible intervalo de curvatura, el $(-\infty, +\infty)$, probamos un valor intermedio, por ejemplo, el 0, en la segunda derivada:

$f''(x) = e^{-x} \Rightarrow f''(0) = e^{-0} = 1 > 0 \Rightarrow$ Convexa en $(-\infty, +\infty)$

(c) Determinemos las posibles asíntotas de esta función.

- Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "*a*" tal que se satisfaga: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

La función que nos dan la podemos expresar de esta otra forma, $f(x) = x + e^{-x} = x + \frac{1}{e^x}$.

Al tratarse de una función cociente, los posibles valores de "*a*" hay que buscarlos entre los que anulan al denominador, en nuestro caso, no hay ningún valor que anule al denominador. No hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Calculemos estos límites.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{e^x} \right) = \infty + \frac{1}{e^\infty} = \infty + \frac{1}{\infty} = \infty + 0 = \infty$$

luego no hay asíntota horizontal por la derecha, cuando $x \to +\infty$, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua. Veamos si hay asíntota horizontal por la izquierda.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + e^{-x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + e^{-(-x)} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x - x \right) = [\infty - \infty] = +\infty$$

La indeterminación de $[\infty - \infty]$ la hemos destruido teniendo en cuenta que e^x es de mayor orden que x, ya que, e^x, se refiere a un crecimiento exponencial y, x, a un crecimiento lineal, luego la diferencia tiende a $+\infty$.

Luego tampoco hay asíntota horizontal por la izquierda, cuando $x \to -\infty$, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = mx + n$, para cuando $x \to +\infty$. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{xe^{x}}\right) = 1+\frac{1}{\infty\cdot e^{\infty}} = 1+\frac{1}{\infty} = 1+0 = 1$$

Calculemos ahora n:

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x+e^{-x}-x\right) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua, es: $y = x$, cuando $x \to +\infty$,

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy grandes, en este caso es suficiente tomar, por ejemplo, $x = 10$, $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(10) = 10 + e^{-10} = 10'00004539 \\ y_{\text{asíntota}} = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow f(10) > y_{\text{asíntota}}$$

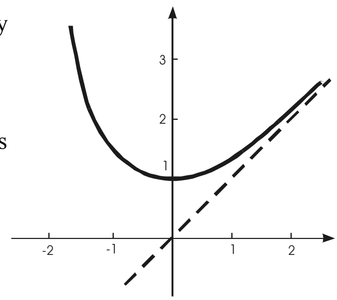
luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = mx + n$, para cuando $x \to -\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+e^{x}}{-x}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+e^{x}}{-1}\right) = \frac{-1+e^{\infty}}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

No hay asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$, sino que hay una rama parabólica de eje paralelo al eje de ordenadas.

(d) Con los datos anteriores la gráfica de la función es la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Expresemos la función $f(x)$ como una función a trozos.

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 + (-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Calculemos los puntos de corte de f con g para valores de $x < 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - x \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Sólo hay un punto de corte entre ambas gráficas para $x < 0$, es el $(-1, 2)$, ya que el otro no pertenece al dominio que estamos considerando, ya que el otro no pertenece al dominio que estamos considerando.

Calculemos ahora los puntos de corte de f con g para valores de $x > 0$.

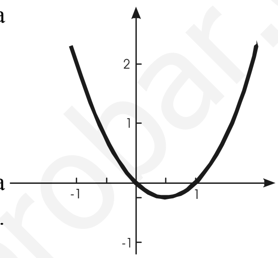
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + x \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x^2 + x = 2 \ \Rightarrow \ x^2 + x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Sólo hay un punto de corte entre ambas gráficas para $x > 0$, es el (1, 2), ya que el otro no pertenece al dominio que estamos considerando.

En definitiva, hay dos puntos de corte entre ambas gráficas el (-1, 2) y el (1, 2).

Representemos la función f comenzando con el primero de los trozos, el $x^2 - x$, para valores de $x < 0$. Se trata de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola.

- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.



$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x^2 - x = 0 \ \Rightarrow \ x(x-1) \ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

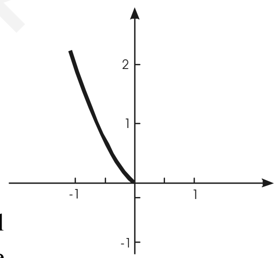
los puntos de corte con el eje de abscisas son el (0, 0) y el (1, 0).

- Punto de corte con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = x^2 - x \quad \Rightarrow \quad y = 0^2 - 0 = 0 \quad \Rightarrow$ el punto es el (0, 0).

- Coordenadas del vértice de la parábola.

abscisa del vértice = $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2}$



ordenada del vértice = $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

Luego el vértice tiene de coordenadas $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$.

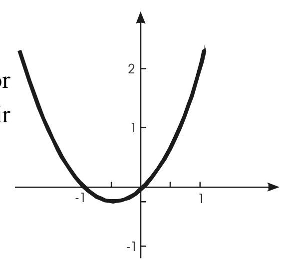
La gráfica de este primer trozo de función está representada al lado, donde inicialmente está toda la función y luego sólo la parte para valores de $x < 0$.

Representemos el segundo trozo, el $x^2 + x$, para valores de $x > 0$ de la función f. Se trata también de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola.

- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x^2 + x = 0 \ \Rightarrow \ x(x+1) \ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

los puntos de corte con el eje de abscisas son el (0, 0) y el (-1, 0).

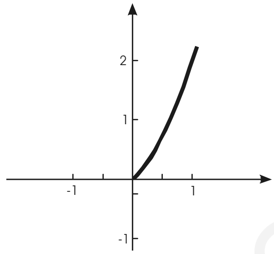


- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = x^2 + x \quad \Rightarrow \quad y = 0^2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow$ el punto es el (0, 0).

- Coordenadas del vértice de la parábola.

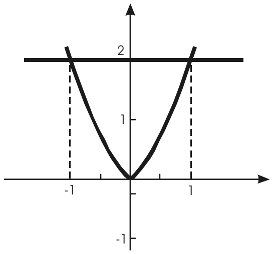
abscisa del vértice = $\dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{1}{2}$



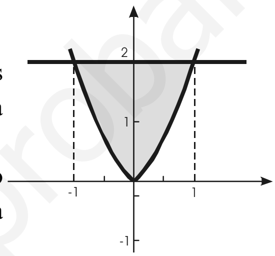
ordenada del vértice $=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

Luego el vértice tiene de coordenadas $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$.

La gráfica de este segundo trozo de función está representada al lado, donde inicialmente está toda la función y luego sólo la parte para valores de $x>0$.



La gráfica de *f(x)*, finalmente, es la representada al lado, junto con la de *g(x),* cuya gráfica es la de una recta paralela al eje de abscisas y a una distancia de 2.



(b) El recinto limitado por ambas gráficas es el que se encuentra sombreado y situado al lado.

El área de dicho recinto lo calcularemos desdoblándolo en dos partes, los correspondientes a cada uno de los trozos anteriormente dibujados.

$$\text{Área}_1=\int_{-1}^{0}\left(2-\left(x^2-x\right)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(2-x^2+x\right)dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=$$

$$=0-\left(2\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}\right)=-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{12}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)=\frac{7}{6}$$

$$\text{Área}_2=\int_{0}^{1}\left(2-\left(x^2+x\right)\right)dx=\int_{0}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=$$

$$=2\cdot 1-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}-0=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{12}{6}-\frac{2}{6}-\frac{3}{6}=\frac{7}{6}$$

El área del recinto es:

Área = Área$_1$ + Área$_2$ = $\frac{7}{6}+\frac{7}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$ unidades de área.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos en primer lugar la matriz *B*.

$$B=A-kI \quad\Rightarrow\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-k\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-k & 1\\ 2 & -1-k\end{pmatrix}$$

Veamos para qué valores de *k* la matriz *B* no tiene inversa, o para los que sí tendría inversa. Lo haremos mediante el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de la matriz *B* la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de *B*, B^{-1}.

Pero si pareciese al menos una fila de ceros, la matriz *B* no admitiría inversa. Esto es lo que haremos para ver los valores de *k* que hacen que una fila sea nula.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3-k & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1-k & 0 & 1 \end{array}\right)$$ Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 2ª

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1-k & 0 & 1 \\ -3-k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - (-3-k) · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1-k & 0 & 1 \\ 0 & -k^2-4k-1 & 2 & 3+k \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22}, que puede serlo o no, veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{22} = 0 \Rightarrow -k^2 - 4k - 1 = 0 \Rightarrow$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{4\cdot 3}}{-2} = \frac{4 \pm 2\cdot\sqrt{3}}{-2} = -2 \mp \sqrt{3}$$

Estos dos valores obtenidos para k hacen que aparezca una fila de ceros en la matriz de la izquierda y por tanto la matriz B no tendría inversa.

* $a_{22} \neq 0 \Rightarrow -k^2 - 4k - 1 \neq 0 \Rightarrow k \neq -2-\sqrt{3}$ y $k \neq -2+\sqrt{3} \Rightarrow$ todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero y no habría ninguna fila de ceros y por tanto estos serían los valores de k para los que la matriz B sí tendría inversa.

(b) Calculemos la inversa de B para $k = -1$.

Sustituyamos este valor de k en la última matriz del apartado anterior, y terminemos de buscar la inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1-k & 0 & 1 \\ 0 & -k^2-4k-1 & 2 & 3+k \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1-(-1) & 0 & 1 \\ 0 & -(-1)^2-4\cdot(-1)-1 & 2 & 3+(-1) \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2.
Dividamos la 2ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa que queríamos calcular, es decir:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Determinemos las constantes α y β para las que se cumple $A^2 + \alpha A = \beta I$.

$$A^2 + \alpha A = \beta I \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3\cdot(-3)+1\cdot 2 & -3\cdot 1+1\cdot(-1) \\ 2\cdot(-3)+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\alpha & \alpha \\ 2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3\cdot(-3)+1\cdot 2 & -3\cdot 1+1\cdot(-1) \\ 2\cdot(-3)+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\alpha & \alpha \\ 2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\alpha & \alpha \\ 2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 11-3\alpha & -4+\alpha \\ -8+2\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 11-3\alpha=\beta \\ -4+\alpha=0 \\ -8+2\alpha=0 \\ 3-\alpha=\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3\alpha-\beta=-11 \\ \alpha=4 \\ 2\alpha=8 \\ -\alpha-\beta=-3 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{rr|r} -3 & -1 & -11 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -3 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] + [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] + 2 · [1ªf.]

Sustituyamos la 4ª fila por: 3 · [4ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} -3 & -1 & -11 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [2ªf.]

Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} -3 & -1 & -11 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminemos las dos últimas filas que se corresponden con dos ecuaciones triviales.

$$\left(\begin{array}{rr|r} -3 & -1 & -11 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} -3 & 0 & -12 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.

La solución es: $-3\alpha = -12$; $-\beta = 1$

Terminemos de despejar las incógnitas: $\alpha = 4$; $\beta = -1$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Estudiemos la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

$$r \equiv \begin{cases} x-y=-2 \\ x-z=-3 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado y la última ecuación es una ecuación absurda, por lo que el sistema es incompatible, pero como sólo hemos obtenido una ecuación absurda, las dos rectas se cruzan en el espacio.

(b) Hallaremos el haz de planos que contiene a la recta *s*, y después le impondremos la condición a este haz de ser paralelo a *r* por lo que obtendremos el plano de dicho haz que cumple la condición que nos dice el problema.

Como la recta *s* viene dada como intersección de dos planos el haz de planos que contiene a *s* será:

$$(x-1)+\alpha(2y-z+2)=0 \;\Rightarrow\; x-1+2\alpha y-\alpha z+2\alpha=0 \;\Rightarrow\; x+2\alpha y-\alpha z+2\alpha-1=0 \quad [1]$$

El vector genérico normal a este haz de planos es el $(1, 2\alpha, -\alpha)$.

Calculemos ahora el vector de dirección de la recta *r*, que al venir expresada como intersección de dos planos, será el producto vectorial de cada uno de los vectores normales a los dos planos que definen a *r*:

$$\vec{v}_r=(1,-1,0)\times(1,0,-1)=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)=(1,1,1)$$

El plano del haz que contiene a *s* y es paralelo a *r*, será aquel cuyo vector normal sea perpendicular al vector de dirección de *r*, es decir, se ha de cumplir que el producto escalar de ambos vectores sea cero.

$$\vec{v}_r\perp\vec{n}_\pi \;\Rightarrow\; (1,1,1)\bullet(1,2\alpha,-\alpha)=0 \;\Rightarrow\; 1\cdot1+1\cdot2\alpha+1\cdot(-\alpha)=0 \;\Rightarrow\; \alpha=-1$$

Sustituyendo este valor en [1], tendremos:

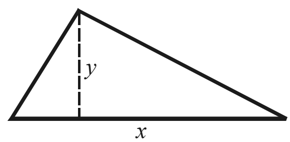
$$x+2\alpha y-\alpha z+2\alpha-1=0 \;\Rightarrow\; x+2\cdot(-1)y-(-1)z+2\cdot(-1)-1=0 \;\Rightarrow\; x-2y+z-3=0$$

que es la ecuación general del plano que contiene a *s* y es paralelo a *r*

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Construyamos la función área, que es de la que me piden el mínimo; tomando como variable independiente la base del triángulo.



$$A(x)=\frac{x\cdot y}{2} \quad [1]$$

Busquemos la relación existente entre la *x* y la *y*, es decir, la condición que nos da el problema y es que la base y la altura suman 20:

$$x+y=20$$

Despejemos y en función de la x:

$$y=20-x$$

Sustituyamos este valor de y en [1]

$$A(x)=\frac{x\cdot y}{2} \;\Rightarrow\; A(x)=\frac{x(20-x)}{2} \;\Rightarrow\; A(x)=\frac{-x^2+20x}{2} \;\Rightarrow\; A(x)=-\frac{1}{2}x^2+10x$$

Calculemos el dominio de esa función. De entrada, los valores de x tendrán que ser mayores que cero, es decir, estrictamente positivos. Pero como los valores que puede tomar y son también mayores que cero, observando la relación entre x e y, deducimos que el mayor valor que puede tomar x es menor que 20.

En definitiva, el dominio de $A(x)$ serán los valores del intervalo (0, 20).

La función es continua y derivable en este dominio, ya que se trata de una función polinómica de segundo grado, es decir, de una función cuadrática.

Calculemos el máximo relativo o local. Obtengamos la función primera derivada.

$$A(x)=-\frac{1}{2}x^2+10x \;\Rightarrow\; A(x)=-\frac{1}{2}\cdot 2x+10 \;\Rightarrow\; A'(x)=-x+10$$

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada.

$$A'(x)=-x+10 \;\Rightarrow\; -x+10=0 \;\Rightarrow\; x=10$$

Comprobemos que este valor que anula a la derivada y pertenece al dominio es el máximo relativo y también el absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: el (0, 10) y el (10, 20).

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 1 y 11, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$A'(x)=-x+10 \;\Rightarrow\; A'(1)=-1+10=9>0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (0, 10)$$

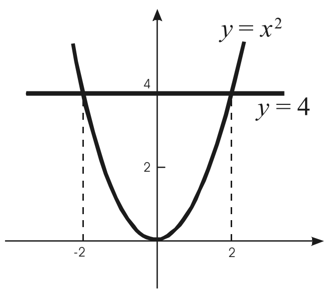
$$A'(x)=-x+10 \;\Rightarrow\; A'(11)=-11+10=-1<0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (10, 20)$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es el máximo relativo sino también máximo absoluto. En definitiva la base que da lugar al triángulo de área máxima es el de 10 cm.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Representemos en primer lugar la gráfica de la función elemental $y=x^2$, que es una parábola, y la de la función y = 4, que es una recta paralela al eje de abscisas. Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x=\;\;2 \;\Rightarrow\; (2, 4) \\ x=-2 \;\Rightarrow\; (-2, 4) \end{array}\right.$$



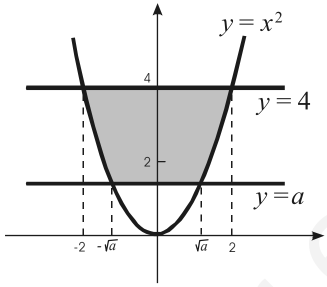
La gráfica de ambas funciones están representadas al lado.

El problema es trazar una recta $y=a$, con a mayor que cero y menor de 4, que permita construir un recinto limitado por la parábola y las dos rectas, $y=a$ e $y=4$, de un área igual a $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.

Esta nueva situación la tenemos representada al lado.

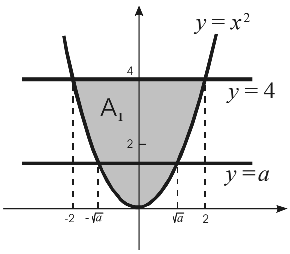
Los puntos de corte de esta recta, $y=a$, y la de la función $y=x^2$ son:

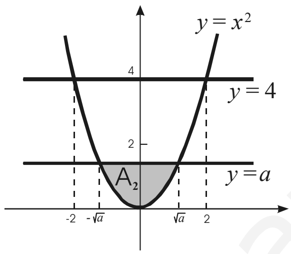
$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=a \end{array}\right\} \Rightarrow\ x^2=a\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{a}\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{a},\ a\right) \\ x=-\sqrt{a}\ \Rightarrow\ \left(-\sqrt{a},\ a\right) \end{array}\right.$$

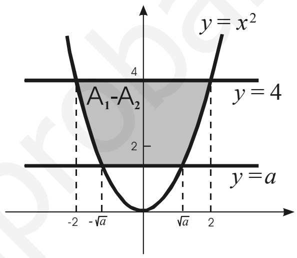


En la gráfica situada al lado hemos representado estos nuevos puntos también.

En los dibujos que hay a continuación podemos observar las dos regiones cuyas áreas vamos a calcular, de manera que la diferencia de ambas será el área buscada.







Calculemos el área A_1 encerrada por la curva $y=x^2$ y la recta $y=4$, para ello integraremos la función diferencia entre -2 y 2:

$$A_1=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=4\cdot 2-\frac{2^3}{3}-\left(4\cdot(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)=8-\frac{8}{3}-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

Calculemos ahora el área encerrada por la curva $y=x^2$ y la recta $y=a$, para ello integraremos la función diferencia entre $-\sqrt{a}$ y $\sqrt{a}$:

$$A_2=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx=\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}=a\sqrt{a}-\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3}-\left(-a\sqrt{a}-\frac{\left(-\sqrt{a}\right)^3}{3}\right)=$$

$$=a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}+a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}=\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)a\sqrt{a}=\frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

Luego el área pedida será:

$$\text{Área}=A_1-A_2=\frac{32}{3}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

Pero esta área debe ser de $\frac{28}{3}$ unidades de área, por lo que igualaremos el resultado obtenido anteriormente con este valor:

$$\frac{32}{3}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}=\frac{28}{3}\quad\Rightarrow\quad -\frac{4}{3}a\sqrt{a}=\frac{28}{3}-\frac{32}{3}\quad\Rightarrow\quad -\frac{4}{3}a\sqrt{a}=-\frac{4}{3}\quad\Rightarrow\quad a\sqrt{a}=1\quad\Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{a}=1\quad\Rightarrow\quad a=1^3\quad\Rightarrow\quad a=1$$

El valor de a que nos pide el ejercicio es 1.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el siguiente sistema según los valores del parámetro λ.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = m+1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y - z = m \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & m+1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & m \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & m+1 \\ 0 & m-1 & 1 & -m \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 1 & m-1 & -m \\ 0 & -1 & 1-m & -m^2 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 1 & m-1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & -m^2-m \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que es cero, por lo que vamos a estudiar la tercera ecuación para los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; -m^2 - m = 0 \;\Rightarrow\; m(-1-m) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \;\Rightarrow$ la 3ª ecuación es, $0 = 0$, que es trivial, la eliminamos y nos quedan dos ecuaciones y tres incógnitas por lo que el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; -m^2 - m \neq 0 \;\Rightarrow\; m(-1-m) \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \;\Rightarrow$ la 3ª ecuación es, $0 = (\text{nº} \neq 0)$, que es absurda, por lo que el sistema sería incompatible.

(b) Resolvamos el sistema para $m = -1$, es decir, cuando se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Sustituyamos $m = -1$ en el sistema triangulado inferior obtenido en el apartado anterior, tendremos:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 1 & m-1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & -m^2-m \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Eliminemos la 3ª fila.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 1+2y \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $x = -y$; $z = 1+2y$
Sustituyamos la incógnita no principal, la y, por un parámetro, por ejemplo, por $\lambda \in \mathbb{R}$, la solución, finalmente, será: $x = -\lambda$; $y = \lambda$; $z = 1+2\lambda$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) En primer lugar, expresamos la ecuación de la recta r en forma paramétrica, para ello, resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de los planos que determinan a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Simplificamos la 2ª fila por -3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulizado. Nos sobra una incógnita, la z que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-2z \\ 0 & 1 & -2z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución del sistema es:

$$x = 1 \quad ; \quad y = -2z.$$

Terminemos de despejar las incógnitas, sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$:

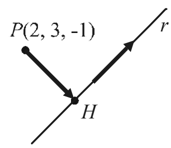
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Un punto Q de la recta r será el $Q(1, 0, 0)$. Los puntos $P(2, 3, -1)$ y Q determinan un vector $\vec{PQ}$ de coordenadas:

$$\vec{PQ} = (1,\ 0,\ 0) - (2,\ 3,\ -1) = (-1,\ -3,\ 1)$$

La ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r, será el que pasando por Q tiene como vectores de dirección el de la recta r y el $\vec{PQ}$.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda - 3\mu \\ z = -1 + \lambda + \mu \end{cases}$$



(b) Llamemos H al punto de r más próximo a P. El punto H al ser, en principio, un punto genérico de r, tendrá de coordenadas: $H(1, -2\alpha, \alpha)$

Se verificará que el vector $\vec{PH}$ será perpendicular al vector de dirección $(0, -2, 1)$ de la recta r, y por tanto el producto escalar de ambos será cero:

$$\vec{PH} = (1,\ -2\alpha,\ \alpha) - (2,\ 3,\ -1) = (-1,\ -2\alpha - 3,\ \alpha + 1)$$

$$\vec{PH} \perp \vec{u}_r \ \Rightarrow\ \vec{PH} \bullet \vec{u}_r = 0 \ \Rightarrow\ (-1,\ -2\alpha - 3,\ \alpha + 1) \bullet (0,\ -2,\ 1) = 0 \ \Rightarrow$$

$$4\alpha + 6 + \alpha + 1 = 0 \ \Rightarrow\ 5\alpha + 7 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = -\frac{7}{5}$$

luego el punto H de r más próximo a P es:

$$H(1,\ -2\alpha,\ \alpha) \ \Rightarrow\ H\left(1,\ -2\cdot\frac{-7}{5},\ -\frac{7}{5}\right) \ \Rightarrow\ H\left(1,\ \frac{14}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN JUNIO 2010

Opción A

EJERCICIO 1. Sea f la función definida como $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{a-x}$ para $x \neq a$.

(a) [1´5 PUNTOS] Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (2, 3) y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.

(b) [1 PUNTO] Para el caso $a=2$, $b=3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Calcula

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx$$

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$.

EJERCICIO 3. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) [0´5 PUNTOS] Indica los valores de m para los que A es invertible.

(b) [2 PUNTOS] Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = \mathrm{C}$ para $m = 0$. (B^t es la matriz traspuesta de B).

EJERCICIO 4. Considera las rectas r y s de ecuaciones

$$x-1 = y = 1-z \qquad y \qquad \begin{cases} x-2y = -1 \\ y+z = 1 \end{cases}$$

(a) [0´75 PUNTOS] Determina su punto de corte.

(b) [1 PUNTO] Halla el ángulo que forman r y s.

(c) [0´75 PUNTOS] Determina la ecuación del plano que contiene a r y s.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$$

EJERCICIO 2. Considera la función f dada por $f(x) = 5 - x$ y la función g definida como $g(x) = \frac{4}{x}$ para $x \neq 0$.

(a) [1 PUNTO] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.

(b) [1´5 PUNTOS] Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3. Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z = 2 \\ x - y + \lambda z = \lambda \end{array}\right\}$$

(a) [1´75 PUNTOS] Discútelo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?

(b) [0´75 PUNTOS] Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.

EJERCICIO 4. Los puntos $P(2, 0, 0)$ y $Q(-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta r de ecuación

$$\begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$$

(a) [1´5 PUNTOS] Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.

(b) [1 PUNTO] Comprueba si el triángulo es rectángulo.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para que la gráfica de f pase por el punto (2, 3) se ha de verificar lo siguiente:

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x} \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow f(2) = \frac{a \cdot 2^2 + b}{a - 2} \Rightarrow 3 = \frac{4a + b}{a - 2} \Rightarrow$$

$$3a - 6 = 4a + b \Rightarrow a + b = -6 \qquad [1]$$

Para que tenga una asíntota oblicua de pendiente -4, es decir, de ecuación, $y = -4x + n$, se ha de verificar que como el valor de m es -4, este valor debe coincidir con el que obtuviésemos al calcular la pendiente de la asíntota oblicua, es decir:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad\Rightarrow\quad -4 = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{a-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{x(a-x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{ax-x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{a-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2a}{-2} = -a \qquad\Rightarrow\qquad a = 4$$

Sustituyendo este valor en [1], tendremos:

$a+b=-6 \quad\Rightarrow\quad 4+b=-6 \quad\Rightarrow\quad b=-10$

Las indeterminaciones de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ se han destruido mediante la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y derivables en $x = c$, si $f(x)$ y $g(x)$ tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de $f(x)$ y $g(x)$ es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$, siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En este caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones $f(x) = ax^2+b$ y $g(x) = ax - x^2$ son continuas y derivables en todo ℝ, por ser ambas polinómicas.

(b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto x_0 es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad [2]$$

La función que tenemos después de sustituir *a* por 2 y *b* por 3, es:

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{a-x} \qquad\Rightarrow\qquad f(x) = \frac{2x^2+3}{2-x}$$

El punto de abscisa $x=1$, tiene de ordenada, $f(1) = \frac{2\cdot 1^2+3}{2-1} \quad\Rightarrow\quad f(1) = 5$

La derivada de la función en el punto 1, es:

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{2-x} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{4x\,(2-x)-\left(2x^2+3\right)\cdot(-1)}{(2-x)^2} \quad\Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{8x-4x^2+2x^2+3}{(2-x)^2} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{-2x^2+8x+3}{(2-x)^2} \quad\Rightarrow$$

$$f'(1) = \frac{-2\cdot 1^2+8\cdot 1+3}{(2-1)^2} \quad\Rightarrow\quad f'(1) = 9$$

Sustituyendo los valores obtenidos en [2], tendremos que la ecuación de la recta tangente será:

$$y - 5 = 9\,(x - 1) \qquad\Rightarrow\qquad y = 9x - 4$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Hagamos el cambio de variable $\sqrt{x} = t$. Diferenciando esta expresión; tendremos:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt \qquad\Rightarrow\qquad dx = 2\sqrt{x}\,dt \qquad\Rightarrow\qquad dx = 2t\,dt$$

La expresión de la integral indefinida con motivo de este cambio será:

$$\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx = \int \operatorname{sen} t \cdot 2t\,dt = \int 2t \cdot sent\;dt = \qquad [1]$$

Obtenemos una integral que hay que resolver mediante una integración por partes.

$u = 2t \quad ; \quad du = 2dt$

$dv = \operatorname{sen} t\,dt \quad ; \quad v = \int \operatorname{sen} t\,dt = -\cos t$

Continuando desde [1], tendremos:

$$= 2t\,(-\cos t) - \int 2(-\cos t)\;dt = -2t\cos t + 2\int \cos t\;dt = -2t\cos t + 2\operatorname{sen} t =$$

$$= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\operatorname{sen}(\sqrt{x})$$

Terminemos de calcular la integral definida que nos pide el problema.

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx = \left[-2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\operatorname{sen}(\sqrt{x})\right]_0^{\pi^2} =$$

$$= -2\sqrt{\pi^2}\cos(\sqrt{\pi^2}) + 2\operatorname{sen}(\sqrt{\pi^2}) - \left(-2\sqrt{0}\cos(\sqrt{0}) + 2\operatorname{sen}(\sqrt{0})\right) =$$

$$= -2\pi\cos(\pi) + 2\operatorname{sen}(\pi) - 0 = -2\pi(-1) + 0 = 2\pi$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa. Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}.

Lógicamente, para que pueda existir matriz inversa, durante el proceso de la triangulación inferior, no debe aparecernos ninguna fila de ceros.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m+4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & m & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-m & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3+m^2-4m & 4m & 1 & -m \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 3 + m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Para estos dos valores de m, el 3 y el 1, que hemos obtenido, nos aparecería una fila de ceros, por lo que la matriz A no tendría inversa.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 3 + m^2 - 4m \neq 0 \Rightarrow m \neq 1 \;;\; m \neq 3,$ para todos los valores de m distintos de 1 y 3, la matriz A tendrá inversa, es decir, es invertible.

(b) Resolvamos la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$.

$XA - B^t = C \quad \Rightarrow \quad XA = C + B^t \quad \Rightarrow$ multipliquemos a la derecha por la inversa de A ya que para $m = 0$, A tiene inversa.

$XA \cdot A^{-1} = (C + B^t) \cdot A^{-1} \quad \Rightarrow$ por la propiedad de matriz inversa

$X \cdot I = (C + B^t) \cdot A^{-1} \quad \Rightarrow$ por la propiedad de matriz unidad

$X = (C + B^t) \cdot A^{-1}$

Obtengamos en primer lugar la matriz inversa de A, la matriz A^{-1}. Para ello, continuaremos a partir de la matriz triangulada inferiormente que obtuvimos en el apartado (a) anterior, sustituyendo m por cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-m & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3+m^2-4m & 4m & 1 & -m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3+0^2-4\cdot 0 & 4\cdot 0 & 1 & -0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos ahora superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $3 \cdot [2^a f.] - 4 \cdot [3^a f.]$
Sustituyamos la 1ª fila por: $3 \cdot [1^a f.] + [3^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -12 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dividamos todas las filas por 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz inversa de A es la que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz X.

$$X = (C + B^t) \cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t\right] \bullet \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Determinemos el punto de corte de las rectas r y s de ecuaciones respectivas:

$$x-1=y=1-z \qquad y \qquad \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=\ \ 1 \end{cases}$$

Expresemos la ecuación de la recta *r* primero en forma continua y después en forma paramétrica.

$$x-1=y=1-z \ \Rightarrow\ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1} \ \Rightarrow\ \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$$

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

$$\begin{cases} \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=\ \ 1 \end{cases} \end{cases}$$

Sustituyamos las incógnitas *x*, *y* y *z*, de la ecuación de la recta *r* en las ecuaciones de la recta *s*.

$$\begin{cases} 1+\lambda-2\lambda=-1 \\ \lambda+1-\lambda=\ \ 1 \end{cases} \ \Rightarrow\ \begin{cases} -\lambda=-2 \\ 1=\ \ 1 \end{cases} \ \Rightarrow\ \begin{cases} \lambda=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado con una única solución, $\lambda=2$ (la 2ª ecuación es trivial y la eliminamos.

Sustituyamos este valor de λ en las ecuaciones de la recta r:

$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2 \\ y=2 \\ z=1-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \ (3,\ 2,\ -1) \text{ es el punto de corte.}$$

(b) Para calcular el ángulo que forman *r* y *s* necesito expresar la ecuación de la recta *s* en forma paramétrica.

$$s\equiv\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=\ \ 1 \end{cases}$$

Lo haremos resolviendo el sistema. Para ello, expresamos el sistema en forma matricial y aplicamos el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente.
La incógnita que nos sobra, la *z*, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1-z \end{array}\right)$$

Triangulemos ahora superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=1\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-2z \\ 0 & 1 & 1-z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x=1-2z \quad ; \quad y=1-z$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, *z*, por un parámetro, por ejemplo, por μ; obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta *s*:

$$s\equiv\begin{cases} x=1-2\mu \\ y=1-\mu \\ z=\mu \end{cases}$$

Un vector de dirección de la recta *s* es el $\vec{u}_s=(-2,\ -1,\ 1)$, y un vector de la recta *r* puede ser el $\vec{v}_r=(1,\ 1,\ -1)$. El ángulo que forman las rectas *r* y *s* coincidirá con el ángulo que forman sus vectores de dirección.

$$\cos(\widehat{r,s})=\left|\frac{(1,\ 1,\ -1)\bullet(-2,\ -1,\ 1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}}\right|=\left|\frac{-2-1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

El ángulo que forman r y s es:

$$(\widehat{r,s}) = \text{arc cos}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

(c) La ecuación del plano π que contiene a r y s, será la del plano que pase por un punto cualquiera de ambas rectas, por ejemplo, el (1, 0, 1) de r, y los vectores de dirección del plano serán cada uno de los vectores de dirección de las rectas r y s, es decir, el $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ -1)$ y el $\vec{u}_s = (-2,\ -1,\ 1)$.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 1 - \alpha + \beta \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2} = \frac{e^0 - e^{\operatorname{sen} 0}}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x}{2x} = \frac{e^0 - e^{\operatorname{sen} 0}\cdot\cos 0}{2\cdot 0} = \frac{1-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \left[e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x}\cdot(-\operatorname{sen} x)\right]}{2} =$$

$$= \frac{e^0 - \left[e^{\operatorname{sen} 0}\cdot\cos^2 0 + e^{\operatorname{sen} 0}\cdot(-\operatorname{sen} 0)\right]}{2\cdot 0} = \frac{1-\left[1\cdot 1 + 1\cdot(-0)\right]}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Las indeterminaciones de $\left[\frac{0}{0}\right]$ se han destruido utilizando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

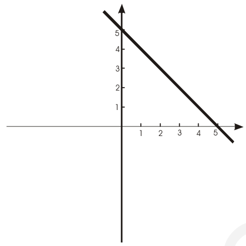
La regla dice que, *"dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x = c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En este caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones *f(x)* y *g(x)* son continuas y derivables en todo ℝ.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Dibujemos, en primer lugar, la gráfica de $f(x) = 5 - x$. Se trata de una función afín cuya gráfica es una recta que no pasa por el origen.

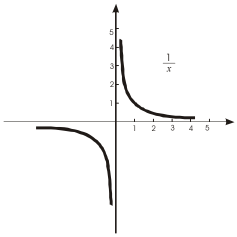


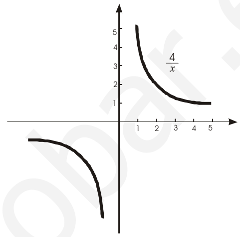
1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:
$x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (0, 5)$

2.- Punto de corte con el eje de abscisas:
$y = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow (5, 0)$

La gráfica está representada al lado.

Representemos ahora la función $g(x) = \dfrac{4}{x}$. Se trata de una función de proporcionalidad inversa, cuya gráfica es una hipérbola equilátera. Su gráfica aproximada es la situada a la derecha, y nos hemos ayudado para representarla de los puntos (1, 4), (2, 2) y (4, 1) que son muy fáciles de obtener. No obstante, tendremos en cuenta que su gráfica en cualquier punto de su domino coincide con la de $\dfrac{1}{x}$ en el mismo punto pero multiplicando la ordenada de ésta por 4.



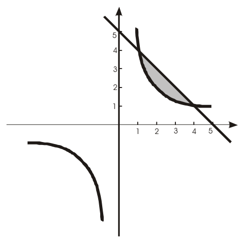


Los puntos de corte de las gráficas *f* y *g* los calcularemos resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{4}{x} \\ y = 5 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{x} = 5 - x \Rightarrow 4 = 5x - x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \Rightarrow & y = 5 - 4 = 1 \\ 1 \Rightarrow & y = 5 - 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4, 1) \\ (1, 4) \end{cases}$$

El recinto limitado por ambas gráficas es el que se encuentra sombreado y situado al lado.



(b) Calculemos el área del recinto sombreado que se encuentra más arriba.

Construyamos la función diferencia entre la recta y la curva:

$$h(x) = 5 - x - \frac{4}{x}$$

e integremos esta función entre 1 y 4, que eran los puntos de corte de ambas funciones.

$$\text{Área} = \int_{-1}^{4} \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\,\text{Ln}(x)\right]_{-1}^{4} = 5 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} - 4\,\text{Ln}(4) - \left(5 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 4\,\text{Ln}(1)\right) =$$

$$= 20 - 8 - 4\,\text{Ln}(4) - \left(5 - \frac{1}{2} - 4 \cdot 0\right) = 12 - 4\,\text{Ln}(4) - \frac{9}{2} = \frac{15}{2} - 4\,\text{Ln}(4) = \frac{15}{2} - 8\,\text{Ln}(2) \ \text{u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Discutamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan, para lo cual expresaremos el sistema en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z = 2 \\ x - y + \lambda z = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \lambda + 2 \\ 2 & -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda & \lambda \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda+2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - λ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda+2 & 1-2\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda+2-\lambda^2 \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 3 & 2-2\lambda-\lambda^2 & 4-\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda+2-\lambda^2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - (1+λ) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 3 & 2-2\lambda-\lambda^2 & 4-\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3+1 & \lambda^3-\lambda^2+2 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow \lambda^3+1 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = -1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería $\lambda^3 + 1 = \lambda^3 - \lambda^2 + 2 \Rightarrow 0 = (-1)^3 - (-1)^2 + 2 \Rightarrow 0 = -1 - 1 + 2 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda^3+1 \neq 0 \Rightarrow \lambda^3 \neq -1 \Rightarrow \lambda \neq -1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería una ecuación normal, es decir, todos los elementos de la diagonal principal serían distintos de cero, por lo que tendríamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible determinado, con solución única.

En definitiva, para cualquier valor de λ el sistema siempre tiene solución.

(b) Resolvámoslo para $\lambda = -1$. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferior que obtuvimos en el apartado anterior y suprimamos la última ecuación por ser trivial, tal como lo habíamos justificado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 3 & 2-2\lambda-\lambda^2 & 4-\lambda-\lambda^2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2-2\cdot(-1)-(-1)^2 & 4-(-1)-(-1)^2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Nos sobre una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1+z \\ 0 & 3 & 4-3z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4-3z \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada, la solución es:

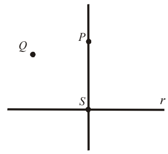
$$3x = 1 \quad ; \quad 3y = 4 - 3z$$

Terminemos de despejar las incógnitas.

$$x = \frac{1}{3} \;\; ; \;\; y = \frac{4-3z}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} \;\; ; \;\; y = \frac{4}{3} - z$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por α, finalmente, la solución será: $x = \frac{1}{3} \;\; ; \;\; y = \frac{4}{3} - \alpha \;\; ; \;\; z = \alpha$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica. Para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de la recta que viene dada como intersección de dos planos.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ \quad\;\; y = 0 \end{cases}$$

Expresamos el sistema en forma matricial y lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 33-3z \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$4x = 33 - 3z \quad ; \quad y = 0$$

Terminemos de despejar las incógnitas sustituyendo la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por t.

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{33}{4} - \frac{3}{4}t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Un punto S genérico de la recta tendrá de coordenadas $\left(\frac{33}{4} - \frac{3}{4}t, \;\; 0, \;\; t\right)$. Impongamos ahora la condición de que el vector $\vec{PS}$ sea perpendicular al vector de dirección de la recta r.

Calculemos antes las coordenadas de estos vectores.

$$\vec{PS} = \left(\frac{33}{4} - \frac{3}{4}t, \; 0, \; t\right) - (2, \; 0, \; 0) = \left(\frac{25}{4} - \frac{3}{4}t, \; 0, \; t\right) \qquad ; \qquad \vec{v}_r = \left(-\frac{3}{4}, \; 0, \; 1\right)$$

La condición para que estos vectores sean perpendiculares es que el producto escalar de ambos sea cero:

$$\vec{PS} \perp \vec{v}_r \;\Rightarrow\; \vec{PS} \cdot \vec{v}_r = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{25}{4} - \frac{3}{4}t, \; 0, \; t\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}, \; 0, \; 1\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -\frac{75}{16} + \frac{9}{16}t + t = 0 \;\Rightarrow\; \frac{25}{16}t = \frac{75}{16} \;\Rightarrow\; t = 3$$

Las coordenadas del punto S son:

$$S\left(\frac{33}{4} - \frac{3}{4}t, \;\; 0, \;\; t\right) \;\Rightarrow\; S\left(\frac{33}{4} - \frac{3}{4} \cdot 3, \;\; 0, \;\; 3\right) \;\Rightarrow\; S(6, \;\; 0, \;\; 3)$$

(b) Comprobemos si el triángulo PQS es rectángulo. Para ello obtendremos los vectores correspondientes a cada uno de sus lados y comprobaremos si son perpendiculares.

Calculemos las coordenadas de estos dos vectores.

$$\vec{PS} = (6, \; 0, \; 3) - (2, \; 0, \; 0) = (4, \; 0, \; 3) \qquad ; \quad \vec{QS} = (6, \; 0, \; 3) - (-1, \; 12, \; 4) = (7, \; -12, \; -4)$$

$$\vec{PQ} = (-1, \; 12, \; 4) - (2, \; 0, \; 0) = (-3, \; 12, \; 4)$$

Impongamos la condición de perpendicularidad a cada dos de estos vectores, es decir, calculemos si su producto escalar sea cero.

$$\vec{PS} \perp \vec{PQ} \;\Rightarrow\; \vec{PS} \bullet \vec{PQ} = 0 \;\Rightarrow\; (4, \; 0, \; 3) \bullet (-3, \; 12, \; 4) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -12 + 0 + 12 = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0$$

Hemos obtenido dos vectores que son perpendiculares, luego hay dos lados que también lo son, por lo que el triángulo es rectángulo. No es preciso comprobar los demás.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2010

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

EJERCICIO 2. Sea $I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\, dx$.

(a) [1 PUNTO]. Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.
(b) [1´5 PUNTOS]. Determina I.

EJERCICIO 3. **(a)** [1´75 PUNTOS]. Discute, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} -x+\lambda y+ z=\lambda \\ \lambda x+2y+(\lambda+2)z=4 \\ x+3y+2z=6-\lambda \end{array}\right\}$$

(b) [0´75 PUNTOS]. Resuelve el sistema anterior para $\lambda=0$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{cases}$ y contiene a la recta s definida por $\begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

Opción B

EJERCICIO 1. Considera la función $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } \ 0\le x\le 2 \\ cx & \text{si } \ 2< x\le 4 \end{cases}$$

(a) [1´75 PUNTOS]. Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0)=f(4)$, determina los valores de a, b y c.
(b) [0´75 PUNTOS]. Para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 2. Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.
(a) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa $x = 1$.
(b) [1´75 PUNTOS]. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Calcula su área.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que cumpla la ecuación $AXB = C$.

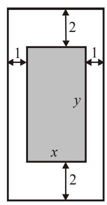
EJERCICIO 4. Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$x + y = 1, \qquad ay + z = 0 \qquad \text{y} \qquad x + (1 + a)y + az = a + 1$$

(a) [1´5 PUNTOS]. ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?
(b) [1 PUNTO]. Para $a = 0$, determina la posición relativa de los planos.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construyamos la función superficie, que queremos hacer mínima:

$$S = (x + 2)\cdot(y + 4)$$

teniendo en cuenta, según el ejercicio, que: $x\cdot y = 18 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{18}{x}$

$$S = (x + 2)\cdot(y + 4) = (x + 2)\cdot\left(\frac{18}{x} + 4\right) = 18 + \frac{36}{x} + 4x + 8 = \frac{36}{x} + 4x + 26$$

$$S(x) = \frac{36}{x} + 4x + 26$$

Para saber cuál es el mínimo absoluto de la función, calcularemos en primer lugar los mínimos relativos de la función. El dominio de la función, que se puede deducir lógicamente, es el intervalo abierto]0, +∞[. Como la función es continua y derivable en dicho intervalo, los mínimos relativos se encontrarán entre los puntos de derivada cero.

$$S'(x) = -\frac{36}{x^2}+4 \;\Rightarrow\; -\frac{36}{x^2}+4=0 \;\Rightarrow\; -36+4x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=9 \;\Rightarrow\; x=\pm 3$$

Sólo nos interesa el 3, ya que el -3 no pertenece al dominio de la función.

Construyamos los dos intervalos de monotonía: (0, 3) y el (3, +∞).

Probemos valores intermedios de estos intervalos, por ejemplo, 1 y 6, en la 1ª derivada:

$$S'(1) = -\frac{36}{1^2}+4=-32<0 \quad\Rightarrow\quad \text{decreciente en } (0,3)$$

$$S'(4) = -\frac{36}{6^2}+4=3>0 \quad\Rightarrow\quad \text{creciente en } (3,+\infty)$$

Como la función es continua y derivable en su dominio, en el punto 3 hay un mínimo relativo. Por otro lado, al ser el dominio un intervalo abierto, y teniendo en cuenta la monotonía, el mínimo relativo es el mínimo absoluto.

El valor de y, para este valor de $x = 3$, es: $y=\frac{18}{x} \;\Rightarrow\; y=\frac{18}{3}=6$

Las dimensiones del cartel son $(x+2)$ por $(y+4)$ ⇒ (3+2) por (6+4), es decir, 5 cm × 10 cm.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Hagamos el cambio de variable, $t^2 = e^{-x}$, en la integral I.

$$t^2=e^{-x} \;\Rightarrow\; 2t\,dt=e^{-x}\cdot(-1)\,dt \;\Rightarrow\; dx=-\frac{2t}{e^{-x}}\,dt \;\Rightarrow\; dx=-\frac{2t}{t^2}\,dt \;\Rightarrow\; dx=-\frac{2}{t}\,dt$$

$$I=\int\frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\,dx=\int\frac{5}{1+\sqrt{t^2}}\cdot\frac{-2}{t}\,dt=\int\frac{-10}{(1+t)\,t}\,dt=\int\frac{-10}{(t+1)\,t}\,dt \qquad [1]$$

(b) La última integral es una integral racional propia, por lo que el integrando lo descompondremos en una suma de fracciones elementales:

$$\frac{-10}{(t+1)\,t}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t} \quad\Rightarrow\quad \frac{-10}{(t+1)\,t}=\frac{A\,t+B(t+1)}{(t+1)\,t} \quad\Rightarrow$$

$$-10=A\,t+B(t+1) \;\Rightarrow \begin{cases} t=0 & \Rightarrow\; -10=A\cdot 0+B(0+1) \;\Rightarrow\; B=-10 \\ t=-1 & \Rightarrow\; -10=A(-1)+B(-1+1) \;\Rightarrow\; A=10 \end{cases}$$

continuando desde [1]:

$$I=\int\frac{-10}{(t+1)\,t}\,dt=\int\left(\frac{10}{t+1}+\frac{-10}{t}\right)dt=10\int\frac{1}{t+1}\,dt-10\int\frac{1}{t}\,dt=10\,\mathrm{Ln}|t+1|-10\,\mathrm{Ln}|t|=$$

deshaciendo el cambio, tendremos finalmente:

$$=10\,\mathrm{Ln}\left|\sqrt{e^{-x}}+1\right|-10\,\mathrm{Ln}\left|\sqrt{e^{-x}}\right|=10\,\mathrm{Ln}\left(\sqrt{e^{-x}}+1\right)-10\,\mathrm{Ln}\sqrt{e^{-x}}$$

$$=10\,\mathrm{Ln}\left(e^{\frac{-x}{2}}+1\right)-10\,\mathrm{Ln}\,e^{\frac{-x}{2}}=10\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}+1\right)-10\cdot\frac{-x}{2}\,\mathrm{Ln}\,e=10\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)+5x=$$

$$=10\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)+5x=10\left[\mathrm{Ln}\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)-\mathrm{Ln}\,e^{\frac{x}{2}}\right]+5x=10\,\mathrm{Ln}\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)-10\,\mathrm{Ln}\,e^{\frac{x}{2}}+5x=$$

$$=10\,\mathrm{Ln}\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)-10\cdot\frac{x}{2}\,\mathrm{Ln}\,e+5x=10\,\mathrm{Ln}\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)-5x+5x=10\,\mathrm{Ln}\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el siguiente sistema para los diversos valores del parámetro λ.

$$\left.\begin{array}{l} -x+\lambda y+ \quad z=\lambda \\ \lambda x+2y+(\lambda+2)z=4 \\ x+3y+ \quad 2z=6-\lambda \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & \lambda+2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6-\lambda \end{array}\right)$$

Situemos la 1ª fila en segundo lugar, la 2ª fila la pasamos al tercer lugar y la 3ª fila la ponemos en primer lugar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6-\lambda \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & \lambda+2 & 4 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - λ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6-\lambda \\ 0 & \lambda+3 & 3 & 6 \\ 0 & 2-3\lambda & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+4 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6-\lambda \\ 0 & 3 & \lambda+3 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 2-3\lambda & \lambda^2-6\lambda+4 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - (2-λ) · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6-\lambda \\ 0 & 3 & \lambda+3 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda^2-8\lambda & 3\lambda^2-12\lambda \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Discutamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-8)=0 \Rightarrow \lambda = 0 \;;\; \lambda = 8$

** Si $\lambda = 0 \Rightarrow$ la última ecuación será $0 = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0$, es decir, $0 = 0$, se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, nos quedará un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

** Si $\lambda = 8 \Rightarrow$ la última ecuación será $0 = 3 \cdot 8^2 - 12 \cdot 8$, es decir, $0 = 96$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema no tiene solución, es decir, se trata de un sistema incompatible.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 8 \Rightarrow$ la última ecuación no es ni absurda ni trivial, nos queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

(b) Resolvamos el sistema para λ=0. Sustituiremos este valor de λ en la matriz triangulada inferior del apartado anterior. Tendremos en cuenta que la 3ª ecuación la eliminamos por ser trivial.

$$\begin{array}{ccc|c} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6-\lambda \\ 0 & 3 & \lambda+3 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda^2-8\lambda & 3\lambda^2-12\lambda \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6-0 \\ 0 & 3 & 0+3 & 6 \\ 0 & 0 & 0^2-8\cdot 0 & 3\cdot 0^2-12\cdot 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} (x)\ (z)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \end{array}$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 3.

$$\begin{array}{c} (x)\ (z)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

Nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} (x)\ (z) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6-3y \\ 0 & 1 & 2-y \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} (x)\ (z) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-y \\ 0 & 1 & 2-y \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado. La solución es:

$$x = 2 - y \quad ; \quad z = 2 - y$$

Sustituyamos la incógnita secundaria y por un parámetro t, tendremos la solución final:

$$x = 2 - t \quad ; \quad y = t \quad ; \quad z = 2 - t$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Para determinar la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r, expresaremos en primer lugar la ecuación de la recta r en forma paramétrica, y después calcularemos el vector de dirección de la recta r.

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-11 \\ 2y+z=19 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente.
Es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Nos sobra una incógnita, la z; que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & 19-z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8-z \\ 0 & 2 & 19-z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es:

$$x = 8 - z \quad ; \quad 2y = 19 - z$$

que terminando de despejar las incógnitas tendremos:

$$x = 8 - z \quad ; \quad y = \frac{19}{2} - \frac{1}{2}z$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por t.

$$r \equiv \begin{cases} x = 8 - t \\ y = \dfrac{19}{2} - \dfrac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

El vector de dirección de la recta *r* será pues:

$$\left(-1,\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$$

El plano π que nos piden pasará por un punto de la recta *s*, por ejemplo el (1, -2, 2), ya que el plano contiene a dicha recta; y los dos vectores de dirección del plano serán, uno el de la recta *r*, por ser paralelo a ella, y el otro el de la recta *s*, por ejemplo, el (-5, 3, 2), ya que contiene a ésta

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - 5\alpha - \beta \\ y = -2 + 3\alpha - \dfrac{1}{2}\beta \\ z = 2 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

Los dos vectores de dirección del plano obtenidos, el (-5, 3, 2) y el $\left(-1,\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$, son vectores linealmente independientes, ya que sus componentes no son proporcionales.

$$\frac{-5}{-1} \neq \frac{3}{-\frac{1}{2}} \neq \frac{2}{1}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función *f(x)*, según nos dice el ejercicio, es derivable en todo su dominio, por tanto como la derivabilidad implica continuidad, esta función también será continua en [0, 4].

Sabemos pues, que la función *f(x)* es continua en el intervalo [0, 4], evidentemente lo es en los intervalos [0, 2) y (2, 4] por tratarse de funciones polinómicas que los son en todo ℝ y por lo tanto en sus respectivos dominios particulares, el problema podría presentarse en el punto 2, pero como también es continua, según el problema, se ha de verificar que el valor de la función en dicho punto debe coincidir con los límites laterales de la función en el citado punto, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} \left(x^2 + ax + b\right) = 4 + 2a + b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} (cx) = 2c \\ f(2) = 2^2 + a\cdot 2 + b = 4 + 2a + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \\ 4 + 2a + b = 2c \quad \Rightarrow \quad 2a + b - 2c = -4 \qquad [1] \end{array}\right.$$

Hemos obtenido una primera condición, obtengamos más. El ejercicio nos dice que es derivable en el intervalo (0, 4). Estudiemos la derivabilidad

Evidentemente lo es en los intervalos (0, 2) y (2, 4) por tratarse de funciones polinómicas que los son en todo ℝ y por lo tanto en los respectivos intervalos anteriores, siendo la función derivada, en una primera aproximación:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } \ 0 \le x < 2 \\ c & \text{si } \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

El problema podría presentarse en el punto 2, pero como también es derivable, según el problema, se ha de verificar que (siendo ya continua) las derivadas laterales de la función en dicho punto deben coincidir, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2)^- = \lim\limits_{\substack{x \to 2^- \\ x<-2}} (2x + a) = 4 + a \\ f'(2)^+ = \lim\limits_{\substack{x \to 2^+ \\ x>2}} c = c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f'(2)^- = f'(2)^+ \Rightarrow \\ 4 + a = c \ \Rightarrow \ a - c = -4 \end{cases} \qquad [2]$$

Hemos obtenido una segunda condición, necesitamos una tercera, y es que $f(0)=f(4)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } \ 0 \le x \le 2 \\ cx & \text{si } \ 2 < x \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0^2 + a \cdot 0 + b = b \\ f(4) = c \cdot 4 = 4c \end{cases} \Rightarrow b = 4c \Rightarrow b - 4c = 0 \ \ [3]$$

Resolvamos ahora el sistema formado por las tres condiciones, [1], [2] y [3].

$$\left.\begin{array}{r} 2a + b - 2c = -4 \\ a - c = -4 \\ b - 4c = 0 \end{array}\right\}$$

Expresaremos el sistema en forma matricial, y lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$4a = -12 \quad ; \quad -b = -4 \quad ; \quad -4c = -4 \quad \Rightarrow$

$a = -3 \quad ; \quad b = 4 \quad ; \quad c = 1$

(b) Los extremos absolutos de esta función continua y derivable en el intervalo cerrado [0, 4], los localizaremos entre los máximos y mínimos relativos o locales (puntos de derivada cero) o en los extremos del intervalo.

Teníamos una primera aproximación de la función derivada, que era:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } \ 0 \le x < 2 \\ c & \text{si } \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Si sustituimos los valores de a, b y c obtenidos anteriormente y sabiendo que la función también era derivable en el punto 2, tendremos que la función derivada es finalmente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } \ 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Calculemos el valor o valores que anulan a la primera derivada.

$$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } 0\le x\le 2\\ 1 & \text{si } 2<x\le 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}\in[0,\ 2]\\ 1\ne 0\end{cases}$$

Para saber si este valor que anula a la 1ª derivada es máximo o mínimo relativo, recurriremos al estudio de la monotonía.

Con este valor, $\frac{3}{2}$, que anula a la función primera derivada construimos los dos intervalos posibles de monotonía dentro de su dominio, el $\left[0,\ \frac{3}{2}\right)$ y el $\left(\frac{3}{2},\ 4\right]$. Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de esos intervalos, por ejemplo, el 1 y el 3, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero en el intervalo correspondiente la gráfica de la función será creciente o decreciente.

$$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } 0\le x\le 2\\ \\ 1 & \text{si } 2<x\le 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'(1)=2\cdot 1-3<0 \Rightarrow \text{decreciente en } \left[0,\ \frac{3}{2}\right)\\ \\ f'(3)=1>0 \Rightarrow \text{creciente en } \left(\frac{3}{2},\ 4\right]\end{cases}$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada, el $\frac{3}{2}$, no sólo es mínimo relativo sino también mínimo absoluto. La ordenada de este extremo será:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{si } 0\le x\le 2\\ cx & \text{si } 2<x\le 4\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2-3x+4 & \text{si } 0\le x\le 2\\ x & \text{si } 2<x\le 4\end{cases} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}+4=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+4=\frac{9-18+16}{4}=\frac{7}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{4}\right) \text{ mínimo absoluto}$$

Teniendo en cuenta la monotonía podemos igualmente deducir que en los extremos del intervalo hay dos máximos absolutos, ya que el problema nos dice que $f(0)=f(4)$. Calculemos el valor de la función en los extremos del intervalo, que lógicamente han de coincidir.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{si } 0\le x\le 2\\ cx & \text{si } 2<x\le 4\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2-3x+4 & \text{si } 0\le x\le 2\\ x & \text{si } 2<x\le 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(0)=4\\ f(4)=4\end{cases}$$

Luego las coordenadas de los máximos absolutos son (0, 4) y (4, 4).

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto de abscisa x_0 es: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$ $\Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$, será:

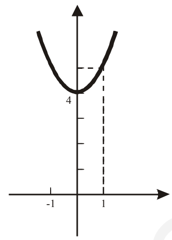
$$f(x)=x^2+4 \Rightarrow y_0=f(1)=1^2+4=5$$

$$f'(x)=2x \Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=2\cdot 1=2$$

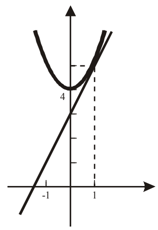
$$y-5=2\,(x-1) \Rightarrow y=2x-2+5 \Rightarrow y=2x+3$$

Que es la ecuación de la recta tangente.

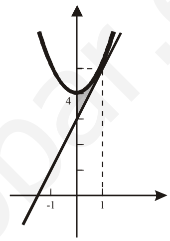
(b) Representemos la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4$, función cuya gráfica es una parábola, parábola que coincide con la de x^2 desplazando ésta cuatro unidades hacia arriba, es decir que el vértice de la misma es el punto (0, 4). Otros dos puntos que nos ayudarán a representarla son el $(-1, 5)$ y el $(1, 5)$. La gráfica es la situada al lado.



Representemos la recta de ecuación, $y = 2x + 3$, función afín cuya gráfica es una recta que no pasa por el origen, sino que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(0, 3)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. Esta recta además es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. Su gráfica junto a la de la función cuadrática es la situada a la izquierda.



El recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$ (recta tangente a la gráfica de f) es el que se encuentra sombreado a la derecha.



Calculemos el área del recinto sombreado anterior.

$$A = \int_0^1 \left[x^2 + 4 - (2x + 3)\right] dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{2 \cdot 1^2}{2} + 1\right) - 0 = \frac{1}{3} \text{ u}^2.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Para resolver la ecuación matricial $A\,X\,B = C$, procedemos de la siguiente manera.

$A\,X\,B = C$	$\Rightarrow$	multiplicamos a la izquierda por la inversa de A.
$A^{-1} \cdot A\,X\,B = A^{-1} \cdot C$	$\Rightarrow$	por la propiedad asociativa del producto de matrices.
$(A^{-1} \cdot A)\,X\,B = A^{-1} \cdot C$	$\Rightarrow$	por la existencia de la matriz unidad.
$I \cdot X\,B = A^{-1} \cdot C$	$\Rightarrow$	simplificando
$X\,B = A^{-1} \cdot C$	$\Rightarrow$	multiplicamos a la derecha por la inversa de B.
$X\,B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$	$\Rightarrow$	por la propiedad asociativa del producto de matrices.
$X\,(B \cdot B^{-1}) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$	$\Rightarrow$	por la existencia de la matriz unidad.
$X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$	$\Rightarrow$	simplificando
$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$		

Ahora sí podemos calcular la matriz X, sabiendo que $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Pero antes hemos de justificar que las matrices A y B admiten inversa.

Calculemos en primer lugar, si existe, la matriz inversa de A. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedamos de igual manera para obtener, si es posible, la matriz inversa de B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz B admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Multipliquemos la 2ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de B, B^{-1}, es decir:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la matriz X, que era $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Estudiemos la posición relativa de los tres planos para determinar el valor de a que hace que no tengan ningún punto en común. Discutiremos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ ay + z &= 0 \\ x + (1+a)y + az &= a + 1 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss y clasifiquémoslo según los valores del parámetro a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & a & a \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{ccc|c} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & a & a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $a \cdot$ [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-a^2 & a \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; a - a^2 = 0 \;\Rightarrow\; a(1 - a) = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$ y $a = 1 \;\Rightarrow$ veamos lo que ocurre para cada uno de estos valores.

** $a = 0 \;\Rightarrow$ la 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Lo que significa que los tres planos se cortan en una recta r.

** $a = 1 \;\Rightarrow$ la 3ª ecuación es, 0 = 1, que es absurda. Nos queda un sistema incompatible, no tiene solución, es decir, los tres planos no tienen ningún punto en común, éste es el valor de a que nos pide el ejercicio en este apartado.

* $a_{33} \neq 0 \;\Rightarrow\; a \neq 0$ y $a \neq 1 \;\Rightarrow$ la 3ª ecuación no sería ni trivial ni absurda; los elementos de la diagonal principal son todos distintos de cero, se trataría de un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es decir, sería un sistema compatible determinado. Los tres planos se cortarían en un punto.

(b) Para $a = 0$, los tres planos se cortan en una recta, según el estudio realizado en el apartado anterior.

Terminemos de resolver el sistema del apartado (a) para el valor de $a = 0$, teniendo en cuenta que se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, y que la solución del sistema serán todos los puntos comunes a los tres planos, en este caso se trataría de la recta r.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-a^2 & a \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

Al eliminar la 3ª ecuación por ser trivial, hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-y \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $x = 1 - y$; $z = 0 \;\Rightarrow$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la y, por un parámetro, por ejemplo, por α, tendremos finalmente la ecuación de la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 68 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] La hipotenusa de un triángulo rectángulo mise 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recuerda que el volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$).

EJERCICIO 2. Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = |x|$.

(a) [1 PUNTO] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.

(b) [1´5 PUNTOS] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

EJERCICIO 3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1´25 PUNTOS] Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.

(b) [1´25 PUNTOS] Calcula A^{-1}. (Sugerencia: Puedes utilizar la igualdad del apartado (a)).

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con los ejes de coordenadas.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea f la función definida como $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ para $x \neq \pm 1$.

(a) [1 PUNTO] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1 PUNTO] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) [0`5 PUNTOS] Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 2. Dada la función $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln x$, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide:

(a) [0´75 PUNTOS] Comprueba que la recta de ecuación $y = -\mathrm{e}x + 1 + \mathrm{e}^2$ es la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = \mathrm{e}$.

(b) [1´75 PUNTOS] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a).

EJERCICIO 3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} (m+2)x - y - z &=& 1 \\ -x - y + z &=& -1 \\ x + my - z &=& m \end{array}\right\}$$

(a) [1´75 PUNTOS] Discútelo según los valores de *m*.

(b) [0´75 PUNTOS] Resuélvelo para el caso $m = 1$.

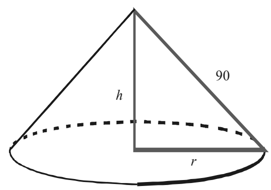
EJERCICIO 4. Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(2, 1, 2)$ y $D(t, -2, 2)$

(a) [1´25 PUNTOS] Determina el valor de t para que *A*, *B*, *C* y *D* estén en el mismo plano.

(b) [1´25 PUNTOS] Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por *A* y *B* que contenga al punto *C*.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construyamos la función volumen, que es la que queremos hacer mínima:
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$
teniendo en cuenta, según el ejercicio y el dibujo situado al lado, que: $r^2 + h^2 = 90^2 \Rightarrow h = \sqrt{90^2 - r^2} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{90^2 - r^2}$

El dominio de la función, que se puede deducir lógicamente ya que el radio *r* no puede ser mayor que la hipotenusa, es el intervalo abierto (0, 90).

La función es continua y derivable en el citado dominio porque es el producto de una función polinómica, que lo es en todo $\mathbb{R}$, por la raíz cuadrada de otra función polinómica, que lo es para los valores del intervalo abierto $(-90, 90)$, luego *V(r)* es continua y derivable en su dominio (0, 90).

Para saber cuál es el máximo absoluto de la función, calcularemos en primer lugar los máximos relativos de la función, máximos que se encontrarán entre los puntos de derivada cero.

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{90^2 - r^2} \quad \Rightarrow \quad V'(r) = \frac{2}{3}\pi r\sqrt{90^2 - r^2} + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{-2r}{2\sqrt{90^2 - r^2}} \quad \Rightarrow$$

$$V'(r) = \frac{2}{3}\pi\, r\sqrt{90^2 - r^2} - \frac{1}{3}\pi \frac{r^3}{\sqrt{90^2 - r^2}} \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}\pi\, r\sqrt{90^2 - r^2} - \frac{1}{3}\pi \frac{r^3}{\sqrt{90^2 - r^2}} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\pi\, r\sqrt{90^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi \frac{r^3}{\sqrt{90^2 - r^2}} \;\Rightarrow\; 2r\sqrt{90^2 - r^2} = \frac{r^3}{\sqrt{90^2 - r^2}} \;\Rightarrow$$

$$2r\sqrt{90^2 - r^2}\cdot\sqrt{90^2 - r^2} = r^3 \;\Rightarrow\; 2r\left(90^2 - r^2\right) = r^3 \;\Rightarrow\; 2r\left(8100 - r^2\right) = r^3 \;\Rightarrow$$

$$16200r - 2r^3 - r^3 = 0 \;\Rightarrow\; 16200r - 3r^3 = 0 \;\Rightarrow\; r\left(16200 - 3r^2\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 0 \\ 16200 - 3r^2 = 0 \Rightarrow 3r^2 = 16200 \Rightarrow r = \pm\sqrt{5400} = \pm\sqrt{2^3\cdot 3^3\cdot 5^2} \;\Rightarrow\; r = \pm 30\sqrt{6} \end{cases}$$

Sólo nos interesa el $30\sqrt{6}$, ya que el 0 y el $-30\sqrt{6}$, no pertenecen al dominio de la función.

Construyamos los dos intervalos de monotonía siguientes, el $\left(0,\ 30\sqrt{6}\right)$ y el $\left(30\sqrt{6},\ 90\right)$.

Probemos valores intermedios de estos intervalos, por ejemplo, 1 y 80, en la 1ª derivada:

$$V'(1) = \frac{2\pi}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{90^2 - 1^2} - \frac{\pi}{3}\frac{1^3}{\sqrt{90^2 - 1^2}} \cong 59'99\,\pi > 0 \;\Rightarrow\; \text{creciente en } \left(0,\ 30\sqrt{6}\right)$$

$$V'(80) = \frac{2\pi}{3}\cdot 80\cdot\sqrt{90^2 - 80^2} - \frac{\pi}{3}\frac{80^3}{\sqrt{90^2 - 80^2}} \cong -1940'28\,\pi < 0 \;\Rightarrow\; \text{decreciente en } \left(30\sqrt{6},\ 90\right)$$

Como la función es continua y derivable en su dominio, en el punto $30\sqrt{6}$, hay un máximo relativo. Por otro lado, al ser el dominio un intervalo abierto, y teniendo en cuenta la monotonía, el máximo relativo es el máximo absoluto.

El valor de h, para este valor de $x = 30\sqrt{6}$, es:

$$h = \sqrt{90^2 - r^2} \;\Rightarrow\; h = \sqrt{90^2 - \left(30\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{8100 - 5400} = \sqrt{2700} = \sqrt{3^3\cdot 10^2} = 30\sqrt{3}$$

La longitud que ha de tener cada uno de los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo, son: $r = 30\sqrt{6}$ y $h = 30\sqrt{3}$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Dibujemos en primer lugar la gráfica de $f(x) = 2 - x^2$ que se corresponde con la de una parábola.

1.- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que se trata de una función polinómica definida en $\mathbb{R}$.

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{matrix} y = 2 - x^2 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow\; 0 = 2 - x^2 \;\Rightarrow\; 0 = (\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: $\mathrm{A}\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\mathrm{B}\left(\sqrt{2}, 0\right)$

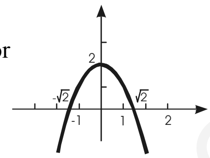
- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = 2 - x^2 \;\Rightarrow\; y = 2 - 0 = 2 \;\Rightarrow$ el punto es el (0, 2).

3.- El máximo se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-0}{-2} = 0$, siendo la ordenada:

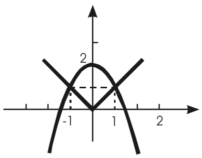
$y = 2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - 0 = 2$, por tanto, el máximo es el punto (0, 2).

La gráfica es la situada a la derecha.



Representemos ahora la gráfica $g(x) = |x|$, que es la función valor absoluto de x, y cuya expresión analítica es:

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



La gráfica de esta otra función, que se corresponde con las de las rectas bisectrices del segundo y primer cuadrante respectivamente, la hemos dibujado junto a la que ya teníamos representada, y se encuentra situada a la izquierda.

Para una mayor precisión y porque los necesitaremos en el apartado siguiente, calculemos los puntos de corte de la primera gráfica con cada uno de los trozos de la gráfica de $g(x)$:

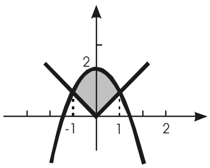
$$\left.\begin{array}{l} y = 2 - x^2 \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2 - x^2 = -x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Luego el punto de corte con el trozo, $y = -x$, es el $(-1, 1)$, ya que el valor de $x = 2$ no pertenece al dominio donde está definido este trozo.

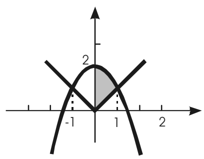
Veamos el punto de corte con el trozo, $y = x$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2 - x^2 = x \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Con el trozo, $y = x$, el punto que obtenemos es el (1, 1), ya que el valor de $x = -2$ no pertenece al dominio donde está definido este trozo.



(b) El recinto limitado por ambas gráficas se corresponde con la zona sombreada en la gráfica situada a la izquierda.



Para calcular el área del recinto anterior, calcularemos el de este otro recinto, situado a la derecha, y el resultado lo multiplicamos por dos, ya que ambas gráficas son simétricas respecto del eje de ordenadas.

$$\int_0^1 (2 - x^2 - x)dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{12 - 2 - 3}{6} = \frac{7}{6}$$

El área será: $\frac{7}{6} \cdot 2 = \frac{7}{3}\ u^2$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Comprobemos que se verifica que $2A - A^2 = I$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5\cdot 5-4\cdot 2+2\cdot(-4) & 5\cdot(-4)-4\cdot(-1)+2\cdot 4 & 5\cdot 2-4\cdot 1+2\cdot(-1) \\ 2\cdot 5-1\cdot 2+1\cdot(-4) & 2\cdot(-4)-1\cdot(-1)+1\cdot 4 & 2\cdot 2-1\cdot 1+1\cdot(-1) \\ (-4)\cdot 5+4\cdot 2-1\cdot(-4) & (-4)\cdot(-4)+4\cdot(-1)-1\cdot 4 & (-4)\cdot 2+4\cdot 1-1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

llegamos a una identidad por lo que es cierta la igualdad la igualdad inicial.

(**b**) Sabemos que una matriz cuadrada A tiene matriz inversa B, si se verifica que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

y a la matriz inversa B la denotamos mediante A^{-1}.

Partiendo de la igualdad, $2A - A^2 = I$, saquemos A factor común primero por la derecha y luego por la izquierda.

$$(2I - A)A = I \qquad ; \qquad A(2I - A) = I$$

podemos observar que la matriz inversa de A es la matriz $A^{-1} = 2I - A$.

Obtengamos la matriz inversa de A, la matriz A^{-1}, mediante esta última expresión.

$$A^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Calculemos los puntos de corte del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con cada uno de los ejes coordenados.

Con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 3y + 2z = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x + 0 + 0 = 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P(1,\ 0,\ 0)$$

Con el eje OY.

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 3y + 2z = 6 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 3y + 0 = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow Q(0,\ 2,\ 0)$$

Con el eje OZ.

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 3y + 2z = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 0 + 2z = 6 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow R(0,\ 0,\ 3)$$

Para calcular el área del triángulo PQR, obtengamos antes las coordenadas de los vectores, $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$.

$$\vec{PQ} = (0,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 2,\ 0) \qquad ; \qquad \vec{PR} = (0,\ 0,\ 3) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 0,\ 3)$$

$$\text{Área } \overset{\Delta}{PQR} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|(-1,\ 2,\ 0)\times(-1,\ 0,\ 3)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|(6,\ 3,\ 2)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49} = \frac{7}{2}\,u^2.$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Asíntotas Verticales.

Para que exista asíntota vertical, $x = x_0$, se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = -1$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical: } x = 1.$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{(-1)^3}{(-1)^2-1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical: } x = -1.$$

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal, $y = b$, se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{2} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{No existe asíntota horizontal.}$$

La indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ se han destruido utilizando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x = c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En este caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones *f(x)* y *g(x)* son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, por ser polinómicas.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = mx + n$. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\mathrm{m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x\,(x^2-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$

Calculemos ahora n:

$$\mathrm{n}=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-\mathrm{m}x\big)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x\,(x^2-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

La asíntota oblicua es: $y=x$.

En las funciones racionales, si hay asíntota oblicua para $x\to+\infty$, también la habrá para $x\to-\infty$, siendo además la misma.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to1^-\\x<1}}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1^3}{(1^-)^2-1}=\frac{1}{-0}=-\infty\\[2ex]\displaystyle\lim_{\substack{x\to1^+\\x>1}}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1^3}{(1^+)^2-1}=\frac{1}{+0}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 1 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x=-1$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1^-\\x<-1}}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{(-1)^3}{(-1^-)^2-1}=\frac{-1}{+0}=-\infty\\[2ex]\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1^+\\x>-1}}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{(-1)^3}{(-1^+)^2-1}=\frac{-1}{-0}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a -1 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota oblicua $y=x$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x=1000$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}f(1000)\;=\dfrac{1000^3}{1000^2-1}=1000'001\\[1ex]y_{\text{asíntota}}\;=1000\end{array}\right\}\Rightarrow\quad f(1000)>y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to+\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x=-1000$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}f(-1000)\;=\dfrac{(-1000)^3}{(-1000)^2-1}=-1000.001\\[1ex]y_{\text{asíntota}}\;=-1000\end{array}\right\}\Rightarrow\quad f(-1000)<y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to-\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

Calculemos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con la asíntota oblicua.

$$\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{x^3}{x^2-1}\\[1ex]y=x\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\frac{x^3}{x^2-1}=x\;\Rightarrow\;x^3=x^3-x\;\Rightarrow\;x^3-x^3+x=0\;\Rightarrow\;x=0\;\Rightarrow\;(0,\,0)$$

luego hay un punto de corte el (0, 0), es decir, el origen de coordenadas.

(b) Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Hallemos los valores que anulen a la función primera derivada de $f(x)$.

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}\;\Rightarrow\;f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot2x}{(x^2-1)^2}\;\Rightarrow\;f'(x)=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}\;\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 & \Rightarrow x=0 \\ x^2-3=0 & \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Hemos obtenido tres valores que anulan a la función primera derivada. Para construir los intervalos de monotonía tendremos en cuenta además de los puntos anteriores los puntos de no continuidad y los de no derivabilidad, que en este caso no hay ninguno ya que la función es continua y derivable en su dominio, así como los puntos donde la función no existe que son el 1 y el -1. Ordenamos todos estos puntos y construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty,\ -\sqrt{3}),\ (-\sqrt{3},\ -1),\ (-1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ \sqrt{3}),\ (\sqrt{3},\ +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -2, -1´5, -0´5, 0´5, 1´5 y 2 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-2)=\dfrac{(-2)^4-3(-2)^2}{((-2)^2-1)^2}=\dfrac{4}{9}>0 & \Rightarrow \text{Estrictamente creciente en } (-\infty,\ -\sqrt{3}) \\ f'(-1'5)=\dfrac{(-1'5)^4-3(-1'5)^2}{((-1'5)^2-1)^2}=-\dfrac{27}{25}<0 & \Rightarrow \text{Estrictamente decreciente en } (-\sqrt{3},\ -1) \\ f'(-0'5)=\dfrac{(-0'5)^4-3(-0'5)^2}{((-0'5)^2-1)^2}=-\dfrac{11}{9}<0 & \Rightarrow \text{Estrictamente decreciente en } (-1,\ 0) \\ f'(0'5)=\dfrac{0'5^4-3\cdot 0'5^2}{(0'5^2-1)^2}=-\dfrac{11}{9}<0 & \Rightarrow \text{Estrictamente decreciente en } (0,\ 1) \\ f'(1'5)=\dfrac{1'5^4-3\cdot 1'5^2}{1'5^2}=-\dfrac{27}{25}<0 & \Rightarrow \text{Estrictamente decreciente en } (1,\ \sqrt{3}) \\ f'(2)=\dfrac{2^4-3\cdot 2^2}{(2^2-1)^2}=\dfrac{4}{9}>0 & \Rightarrow \text{Estrictamente creciente en } (\sqrt{3},\ +\infty) \end{cases}$$

(c) Con los datos de los apartados anteriores deducimos que existen extremos relativos en los puntos $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$, y un punto de inflexión en 0. Calculemos las ordenadas de estos puntos.

En $x=-\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3})=\dfrac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ Máximo relativo

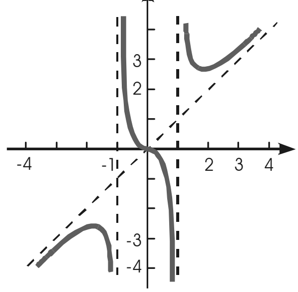
En $x=0 \Rightarrow f(0)=\dfrac{0^3}{0^2-1}=0 \Rightarrow$

$(0, 0)$ Punto de Inflexión

En $x=\sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3})=\dfrac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ Mínimo relativo

Finalmente, la gráfica de la función *f(x)* es la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = e$ y comprobemos si obtenemos la misma que nos dice el ejercicio.

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(e) = -\frac{1}{f'(e)}(x - e)$$

Calculemos $f(e)$ y $f'(e)$.

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f(e) = \ln(e) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(e) = \frac{1}{e}$$

La ecuación de la recta normal será:

$$y - 1 = -\frac{1}{\frac{1}{e}}(x - e) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -ex + e^2 \quad \Rightarrow \quad y = -ex + 1 + e^2$$

que es la misma que nos dice el ejercicio.

(b) La gráfica de la función *f* es la gráfica de la función elemental logaritmo neperiano de *x*.

La recta normal en el punto $x = e$, es una función afín por lo que su gráfica es una recta que no pasa por el origen. Para representarla necesitamos dos puntos, uno de ellos es el de tangencia, el $(e,\ 1)$, obtenido en el apartado anterior, y otro puede ser el de corte con el eje de ordenadas o con el del eje de abscisas.

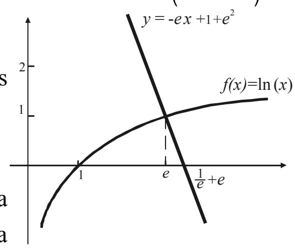
- Punto de corte con el eje de abscisas.

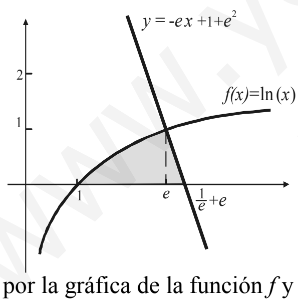
Resolveremos el sistema formado por la ecuación de la recta normal y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -ex + 1 + e^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -ex + 1 + e^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -ex = -1 - e^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{e} + e \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{e} + e,\ 0\right)$$

luego el punto de corte con el eje de abscisas es el $\left(\frac{1}{e} + e,\ 0\right)$.

Las gráficas de *f* y la de la recta normal se encuentran situadas al lado.





(b) El recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta normal es el sombreado y situado a la izquierda.

Calculemos su área.

El área de dicho recinto es el área del triángulo de base $\left(\frac{1}{e} + e\right) - e$, es decir, de base $1/e$ y altura 1, más el área limitada por la gráfica de la función *f* y las ordenadas en las abscisas $x = 1$ y $x = e$.

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\frac{1}{e} \cdot 1}{2} = \frac{1}{2e}$$

El área limitada por la gráfica de *f* y las ordenadas en las abscisas $x = 1$ y $x = e$ es:

$$\text{Área}_1 = \int_1^e \ln(x)\,dx = \qquad [1]$$

Se trata de una integral por partes.

$$u = \ln(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

Continuando desde [1], tendremos

$$= \left[x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx = \left[x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e dx = \left[x\ln(x)\right]_1^e - [x]_1^e =$$
$$= e\cdot\ln(e) - 1\cdot\ln(1) - (e-1) = e - 0 - e + 1 = 1$$

luego el área del recinto que nos pide el ejercicio será la suma de esta última área y la del triángulo, es decir:

$$\text{Área} = 1 + \frac{1}{2e} \text{ unidades de área}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual expresaremos el sistema en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{r} (m+2)x - y - z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ x + my - z = m \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} m+2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 & m \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 1ª y 3ª

$$\begin{array}{cccc} (z) & (y) & (x) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & m+2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & m & 1 & m \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{array}{cccc} (z) & (y) & (x) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & m+2 & 1 \\ 0 & -2 & m+1 & 0 \\ 0 & m+1 & -m-1 & m-1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + (m+1) · [2ªf.]

$$\begin{array}{cccc} (z) & (y) & (x) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & m+2 & 1 \\ 0 & -2 & m+1 & 0 \\ 0 & 0 & m^2-1 & 2m-2 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \;;\; m = -1$.

** m = 1 ⇒ la tercera ecuación sería: $(m^2 - 1)x = 2m - 2 \Rightarrow 0 = 2\cdot1 - 2 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

** m = -1 ⇒ la tercera ecuación sería: $(m^2 - 1)x = 2m - 2 \Rightarrow 0 = 2\cdot(-1) - 2 \Rightarrow 0 = -4 \Rightarrow$ se trata de una ecuación absurda por lo que el sistema que nos quedaría sería un sistema incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería una ecuación normal, es decir, todos los elementos de la diagonal principal serían distintos de cero, por lo que tendríamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvámoslo para m = 1. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferior que obtuvimos en el apartado anterior y suprimamos la última ecuación por ser trivial, tal como lo habíamos justificado.

$$\begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & m+2 & 1 \\ 0 & -2 & m+1 & 0 \\ 0 & 0 & m^2-1 & 2m-2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1+2 & 1 \\ 0 & -2 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Nos sobre una incógnita, la x, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (z) & (y) \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1-3x \\ 0 & -2 & -2x \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (z) & (y) \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 2-4x \\ 0 & -2 & -2x \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª y 2ª fila por 2.

$$\begin{array}{cc} (z) & (y) \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1-2x \\ 0 & -1 & -x \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada, la solución es:

$$-z = 1 - 2x \quad ; \quad -y = -x$$

Terminemos de despejar las incógnitas.

$$z = -1 + 2x \quad ; \quad y = x$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, x, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$, finalmente, la solución será: $x = \alpha \quad ; \quad y = \alpha \quad ; \quad z = -1 + 2\alpha$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Calculemos la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(2, 1, 2)$.

Primero obtendremos los 2 vectores de dirección del plano

$$\vec{AB} = (-1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (-2, 1, -1)$$

$$\vec{AC} = (2, 1, 2) - (1, 1, 1) = (1, 0, 1)$$

que evidentemente son linealmente independientes, ya que sus coordenadas no son proporcionales:

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$$

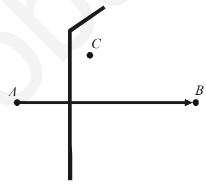
Las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto A y sus vectores de dirección son los anteriormente calculados es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha + \beta \end{cases}$$

Para determinar el valor de t que haga que el punto $D\,(t,\ -2,\ 2)$ pertenezca al plano π, sustituiremos sus coordenadas en la ecuación del plano, ya que las coordenadas de cualquier punto del plano han de satisfacer la ecuación del plano.

$$\begin{cases} t = 1 - 2\alpha + \beta \\ -2 = 1 + \alpha \\ 2 = 1 - \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - 2\alpha + \beta \\ -3 = \alpha \\ 2 = 1 - \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - 2\alpha + \beta \\ -3 = \alpha \\ 2 = 1 - (-3) + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - 2\alpha + \beta \\ -3 = \alpha \\ -2 = \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = 1 - 2\cdot(-3) + (-2) \\ -3 = \alpha \\ -2 = \beta \end{cases} \Rightarrow \quad t = 5 \quad \Rightarrow \quad D(5,\ -2,\ 2)$$



(b) La ecuación del plano que nos piden es la ecuación del plano que pasa por el punto $C(2,\ 1,\ 2)$ y perpendicular al segmento AB, luego el vector que determinan estos dos puntos, el vector $\vec{AB}$, es el vector normal al plano, $\vec{n}$.

Este vector $\vec{AB}$ ya lo hemos calculado en el apartado anterior, $\vec{AB}(-2,\ 1,\ -1)$.

Luego la ecuación de este plano en forma general o cartesiana será:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad [1]$$

Los coeficientes A, B y C, representan las coordenadas de un vector normal al plano, en nuestro caso $\vec{AB}(-2,\ 1,\ -1)$, por tanto, sustituyendo en [1]

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + y - z + D = 0 \qquad [2]$$

Impongamos a este plano que pase por el punto $C(2,\ 1,\ 2)$, sustituyamos sus coordenadas en la ecuación del plano.

$$-2x + y - z + D = 0 \ \Rightarrow \ -2\cdot 2 + 1 - 2 + D = 0 \ \Rightarrow D = 5$$

Sustituyendo este valor en [2] obtendremos, finalmente, la ecuación del plano pedido.

$$-2x + y - z + 5 = 0$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 69 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sea $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0) = 0$. (ln denota el logaritmo neperiano).

EJERCICIO 3. Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z = \;\;5 \\ 2x-3y+z = -4 \end{array}\right\}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x+y+\lambda z=9$ sea compatible indeterminado.
(b) [1 PUNTO]. ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 2, 4)$ y la recta r definida por

$$\frac{x+2}{2}=y-1=\frac{z-1}{3}$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y B.
(b) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene a los puntos A y B.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x^2+3x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$.
(b) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

[**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS]. Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.

EJERCICIO 3. Sean las matrices

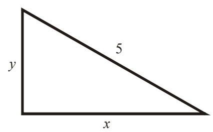
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) [0´5 PUNTOS]. Determina los valores de α para los que A tiene inversa.
(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula la inversa de A para $\alpha = 1$.
(c) [0´75 PUNTOS]. Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, -2, 2)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, -1, 2)$.
(a) [1 PUNTO]. Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
(b) [1´5 PUNTOS]. Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construyamos la función área de un triángulo rectángulo, que es la que me piden que sea máxima. Tomemos como variable independiente la base del triángulo.

$$A(x) = \frac{x \cdot y}{2} \qquad [1]$$

Busquemos la relación existente entre la x y la y, es decir, la condición que nos da el problema y es que la hipotenusa mide 5 metros; por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Despejemos y en función de la x:

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

Sustituyamos este valor de y en [1].

$$A(x) = \frac{x \cdot y}{2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{x\sqrt{25 - x^2}}{2}$$

Calculemos el dominio de esa función. De entrada, los valores de x tendrán que ser mayores que cero, es decir, estrictamente positivos. Pero como los valores que puede tomar y son también mayores que cero, observando la relación entre x e y, deducimos que el mayor valor que puede tomar x es menor que 5.

En definitiva, el dominio de $A(x)$ serán los valores del intervalo (0, 5).

La función es continua y derivable en este dominio, ya que se trata del producto de una función polinómica, x, que lo es en todo $\mathbb{R}$, por la raíz cuadrada de otra función polinómica que lo es en el intervalo (0, 5) por lo que el producto de ambas lo será en (0, 5).

Calculemos el máximo relativo o local. Obtengamos la función primera derivada.

$$A(x)=\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad A'(x)=\frac{\sqrt{25-x^2}+x\,\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$A'(x)=\frac{\sqrt{25-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}}{2} \quad \Rightarrow \quad A'(x)=\frac{\dfrac{25-x^2-x^2}{\sqrt{25-x^2}}}{2} \quad \Rightarrow \quad A'(x)=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada.

$$\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}=0 \;\Rightarrow\; 25-2x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{25}{2}=12'5 \;\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{12'5} \\ x=-\sqrt{12'5} \end{cases}$$

Hemos obtenido dos valores pero sólo el $\sqrt{12'5}$ pertenece al dominio de la función $A(x)$. Comprobemos que este valor que anula a la primera derivada y que pertenece al dominio es el máximo relativo y también el absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: el $\left(0,\ \sqrt{12'5}\right)$ y el $\left(\sqrt{12'5},\ 5\right)$.

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 1 y 4, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$A'(x)=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}} \;\Rightarrow\; A'(1)=\frac{25-2\cdot 1^2}{2\sqrt{25-1^2}}=\frac{23}{2\sqrt{24}}>0 \quad \Rightarrow \text{ Creciente en } \left(0,\ \sqrt{12'5}\right)$$

$$A'(x)=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}} \;\Rightarrow\; A'(4)=\frac{25-2\cdot 4^2}{2\sqrt{25-4^2}}=\frac{-7}{6}<0 \quad \Rightarrow \text{ Decreciente en } \left(\sqrt{12'5},\ 5\right)$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es el máximo relativo sino también máximo absoluto. En definitiva el cateto de la base que da lugar al triángulo rectángulo de área máxima es el de $\sqrt{12'5}$ metros.

El cateto altura correspondiente a esta área máxima mide:

$$y=\sqrt{25-x^2} \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{25-(\sqrt{12'5})^2}=\sqrt{25-12'5}=\sqrt{12'5} \text{ metros.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calcularemos, en primer lugar, la integral indefinida $\int \ln(x+2)\,dx$ mediante el método de la integración por partes.

$$u = \ln(x+2) \qquad du = \frac{1}{x+2}\,dx$$
$$dv = dx \qquad v = \int dx = x$$

$$F(x) = \int \ln(x+2)\,dx = x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}\,dx = \qquad [1]$$

Hemos obtenido una integral racional impropia, por lo que efectuamos la división.

$$\begin{array}{l|l} x & x+2 \\ \hline -x-2 & 1 \\ \hline -2 & \end{array}$$

Continuando desde [1], y teniendo en cuenta esta división:

$$= x\ln(x+2) - \int\left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx = x\ln(x+2) - \int dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx = x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) + C$$

Calculemos ahora la primitiva F de f que verifique $F(0)=0$.

$$F(x) = x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) + C \;\Rightarrow\; F(0) = 0\cdot\ln(0+2) - 0 + 2\ln(0+2) + C \;\Rightarrow$$
$$0 = 2\ln(2) + C \;\Rightarrow\; C = -2\ln(2)$$

Por lo que la primitiva que pide el ejercicio es:

$$F(x) = x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) - 2\ln(2)$$

o lo que es lo mismo

$$F(x) = (x+2)\,\ln(x+2) - x - 2\ln(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Al añadirle la tercera ecuación el sistema será.

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 5 \\ 2x - 3y + z &= -4 \\ x + y + \lambda z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema anterior en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda & 9 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -22 \\ 0 & 5 & 3\lambda - 1 & 22 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 3\lambda & 0 \end{array}\right)$$

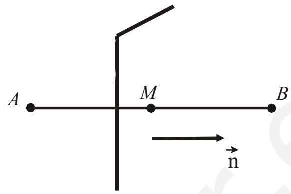
El sistema está triangulado inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ la 3ª ecuación es, 0 = 0, que es trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 3\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow$ la 3ª ecuación sería una ecuación normal y el sistema sería un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Según el apartado anterior no existe ningún valor de λ para el cual el sistema resultante no tenga solución, es decir, el sistema siempre es compatible para cualquier valor de λ.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) El plano formado por los puntos que equidistan de *A* y *B* es el plano mediador del segmento *AB*, es decir, el plano perpendicular a dicho segmento en su punto medio.

Calculemos, en primer lugar, el punto medio del segmento *AB*, el punto *M* de coordenadas (*a*, *b*, *c*).

$$\vec{AM} = \vec{MB}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AM} = (a,\ b,\ c) - (1,\ 0,\ 2) = (a-1,\ b,\ c-2) \\ \vec{MB} = (-1,\ 2,\ 4) - (a,\ b,\ c) = (-1-a,\ 2-b,\ 4-c)\end{array}\right\} \Rightarrow\ (a-1,\ b,\ c-2) = (-1-a,\ 2-b,\ 4-c)\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-1 = -1-a \\ b = 2-b \\ c-2 = 4-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 2b = 2 \\ 2c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow\quad M(0,\ 1,\ 3)$$

Un vector normal al plano que nos piden, puede ser el vector que determinan los puntos *A* y *B* ya que el plano es perpendicular al segmento *AB*.

$$\vec{n} = \vec{AB} = (-1,\ 2,\ 4) - (1,\ 0,\ 2) = (-2,\ 2,\ 2)$$

La ecuación del plano en forma general, será: $Ax + By + Cz + D = 0$

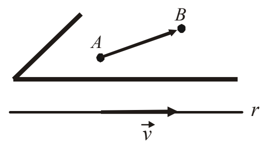
Los coeficientes A, B y C representan las coordenadas de un vector normal al plano, es decir:

$$-2x + 2y + 2z + D = 0$$

Impongamos, finalmente, la condición al plano de pasar por el punto *M* (0, 1, 3):

$$-2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 + D = 0\ \Rightarrow\ 2 + 6 + D = 0\ \Rightarrow\ D = -8$$

La ecuación del plano será: $-2x + 2y + 2z - 8 = 0$



(b) La ecuación del plano será la ecuación del plano que pasa por el punto, por ejemplo, el *B*(-1, 2, 4); y los vectores de dirección serían, uno el $\vec{AB}(-2, 2, 2)$ y el otro, el de dirección de la recta, el (2, 1, 3) ya que la recta *r* es paralela al plano.

Comprobemos previamente que estos dos vectores tiene distinta dirección, es decir, que sus coordenadas no son proporcionales:

$$\frac{-2}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{2}{3}$$

La ecuación del plano será:

$$\begin{cases} x = -1 - 2\lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 4 + 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para determinar los puntos de la gráfica de *f* en los que la recta tangente sea paralela a la recta $x-2y+1=0$, deberemos calcular aquellos puntos de la gráfica en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la de esta recta, es decir, los puntos en los que la derivada de la función en ellos coincide con dicha pendiente.

La pendiente de esta recta será:

$$x-2y+1=0 \;\Rightarrow\; 2y=x+1 \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; m=\frac{1}{2}$$

La derivada de la función *f* es:

$$f(x)=\ln(x^2+3x) \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x}$$

Igualemos esta derivada al valor de la pendiente de la recta para calcular las abscisas de los puntos de la gráfica de *f* en los que recta tangente tiene la misma pendiente que la recta.

$$\frac{2x+3}{x^2+3x}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 4x+6=x^2+3x \;\Rightarrow\; x^2+3x-4x-6=0 \;\Rightarrow\; x^2-x-6=0 \;\Rightarrow$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}3\\-2\end{cases}$$

Hemos obtenido sólo un valor el 3, porque el -2 no pertenece al dominio de la función *f*.

El punto de la gráfica de *f* será:

$$f(x)=\ln(x^2+3x) \;\Rightarrow\; f(3)=\ln(3^2+3\cdot 3) \;\Rightarrow\; f(3)=\ln(18) \;\Rightarrow\; (3,\ln(18))$$

(b) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 3.

Tendremos en cuenta que este punto es el obtenido en el apartado anterior y tenía de ordenada ln(18). También tendremos en cuenta que la derivada de la función en este punto 3 coincide con la pendiente de la recta tangente que a su vez coincidía con el de la recta que nos daba el problema, es decir, $\frac{1}{2}$.

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \;\Rightarrow\; y-f(3)=f'(3)(x-3) \;\Rightarrow\; y-\ln(18)=\frac{1}{2}(x-3) \;\Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}+\ln(18)$$

Obtengamos ahora la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en el mismo punto.

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \;\Rightarrow\; y-f(3)=-\frac{1}{f'(3)}(x-3) \;\Rightarrow$$

$$y-\ln(18)=-\frac{1}{\frac{1}{2}}(x-3) \;\Rightarrow\; y-\ln(18)=-2(x-3) \;\Rightarrow\; y=-2x+6+\ln(18)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

La curva $y=x^2+ax$, $(a>0)$ es una parábola que presenta un mínimo. Representémosla.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + a\,x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = x^2 + a\,x \quad \Rightarrow \quad 0 = x(x+a) \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -a \end{cases}$$

luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: A(0, 0) y B($-a$, 0)

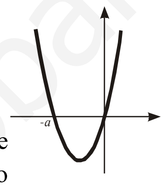
2.- Punto de corte con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = x^2 + ax \quad \Rightarrow \quad y = 0^2 + a \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow$ el punto es el (0, 0).

3.- El mínimo se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-a}{2}$, siendo la ordenada:

$$y = x^2 + a\,x \quad \Rightarrow \quad y = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \frac{-a}{2} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{4}$$

por tanto, el mínimo es el punto $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}\right)$.

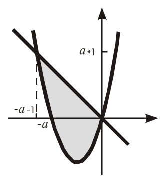


La gráfica es la situada al margen.

Representemos la recta $y + x = 0$, calculando previamente los puntos de corte que tiene con la parábola. Para lo cual resolveremos el sistema formado por la ecuación de la parábola, $y = x^2 + ax$, y la de la recta $y + x = 0$, es decir, $y = -x$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + a\,x \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2 + a\,x = -x \quad \Rightarrow \quad x^2 + a\,x + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x + a + 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -a - 1 \end{cases}$$



luego los puntos de corte son el $(0,\ 0)$ y el $(-a-1,\ a+1)$.

El recinto limitado por ambas gráficas es el que se encuentra sombreado y situado al lado.

El área de este recinto será la integral definida de la función diferencia, $h(x) = -x - (x^2 + a\,x)$ entre los puntos $-a-1$ y 0, y que según el problema vale 36 unidades cuadradas, es decir:

$$\int_{-a-1}^{0} \left(-x - x^2 - ax\right) dx = 36 \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-a-1}^{0} \left(-x - x^2 - ax\right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{a\,x^2}{2}\right]_{-a-1}^{0} = \left[\frac{(-a-1)x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-a-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left(\frac{(-a-1)(-a-1)^2}{2} - \frac{(-a-1)^3}{3}\right) = -\left(\frac{(-a-1)^3}{2} - \frac{(-a-1)^3}{3}\right) = -\frac{3(-a-1)^3 - 2(-a-1)^3}{6} =$$

$$= -\frac{(-a-1)^3}{6} = -\frac{-(a+1)^3}{6} = \frac{(a+1)^3}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{(a+1)^3}{6} = 36 \quad \Rightarrow \quad (a+1)^3 = 36 \cdot 6 \quad \Rightarrow$$

$$(a+1)^3 = 6^3 \quad \Rightarrow \quad a + 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 5$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Determinemos los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - $\alpha \cdot$ [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha & 3-3\alpha & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-2\alpha & 3-3\alpha & -\alpha & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot$ [3ªf.] - $(1 - 2\alpha) \cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2-7\alpha+6 & -2\alpha & 2 & 2\alpha-1 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente y no hay ninguna fila de ceros, salvo la 3ª en la que a_{33} puede ser o no cero. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 7\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2} = \dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{4} = \dfrac{7\pm 1}{4} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Para estos dos valores de α, 2 y $\frac{3}{2}$, la matriz A no tendría inversa, pues al triangular obtendríamos una fila de ceros.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 7\alpha + 6 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 2$ y $\alpha \neq \frac{3}{2}$, para todos estos valores de α distintos de 2 y de $\frac{3}{2}$, la matriz A tendría inversa.

(b) Calculemos la inversa de A para el valor de $\alpha = 1$. Sustituyamos este valor en la matriz triangulada inferior obtenida en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2-7\alpha+6 & -2\alpha & 2 & 2\alpha-1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\cdot 1^2-7\cdot 1+6 & -2\cdot 1 & 2 & 2\cdot 1-1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - $3 \cdot$ [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 7 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz A, la matriz A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Resolvamos para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.

Según el apartado (a), la matriz A tiene inversa para $\alpha = 1$, y en el apartado (b) hemos calculado la matriz inversa de A para ese valor de α, por lo que podemos multiplicar la expresión anterior por la matriz A^{-1} por la izquierda.

$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} AX = A^{-1} B \quad \Rightarrow$ por la propiedad asociativa

$(A^{-1} A)\, X = A^{-1} B \quad \Rightarrow \quad I\, X = A^{-1} B \quad \Rightarrow$ por la existencia de matriz identidad

$X = A^{-1} B$

Calculemos ahora la matriz X.

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-2) - 4\cdot 3 - 3\cdot 4 \\ 1\cdot(-2) - 1\cdot 3 + 0\cdot 4 \\ -2\cdot(-2) + 2\cdot 3 + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Calculemos el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D. Previamente obtendremos los vectores siguientes:

$$\vec{AB} = (0,\ -2,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (-1,\ -3,\ 1)$$

$$\vec{AC} = (-1,\ 0,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (-2,\ -1,\ 1)$$

$$\vec{AD} = (2,\ -1,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ -2,\ 1)$$

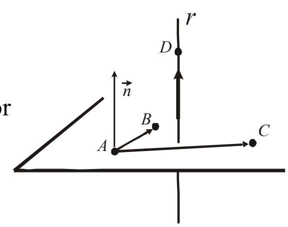
El volumen será un sexto del producto mixto de estos tres vectores, en valor absoluto:

$$V = \left|\frac{1}{6}\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{6}\,(1 + 4 - 3 - (-1 + 2 + 6))\right| = \left|\frac{1}{6}(2 - 7)\right| = \left|-\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6}$$

(b) El vector de dirección de la recta r coincidirá con el vector normal al plano, que lo calculamos mediante el producto vectorial de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$

$$\vec{v}_r = \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-1,\ -3,\ 1) \times (-2,\ -1,\ 1) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2,\ -1,\ -5)$$



La ecuación de la recta r que pasa por $D(2, -1, 2)$ y su vector de dirección es $(-2, -1, -5)$ será:

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-5}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 70 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} e^x(x^2+ax) & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$ tiene pendiente 3.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{3}{x^2-5x+4}$ para $x\ne 1$ y $x\ne 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas, y las rectas $x=2, x=3$.

EJERCICIO 3. Considera las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

(a) [0´75 PUNTOS]. Calcula A^{-1}.

(b) [1´75 PUNTOS]. Resuelve la ecuación matricial $A\,X\,A^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por A.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$.
Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x= -5 y en el punto de abscisa x=2.

EJERCICIO 2. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|2-x|$.

(a) [1 PUNTO]. Esboza su gráfica.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta de ecuación x=3.

EJERCICIO 3. Obtén un vector no nulo $v = (a, b, c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. Considera el plano π definido por $2x - y + nz = 0$ y la recta r dada por

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la función *f(x)* es derivable en $\mathbb{R}$ es que es continua también en $\mathbb{R}$, ya que la derivabilidad implica continuidad.

Estudiemos la continuidad.

Para valores de $x < 0$, el trozo de función f definido en este intervalo es el producto de una función exponencial elemental que es continua en $\mathbb{R}$ y de una función polinómica que también lo es en $\mathbb{R}$, luego el producto de ambas sigue siendo una función continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto la función es continua en este trozo, es decir, para valores de $x < 0$.

Para valores de $x > 0$, el trozo de función definido en este otro intervalo es el de una función racional, que es continua en todo $\mathbb{R}$ menos para el valor que anula al denominador, que es el -1, pero este valor no pertenece a este dominio, luego la función es continua en este trozo, es decir, para valores de $x > 0$.

Estudiemos ahora la continuidad en el punto 0, pero como también es continua, según el problema, se ha de verificar que el valor de la función en dicho punto debe coincidir con los límites laterales de la función en el citado punto, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} e^x\left(x^2+ax\right) = e^0\left(0^2+a\cdot 0\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \dfrac{bx^2+c}{x+1} = \dfrac{b\cdot 0^2+c}{0+1} = c \\ f(0) = e^0\left(0^2+a\cdot 0\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \\ 0 = c \end{array}\right. \qquad [1]$$

Hemos obtenido un valor para la constante c.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Para valores de $x < 0$, el trozo de función f definido en este intervalo es el producto de una función exponencial elemental que es derivable en $\mathbb{R}$ y de una función polinómica que también lo es en $\mathbb{R}$, luego el producto de ambas sigue siendo una función derivable en todo $\mathbb{R}$, por tanto la función es derivable en este trozo, es decir, para valores de $x<0$, siendo la derivada, $e^x\left(x^2+ax\right)+e^x(2x+a)$, o lo que es lo mismo, $e^x\left(x^2+ax+2x+a\right)$.

Para valores de $x > 0$, el trozo de función definido en este otro intervalo es el de una función racional, que es derivable en todo $\mathbb{R}$ menos para el valor que anula al denominador, que es el -1, pero este valor no pertenece a este dominio, luego la función es derivable en este trozo, es decir, para valores de $x > 0$, siendo la derivada, $\dfrac{2b\,x(x+1)-\left(bx^2+c\right)}{(x+1)^2}$, o lo que es lo mismo, $\dfrac{2bx(x+1)-bx^2-c}{(x+1)^2} = \dfrac{2bx^2+2bx-bx^2-c}{(x+1)^2} = \dfrac{bx^2+2bx-c}{(x+1)^2}$.

Una primera aproximación de la función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x\left(x^2+ax+2x+a\right) & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{bx^2+2bx-c}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en el punto 0, pero como también es derivable, según el problema, se ha de verificar que (siendo ya continua) las derivadas laterales de la función en dicho punto deben coincidir, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)^- = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<-0}} e^x\left(x^2+ax+2x+a\right) = e^0\left(0^2+a\cdot 0+2\cdot 0+a\right) = a \\ f'(0)^+ = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \dfrac{bx^2+2bx-c}{(x+1)^2} = \dfrac{b\cdot 0^2+2b\cdot 0-c}{(0+1)^2} = -c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0)^- = f'(0)^+ \Rightarrow \\ a = -c \end{array}\right. \qquad [2]$$

Hemos obtenido una condición que relaciona dos de las constantes que hay que calcular, pero teniendo en cuenta [1], donde sabemos que $c = 0$, deducimos que $a = 0$.

La función derivada, con los valores ya obtenidos quedaría así:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x\left(x^2+2x\right) & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{bx^2+2bx}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Por último, para calcular b, tendremos en cuenta que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3.

Esto significa que la derivada de la función en el punto 1, es 3: $f'(1) = 3$.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2+2x) & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{bx^2+2bx}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \frac{b\cdot 1^2 + 2b\cdot 1}{(1+1)^2} \Rightarrow 3 = \frac{b+2b}{4} \Rightarrow 3 = \frac{3b}{4} \Rightarrow b = 4$$

Luego, $a = 0, b = 4$ y $c = 0$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Dibujemos en primer lugar la gráfica de $f(x)$.

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2} = \dfrac{5\pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Veámoslo.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3}{x^2-5x+4} = \frac{3}{1^2 - 5\cdot 1 + 4} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{3}{x^2-5x+4} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

luego hay dos asíntotas verticales, $x=1$ y $x=4$. Estudiemos la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a cada una de estas asíntotas.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} \dfrac{3}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} \dfrac{3}{(x-1)(x-4)} = \dfrac{3}{(1^- - 1)(1^- - 4)} = \dfrac{3}{(-0)\cdot(-3)} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \dfrac{3}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \dfrac{3}{(1^+ - 1)(1^+ - 4)} = \dfrac{3}{(1^+ - 1)(1^+ - 4)} = \dfrac{3}{(+0)\cdot(-3)} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 1 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 4^- \\ x<4}} \dfrac{3}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{\substack{x\to 4^- \\ x<4}} \dfrac{3}{(x-1)(x-4)} = \dfrac{3}{(4^- - 1)(4^- - 4)} = \dfrac{3}{(3)(0^-)} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 4^+ \\ x>4}} \dfrac{9x-3}{x^2-2x} = \lim\limits_{\substack{x\to 4^+ \\ x>4}} \dfrac{3}{(x-1)(x-4)} = \dfrac{3}{(4^+ - 1)(4^+ - 4)} = \dfrac{3}{(3)(0^+)} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 4 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3}{x^2-5x+4} = \left[\dfrac{3}{\infty}\right] = 0 \Rightarrow$ hay asíntota horizontal, $y=0$, cuando $x \to \pm\infty$.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 1000 \Rightarrow$

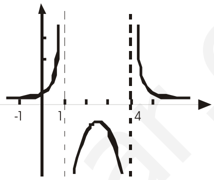
$$\left.\begin{array}{l} f(1000) = \dfrac{3}{1000^2 - 5\cdot 1000 + 4} = 0'00000301 \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000 \Rightarrow$

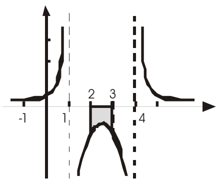
$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{3}{(-1000)^2 - 5\bullet(-1000)+4} = 0'000002985 \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to -\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.



Al haber asíntota horizontal por la derecha e izquierda, no hay asíntota oblicua.

La gráfica de la función $f(x)$ es la situada al lado.



El recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$, se corresponde con la zona sombreada en la gráfica situada a la izquierda.

El área de este recinto será:

$$\text{Área} = \left| \int_2^3 \frac{3}{x^2 - 5x + 4} dx \right|$$

Se trata de una integral racional propia. Calcularemos en primer lugar la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 - 5x + 4}\, dx$.

Descompondremos el integrando en una suma de fracciones elementales, teniendo en cuenta que las raíces del denominador son las ya calculadas, 1 y 4.

$$\frac{3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{A(x-4) + B(x-1)}{(x-1)(x-4)} \quad \Rightarrow$$

$$3 = A(x-4) + B(x-1) \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \;\Rightarrow\; 3 = A(1-4) + B(1-1) \;\Rightarrow\; A = -1 \\ x = 4 \;\Rightarrow\; 3 = A(4-4) + B(4-1) \;\Rightarrow\; B = 1 \end{cases}$$

La integral indefinida será:

$$\int \frac{3}{x^2 - 5x + 4}\, dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-4} \right) dx = -\int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{1}{x-4}\, dx = -\operatorname{Ln}|x-1| + \operatorname{Ln}|x-4|$$

Hemos obtenido la integral indefinida, por lo que la integral definida será:

$$\int_2^3 \frac{3}{x^2 - 5x + 4}\, dx = \Big[-\operatorname{Ln}|x-1| + \operatorname{Ln}|x-4| \Big]_2^3 =$$

$$= -\operatorname{Ln}|3-1| + \operatorname{Ln}|3-4| - \big(-\operatorname{Ln}|2-1| + \operatorname{Ln}|2-4| \big) =$$

$$= -\operatorname{Ln}(2) + \operatorname{Ln}(1) - \big(-\operatorname{Ln}(1) + \operatorname{Ln}(2) \big) = -\operatorname{Ln}(2) + 0 + 0 - \operatorname{Ln}(2) = -2\operatorname{Ln}(2)$$

El área del recinto será:

$$\text{Área} = \left| \int_2^3 \frac{3}{x^2 - 5x + 4} dx \right| = \left| -2\operatorname{Ln}(2) \right| = 2\operatorname{Ln}(2) \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos, si existe, la matriz inversa de A. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz identidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz identidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente y no hay ninguna fila de ceros, por lo que la matriz A tendrá inversa.
Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Multipliquemos la 1ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Resolvamos la ecuación matricial $A\,X\,A^t - B = 2I$, procederemos de la siguiente manera.

$A\,X\,A^t - B = 2I$ $\Rightarrow$ pasamos la matriz B al 2º miembro.

$A\,X\,A^t = 2I + B$ $\Rightarrow$ multiplicamos a la izquierda por la inversa de A.

$A^{-1}A\,X\,A^t = A^{-1}(2I+B)$ $\Rightarrow$ por la propiedad asociativa del producto de matrices.

$(A^{-1}\cdot A)\,X\,A^t = A^{-1}(2I+B)$ $\Rightarrow$ por la existencia de la matriz unidad.

$I\cdot X\,A^t = A^{-1}(2I+B)$ $\Rightarrow$ simplificando

$X\,A^t = A^{-1}(2I+B)$ $\Rightarrow$ multiplicamos a la derecha por la inversa de A^t.

$XA^t\cdot(A^t)^{-1} = A^{-1}(2I+B)\,(A^t)^{-1}$ $\Rightarrow$ por la propiedad asociativa del producto de matrices.

$X\,(A^t\cdot(A^t)^{-1}) = A^{-1}(2I+B)\,(A^t)^{-1}$ $\Rightarrow$ por la existencia de la matriz unidad.

$X\cdot I = A^{-1}(2I+B)(A^t)^{-1}$ $\Rightarrow$ simplificando

$X = A^{-1}(2I+B)\,(A^t)^{-1}$

Ahora sí podemos calcular la matriz X, sabiendo que $X = A^{-1}(2I+B)\,(A^t)^{-1}$. Pero antes hemos de calcular la inversa de la traspuesta de la matriz A, ya que la inversa de A la hemos calculado en el apartado anterior.

Una de las propiedades de las matrices dice que la inversa de la traspuesta de una matriz es igual a la traspuesta de la inversa de dicha matriz, es decir:

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$$

Por tanto, tendremos que:

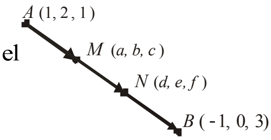
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la matriz X, que era $X = A^{-1}(2I+B)(A^t)^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Según el enunciado del problema y teniendo en cuenta el dibujo, tendremos: $\left.\begin{array}{l} 3\vec{AM}=\vec{AB} \\ 3\vec{NB}=\vec{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 3[(a,b,c)-(1,2,1)] = (-1,0,3)-(1,2,1) \\ 3[(-1,0,3)-(d,e,f)] = (-1,0,3)-(1,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3(a-1,\, b-2,\, c-1) = (-2,-2,2) \\ 3(-1-d,\, -e,\, 3-f) = (-2,-2,2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (3a-3,\, 3b-6,\, 3c-3) = (-2,-2,2) \\ (-3-3d,\, -3e,\, 9-3f) = (-2,-2,2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a-3=-2 \\ 3b-6=-2 \\ 3c-3=2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{4}{3} \\ c=\frac{5}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow M\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right) \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} -3-3d=-2 \\ -3e=-2 \\ 9-3f=2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=-\frac{1}{3} \\ e=\frac{2}{3} \\ f=\frac{7}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow N\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$$

(b) Hallemos la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.

El vector $\vec{AB}$ que hemos calculado en el apartado (a) tiene de coordenadas $(-2,-2,2)$ y podemos tomarlo como un vector normal al plano que nos pide el problema; sustituyamos las coordenadas de este vector por los coeficientes de las incógnitas en la ecuación general del plano:

$$Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow -2x-2y+2z+D=0$$

Impongamos ahora la condición a este plano de que pase por el punto $A(1,2,1)$:

$$-2x-2y+2z+D=0 \Rightarrow -2\cdot1-2\cdot2+2\cdot1+D=0 \Rightarrow D=4$$

La ecuación del plano que nos piden, finalmente es: $-2x-2y+2z+4=0$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa -5.

Necesitaremos calcular la ordenada de la función en este punto y el valor de la derivada de f en dicho punto.

$$f(x)=(x+1)\sqrt[3]{3-x} \Rightarrow f(x)=(x+1)(3-x)^{1/3} \Rightarrow f'(x)=(3-x)^{1/3}+(x+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot(3-x)^{-2/3}(-1)$$

$$f(x)=(x+1)\sqrt[3]{3-x} \Rightarrow f(-5)=(-5+1)\sqrt[3]{3-(-5)} \Rightarrow f(-5)=-4\cdot2=-8$$

$$f'(-5)=(3-(-5))^{1/3}+(-5+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot(3-(-5))^{-2/3}(-1) \Rightarrow f'(-5)=8^{1/3}+(-4)\cdot\frac{1}{3}\cdot8^{-2/3}(-1) \Rightarrow$$

$$f'(-5)=2+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} \;\Rightarrow\; f'(-5)=2+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; f'(-5)=2+\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; f'(-5)=\frac{7}{3}$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0) \;\Rightarrow\; y-f(-5)=f'(-5)\,(x-3) \;\Rightarrow\; y-(-8)=\frac{7}{3}\,(x-(-5)) \;\Rightarrow$$

$$y=\frac{7}{3}x+\frac{35}{3}-8 \;\Rightarrow\; y=\frac{7}{3}x+\frac{11}{3}$$

Obtengamos ahora la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en el mismo punto.

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\,(x-x_0) \;\Rightarrow\; y-f(-5)=-\frac{1}{f'(-5)}\,(x-3) \;\Rightarrow$$

$$y-(-8)=-\frac{1}{\frac{7}{3}}\,(x-(-5)) \;\Rightarrow\; y+8=-\frac{3}{7}(x+5) \;\Rightarrow\; y=-\frac{3}{7}x-\frac{15}{7}-8 \;\Rightarrow\; y=-\frac{3}{7}x-\frac{71}{7}$$

Calculemos ahora la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 2.

Necesitaremos calcular la ordenada de la función en este punto y el valor de la derivada de f en dicho punto.

$$f(x)=(x+1)\sqrt[3]{3-x} \;\Rightarrow\; f(x)=(x+1)(3-x)^{1/3} \;\Rightarrow\; f'(x)=(3-x)^{1/3}+(x+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot(3-x)^{-2/3}\,(-1)$$

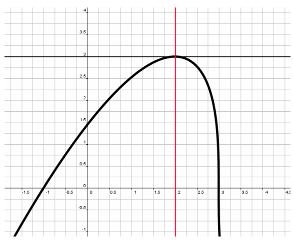
$$f(x)=(x+1)\sqrt[3]{3-x} \;\Rightarrow\; f(2)=(2+1)\sqrt[3]{3-2} \;\Rightarrow\; f(2)=3\cdot1=3$$

$$f'(2)=(3-2)^{1/3}+(2+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot(3-2)^{-2/3}\,(-1) \;\Rightarrow\; f'(2)=1-3\cdot\frac{1}{3}\cdot1=0$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0) \;\Rightarrow\; y-f(2)=f'(2)\,(x-3) \;\Rightarrow\; y-3=0\,(x-2) \;\Rightarrow\; y=3$$

Obtengamos ahora la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en el mismo punto.

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\,(x-x_0) \;\Rightarrow\; y-f(2)=-\frac{1}{f'(2)}\,(x-2)$$



Hemos de tener en cuenta que en este caso la recta tangente era una recta tangente horizontal, es decir, el punto 2 presenta un punto de tangencia horizontal por lo que la recta normal será paralela al eje de abscisas y su ecuación será $x=2$.

La situación está representada al lado, donde la recta normal es la dibujada en rojo.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Expresemos $f(x)$ como una función a trozos, teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto:

$$f(x)=x\left|2-x\right|=\begin{cases} x(-(2-x)) & \text{si} \quad 2-x<0 \\ x(2-x) & \text{si} \quad 2-x\geq 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases} -2x+x^2 & \text{si} \quad x>2 \\ 2x-x^2 & \text{si} \quad x\leq 2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^2-2x & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

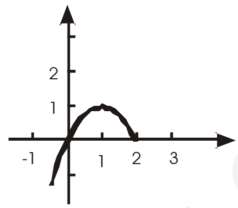
Dibujemos el primero de los trozos de la gráfica de esta función, el $y=-x^2+2x$, para los valores de $x \leq 2$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; (0, 0)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$y = 0 \;\Rightarrow\; -x^2 + 2x = 0 \;\Rightarrow\; x(-x+2) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \;\Rightarrow\; (0,\ 0) \\ x = 2 \;\Rightarrow\; (2,\ 0) \end{cases}$



3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2\cdot(-1)} = 1 \;\Rightarrow\; y = -1^2 + 2\cdot 1 = 1 \;\Rightarrow\; V(1, 1)$

La gráfica de este trozo de función está representado al lado.

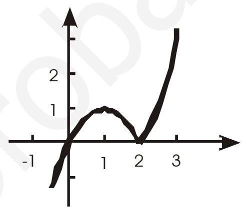
Dibujemos el segundo trozo de la gráfica de esta función, el $y = x^2 - 2x$, para los valores de $x > 2$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; (0, 0)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

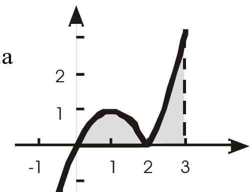
$y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-2) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \;\Rightarrow\; (0,\ 0) \\ x = 2 \;\Rightarrow\; (2,\ 0) \end{cases}$



3.- Coordenadas del vértice V:

$x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2\cdot 1} = 1 \;\Rightarrow\; y = 1^2 - 2\cdot 1 = -1 \;\Rightarrow\; V(1, -1)$

La gráfica de este otro trozo junto al anterior está representado al lado.



(b) El recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 3$, es el sombreado y situado al lado.

El área de este recinto será:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right)dx + \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = -\frac{2^3}{3} + \frac{2\cdot 2^2}{2} - \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{2\cdot 0^2}{2}\right) + \frac{3^3}{3} - \frac{2\cdot 3^2}{2} - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2\cdot 2^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 - 0 + 9 - 9 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{8}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3} \text{ unidades de área}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos el rango de las matrices A y B. Lo haremos triangulando inferiormente mediante el método de reducción de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & c-a \end{pmatrix}$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no, vemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow c - a = 0 \Rightarrow$ si se cumple o se verifica esta condición entonces el rango de esta matriz A es 2.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow c - a \neq 0 \Rightarrow$ si se cumple o se verifica esta condición entonces el rango de esta matriz A es 3.

Estudiemos ahora el rango de la matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot$ [3ªf.] - $3 \cdot$ [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 2 & 2c-3a \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + $2 \cdot$ [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 2c-3a+2b \end{pmatrix}$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no, vemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 2c - 3a + 2b = 0 \Rightarrow$ si se cumple o se verifica esta condición entonces el rango de esta matriz B es 2.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow c - a \neq 0 \Rightarrow$ si se cumple o se verifica esta condición entonces el rango de esta matriz B es 3.

Para que ambas matrices tengan de rango 2, se han de verificar simultáneamente las dos condiciones que hemos obtenido, es decir:

$$\left.\begin{array}{r} c - a = 0 \\ 2c - 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -a + c = 0 \\ -3a + 2b + 2c = 0 \end{array}\right\}$$

Resolveremos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - $3 \cdot$ [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la c que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -c \\ 0 & 2 & c \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$-a = -c \quad ; \quad 2b = c$$

Terminemos de despejar las incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = \frac{1}{2}c \end{array}\right\}$$

Como debemos obtener un vector no nulo $v = (a, b, c)$, una solución la podemos obtener dándole un valor a c distinto de cero, por ejemplo, el 2, la solución será:

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = \frac{1}{2}c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 2 \\ a = 2 \\ b = \frac{1}{2} \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 2 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v(2,\ 1,\ 2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) La condición para que la recta r sea perpendicular al plano π es que el vector de dirección de la recta y el normal al plano sean paralelos, es decir, que sus coordenadas sean proporcionales, por tanto:

$\pi \equiv 2x - y + nz = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\pi = (2, -1, n)$

$r \equiv \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_r = (m, 4, 2)$

$$\frac{2}{m} = \frac{-1}{4} = \frac{n}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{m} = \dfrac{-1}{4} \\ \dfrac{-1}{4} = \dfrac{n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m = 8 \\ 4n = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ n = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(b) Las condiciones para que la recta esté contenida en el plano, son que el vector de dirección de la recta y el normal al plano sean perpendiculares, y que un punto de la recta pertenezca al plano. Veámoslo

El vector de dirección de la recta y el normal al plano son perpendiculares, luego el producto escalar de ambos vectores ha de ser cero.

$$\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \bullet \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow (m, 4, 2) \bullet (2, -1, n) = 0 \Rightarrow 2m - 4 + 2n = 0 \Rightarrow m + n = 2 \quad [1]$$

Un punto de la recta r, el $(1, 0, 1)$, ha de pertenecer al plano, luego debe verificar la ecuación del mismo:

$2x - y + nz = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 - 0 + n \cdot 1 = 0 \Rightarrow n = -2$

Sustituyendo este valor en [1], obtendremos el valor de m:

$m + n = 2 \Rightarrow m - 2 = 2 \Rightarrow m = 4$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 71 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=a\,\mathrm{sen}(x)+bx^2+cx+d,$$

determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y que la segunda derivada de f es $f''(x)=3\,\mathrm{sen}(x)-10$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sea la función f dada por $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 0$. Determina la primitiva F de f tal que $F(1)=1$.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\lambda x+2y+6z=0\\ 2x+\lambda y+4z=2\\ 2x+\lambda y+6z=\lambda-2\end{array}\right\}$$

(a) [1´75 PUNTOS]. Discútelo según los valores del parámetro λ.

(b) [0´75 PUNTOS]. Resuélvelo para $\lambda=2$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla el punto simétrico de $P(1, 1, 1)$ respecto de la recta r de ecuación

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$$

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad 1\leq x \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de *f*.

EJERCICIO 2. Sean $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^2-2x+3$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2+1$.

(a) [1 PUNTO]. Esboza las gráficas de *f* y *g*, y halla su punto de corte.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

EJERCICIO 3. De la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que det(A) = 4. Se pide:

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas. (A^t es la matriz traspuesta de A).

(b) [0´75 PUNTOS]. Calcula $\det(A^{-1}A^t)$.

(c) [0´5 PUNTOS]. Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla det(B).

EJERCICIO 4. Sean los puntos $A(2, \lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, 2, 0)$ y $C(0, \lambda, \lambda-1)$.

(a) [1 PUNTO]. ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos A, B y C estén alineados? Justifica la respuesta.

(b) [1´5 PUNTOS]. Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Como la función $f(x)=a\,\text{sen}(x)+bx^2+cx+d,$ tiene tangente horizontal en el punto (0,4), se cumplirá que:

- $f(0) = 4$ por pertenecer el punto (0, 4) a la gráfica de la función *f*.
- $f'(0) = 0$ por ser el punto (0, 4) un punto de tangencia horizontal.

Apliquemos la primera condición:

$$f(x)=a\,\text{sen}(x)+bx^2+cx+d \;\Rightarrow\; f(0)=a\,\text{sen}(0)+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d \;\Rightarrow\; 4=d$$

La segunda de las condiciones implica lo siguiente:

$f(x) = a\,\mathrm{sen}(x) + bx^2 + cx + d \;\Rightarrow\; f'(x) = a\cos(x) + 2bx + c$

$f'(x) = a\cos(x) + 2bx + c \;\Rightarrow\; f'(0) = a\cos(0) + 2b\cdot 0 + c \;\Rightarrow\; 0 = a\cdot 1 + c \;\Rightarrow\; a + c = 0$

Además el ejercicio nos dice que la derivada segunda es:

$f''(x) = 3\,\mathrm{sen}(x) - 10.$

Obtengamos la segunda derivada de *f*.

$f'(x) = a\cos(x) + 2bx + c \;\Rightarrow\; f''(x) = -a\,\mathrm{sen}(x) + 2b$

Identificando esta segunda derivada con la que nos da el ejercicio, tendremos:

$$-a\,\mathrm{sen}(x) + 2b = 3\,\mathrm{sen}(x) - 10 \;\Rightarrow \begin{cases} -a = 3 & \Rightarrow\; a = -3 \\ 2b = -10 & \Rightarrow\; b = -5 \end{cases}$$

Terminemos de calcular *c*, sabiendo que $a + c = 0$ y que $a = -3$

$a + c = 0 \;\Rightarrow\; -3 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = 3$

Los valores de *a*, *b*, *c* y *d* son: $a = -3$, $b = -5$, $c = 3$ y $d = 4$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos inicialmente la integral indefinida de *f(x)*.

$$\int \frac{1}{x^2 + x}\,dx\,.$$

Se trata de una integral racional propia.

Descompondremos el integrando en una suma de fracciones elementales, teniendo en cuenta que las raíces del denominador son:

$$x^2 + x = 0 \;\Rightarrow\; x(x+1) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x^2 + x} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} \quad\Rightarrow$$

$$1 = A(x+1) + Bx \;\Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \Rightarrow\; 1 = A(-1+1) + B\cdot(-1) & \Rightarrow\; B = -1 \\ x = 0 & \Rightarrow\; 1 = A(0+1) + B\cdot 0 & \Rightarrow\; A = 1 \end{cases}$$

La integral indefinida será:

$$\int \frac{1}{x^2 + x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \mathrm{Ln}|x| - \mathrm{Ln}|x+1| + K$$

Hemos obtenido la integral indefinida, por lo que la primitiva *F* de *f* tal que $F(1) = 1$, será:

$F(x) = \mathrm{Ln}|x| - \mathrm{Ln}|x+1| + K \;\Rightarrow\; F(1) = \mathrm{Ln}|1| - \mathrm{Ln}|1+1| + K \;\Rightarrow$

$1 = 0 - \mathrm{Ln}\,2 + K \;\Rightarrow\; K = 1 + \mathrm{Ln}\,2 \;\Rightarrow\; F(x) = \mathrm{Ln}|x| - \mathrm{Ln}|x+1| + 1 + \mathrm{Ln}\,2$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el sistema según los valores de λ.

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + \lambda y + 4z &= 2 \\ 2x + \lambda y + 6z &= \lambda - 2 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema anterior en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & 6 & 0 \\ 2 & \lambda & 4 & 2 \\ 2 & \lambda & 6 & \lambda-2 \end{array}\right)$$

Pasemos la fila 1ª a la 3ª, la 2ª a la 1ª y la 3ª a la 2ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & 4 & 2 \\ 2 & \lambda & 6 & \lambda-2 \\ \lambda & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - λ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda-4 \\ 0 & 4-\lambda^2 & 12-4\lambda & -2\lambda \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª con 3ª.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 12-4\lambda & 4-\lambda^2 & -2\lambda \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - (12 - 4 λ) · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 0 & 8-2\lambda^2 & 4\lambda^2-32\lambda+48 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 8 - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = 2$ y $\lambda = -2$.

** $\lambda = 2 \Rightarrow$ la 3ª ecuación quedaría así, $0 = 4\lambda^2 - 32\lambda + 48 \Rightarrow 0 = 4\cdot 2^2 - 32\cdot 2 + 48 \Rightarrow 0 = 16 - 64 + 48 \Rightarrow 0 = 0$, es decir, una ecuación trivial, que eliminaríamos y nos quedaría un sistema compatible de dos ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** $\lambda = -2 \Rightarrow$ la 3ª ecuación sería, $0 = 4\lambda^2 - 32\lambda + 48 \Rightarrow 0 = 4\cdot(-2)^2 - 32\cdot(-2) + 48 \Rightarrow 0 = 16 + 64 + 48 \Rightarrow 0 = 128$, es decir, una ecuación absurda, por lo que el sistema es incompatible.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2 \Rightarrow$ la 3ª ecuación sería una ecuación normal y el sistema sería un sistema compatible determinado.

(b) Resolvámoslo para $\lambda = 2$. Sustituiremos este valor de λ en el sistema triangulado del apartado anterior, tendremos en cuenta que la 3ª ecuación es trivial y la eliminaríamos.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 0 & 8-2\lambda^2 & 4\lambda^2-32\lambda+48 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2-2y \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.

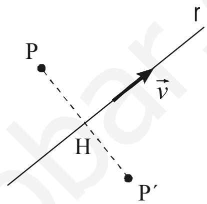
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6-2y \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$ El sistema está diagonalizado, la solución es: $2x = 6 - 2y \quad ; \quad 2z = -2$.
o lo que es lo mismo: $x = 3 - y \quad ; \quad z = -1$.

Terminemos de resolver el sistema sistituyendo la incógnita no principal o secundaria, la y, por un parámetro, por ejemplo, por $t \in \mathbb{R}$.

$$x = 3 - t \qquad ; \qquad y = t \qquad ; \qquad z = -1.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Ya que el vector de dirección de la recta r es $\vec{v} = (2, 3, -1)$ y un punto de la misma es el $(1, 0, -1)$.

Sea H la proyección del punto P = (1, 1, 1) sobre la recta r, se cumple la condición de que el vector $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ de dirección de la recta, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto H por pertenecer a la recta tendrá de coordenadas $(1+2t,\ 3t,\ -1-t)$.

El vector $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = (1+2t, 3t, -1-t) - (1, 1, 1) = (2t,\ 3t-1, -2-t)$$

El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ y $\vec{v}$ es cero:

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \bullet \vec{v} = 0 \Rightarrow (2t,\ 3t-1,\ -2-t) \bullet (2, 3, -1) = 0 \Rightarrow 4t + 9t - 3 + 2 + t = 0 \Rightarrow$$
$$14t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{14}$$

sustituyamos este valor de t en el punto H y en el vector $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$:

$$\mathrm{H} = (1+2t,\ 3t,\ -1-t) = \left(1 + 2\cdot\frac{1}{14},\ 3\cdot\frac{1}{14},\ -1-\frac{1}{14}\right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = (2t,\ 3t-1, -2-t) = \left(2\cdot\frac{1}{14},\ 3\cdot\frac{1}{14} - 1,\ -2 - \frac{1}{14}\right) = \left(\frac{2}{14}, -\frac{11}{14}, -\frac{29}{14}\right)$$

El punto P′ = (a, b, c), simétrico del P respecto de la recta r, verifica que $\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \overrightarrow{\mathrm{HP}'}$, es decir:

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \overrightarrow{\mathrm{HP}'} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{14}, -\frac{11}{14}, -\frac{29}{14}\right) = (a, b, c) - \left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2}{14}, -\frac{11}{14}, -\frac{29}{14}\right) = \left(a - \frac{8}{7}, b - \frac{3}{14}, c + \frac{15}{14}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{14} = a - \dfrac{8}{7} \\ -\dfrac{11}{14} = b - \dfrac{3}{14} \\ -\dfrac{29}{14} = c + \dfrac{15}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{9}{7} \\ b = -\dfrac{4}{7} \\ c = -\dfrac{22}{7} \end{cases} \Rightarrow \quad \mathrm{P}' = \left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7}\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Estudiemos la continuidad de la función *f*.

Para valores de $x < 0$, el trozo de función *f* definido en este intervalo es una función exponencial elemental que es continua en $\mathbb{R}$, por tanto la función es continua en este trozo, es decir, para valores de $x<0$.

Para valores de $0 < x < 1$, el trozo de función definido en este otro intervalo es el de una función polinómica, que es continua en todo $\mathbb{R}$, luego la función es continua en este trozo, es decir, para valores de $0<x<1$.

Para valores de $x > 1$, el trozo de función *f* definido en este intervalo es una función racional que es continua en $\mathbb{R}$ menos en los valores que anulan al denominador, en este caso el -1, pero este valor no pertenece al dominio particular que estamos considerando, por tanto la función es continua en este trozo, es decir, para valores de $x>1$.

Estudiemos ahora la continuidad en el punto 0. Para que sea continua en este punto se ha de verificar que el valor de la función en dicho punto debe coincidir con los límites laterales de la función en el citado punto, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-0} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \left(1-x^2\right) = 1-0^2 = 1 \\ f(0) = \mathrm{e}^{-0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \\ 1 = 1 = 1 \end{array}\right.$$

Luego la función es continua en el punto 0.

Estudiemos ahora la continuidad en el punto 1, para que sea continua en este punto se ha de verificar que el valor de la función en dicho punto debe coincidir con los límites laterales de la función en el citado punto, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} \left(1-x^2\right) = 1-1^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{1+1} = 1 \\ f(1) = \dfrac{2}{1+1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \\ 0 \neq 1 = 1 \end{array}\right.$$

La función no es continua en el punto 1. La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Para valores de $x<0$, el trozo de función f definido en este intervalo es el de una función exponencial elemental que es derivable en $\mathbb{R}$, por tanto la función es derivable en este trozo, es decir, para valores de $x<0$, siendo la derivada, $-\mathrm{e}^{-x}$.

Para valores de $0 < x < 1$, el trozo de función definido en este otro intervalo es el de una función polinómica, que es derivable en todo $\mathbb{R}$, luego la función es derivable en este trozo, es decir, para valores de $0<x<1$, siendo la derivada, $-2x$.

Para valores de $x > 1$, el trozo de función f definido en este intervalo es una función racional que es derivable en $\mathbb{R}$ menos en los valores que anulan al denominador, en este caso el -1, pero este valor no pertenece al dominio particular que estamos considerando, por tanto la función es derivable en este trozo, es decir, para valores de $x > 1$, siendo la derivada, $\dfrac{-2}{(x+1)^2}$.

Una primera aproximación de la función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{-2}{x+1} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en el punto 0. Como es continua en este punto puede ser derivable; será derivable si las derivadas laterales de la función en dicho punto coinciden, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)^- = \lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x < -0}} \left(-e^{-x}\right) = -e^{-0} = -1 \\ f'(0)^+ = \lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ x > 0}} (-2x) = -2 \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0)^- = f'(0)^+ \Rightarrow \\ -1 \neq 0 \end{array}\right.$$

La función en el punto 0 aunque es continua no es derivable en dicho punto.

Estudiemos la derivabilidad en el punto 1. Como la función no es continua en este punto no puede ser derivable.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

La función derivada de f será:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{-2}{x+1} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Dibujemos en primer lugar la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x + 3$ que se corresponde con la de una parábola.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

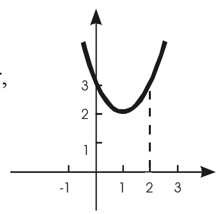
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \quad \Rightarrow \text{No hay}$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$$y = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \quad \Rightarrow \text{ el punto es el } (0, 3).$$

2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\dfrac{-b}{2a}$, es decir, $\dfrac{-(-2)}{2} = 1$, siendo la ordenada: $y = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$, por tanto, el mínimo es el punto (1, 2).

La gráfica es la situada a la derecha.



Representemos ahora la gráfica $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$. Se trata de otra parábola.

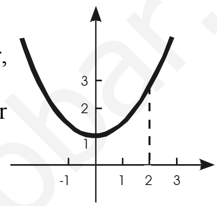
1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -2 \quad \Rightarrow \text{No hay}$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x=0$. Basta sustituir $x=0$ en la función:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \text{ el punto es el (0, 1).}$$

2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-0}{2} = 0$, siendo la ordenada: $y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + 1 = 1$, por tanto, el mínimo es el punto (0, 1).



La gráfica es la situada a la derecha.

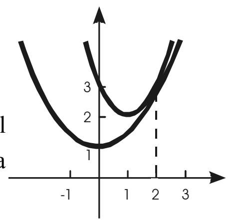
Calculemos el punto de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{lcl} y & = & x^2 - 2x + 3 \\ y & = & \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 4x + 6 = x^2 + 2 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

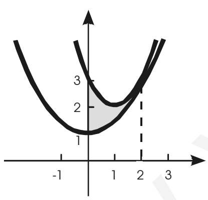
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}x^2 + 1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 1 = 3 \;\Rightarrow\; (2,\ 3)$$

que es el punto de corte de ambas gráficas.

La situación gráfica de ambas gráficas es la dibujada a la derecha.



(b) El recinto limitado por ambas gráficas y el eje de ordenadas, es el que se encuentra sombreado y situado a la izquierda.



Calculemos su área.

$$\text{Área} = \int_0^2 \left(f(x) - g(x)\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right]_0^2 = \frac{8}{6} - 4 + 4 - 0 = \frac{4}{3} \text{ unidades de área}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Hallemos el determinante de la matriz $-3A^t$.

Si el determinante de la matriz A es 4, es decir, det(A) = 4, entonces el determinante de la matriz traspuesta también es 4, o sea, det(A^t) = 4.

Aplicamos la propiedad de los determinantes que dice:

"*El valor de un determinante no varía si intercambiamos entre sí todas las* *filas por las columnas y todas las columnas por las filas, o lo que es lo mismo, el determinante asociado a una matriz cuadrada y el correspondiente a la matriz traspuesta son iguales:*

$$|A| = |A^t|$$

Calculemos ahora el determinante de la matriz $-3A^t$.

La matriz $-3A^t$ se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz A^t, que es de orden 2, por -3, es decir, todas las filas quedan multiplicadas por -3.

La propiedad de los determinantes que vamos ahora a aplicar dice:

"Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna por un mismo número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número".

Y esta otra:

"Para multiplicar un determinante por un número basta multiplicar una sola fila o columna".

Por tanto si la matriz A^t la multiplicamos por -3, el determinante asociado a A^t quedaría multiplicado por $-3\cdot(-3) = 9$, ya que es de orden 2, es decir:

$$\det(-3A^t) = -3\cdot(-3)\cdot \det(A^t) = 9\cdot 4 = 36$$

Luego el determinante de la matriz $-3A^t$ es 36, es decir, $\det(-3A^t) = 36$.

Hallemos ahora el siguiente determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = -6\cdot\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \qquad [1]$$

La propiedad de los determinantes que hemos aplicado dice:

"Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante.".

Si observamos el determinante que queda podemos comprobar que es el asociado a la matriz A en donde hemos cambiado las dos columnas entre sí.

Apliquemos la propiedad de los determinantes que dice:

"Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo."

Continuando desde [1], tendremos:

$$= -6\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 6\cdot 4 = 24$$

Luego el $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix} = 24$

(b) Calculemos $\det(A^{-1}A^t)$.

Aplicamos la propiedad de los determinantes que dice:

"Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, se verifica que":

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Luego se verificará que:

$$\det(A^{-1}A^t) = \det A^{-1}\cdot\det A^t = \qquad [2]$$

Apliquemos ahora la propiedad de los determinantes que dice:

"*El determinante asociado a una matriz cuadrada que tenga inversa y el determinante asociado a su matriz inversa verifican la relación siguiente*"

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

Continuando desde [2], tendremos:

$$= \frac{1}{\det A} \cdot 4 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

Luego $\det(A^{-1} A^{t}) = 1$

(c) Hallemos det (B^3), sabiendo que la matriz cuadrada B verifica que $B^3 = I$.

Aplicamos la propiedad de los determinantes que dice:

"Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, se verifica que":

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

En nuestro caso, sería:

$B^3 = I \quad \Rightarrow \quad \det(B^3) = \det(I)$

$\det(B^3) = \det(B \cdot B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) \cdot \det(B) = (\det(B))^3$

$\det(I) = 1$

Igualando ambos resultados, tendríamos:

$(\det(B))^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(B) = \sqrt[3]{1} = 1$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Los tres puntos A, B y C estarán alineados cuando se verifique que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ tengan la misma dirección, es decir, sean paralelos, lo que implica que sus coordenadas sean proporcionales. Veámoslo.

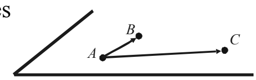
$\vec{AB} = (-\lambda,\ 2,\ 0) - (2,\ \lambda,\ \lambda) = (-\lambda - 2,\ 2 - \lambda,\ -\lambda)$

$\vec{AC} = (0,\ \lambda,\ \lambda - 1) - (2,\ \lambda,\ \lambda) = (-2,\ 0,\ -1)$

$$\frac{-2}{-\lambda - 2} = \frac{0}{2 - \lambda} = \frac{-1}{-\lambda} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{0}{2-\lambda} = \dfrac{-1}{-\lambda} & \Rightarrow\ 0 = -2 + \lambda \quad \Rightarrow\ \lambda = 2 \\ \dfrac{-2}{-\lambda - 2} = \dfrac{0}{2 - \lambda} & \Rightarrow\ 0 = -4 + 2\lambda \quad \Rightarrow\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Luego existe un valor de $\lambda = 2$, para el que los tres puntos están alineados.

(b) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C, será la ecuación del plano que pasa por un punto, por ejemplo, por el A, y sus vectores de dirección son el $\vec{AB}$ y el $\vec{AC}$.



Las coordenadas del punto A y la de los vectores para λ=1 son:

$A(2, \lambda, \lambda) = (2, 1, 1)$

$\vec{AB} = (-\lambda - 2,\ 2 - \lambda,\ -\lambda) \ \Rightarrow\ \vec{AB} = (-1 - 2,\ 2 - 1,\ -1) \ \Rightarrow\ \vec{AB} = (-3,\ 1,\ -1)$

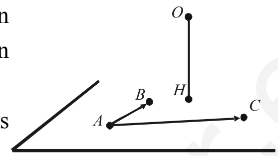
$\vec{AC} = (-2,\ 0,\ -1)$

La ecuación del plano en paramétricas es:

$$\begin{cases} x = 2 - 3\alpha - 2\beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha - \beta \end{cases}$$

Calculemos ahora la distancia del origen de coordenadas, $O(0,0,0)$, a este plano.

El vector $\vec{OH}$ es perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, el $\vec{AB} = (-3, 1, -1)$ y el $\vec{AC} = (-2, 0, -1)$. Siendo H un punto del plano, el pié de la perpendicular al plano desde O.



El punto H inicialmente tendrá las coordenadas genéricas siguientes:

$$H(2-3\alpha-2\beta,\ 1+\alpha,\ 1-\alpha-\beta)$$

$$\vec{OH} = (2-3\alpha-2\beta,\ 1+\alpha,\ 1-\alpha-\beta) - (0,0,0) = (2-3\alpha-2\beta,\ 1+\alpha,\ 1-\alpha-\beta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{OH} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{OH} \bullet \vec{AB} = 0 \\ \vec{OH} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{OH} \bullet \vec{AC} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2-3\alpha-2\beta,\ 1+\alpha,\ 1-\alpha-\beta)\bullet(-3,1,-1) = 0 \\ (2-3\alpha-2\beta,\ 1+\alpha,\ 1-\alpha-\beta)\bullet(-2,0,-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -6+9\alpha+6\beta+1+\alpha-1+\alpha+\beta = 0 \\ -4+6\alpha+4\beta-1+\alpha+\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 11\alpha+7\beta = 6 \\ 7\alpha+5\beta = 5 \end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} 11 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 11 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: 11 · [2ªf.] - 7 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 11 & 7 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 6 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: 6 · [1ªf.] - 7 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 66 & 0 & -55 \\ 0 & 6 & 13 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$66\alpha = -55$; $6\beta = 13$ $\Rightarrow$ $\alpha = -5/6$; $\beta = 13/6$

Teniendo en cuenta estos valores, el vector $\vec{OH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{OH} = (2-3\alpha-2\beta,\ 1+\alpha,\ 1-\alpha-\beta) = \left(2 - 3\cdot\frac{-5}{6} - 2\cdot\frac{13}{6},\ 1+\frac{-5}{6},\ 1-\frac{-5}{6}-\frac{13}{6}\right) =$$

$$= \left(2+\frac{15}{6}-\frac{26}{6},\ 1-\frac{5}{6},\ 1+\frac{5}{6}-\frac{13}{6}\right) = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{3}\right)$$

La distancia del origen de coordenadas al plano coincidirá con el módulo del vector $\vec{OH}$.

$$\left|\vec{OH}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$ unidades de longitud.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN JUNIO 2011

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

EJERCICIO 2. Sea $f\colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [0´75 PUNTOS] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

(b) [1´75 PUNTOS] Halla el área del recinto anterior.

EJERCICIO 3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} -\lambda x + \ \ y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ \lambda x + \ \ y + z = 1 \end{array}\right\}$$

(a) [1´75 PUNTOS] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) [0´75 PUNTOS] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS] Determina el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto de la recta r de ecuaciones $x - 1 = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+1}{2}$

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Sea $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2, 0)$. ¿Cuál es esa distancia?

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Halla:
$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\,dx$$
Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = e^x$

EJERCICIO 3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1´25 PUNTOS] Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

(b) [1´25 PUNTOS] Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

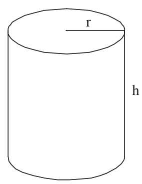
EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, 1, 0)$, y la recta r dada por $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=2 \end{cases}$

(a) [1´75 PUNTOS] Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B.

(b) [0´75 PUNTOS] Determina si la recta que pasa por los puntos $P(1, 2, 1)$ y $Q(3, 4, 1)$ está contenida en dicho plano.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construyamos la función volumen del cilindro $V = \pi r^2 h$.

Relacionemos r y h teniendo en cuenta la superficie total del cilindro.

$S_t = 54 \;\Rightarrow\; S_t = 2\pi r\cdot h + 2\pi r^2 \;\Rightarrow\; 54 = 2\pi r\cdot h + 2\pi r^2 \;\Rightarrow$

$h = \dfrac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} \;\Rightarrow\; h = \dfrac{27 - \pi r^2}{\pi r}$

Sustituyamos esta expresión de h en la función volumen, tendremos:

$V = \pi r^2\cdot h \;\Rightarrow\; V = \pi r^2\cdot\dfrac{27-\pi r^2}{\pi r} \;\Rightarrow\; V = r(27 - \pi r^2) \;\Rightarrow\; V(r) = 27r - \pi r^3$

En esta función polinómica, el radio ha de ser estrictamente mayor que cero, pero además el volumen nunca podría ser negativo por lo que se ha de verificar igualmente que $\pi r^3 < 27r$, que simplificando por r, ya que es positivo, tendremos $\pi r^2 < 27$. Despejemos r

$$r^2 < \frac{27}{\pi} \;\Rightarrow\; r < \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{\pi}} \;\Rightarrow\; r < \frac{\sqrt{27\pi}}{\pi} \;\Rightarrow\; r < \frac{3\sqrt{3\pi}}{\pi}$$

La función volumen es una función polinómica, cuyo dominio es, en consecuencia, el intervalo $\left(0, \dfrac{3\sqrt{3\pi}}{\pi}\right)$. Al ser polinómica es continua y derivable en todo su dominio.

Calculemos, en primer lugar, los máximos relativos.

$V(r) = 27r - \pi r^3 \Rightarrow \quad V'(r) = 27 - 3\pi r^2$

Calculemos los valores que anulan a esta primera derivada

$$27 - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{27}{3\pi}} \Rightarrow r = \pm\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3\pi}} \Rightarrow r = \pm\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}} \Rightarrow r = \pm\frac{3}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow r = \pm\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}$$

aunque sólo tendremos en cuenta el valor positivo de r.

Sustituyamos este valor de positivo r en la segunda derivada.

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2 \Rightarrow \quad V''(r) = -6\pi r \Rightarrow \quad V''\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}\right) = -6\pi\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi} < 0$$

Luego hay un máximo relativo en $r = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{\pi}$.

Comprobemos que también es máximo absoluto. Para ello estudiemos la monotonía de la función en su dominio.

Construimos los siguientes intervalos posibles de monotonía, teniendo en cuenta el punto que anulaba a la primera derivada y el dominio de la función volumen:

$$\left(0, \frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}\right) \text{ y } \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}, \frac{3\sqrt{3\pi}}{\pi}\right)$$

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ y $\dfrac{3\sqrt{2\pi}}{\pi}$, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$V'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\right) = 27 - 3\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\right)^2 = 27 - 3\pi\frac{\pi}{\pi^2} = 24 > 0 \qquad \Rightarrow \text{Creciente en } \left(0, \frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}\right)$$

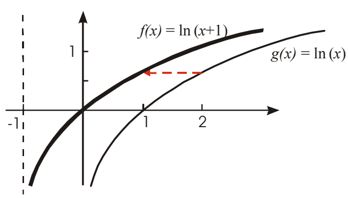
$$V'\left(\frac{3\sqrt{2\pi}}{\pi}\right) = 27 - 3\pi\cdot\left(\frac{3\sqrt{2\pi}}{\pi}\right)^2 = 27 - 3\pi\frac{9\cdot 2\pi}{\pi^2} = -27 < 0 \;\Rightarrow \text{Decreciente en } \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}, \frac{3\sqrt{3\pi}}{\pi}\right)$$

Como ya dijimos que la función era continua y derivable en su dominio, resulta que el máximo relativo es también absoluto. Por tanto, el radio y la altura que hacen el volumen máximo son:

$r = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{\pi}$ metros

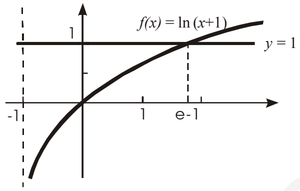
$$h = \frac{27 - \pi r^2}{\pi r} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{27 - \pi\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}\right)^2}{\pi\,\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}} = \frac{27 - \pi\,\frac{9\pi}{\pi^2}}{3\sqrt{\pi}} = \frac{18}{3\sqrt{\pi}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}\text{ m}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



(a) Representemos la función $f(x) = \ln(x+1)$. Para ello tendremos en cuenta que coincide con la función elemental, $g(x) = \ln(x)$, desplazando ésta horizontalmente una unidad a la izquierda.

La gráfica de la recta $y=1$ es una recta paralela al eje de abscisas y a una distancia de una unidad.



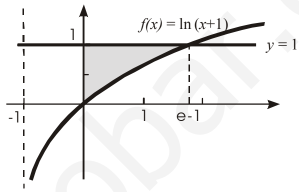
Calculemos los puntos de corte de ambas gráficas, para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=ln\,(x+1) \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ln\,(x+1)=1 \quad \Rightarrow \quad x+1=\mathrm{e}^1 \quad \Rightarrow \quad x=\mathrm{e}-1$$

$$\Rightarrow \quad P(\mathrm{e}-1,\ 1)$$

Hemos obtenido un único punto de corte, el $P(\mathrm{e}-1,\ 1)$.

La situación gráfica de ambas funciones es la representada más arriba.



El recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje *OY* y la recta $y=1$ es el que se encuentra sombreado y representado al lado.

(b) El área del recinto anterior, será el área encerrada por la recta $y=1$, la función *f* y el eje *OY*, es decir, calcularemos la integral definida entre 0 y $\mathrm{e}-1$ de la función diferencia.

$$\text{Área} = \left|\int_0^{\mathrm{e}-1}\big(1-\ln(x+1)\big)dx\right| = \left|\,|x|_0^{\mathrm{e}-1} - \int_0^{\mathrm{e}-1}\ln(x+1)\,dx\right| = \left|\mathrm{e}-1-\int_0^{\mathrm{e}-1}\ln(x+1)\,dx\right| = \qquad [1]$$

Para calcular esta última integral definida, obtendremos, previamente, una primitiva de la integral indefinida.

$$\int \ln\,(x+1)\,dx = \qquad [2]$$

Integral que haremos por partes.

$$u = \ln(x+1) \quad ; \quad du=\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$dv=dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

$$\int \ln(x+1)dx = x\cdot\ln(x+1) - \int\frac{x}{x+1}\,dx = \qquad [3]$$

La última integral es una integral racional impropia, efectuemos la división.

$$\begin{array}{r|l} x & x+1 \\ \cline{2-2} -x-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

Continuando desde [3], tendremos:

[3] $$= x\cdot\ln(x+1) - \int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = x\cdot\ln(x+1) - \int dx + \int\frac{1}{x+1}dx =$$

$$= x\cdot\ln(x+1) - x + \ln(x+1)$$

Sustituyendo esta última expresión en [2], tendremos:

[2] $$\int \ln\,(x+1)\,dx = x\cdot\ln(x+1) - x + \ln(x+1)$$

Sustituyendo esta expresión en [1], tendremos:

[1] $$\text{Área} = \left|\mathrm{e}-1-\int_0^{\mathrm{e}-1}\ln(x+1)dx\right| = \left|\mathrm{e}-1-\big[x\cdot\ln(x+1)-x+\ln(x+1)\big]_0^{\mathrm{e}-1}\right| =$$

$$= \left|\ \mathrm{e}-1-\Big(\big(\mathrm{e}-1\big)\cdot\ln(\mathrm{e}-1+1)-(\mathrm{e}-1)+\ln(\mathrm{e}-1+1)\ -\ \big(0\cdot\ln(0+1)-0+\ln(0+1)\big)\Big)\right| =$$

$$= \left| e-1-\left((e-1)\cdot \ln e-(e-1)+\ln e-0\right) \right| =$$

$$= \left|e-1-(e-1-e+1+1)\right| = \left|e-1-1\right| = \left|e-1-(e-1-e+1+1)\right| = e-2 \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el sistema mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual lo expresamos en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{r} -\lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=2 \\ \lambda x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 2ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La 3ª columna la pasamos a la 1ª.
La 1ª columna la pasamos a la 2ª.
La 2ª columna la pasamos a la 3ª.

$$\begin{array}{c} (z)\ (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{array}{c} (z)\ (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -\lambda-1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]

$$\begin{array}{c} (z)\ (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2-2\lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot$ [3ªf.] + $(\lambda-1) \cdot$ [2ªf.]

$$\begin{array}{c} (z)\ (x)\ (y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2-2\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2\lambda-2\lambda^2 & -2\lambda \end{array}\right) \end{array}$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow 2\lambda(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda=0$ y $\lambda=1$.

** Si $\lambda=0 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería $0=-2\lambda \Rightarrow 0=-2\cdot 0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

** Si $\lambda=1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería $0=-2\lambda \Rightarrow 0=-2\cdot 1 \Rightarrow 0=-2 \Rightarrow$ se trata de una ecuación absurda, nos queda un sistema incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería una ecuación normal, es decir, todos los elementos de la diagonal principal serían distintos de cero, por lo que tendríamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvámoslo para $\lambda = 0$. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferior que obtuvimos en el apartado anterior y suprimamos la última ecuación por ser trivial, tal como lo habíamos justificado.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2-2\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2\lambda-2\lambda^2 & -2\lambda \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2-2\cdot 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2\cdot 0-2\cdot 0^2 & -2\cdot 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (z) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2-2y \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] + [2^a f.]$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (z) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2-2y \\ 0 & -2 & -2-2y \end{array}\right) \end{array}$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 2.
Simplifiquemos la 2ª fila por -2.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (z) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-y \\ 0 & 1 & 1+y \end{array}\right) \end{array}$$

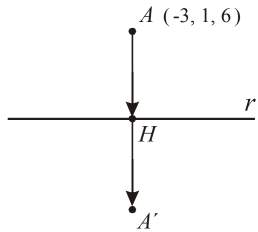
La matriz está diagonalizada, la solución es:

$$z = 1 - y \quad ; \quad x = 1 + y$$

Terminemos de despejar las incógnitas, sustituyendo la incógnita no principal o secundaria, y, por un parámetro, por ejemplo, por α, la solución, finalmente, será:

$$x = 1+\alpha \;\; ; \;\; y = \alpha \;\; ; \;\; z = 1-\alpha \;\; ; \;\; \text{siendo } \alpha \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



Para obtener el simétrico del punto A respecto de la recta r, el punto A'(a, b, c), tendremos que calcular un punto H de la recta de tal manera que el vector $\vec{AH}$ sea perpendicular al vector de dirección de dicha recta y además $\vec{AH} = \vec{HA'}$.

La ecuación de la recta r que está en forma continua la vamos a expresar en forma paramétrica.

$$r \equiv x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+2t \\ z = -1+2t \end{cases}$$

El punto genérico, H, de r, tendrá de coordenadas $H(1+t,\ -3+2t,\ -1+2t)$ y el vector $\vec{AH}$:

$$\vec{AH} = (1+t,\ -3+2t,\ -1+2t) - (-3,\ 1,\ 6) = (4+t,\ -4+2t,\ -7+2t)$$

Apliquemos la condición de que $\vec{AH}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta:

$$\vec{AH} \perp \vec{v}_r \;\Rightarrow\; \vec{AH} \bullet \vec{v}_r = 0 \;\Rightarrow\; (4+t,\ -4+2t,\ -7+2t) \bullet (1,\ 2,\ 2) = 0 \;\Rightarrow$$

$$4+t-8+4t-14+4t = 0 \;\Rightarrow\; 9t = 18 \;\Rightarrow\; t = 2$$

Luego el vector $\vec{AH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{AH} = (4+t,\ -4+2t,\ -7+2t) = (4+2,\ -4+2\cdot 2,\ -7+2\cdot 2) = (6,\ 0,\ -3)$$

y el punto H:

$$H(1+t,\ -3+2t,\ -1+2t) \ \Rightarrow\ H(1+2,\ -3+2\cdot 2,\ -1+2\cdot 2) \ \Rightarrow\ H(3,\ 1,\ 3)$$

Impongamos la última condición $\vec{AH} = \vec{HA'}$

$$(6,\ 0,\ -3) = (a,\ b,\ c) - (3,\ 1,\ 3) \ \Rightarrow \begin{cases} 6 = a-3 & \Rightarrow \quad a = 9 \\ 0 = b-1 & \Rightarrow \quad b = 1 \\ -3 = c-3 & \Rightarrow \quad c = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A'(9,\ 1,\ 0)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Elijamos un punto cualquiera X de la función $f(x) = \sqrt{x-1}$. Dicho punto por pertenecer precisamente a la función tendrá de coordenadas, $\left(x,\ \sqrt{x-1}\right)$.

Construyamos la función distancia de $A(2, 0)$ a X:

$$\text{dist}\ (A, X) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\sqrt{x-1} - 0\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \text{dist}\ (A, X) = \sqrt{x^2 + 4 - 4x + x - 1}$$

$$\text{dist}\ (\text{A}, X) = \sqrt{x^2 - 3x + 3} \qquad \Rightarrow \quad D(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}\,.$$

Esta es la función distancia que queremos minimizar.

Calculemos el dominio de esta función, es decir, los valores que hagan al radicando mayor que cero. Veamos los que lo hagan cero:

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \ \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \qquad \text{no hay ningún valor.}$$

Probamos con un valor cualquiera, por ejemplo, el 0, y observamos que el radicando es positivo, lo que significa que lo será para cualquier valor de x, por tanto, el dominio es $\mathbb{R}$. No obstante, en el contexto del problema, el dominio es el interavo $[1, +\infty]$. Se trata además de la función raíz cuadrada de una función polinómica, lo que implica que es continua y derivable en dicho dominio.

Calculemos los máximos y mínimos absolutos de esta función. En primer lugar, obtendremos los relativos que se encontrarán entre los que anulen a la primera derivada:

$$D'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 3}} \ \Rightarrow \quad 2x - 3 = 0 \ \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Comprobemos que este único valor que anula a la primera derivada es un mínimo relativo, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: $\left[0,\ \frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$.

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 1 y 2, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$D'(1) = \frac{2\cdot 1-3}{2\sqrt{1^2-3\cdot 1+3}} = \frac{-1}{2} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Decreciente en } \left[0,\ \frac{3}{2}\right).$$

$$D'(2) = \frac{2\cdot 2-3}{2\sqrt{2^2-3\cdot 2+3}} = \frac{1}{2} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Creciente en } \left(\frac{3}{2},\ +\infty\right].$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es mínimo relativo sino también mínimo absoluto. Luego el punto de la gráfica de *f* más cercano a $A(2,0)$ es el $\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Donde la ordenada del punto la hemos obtenido sustituyendo la abscisa $\frac{3}{2}$ en la función $D(x)$, es decir,

$$D\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2}+3} = \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+3} = \sqrt{\frac{9-18+12}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Hagamos el cambio de variable $t = e^x$.

Diferenciemos la expresión anterior, $dt = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{dt}{e^x} \Rightarrow \ dx = \dfrac{dt}{t}$

La integral *I* mediante este cambio de variable quedará así:

$$I = \int \frac{e^x}{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^x+1\right)}\,dx = \int \frac{t}{(t^2-1)(t+1)}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\,dt \ = \qquad [1]$$

Terminemos de calcular la integral *I*. Se trata de una integral racional propia, ya que el grado del polinomio del numerador es de grado menor que el del denominador.

Descompongamos la fracción del integrando en una suma de fracciones elementales, pero antes calculemos todas las raíces del denominador.

$$\frac{1}{(t^2-1)(t+1)} = \frac{1}{(t-1)(t+1)(t+1)} = \frac{1}{(t-1)(t+1)^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2} \ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{A(t+1)^2+B(t-1)(t+1)+C(t-1)}{(t-1)(t+1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$1 = A(t+1)^2+B(t-1)(t+1)+C(t-1) \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t=-1 \Rightarrow 1 = A(-1+1)^2+B(-1-1)(-1+1)+C(-1-1) \Rightarrow 1=-2C \Rightarrow C=-\dfrac{1}{2} \\ t=1 \ \Rightarrow 1 = A(1+1)^2+B(1-1)(1+1)+C(1-1) \qquad \Rightarrow 1=4A \ \Rightarrow \ A=\dfrac{1}{4} \\ t=0 \ \Rightarrow 1 = A(0+1)^2+B(0-1)(0+1)+C(0-1) \Rightarrow 1=A-B-C \Rightarrow B=A-C-1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Continuemos desde [1].

$$I = \int \frac{e^x}{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^x+1\right)}\,dx = \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\,dt = \int \frac{1}{(t-1)(t+1)^2}\,dt = \int\left(\frac{1/4}{t-1}+\frac{-1/4}{t+1}+\frac{-1/2}{(t+1)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{4}\int\frac{1}{t+1}\,dt - \frac{1}{4}\int\frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\int (t+1)^{-2}\,dt =$$

$$=\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\frac{(t+1)^{-1}}{-1}=\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}=$$

Deshaciendo el cambio inicial obtendremos, finalmente, la integral:

$$=\frac{1}{4}\ln|e^x-1|-\frac{1}{4}\ln|e^x+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{e^x+1}+K=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{e^x+1}+K$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Obtengamos en primer lugar la matriz A^2+3A, siendo la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

$$A^2+3A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}^2+3\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\lambda+3 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(\lambda+1)^2 & 0\\ \lambda+1-1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\lambda+3 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+2\lambda+1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\lambda+3 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+5\lambda+4 & 0\\ \lambda+3 & -2\end{pmatrix}$$

Calculemos ahora los valores de λ para los que la matriz A^2+3A no tiene inversa. Lo haremos mediante determinantes, es decir, calcularemos los valores de λ que hagan que el determinante asociado a esta matriz sea cero, los valores que obtengamos harán que dicha matriz no tenga inversa.

$$\begin{vmatrix}\lambda^2+5\lambda+4 & 0\\ \lambda+3 & -2\end{vmatrix}=-2(\lambda^2+5\lambda+4)-0\cdot(\lambda+3)=-2(\lambda^2+5\lambda+4)\ \Rightarrow$$

$$-2(\lambda^2+5\lambda+4)=0\ \Rightarrow\ \lambda^2+5\lambda+4=0\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm 3}{2}=\begin{cases}-1\\ -4\end{cases}$$

Los valores de λ para los que la matriz A^2+3A no tiene inversa son el -1 y el -4.

(b) Resolvamos la ecuación matricial $AX+A=2I$, para $\lambda=0$.

$AX+A=2I$	$\Rightarrow$	sumemos a ambos miembros la matriz opuesta de A
$AX+A-A=2I-A$	$\Rightarrow$	por la existencia de matriz opuesta
$AX+O=2I-A$	$\Rightarrow$	por la existencia de matriz nula respecto de la suma
$AX=2I-A$	$\Rightarrow$	multipliquemos a la izquierda por la inversa de A (después justificaremos si A tiene inversa para $\lambda=0$)
$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot(2I-A)$	$\Rightarrow$	por la propiedad asociativa
$(A^{-1}\cdot A)X=A^{-1}\cdot(2I-A)$	$\Rightarrow$	por la propiedad de matriz inversa
$I\cdot X=A^{-1}\cdot(2I-A)$	$\Rightarrow$	por la propiedad de matriz unidad
$X=A^{-1}\cdot(2I-A)$		

Obtengamos ahora la matriz inversa de A, la matriz A^{-1}, si es que existe para $\lambda=0$.

$$A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}0+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}.

Lógicamente, para que pueda existir matriz inversa, durante el proceso de la triangulación inferior, no debe aparecernos ninguna fila de ceros.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos, no hemos obtenido ninguna fila de ceros, luego la matriz A tiene inversa.
La matriz que hemos obtenido está diagonalizada.
Multipliquemos la 2ª fila por - 1.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ Hemos obtenido la matriz unidad a la izquierda, la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, es decir:

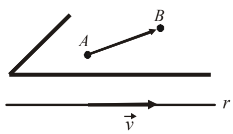
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz X.

$$X = A^{-1} \cdot (2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) La ecuación del plano vendrá dada por uno de los puntos por los que pasa, por ejemplo, el $B(2, 1, 0)$; y los vectores de dirección serían, uno el $\vec{AB}$ y el otro el de dirección de la recta r, ya que la recta es paralela al plano.

Calculemos el vector $\vec{AB}$.

$\vec{AB} = (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1)$

Obtengamos ahora el vector de dirección de la recta r expresando la ecuación de la recta en forma paramétrica. Para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de la recta que viene dada como intersección de dos planos.

$r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$ Expresamos el sistema en forma matricial y lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1-z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2-z \\ 0 & -1 & 1-z\end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = 2 - z \quad ; \quad -y = 1 - z \quad \Rightarrow \quad x = 2 - z \quad ; \quad y = -1 + z$$

Terminemos de despejar las incógnitas sustituyendo la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por t.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{siendo } t \in \mathbb{R}.$$

El vector de dirección de la recta r será: $(-1, 1, 1)$.

Comprobemos previamente que este vector y el $\vec{AB}$ $(1, 1, 1)$ tienen distinta dirección, es decir, que sus coordenadas no son proporcionales:

$$\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

La ecuación del plano será:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - \mu \\ y = \ \ 1 + \lambda + \mu \\ z = \ \ \lambda + \mu \end{cases}$$

(b) Para saber si la recta que pasa por los puntos P y Q está contenida en el plano anterior, bastará determinar si cada uno de esos puntos pertenece a dicho plano, es decir, si sus coordenadas satisfacen la ecuación del mismo.

Comprobemos si el punto P $(1, 2, 1)$ pertenece al plano, para ello sustituyamos sus coordenadas en la ecuación de dicho plano y veamos si satisfacen dicha ecuación.

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - \mu \\ y = \ \ 1 + \lambda + \mu \\ z = \ \ \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2 + \lambda - \mu \\ 2 = \ \ 1 + \lambda + \mu \\ 1 = \ \ \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = -1 \\ \lambda + \mu = \ \ 1 \\ \lambda + \mu = \ \ 1 \end{cases}$$

Expresamos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2\end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, la 3ª ecuación es trivial y la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, es decir, un sistema compatible determinado, por lo que podemos encontrar un valor para λ y otro para μ; el punto P pertenece al plano.

Procedamos de forma similar para el punto Q $(3, 4, 1)$.

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - \mu \\ y = \ \ 1 + \lambda + \mu \\ z = \ \ \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2 + \lambda - \mu \\ 4 = \ \ 1 + \lambda + \mu \\ 1 = \ \ \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 3 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

Expresamos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, la 3ª ecuación es una ecuación absurda, por lo que se trata de un sistema incompatible, no tiene solución; el punto *Q* no pertenece al plano.

En definitiva, si el punto *P* pertenece al plano y el *Q* no, entonces la recta $\overline{PQ}$ no está contenida en el plano.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2011

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

EJERCICIO 2. Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

EJERCICIO 3. Dada las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) [1´75 PUNTOS]. Calcula el rango de A dependiendo de los valores de α.

(b) [0´75 PUNTOS]. Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(-1, k, 3)$, $B(k+1, 0, 2)$, $C(1, 2, 0)$ y $D(2, 0, 1)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{CD}$ sean linealmente dependientes?

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula los valores de k para los que los puntos A, B, C y D forman un tetraedro de volumen 1.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ para $x \neq 0$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4$ y $g(x)=x^2-1$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa $x=-2$.

(b) [1´75 PUNTOS]. Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y=x+5$. Calcula el área de este recinto.

EJERCICIO 3. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Considera los valores de α para los que la matriz inversa de A es $\frac{1}{12}A$.

(b) [1´25 PUNTOS]. Para $\alpha=-3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

EJERCICIO 4. Dados el plano π de ecuación $x+2y-z=0$ y la recta r de ecuaciones

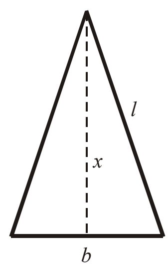
$$\begin{cases} 3x-y=5 \\ x+y-4x=-13 \end{cases}$$

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla el punto de intersección del plano π y la recta r.

(b) [1´75 PUNTOS]. Halla el punto simétrico del punto $Q(1, -2, 3)$ respecto del plano π.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construyamos la función área, que es la que me piden que sea máxima. Tomemos como variable independiente, x, la altura del triángulo, tendremos.

$$A(x)=\frac{b\cdot x}{2} \qquad [1]$$

Busquemos la relación existente entre la b y la x, para ello tendremos en cuenta, en primer lugar, la condición que nos da el problema y es que el perímetro del triángulo isósceles es 8:

$$b + 2l = 8 \quad \Rightarrow \quad 2l = 8 - b \qquad [2]$$

y, en segundo lugar, la relación pitagórica que existe entre la altura, el lado igual y la mitad de la base:

$$l^2 = x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad l^2 = x^2 + \frac{b^2}{4} \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}}$$

Sustituyamos este valor de l en [2]:

$$2\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}} = 8 - b$$

Elevemos al cuadrado ambos miembros y desarrollemos los cuadrados.

$$\left(2\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}}\right)^2 = (8-b)^2 \quad \Rightarrow \quad 4\left(x^2 + \frac{b^2}{4}\right) = 64 + b^2 - 16b$$

Despejemos b en función de x.

$$4x^2 + 4\cdot\frac{b^2}{4} = 64 + b^2 - 16b \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + b^2 = 64 + b^2 - 16b \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 64 - 16b \quad \Rightarrow$$

$$16b = 64 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad b = 4 - \frac{x^2}{4} \qquad [3]$$

Sustituyamos este valor de b en la función área, [1], tendremos:

$$A(x) = \frac{b\cdot x}{2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{\left(4 - \frac{x^2}{4}\right)\cdot x}{2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{\frac{16 - x^2}{4}\cdot x}{2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{16x - x^3}{8}$$

Calculemos el dominio de esa función. De entrada, los valores de x tendrán que ser mayores que cero, es decir, estrictamente positivos. Pero como los valores que puede tomar b son también mayores que cero, observando la relación [3] entre b y x, deducimos que el mayor valor que puede tomar x es menor que 4.

Es decir:

$$b = 4 - \frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad 4 - \frac{x^2}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad 4 > \frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad 16 > x^2 \quad \Rightarrow \quad 4 > x$$

En definitiva, el dominio de $A(x)$ serán los valores del intervalo (0, 4).

La función es continua y derivable en este dominio, ya que se trata de una función polinómica de tercer grado.

Calculemos el máximo relativo o local dentro de su dominio. Obtengamos la función primera derivada.

$$A(x) = \frac{16x - x^3}{8} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = \frac{16 - 3x^2}{8}$$

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada.

$$\frac{16 - 3x^2}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad 16 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

De los dos valores sólo pertenece al dominio el valor positivo.

Comprobemos que este valor que anula a la derivada y pertenece al dominio es el máximo relativo y también el absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: el $\left(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ y el $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 4\right)$

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 2 y 3, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$A'(x)=\frac{16-3x^2}{8} \Rightarrow A'(2)=\frac{16-3\cdot 2^2}{8}=\frac{16-12}{8}=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \text{Creciente en}\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$A'(x)=\frac{16-3x^2}{8} \Rightarrow A'(3)=\frac{16-3\cdot 3^2}{8}=\frac{16-27}{8}=-\frac{11}{8}<0 \Rightarrow \text{Decreciente en}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},\,4\right)$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es el máximo relativo sino también máximo absoluto. En definitiva la altura que da lugar al triángulo isósceles de área máxima es la de $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ unidades de longitud.

La longitud de la base la obtendremos sustituyendo el valor de la altura en [3]:

$$b=4-\frac{x^2}{4} \Rightarrow b=4-\frac{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}{4} \Rightarrow b=4-\frac{\frac{16\cdot 3}{9}}{4}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3} \text{ unidades de longitud.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Dibujemos en primer lugar la gráfica de $f(x) = 6x - x^2$ que se corresponde con la de una parábola.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

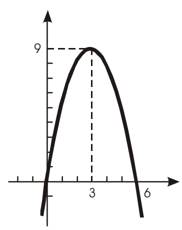
$$\left.\begin{matrix} y=6x-x^2 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=6x-x^2 \Rightarrow 0=x(6-x) \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \Rightarrow (0,0) \\ 6-x=0 \Rightarrow x=6 & \Rightarrow (6,0) \end{cases}$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = 6x - x^2 \Rightarrow y = 6\cdot 0 - 0^2 = 0 \Rightarrow$ el punto es el (0, 0).

2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-6}{-2}=3$, siendo la ordenada: $y = 6x - x^2 \Rightarrow y = 6\cdot 3 - 3^2 = 9$, por tanto, el mínimo es el punto (3, 9).

La gráfica se encuentra situada a la derecha.



Representemos ahora la gráfica $f(x) = x^2 - 2x$.

Se trata de otra parábola.

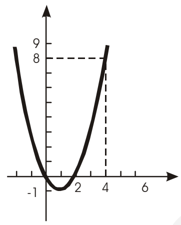
1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{matrix} y=x^2-2x \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=x^2-2x \Rightarrow 0=x(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \Rightarrow (0,0) \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 & \Rightarrow (2,0) \end{cases}$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x=0$. Basta sustituir $x=0$ en la función:

$y = x^2 - 2x \Rightarrow y = 0^2 - 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ el punto es el (0, 0).

2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{2}{2} = 1$, siendo la ordenada: $y = x^2 - 2x \;\Rightarrow\; y = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \;\Rightarrow$ por tanto, el mínimo es el punto $(1, -1)$.



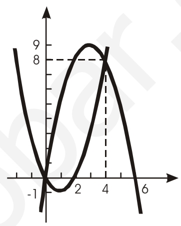
La gráfica es la situada a la derecha.

Calculemos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow\; 6x - x^2 = x^2 - 2x \;\Rightarrow\; 2x^2 - 8x = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$x(x-4) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4 \end{cases}$$

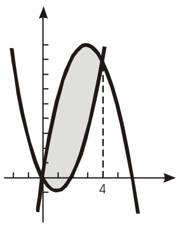
$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; (0,0) \\ x = 4 \;\Rightarrow\; y = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8 \;\Rightarrow\; (4,8) \end{cases}$$



que son los dos puntos de corte de las dos gráficas.

Las gráficas de ambas funciones están representadas a la derecha.

(b) El recinto limitado por ambas gráficas, es el que se encuentra sombreado y situado más abajo.



Calculemos su área.

$$\text{Área} = \int_0^4 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx =$$

$$= \int_0^4 \big(6x - x^2 - (x^2 - 2x)\big)\,dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\,dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2}\right]_0^4 =$$

$$= \left[-2\frac{x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = -2\frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4^2 - \left(-2\frac{0^3}{3} + 4 \cdot 0^2\right) = \frac{64}{3} \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para calcular el rango de la matriz A que depende de los valores de α, lo haremos mediante el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$ Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + α · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix}$$ Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + \alpha - 2 \end{pmatrix}$$ Hemos triangulado inferiormente y todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} y el a_{33} que pueden serlo o no.

Veamos los diferentes casos que pueden presentarse:

* Si $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \;\Rightarrow$ Para estos dos valores de α la tercera fila es una fila de ceros, pero veamos para cada uno de estos valores el comportamiento de la segunda fila.

** Para $\alpha = 1$. Sustituiremos este valor en la matriz A triangulada inferiormente.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + \alpha - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 0 & 1-1 & 1-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que sólo hay una fila no nula, luego para $\alpha = 1$ el rango de la matriz A es 1.

** Para $\alpha = -2$. Sustituiremos este valor en la matriz A triangulada inferiormente.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + \alpha - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2-1 & 2-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que hay dos filas no nulas, luego para $\alpha = -2$ el rango de la matriz A es 2.

* Si $a_{33} \neq 0 \;\Rightarrow\; \alpha^2 + \alpha - 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2 \;\Rightarrow$ Para todos los valores de α, distintos de 1 y -2, el rango de la matriz A sería 3, ya que ahora sí todos los elementos de la diagonal principal serían distintos de cero, inclusive el a_{22}.

(b) Para $\alpha = 2$, resolvamos la ecuación $A \cdot X = B$.

Multipliquemos a la izquierda por la inversa de A, por A^{-1}, que sabemos que existe porque según el apartado anterior para este valor de $\alpha = 2$ el rango de A es 3:

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

por la propiedad asociativa: $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$

por la existencia de la matriz unidad: $I \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$

Para poder calcula la matriz X hemos de obtener antes la matriz inversa de A para $\alpha = 2$, lo haremos mediante el método de Gauss que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot [2^a f.] - [1^a f.]$
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot [3^a f.] + [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $3 \cdot [3^a f.] + [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos 3ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 8 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $4 \cdot [2^a f.] + [3^a f.]$
Sustituyamos la 1ª fila por: $4 \cdot [1^a f.] + [3^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 12 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos 2ª fila por 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos 1ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Dividamos todas las filas por 4.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de A, la matriz A^{-1}, es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz X, sabiendo que $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 \\ -\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 \\ \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para saber si existe algún valor de k que haga que los vectores $\vec{AB}, \vec{BC}$ y $\vec{CD}$ sean linealmente dependientes, lo haremos obteniendo, en primer lugar, las coordenadas de dichos vectores y calculando, en segundo lugar, los valores de k que hagan que el determinante formado por dichas componentes sea cero.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} = (k+1, 0, 2) - (-1, k, 3) = (k+2, -k, -1) \\ \vec{BC} = (1, 2, 0) - (k+1, 0, 2) = (-k, 2, -2) \\ \vec{CD} = (2, 0, 1) - (1, 2, 0) = (1, -2, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2k + 4 - 2k + 2k - (-2 + 4k + 8 + k^2) = -k^2 - 2k - 2 = 0$$

Resolvamos esta última ecuación.

$-k^2 - 2k - 2 = 0 \;\Rightarrow\; k = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{-2}$ $\Rightarrow$ No hay ningún valor de k que anule al determinante, luego los tres vectores son linealmente independientes para cualquier valor de k, es decir, no pueden ser nunca linealmente dependientes.

(b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, los puntos *A*, *B*, *C* y *D* no son coplanarios y podemos por tanto formar un tetraedro con ellos, el volumen del mismo se puede obtener a partir del producto mixto de los vectores $\vec{AB}, \vec{BC}$ y $\vec{CD}$.

Teniendo en cuenta que el volumen de un tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores linealmente independientes que conforman sus lados y que como el volumen, en este ejercicio, nos dicen que vale 1, tendremos:

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-k^2-2k-2\right| = \frac{1}{6}\left|-\left(k^2+2k+2\right)\right| = \frac{1}{6}\left(k^2+2k+2\right) = 1$$

Resolvamos esta última ecuación.

$$k^2+2k+2=6 \Rightarrow k^2+2k-4=0 \Rightarrow k = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{5}}{2} = -1\pm\sqrt{5}$$

Hemos obtenido dos posibles valores para *k* que hacen que el volumen sea 1.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Obtengamos las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de *f*.

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x = 0$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^4+1}{x^3} = \frac{3\cdot 0^4+1}{0^3} = \frac{1}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical: } x = 0.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de *f* respecto de la asíntota vertical $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}\dfrac{3x^4+1}{x^3} = \dfrac{3\cdot 0^4+1}{(0^-)^3} = \dfrac{1}{-0} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\dfrac{3x^4+1}{x^3} = \dfrac{3\cdot 0^4+1}{(0^+)^3} = \dfrac{1}{+0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función *f(x)* tiende a $+\infty$ cuando *x* se acerca a 2 por la izquierda, y a $-\infty$ cuando lo

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^4+1}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{12x^3}{3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 4x = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{No existe asíntota horizontal.}$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x=c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida *"cuando x tiende a ±∞ y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a ±∞"*

En nuestro caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en cualquier punto; ya que ambas son polinómicas, por lo que definitivamente se puede aplicar la Regla de L´Hôpital, incluso en los casos como éste donde los límites de las funciones numerador y denominador tienden a $\pm\infty$ cuando x tiende a $\pm\infty$.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\mathrm{m} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^4+1}{x^3}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4+1}{x^4} = 3$$

Aquí hemos aplicado el criterio de que el límite, cuando x tiende a $\pm\infty$, de un cociente de funciones polinómicas del mismo grado coincide con el cociente de los coeficientes de los términos de mayor e igual grado.

Calculemos ahora n:

$$\mathrm{n} = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - \mathrm{m}x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^4+1}{x^3} - 3x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4+1-3x^4}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

La asíntota oblicua es: $y = 3x$.

En las funciones racionales, si hay una asíntota oblicua para $x \to +\infty$, también la habrá para $x \to -\infty$, siendo además la misma.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota oblicua $y = 3x$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 100 \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{ll} f(100) & = \dfrac{3 \cdot 100^4 + 1}{100^3} = 300.000001 \\ y_{\text{asíntota}} & = 3 \cdot 100 = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad f(100) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-100) = \dfrac{3(-100)^4+1}{(-100)^3} = -300.000001 \\ y_{\text{asíntota}} = 3(-100) = -300 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-100) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to -\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

(b) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, obtengamos la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{12x^3 \cdot x^3 - (3x^4+1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{12x^6 - 9x^6 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^6 - 3x^2}{x^6}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

$$3x^6 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2(x^4-1) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \\ x^4 - 1 = 0 & \Rightarrow \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

Hay tres valores, pero realmente son dos los que anulan a la primera derivada, el -1 y el 1, por lo que junto al punto $x = 0$ que no pertenece al dominio de la función por anular al denominador, nos permite construir los siguientes intervalos de monotonía: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -2, -0.5, 0.5 y 2, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(-2) = \frac{3(-2)^6 - 3(-2)^2}{(-2)^6} = \frac{180}{64} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (-\infty, -1)$$

$$f'(-0.5) = \frac{3(-0.5)^6 - 3(-0.5)^2}{(-0.5)^6} = -45 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (-1, 0)$$

$$f'(0.5) = \frac{3 \cdot 0.5^6 - 3 \cdot 0.5^2}{0.5^6} = -45 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (0, 1)$$

$$f'(2) = \frac{3 \cdot 2^6 - 3 \cdot 2^2}{2^6} = \frac{180}{64} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (1, +\infty)$$

La función f según lo deducido hasta ahora presenta máximos y mínimos relativos en los puntos de su dominio donde cambia la monotonía, es decir:

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad$ Máximo relativo

$x = +1 \quad \Rightarrow \quad$ Mínimo relativo

Los valores que alcanza la función en estos extremos relativos, se obtienen sustituyendo las abscisas en la función.

$$f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f(-1) = \frac{3 \cdot (-1)^4 + 1}{(-1)^3} = \frac{4}{-1} = -4 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo relativo } (-1, -4)$$

$$f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{3 \cdot 1^4 + 1}{1^3} = \frac{4}{1} = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo relativo } (1, 4)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto de abscisa x_0 es: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$ $\Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$, será:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(-2) = -\frac{1}{4}(-2)^2 + 4 = 3$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = f'(-2) = -\frac{1}{2}(-2) = 1$$

$$y - 3 = 1\,(x+2) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = x + 2 \quad \Rightarrow \quad y = x + 5$$

Que es la ecuación de la recta tangente.

(b) Esbocemos el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y=x+5$.

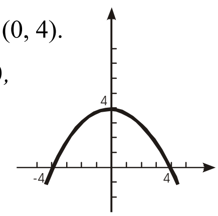
La gráfica de la función cuadrática $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ es una parábola. Representémosla.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 0 = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x^2 = 16 \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \;\Rightarrow\; (4,\ 0) \\ x = -4 \;\Rightarrow\; (-4,\ 0) \end{array}\right.$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad f(0) = -\frac{1}{4}\cdot 0^2 + 4 = 4 \quad \Rightarrow$$ el punto es el (0, 4).



2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{0}{-\frac{1}{2}} = 0$,

siendo la ordenada: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \;\Rightarrow\; f(0) = -\frac{1}{4}\cdot 0^2 + 4 = 4 \;\Rightarrow$

luego el vértice es el punto (0, 4).

La gráfica se encuentra situada a la derecha.

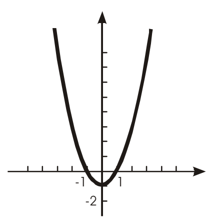
Representemos ahora la gráfica de la función cuadrática $g(x) = x^2 - 1$. Se trata de otra parábola.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 0 = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \;\Rightarrow\; (1, 0) \\ x = -1 \;\Rightarrow\; (-1, 0) \end{array}\right.$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x=0$. Basta sustituir $x=0$ en la función:

$y = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; y = 0^2 - 1 = -1 \;\Rightarrow$ el punto es el (0, -1).

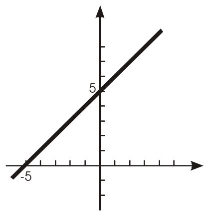


2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{0}{2} = 0$,

siendo la ordenada: $y = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; y = 0^2 - 1 = -1 \;\Rightarrow$ por tanto, el vértice o mínimo absoluto es el punto (0, -1).

La gráfica se encuentra situada a la derecha.

La gráfica de la recta tangente, $y = x + 5$, es una recta que pasa por los puntos (0, 5) y (-5, 0).



La representación gráfica está situada al lado.

Calculemos los puntos de corte de las gráficas, *f(x)* y *g(x)*. Se resolverá el sistema formado por las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x^2+4 \\ y = x^2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2+4 = x^2-1 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2-x^2 = -1-4 \Rightarrow$$

$$-\frac{5}{4}x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \Rightarrow y = 2^2-1 = 3 \Rightarrow (2,3) \\ x = -2 & \Rightarrow y = (-2)^2-1 = 3 \Rightarrow (-2,3) \end{cases}$$

que son los dos puntos de corte de ambas gráficas.

Para esbozar el recinto, hay que calcular previamente los puntos de intersección de la recta con cada una de las parábolas.

Intersección de la recta con la función *f(x)*.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x^2+4 \\ y = x+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2+4 = x+5 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2-x-1 = 0 \Rightarrow x^2+4x+4 = 0 \Rightarrow \\ x = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 4}}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow x = -2 \;;\; y = -2+5 = 3 \Rightarrow (-2,3) \end{cases}$$

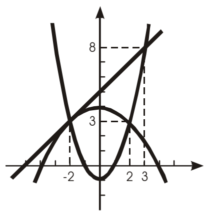
Obtenemos el punto (-2, 3).

Intersección de la recta con la función *g(x)*.

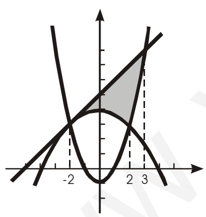
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2-1 \\ y = x+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2-1 = x+5 \Rightarrow x^2-x-6 = 0 \Rightarrow \\ x = \frac{1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 6}}{2} = \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \Rightarrow y = 3+5 = 8 \Rightarrow (3,8) \\ -2 \Rightarrow y = -2+5 = 3 \Rightarrow (-2,3) \end{cases} \end{cases}$$

Obtenemos los puntos (3, 8) y (-2, 3).

La situación gráfica de las tres funciones es la representada al lado.



El recinto limitado por ambas gráficas y la recta tangente es el que se encuentra sombreado y situado más abajo.



El área del recinto acotado por la recta y las dos curvas será:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2}\left(x+5-\left(-\frac{1}{4}x^2+4\right)\right)dx + \int_{2}^{3}\left(x+5-\left(x^2-1\right)\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)dx + \int_{2}^{3}\left(-x^2+x+6\right)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{2}^{3} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^2}{2}+(-2)\right) + \left(-\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+6\cdot 3\right)-\left(-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+6\cdot 2\right) =$$

$$= \left(\frac{8}{12}+2+2\right)-\left(-\frac{8}{12}+\frac{4}{2}-2\right) + \left(-9+\frac{9}{2}+18\right)-\left(-\frac{8}{3}+2+12\right) = \frac{14}{3}+\frac{2}{3}+\frac{27}{2}-\frac{34}{3} =$$

$$= \frac{15}{2} \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Como la matriz *A* tiene inversa, necesariamente el determinante asociado a la matriz A debe ser distinto de cero, veámoslo.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ -\alpha & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}\alpha & 1\\ -\alpha & 3\end{vmatrix}=3\alpha+\alpha=4\alpha\neq 0 \Rightarrow \alpha\neq 0$$

Hemos obtenido que la matriz *A* tendrá inversa siempre que $\alpha\neq 0$. Ahora bien, para calcular los valores de α que hacen que la inversa de *A* sea $\frac{1}{12}A$ lo haremos mediante el método de Gauss. Dicho método consiste en poner a la derecha de la matriz *A*, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}. No debemos olvidar que $\alpha\neq 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha & 1 & 1 & 0\\ -\alpha & 3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=\alpha\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha & 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=4\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 4 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc}4\alpha & 0 & 3 & -1\\ 0 & 4 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por $4\alpha\neq 0$.
Dividamos la 2ª fila por 4.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{4\alpha} & -\frac{1}{4\alpha}\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}, para cualquier valor de $\alpha\neq 0$, es decir:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4\alpha} & -\frac{1}{4\alpha}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \qquad [1]$$

Calculemos ahora el valor de α que hace que esta matriz inversa sea la matriz $\frac{1}{12}A$.

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{4\alpha} & -\frac{1}{4\alpha}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ -\alpha & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\frac{3}{4\alpha} & -\frac{1}{4\alpha}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{12} & \frac{1}{12}\\ -\frac{\alpha}{12} & \frac{3}{12}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{3}{4\alpha}=\frac{\alpha}{12} \Rightarrow 4\alpha^2=36 \Rightarrow \alpha^2=9 \Rightarrow \alpha=\pm 3\\ -\frac{1}{4\alpha}=\frac{1}{12} \Rightarrow 4\alpha=-12 \Rightarrow \alpha=-3\\ \frac{1}{4}=-\frac{\alpha}{12} \Rightarrow 4\alpha=-12 \Rightarrow \alpha=-3\\ \frac{1}{4}=\frac{3}{12} \Rightarrow 12=12 \Rightarrow \text{Identidad}\end{cases}$$

El único valor de α que verifica todas las condiciones a la vez es el de $\alpha=-3$.

(b) Resolvamos la ecuación matricial $A^t X=B$.
Como la matriz *A* tiene inversa para cualquier valor de $\alpha\neq 0$, la tendrá para $\alpha=-3$; y si *A*

tiene inversa la traspuesta, A^t, también la tendrá, por lo que la matriz $(A^t)^{-1}$ existe y podemos en la ecuación matricial anterior multiplicar a la izquierda por la matriz inversa de A^t, es decir por $(A^t)^{-1}$.

$A^t X = B \quad \Rightarrow \quad (A^t)^{-1}\cdot A^t\cdot X = (A^t)^{-1}\cdot B$ por la propiedad asociativa:

$[(A^t)^{-1}\cdot A^t]\cdot X = (A^t)^{-1}\cdot B \quad \Rightarrow$ por la propiedad de matriz unidad:

$I\cdot X = (A^t)^{-1}\cdot B \quad \Rightarrow \quad X = (A^t)^{-1}\cdot B$ calculemos la matriz X.

Pero antes de determinar la matriz X obtengamos la matriz inversa de A, A^{-1}, para $\alpha = -3$; lo haremos sustituyendo este valor de α en [1] del apartado anterior, donde habíamos calculado la inversa de A para cualquier valor de $\alpha \neq 0$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & -\frac{1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4\cdot(-3)} & -\frac{1}{4\cdot(-3)} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Tengamos en cuenta la propiedad que dice que si una matriz cuadrada tiene inversa, entonces la traspuesta de la inversa es igual a la inversa de la traspuesta: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

$$X = (A^t)^{-1}\cdot B = (A^{-1})^t\cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}-\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}+\frac{4}{4} & -\frac{1}{4}+\frac{2}{4} \\ \frac{1}{12}-\frac{1}{4} & \frac{3}{12}+\frac{4}{4} & \frac{1}{12}+\frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{4} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Hallemos el punto de intersección del plano π y la recta r, lo haremos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones del plano y la recta.

$$\left.\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ x + y - 4z &= -13 \\ x + 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -13 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -12 & -44 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 4.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -11 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 7 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 18 & 72 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por 4.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 3 · [3ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$3x = 6 \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad z = 4 \quad \Rightarrow$$
$$x = 2 \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad z = 4 \quad \Rightarrow \quad P(2,\ 1,\ 4)$$

que es el punto donde se cortan el plano y la recta.

(b) Escribamos en primer lugar la ecuación del plano π en forma paramétrica. Para ello expresaremos el sistema formado sólo por la ecuación de dicho plano en forma matricial. Lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

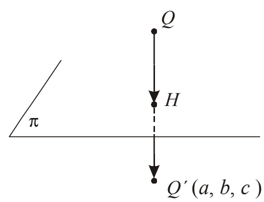
$x + 2y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, nos sobran dos incógnitas, la y y la z, que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -2y + z \end{array}\right)$ La solución es: $x = -2y + z$

Sustituyamos cada una de las incógnitas no principales o secundarias, la y y la z, por un parámetro, por ejemplo, por α y β respectivamente.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -2\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

El simétrico del punto Q respecto del plano π es otro punto Q' de tal manera que el vector $\vec{QH}$ es perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, el $\vec{u}$ y el $\vec{v}$, y además $\vec{QH} = \vec{HQ'}$. Siendo H un punto del plano, el pie de la perpendicular de Q al plano.



El punto H inicialmente tendrá las coordenadas genéricas siguientes: $H(-2\alpha+\beta,\ \alpha,\ \beta)$.

$$\vec{QH} = (-2\alpha + \beta,\ \alpha,\ \beta) - (1,\ -2,\ 3) = (-2\alpha + \beta - 1,\ \alpha + 2,\ \beta - 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{QH} \perp \vec{u} \ \Rightarrow \ \vec{QH} \bullet \vec{u} = 0 \\ \vec{QH} \perp \vec{v} \ \Rightarrow \ \vec{QH} \bullet \vec{v} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (-2\alpha + \beta - 1,\ \alpha + 2,\ \beta - 3) \bullet (-2,\ 1,\ 0) = 0 \\ (-2\alpha + \beta - 1,\ \alpha + 2,\ \beta - 3) \bullet (1,\ 0,\ 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 4\alpha - 2\beta + 2 + \alpha + 2 = 0 \\ -2\alpha + \beta - 1 + \beta - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5\alpha - 2\beta = -4 \\ -2\alpha + 2\beta = 4 \end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] + 2 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 12 \end{array}\right)$ Simplifiquemos la 2ª fila por 6.

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ La solución es: $5\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 2 \quad \Rightarrow$
$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 2$

Sustituyamos estos valores que hemos obtenido en el vector $\vec{QH}$ y en el punto H.

$$\vec{QH} = (-2\alpha + \beta - 1,\ \alpha + 2,\ \beta - 3) = (-2\cdot 0 + 2 - 1,\ 0 + 2,\ 2 - 3) = (1,\ 2,\ -1)$$

$H(-2\alpha+\beta, \alpha, \beta) \quad \Rightarrow \quad H(-2\cdot 0+2, 0, 2) \quad \Rightarrow \quad H(2, 0, 2)$.

Supongamos que Q' tiene de coordenadas (a, b, c), y como $\vec{QH} = \vec{HQ'}$, tendremos:

$$(1,\ 2,\ -1) = (a,\ b,\ c) - (2,\ 0,\ 2) \Rightarrow \begin{cases} 1 = a - 2 \Rightarrow a = 3 \\ 2 = b - 0 \Rightarrow b = 2 \\ -1 = c - 2 \Rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow Q'(3,\ 2,\ 1)$$

Que son las coordenadas del punto simétrico de Q respecto del plano π.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

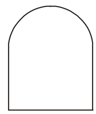
MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 72 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Una ventana *normanda* consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.
De entre todas las ventanas *normandas* de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima



EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Calcula el valor de $b>0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y=\sqrt{x}$ y la recta $y=bx$ es de $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) [1 PUNTO] ¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?
(b) [1´5 PUNTOS] Para $\lambda=1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}XA=B$.

EJERCICIO 4. Dados los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, -1)$ y $P(1, -1, 1)$, y la recta r definida por
$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$$
(a) [2 PUNTOS] Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades.
(b) [0´5 PUNTOS] Calcula el área del triángulo ABP.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f:\left[\frac{1}{e},4\right]\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & \text{si} \quad \frac{1}{e}\le x\le 2 \\ bx+1-\ln(2) & \text{si} \quad 2< x\le 4 \end{cases}$$

donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1´25 PUNTOS] Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e},4\right)$.

(b) [1´25 PUNTOS] Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(1-\ln(x))$, donde ln denota la función logaritmo neperiano. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(1, 1)$.

EJERCICIO 3. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) [1´75 PUNTOS] Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.

(b) [0´75 PUNTOS] Razona para qué valores de t el sistema homogéneo $AX=0$ tiene más de una solución.

EJERCICIO 4. Dado el punto $P(1, 1, -1)$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$

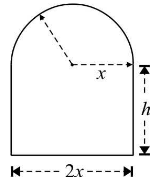
(a) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P.

(b) [1´5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y+z=0$, que es perpendicular a r y pasa por P.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Teniendo en cuenta el dibujo, construyamos la función área de la figura (ventana normanda), que queremos maximizar para que, por ejemplo, entre el máximo de luz:



$$Area = 2x\cdot h+\frac{\pi x^2}{2} \qquad [1]$$

es decir, el área de la ventana es la suma del área del rectángulo de base $2x$ y altura h, y la del semicírculo de radio x.

Como el perímetro de la ventana es de 10 m, se verificará lo siguiente:

$$\text{Perímetro} = 10 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2h + \pi x = 10 \qquad [2]$$

es decir, el perímetro de la ventana es la suma de la base, $2x$, más los dos lados del rectángulo, $2h$, más la longitud de la semicircunferencia, πx.

Despejemos h de [2] y sustituyámoslo en [1].

$$2x + 2h + \pi x = 10 \;\Rightarrow\; 2h = 10 - 2x - \pi x \;\Rightarrow\; h = 5 - x - \frac{\pi}{2}x$$

$$Area = 2x\cdot h + \frac{\pi x^2}{2} \;\Rightarrow\; A(x) = 2x\left(5 - x - \frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi x^2}{2} \Rightarrow A(x) = 10x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi x^2}{2} \;\Rightarrow$$

$$A(x) = 10x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2} \;\Rightarrow\; A(x) = \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 10x$$

Dibujemos la gráfica de $A(x)$ que se corresponde con la de una parábola, con la intención de calcular el domino de esta función teniendo en cuenta que los valores del área sólo pueden ser positivos, para valores de x (radio), en principio, también positivos.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 10x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 0 = \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 10x \;\Rightarrow\; 0 = \left[\left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)x + 10\right]x \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)x + 10 = 0 \Rightarrow \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)x + 10 = 0 \Rightarrow \dfrac{-4-\pi}{2}x = -10 \Rightarrow\; x = \dfrac{-20}{-4-\pi} \;\Rightarrow\; x = \dfrac{20}{4+\pi} \end{array}\right.$$

luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: $\mathrm{A}(0,0)$ y $\mathrm{B}\left(\frac{20}{4+\pi}, 0\right)$

- Con el eje de ordenadas. Será el punto A(0, 0).

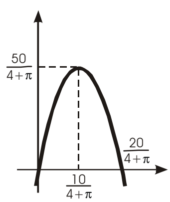
2.- El vértice de la parábola o extremo relativo se encuentra en el punto de abscisa, $\dfrac{-b}{2a}$, es decir, $\dfrac{-10}{2\left(-2-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \dfrac{-10}{-4-\pi} \Rightarrow \dfrac{10}{4+\pi}$, siendo la ordenada:

$$A(x) = \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 10x \Rightarrow A\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{10}{4+\pi}\right)^2 + 10\cdot\frac{10}{4+\pi} = \frac{-4-\pi}{2}\cdot\frac{100}{(4+\pi)^2} + \frac{100}{4+\pi} =$$

$$= \frac{-4-\pi}{2}\cdot\frac{100}{(4+\pi)^2} + \frac{100}{4+\pi} = \frac{-400 - 100\pi + 200(4+\pi)}{2(4+\pi)^2} = \frac{-400 - 100\pi + 800 + 200\pi}{2(4+\pi)^2} =$$

$$= \frac{400 + 100\pi}{2(4+\pi)^2} = \frac{100(4+\pi)}{2(4+\pi)^2} = \frac{50}{4+\pi}$$

por tanto, el vértice es el punto $\left(\dfrac{10}{4+\pi}, \dfrac{50}{4+\pi}\right)$.



La gráfica es la situada a la derecha.

El dominio de esta función polinómica es el intervalo abierto, $\left(0, \dfrac{20}{4+\pi}\right)$ y se trata de una función continua y derivable en él, por ser polinómica.

El máximo absoluto se encontrará entre los relativos, es decir, entre los puntos de derivada cero, calculémoslos:

$$A(x)=\left(-2-\frac{\pi}{2}\right)x^2+10x \;\Rightarrow\; A'(x)=2\cdot\left(-2-\frac{\pi}{2}\right)x+10 \;\Rightarrow\; A'(x)=(-4-\pi)x+10$$

$$A'(x)=(-4-\pi)x+10 \;\Rightarrow\; (-4-\pi)x+10=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-10}{-4-\pi}=\frac{10}{4+\pi}$$

$$A''(x)=-4-\pi \;\Rightarrow\; A''\left(\frac{10}{4+\pi}\right)=-4-\pi<0 \;\Rightarrow\; \text{máximo relativo en } x=\frac{10}{4+\pi}$$

este máximo relativo es el absoluto, ya que al ser el coeficiente del término en x^2 negativo, la función crece, alcanza el máximo relativo y después decrece.

La base medirá, $2x=2\cdot\frac{10}{4+\pi}=\frac{20}{4+\pi}\ m$

La altura del rectángulo,

$$h=5-x-\frac{\pi}{2}x \;\Rightarrow\; h=5-\frac{10}{4+\pi}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{10}{4+\pi}=5-\frac{10}{4+\pi}-\frac{10\pi}{2\cdot(4+\pi)}=\frac{10\cdot(4+\pi)-20-10\pi}{2\cdot(4+\pi)}=$$

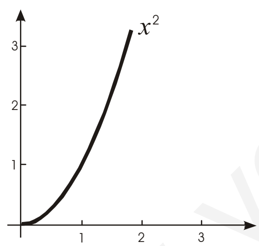
$$=\frac{40+10\pi-20-10\pi}{2\cdot(4+\pi)}=\frac{20}{2\cdot(4+\pi)}=\frac{10}{4+\pi}\ m$$

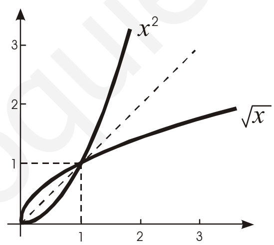
y la longitud de la semicircunferencia: $\pi x=\pi\cdot\frac{10}{4+\pi}=\frac{10\pi}{4+\pi}\ m$

Observamos que la base es doble que la altura del rectángulo.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Dibujemos en primer lugar la gráfica de la curva $y=\sqrt{x}$ y lo haremos a partir de la de x^2, cuya gráfica es una parábola de vértice el (0, 0). Por otro lado sabemos que la función inversa de x^2 para valores de $x\geq 0$ es la función $\sqrt{x}$ y las gráficas de ambas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.





La representación gráfica de lo anterior está situada a la izquierda.

La recta $y=bx$, es una recta de pendiente positiva ($b>0$) y por tanto su gráfica es creciente y pasa por el origen por tratarse de una función lineal.

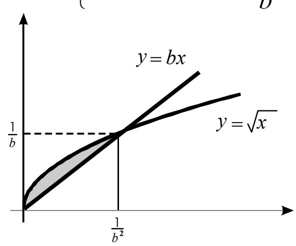
Calculemos los puntos en los que se cortan ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{x} \\ y=bx \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x}=bx \Rightarrow x=b^2x^2 \Rightarrow b^2x^2-x=0 \Rightarrow x\left(b^2x-1\right)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ b^2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{b^2} \end{array}\right.$$

$$y=bx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow \quad y=b\cdot 0=0 \Rightarrow (0,\,0) \\ x=\frac{1}{b^2} \Rightarrow y=b\cdot\frac{1}{b^2}=\frac{1}{b} \Rightarrow \left(0,\,\frac{1}{b}\right) \end{array}\right.$$

puntos que se encuentran dentro del dominio en el que están definidas ambas funciones.

El área del recinto limitado por ambas gráficas (que se encuentra dibujado y sombreado al lado) será el área de la región limitada por la gráfica de la función diferencia de ambas



funciones y las ordenadas en los puntos de abscisa 0 y $\frac{1}{b^2}$, es decir

$$\text{Área}=\int_0^{1/b^2}\left(\sqrt{x}-bx\right)dx=\int_0^{1/b^2}\left(x^{\frac{1}{2}}-bx\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-b\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/b^2}=\frac{\left(\frac{1}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-b\cdot\frac{\left(\frac{1}{b^2}\right)^2}{2}-(0-0)=\frac{\frac{1}{b^3}}{\frac{3}{2}}-b\cdot\frac{\frac{1}{b^4}}{2}=$$

$$=\frac{2}{3b^3}-\frac{1}{2b^3}=\frac{4-3}{6b^3}=\frac{1}{6b^3}\Rightarrow\ \frac{1}{6b^3}=\frac{4}{3}\Rightarrow\ 24b^3=3\Rightarrow\ b^3=\frac{3}{24}\Rightarrow\ b^3=\frac{1}{8}\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

donde al final hemos igualado el área a 4/3 de unidades de área, para calcular el valor de *b*.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Determinemos los valores de λ para los que la matriz *A* no tiene inversa o para los que sí tiene.

Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz *A*, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de *A*, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz *A* no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&\lambda&1&0&1&0\\0&-1&\lambda&0&0&1\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&\lambda&0&0&1\\0&\lambda&1&0&1&0\end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=-1\neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + $\lambda\cdot$ [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&\lambda&0&0&1\\0&0&1+\lambda^2&0&1&\lambda\end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente y no hay ninguna fila de ceros, salvo la 3ª en la que a_{33} puede ser o no cero. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33}=0 \Rightarrow 1+\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow$ no hay ningún valor de λ que haga cero a a_{33} o lo que es lo mismo, no hay ningún valor de λ que nos permita obtener una fila de ceros, es decir, no hay ningún valor de λ para el que *A* no tiene inversa, la matriz *A* siempre tendrá inversa para cualquier valor de λ.

* $a_{33}\neq 0 \Rightarrow 1+\lambda^2\neq 0 \Rightarrow \lambda^2\neq -1 \Rightarrow$ la matriz *A* siempre tendrá inversa para cualquier valor de λ.

(b) Calculemos, en primer lugar, la inversa de *A* para el valor de $\lambda=1$. Sustituyamos este valor en la matriz triangulada inferior obtenida en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&\lambda&0&0&1\\0&0&1+\lambda^2&0&1&\lambda\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&1&0&0&1\\0&0&1+1^2&0&1&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&1&0&0&1\\0&0&2&0&1&1\end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot [2^a f.] - [3^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-2&0&0&-1&1\\0&0&2&0&1&1\end{array}\right)$$

Dividamos la 2ª fila por -2.
Dividamos la 3ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz A, la matriz A^{-1}, es decir:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora para $\lambda = 1$, el sistema de ecuaciones $A^{-1} X A = B$.

Según el apartado (a), la matriz A tiene inversa para cualquier valor de λ, y por supuesto para $\lambda = 1$, y en este apartado (b) hemos calculado la matriz inversa de A para dicho valor de λ, por lo que tiene sentido operar con la matriz A^{-1}.

$A^{-1} X A = B \quad \Rightarrow \quad$ multipliquemos a la izquierda por la matriz A.
$A A^{-1} X A = A B \quad \Rightarrow \quad$ por la propiedad asociativa.
$(A A^{-1}) X A = A B \quad \Rightarrow \quad I X = A B \quad \Rightarrow \quad$ por la existencia de matriz identidad.
$X A = A B \quad \Rightarrow \quad$ multipliquemos a la derecha por la matriz A^{-1}.
$X A A^{-1} = A B A^{-1} \quad \Rightarrow \quad$ por la propiedad asociativa.
$X (A A^{-1}) = A B A^{-1} \quad \Rightarrow \quad X I = A B A^{-1} \quad \Rightarrow \quad$ por la existencia de matriz identidad.
$X = A B A^{-1}$

Calculemos ahora la matriz X.

$$X = ABA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0&1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1&1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0\\0\cdot0+1\cdot1+1\cdot0&0\cdot0+1\cdot0+1\cdot1&0\cdot1+1\cdot0+1\cdot0\\0\cdot0-1\cdot1+1\cdot0&0\cdot0-1\cdot0+1\cdot1&0\cdot1-1\cdot0+1\cdot0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}&0\cdot0-0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\\1\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&1\cdot0+1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}&1\cdot0-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}\\-1\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&-1\cdot0+1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}&-1\cdot0-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos, en primer lugar, la ecuación de la recta *r* en forma paramétrica, para ello resolveremos el sistema de ecuaciones que nos dan, poniéndolo en forma matricial y procediendo mediante el método de Gauss.

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ \quad z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
Nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2+y \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La solución es: $x = 2 + y$; $z = 0$

Sustituyamos la incógnita *y* por un parámetro, por ejemplo, $\lambda \in \mathbb{R}$, obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Elijamos un punto genérico *H* de la recta *r* que tendrá de coordenadas $(2+\lambda, \lambda, 0)$.

Construyamos el vector $\vec{PH}$ y hagamos coincidir su módulo con la distancia 3 para calcular qué puntos de la recta *r* su distancia al punto *P* es de 3 unidades.

$$\vec{PH} = (2+\lambda,\ \lambda,\ 0) - (1,\ -1,\ 1) = (1+\lambda,\ 1+\lambda,\ -1)$$

$$dist(P,H) = \left|\vec{PH}\right| \Rightarrow \sqrt{(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(-1)^2} = 3 \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(-1)^2}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow (1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(-1)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$1+\lambda^2+2\lambda+1+\lambda^2+2\lambda+1 = 9 \Rightarrow 2\lambda^2+4\lambda-6 = 0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda-3 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

sustituyamos cada uno de estos valores de λ en las coordenadas de *H*:

para $\lambda = 1 \Rightarrow (2+\lambda, \lambda, 0) \Rightarrow H_1(2+1, 1, 0) \Rightarrow H_1(3, 1, 0)$

para $\lambda = -3 \Rightarrow (2+\lambda, \lambda, 0) \Rightarrow H_2(2-3, -3, 0) \Rightarrow H_2(-1, -3, 0)$

hemos obtenido dos puntos, H_1 y H_2, de la recta *r* que distan 3 unidades de *P*.

(b) Calculemos, primeramente, el producto vectorial de los vectores $\vec{PA}$ y $\vec{PB}$

$$\vec{PA} = (1,\ 0,\ 0) - (1,\ -1,\ 1) = (0,\ 1,\ -1) \quad ; \quad \vec{PB} = (0,\ 0,\ 1) - (1,\ -1,\ 1) = (-1,\ 1,\ 0)$$

$$\vec{PA} \times \vec{PB} = (0,\ 1,\ -1) \times (-1,\ 1,\ 0) = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1,\ 1,\ 1)$$

El área del triángulo *ABP* será

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{PA} \times \vec{PB}\right| = \frac{1}{2}\left|(1,\ 1,\ 1)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{1}{2}.\sqrt{3}$$ unidades de área

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para que la función *f(x)* sea derivable en $\left(\frac{1}{e},4\right)$ tiene que ser continua en $\left[\frac{1}{e},4\right]$.

Calculemos el valor de a y de b para que la función sea, primeramente, continua.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función definido para los valores de x, $\frac{1}{e}\leq x<2$, es la suma de una función polinómica, $x+a$, y de una función logaritmo neperiano elemental, $\ln(x)$, la primera es continua en todo $\mathbb{R}$ y la segunda lo es en su dominio, $x > 0$, luego la función suma lo será en el dominio común, es decir, para valores de $x > 0$, luego la función f es continua para $\frac{1}{e}\leq x<2$.

- El trozo de función definido para los valores de x, $2 < x \leq 4$, es el de una función polinómica (afín) que es continua en todo $\mathbb{R}$, luego la función *f* es continua para $2<x\leq 4$.

- El problema de la continuidad está en el punto 2, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}}\left(x-\ln(x)+a\right)=2-\ln(2)+a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}}\left(bx+1-\ln(2)\right)=2b+1-\ln(2) \\ f(2)=2-\ln(2)+a\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \\ \\ 2-\ln(2)+a=2b+1-\ln(2)\ \Rightarrow\ a-2b=-1\end{array}\right.$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 2, si se verifica que: $a - 2b = -1$. [1]

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $\left[\frac{1}{e},4\right]$, siempre y cuando se satisfaga [1]

Estudiemos ahora la derivabilidad para los diversos valores de a y de b.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad.

- Para valores de $\frac{1}{e}<x<2$, *f* es derivable, por ser la suma de una función polinómica que lo es en todo $\mathbb{R}$, y la de una función logaritmo neperiano elemental que lo es en su dominio, siendo la derivada de este trozo de función, $1-\frac{1}{x}$.

- Para valores de $2<x\leq 4$, f es derivable, por ser una función polinómica que lo son en todo $\mathbb{R}$, siendo la derivada, b.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es:

$$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x} & \text{si} \quad \frac{1}{e}<x<2 \\ b & \text{si} \quad 2<x<4\end{cases}$$

- El problema está en el punto 2.

En el punto 2 será derivable, si las derivadas laterales coinciden y en este caso se debe satisfacer además la condición de continuidad [1].

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ f'(2^+)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}}(b)=b \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f'(2^-)=f'(2^+)\Rightarrow \\ \dfrac{1}{2}=b\Rightarrow\ b=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \qquad [2]$$

luego la función $f(x)$ será derivable en $x = 2$ siempre y cuando se verifiquen las condiciones [1] y [2] simultáneamente, para lo cual resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a-2b=-1 \\ b=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ a-2\cdot\frac{1}{2}=-1\ \Rightarrow\ \ a=0\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Para estos valores de a y de b, la función será derivable en $\left(\frac{1}{e},4\right)$.

La función derivada quedará finalmente, una vez sustituido a por 0 y b por $\frac{1}{2}$, así:

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}<x\leq 2 \\ b & \text{si} \quad 2<x<4 \end{cases}$$

(b) La función $f(x)$ y su primera derivada $f'(x)$ eran:

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ bx+1-\ln(2) & \text{si} \quad 2<x\leq 4 \end{cases} \quad ; \quad f'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}<x\leq 2 \\ b & \text{si} \quad 2<x<4 \end{cases}$$

Sustituyamos en estas funciones los valores de a por 0 y b por $\frac{1}{2}$, tendremos:

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln(x) & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ \dfrac{1}{2}x+1-\ln(2) & \text{si} \quad 2<x\leq 4 \end{cases} \quad ; \quad f'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}<x\leq 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 2<x<4 \end{cases}$$

Los extremos absolutos de esta función continua en $\left[\frac{1}{e},4\right]$ y derivable en $\left(\frac{1}{e},4\right)$, los localizaremos entre los máximos y mínimos relativos o locales (puntos de derivada cero) o en los extremos del intervalo.

Calculemos el valor o valores que anulan a la primera derivada.

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}<x\leq 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 2<x<4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1-\dfrac{1}{x}=0\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{x}=1\ \Rightarrow\ x=1\in\left[\dfrac{1}{e},2\right] \\ \dfrac{1}{2}\neq 0 \end{cases}$$

Para saber si este valor que anula a la 1ª derivada es máximo o mínimo relativo, recurriremos al estudio de la monotonía.

Con este valor, 1, que anula a la función primera derivada construimos los dos intervalos posibles de monotonía dentro de su dominio, el $\left(\frac{1}{e},1\right)$ y el $(1,2)$. Sustituiremos un valor intermedio de cada uno de esos intervalos, por ejemplo, el 0´5 y el 1´5, respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero en el intervalo correspondiente la gráfica de la función será creciente o decreciente.

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}< x\leq 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 2< x< 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0'5)=1-\dfrac{1}{0'5}=-1<0 \;\Rightarrow\; \text{Decreciente en } \left(\dfrac{1}{e},1\right) \\ f'(1'5)=1-\dfrac{1}{1'5}=\dfrac{1}{3}>0 \;\Rightarrow\; \text{Creciente en } (1,2) \end{cases}$$

En consecuencia, el valor que anulaba a la primera derivada, el 1, es un mínimo relativo. Los extremos absolutos de *f(x)* hemos dicho que los localizaremos entre los máximos y mínimos relativos o locales (puntos de derivada cero) o en los extremos del intervalo.

Calculemos la ordenada del mínimo relativo, $x = 1$.

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln(x) & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ \dfrac{1}{2}x+1-\ln(2) & \text{si} \quad 2< x\leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=1-\ln(1)=1-0=1 \;\Rightarrow \\ \end{cases}$$

La ordenada de este mínimo relativo es 1.

Obtengamos ahora las ordenadas en los extremos del intervalo $\left[\dfrac{1}{e},4\right]$. Primeramente en $\dfrac{1}{e}$.

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln(x) & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ \dfrac{1}{2}x+1-\ln(2) & \text{si} \quad 2< x\leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-\ln\left(e^{-1}\right)=\dfrac{1}{e}+1 \Rightarrow \\ \end{cases}$$

La ordenada en el extremo inferior del intervalo es $\dfrac{1}{e}+1$.

Calculemos la ordenada en el extremo superior 4.

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln(x) & \text{si} \quad \dfrac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ \dfrac{1}{2}x+1-\ln(2) & \text{si} \quad 2< x\leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ f(4)=\dfrac{1}{2}\cdot 4+1-\ln(2)=3-\ln(2) \end{cases}$$

La ordenada en el extremo superior del intervalo es $3 - \ln(2)$.

En consecuencia, si comparamos las ordenadas obtenidas, tendremos:

Mínimo absoluto en (1, 1).

Máximo absoluto en (4, 3 - ln(2)).

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos, inicialmente, la integral indefinida siguiente:

$$\int x\left(1-\ln(x)\right)dx=$$

la resolveremos haciendo uso del método de integración por partes.

$$u=1-\ln(x) \qquad du=-\frac{1}{x}dx$$

$$dv=x\,dx \qquad v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$$

$$=\left(1-\ln(x)\right)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx=\left(1-\ln(x)\right)\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int x\,dx=$$

$$=\left(1-\ln(x)\right)\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{4}=\frac{3}{4}x^2-\frac{x^2}{2}\ln(x)+k$$

Obtengamos ahora de toda esta familia de primitivas aquella cuya gráfica pasa por el punto (1, 1).

$$F(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{x^2}{2}\ln(x)+k \Rightarrow F(1)=\frac{3}{4}\cdot 1^2-\frac{1^2}{2}\ln(1)+k \Rightarrow 1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cdot 0+k \Rightarrow 1=\frac{3}{4}+k \Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

Luego la primitiva de f que pasa por el punto $P(1, 1)$ es:

$$F_1(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{1}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Estudiaremos el rango de la matriz A mediante el método de Gauss.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (2t+1) · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & t-1 \\ 0 & 2t+1 & t+3 \end{pmatrix}$$

Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [3ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & t-5 \\ 0 & 2t+1 & t+3 \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] + (2t+1) · [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & t-5 \\ 0 & 0 & 2t^2-6t+4 \end{pmatrix}$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 2t^2 - 6t + 4 = 0 \Rightarrow t=\dfrac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 2\cdot 4}}{2\cdot 2}=\dfrac{6\pm\sqrt{4}}{4}=\dfrac{6\pm 2}{4}=\begin{cases}2\\1\end{cases} \Rightarrow$ Para estos dos valores de t el rango de A es 2, ya que quedarían sólo dos filas linealmente independientes.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 2t^2 - 6t + 4 \neq 0 \Rightarrow t \neq 2$ y $t \neq 1 \Rightarrow$ Para todos estos otros valores de t el rango de la matriz A es tres.

(b) El sistema homogéneo $AX=0$ de tres ecuaciones con tres incógnitas tendrá más de una solución cuando tenga infinitas soluciones, es decir, cuando sea un sistema compatible indeterminado, para lo cual la matriz A deberá tener un rango menor que tres, y según hemos visto tendrá rango 2 cuando t tome los valores 2 o 1.

Cuando t tome valores distintos de 2 y de 1, el rango de la matriz A será tres y el sistema homogéneo $AX=0$ será un sistema compatible determinado pero que sólo admitirá la solución trivial, es decir, la solución $x = 0, y = 0$ y $z = 0$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) En primer lugar, expresamos la ecuación de la recta r en forma paramétrica, para ello, resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de los planos que determinan a la recta:

$r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ El sistema está triangulizado. Nos sobra una incógnita, la z que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-z \\ 0 & 1 & -z \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado. La solución del sistema es:

$x = 1 - z \quad ; \quad y = -z.$

Terminemos de despejar las incógnitas x e y, y sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto Q de la recta r será el $Q(1, 0, 0)$. Los puntos $P(1, 1, -1)$ y Q determinan un vector $\vec{PQ}$ de coordenadas:

$$\vec{PQ} = (1, 0, 0) - (1, 1, -1) = (0, -1, 1)$$

La ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r, será el que pasando por Q tiene como vectores de dirección el de la recta r y el $\vec{PQ}$.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = -\alpha - \beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$$

(b) Expresemos, en primer lugar, la ecuación del plano $y+z=0$, al que vamos a llamar π_1 en forma paramétrica; para ello, resolveremos el sistema formado por una ecuación, la del plano, y tres incógnitas:

$y+z=0$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las columnas 1ª y 3ª.

$\begin{array}{ccc} (z) & (y) & (x) \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ El sistema está triangulizado. Nos sobran dos incógnitas, la y y la x que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

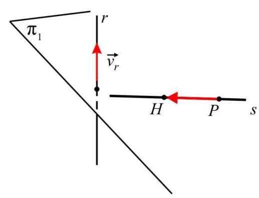
(z)

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -y \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado. La solución del sistema es:

$z = -y.$

Sustituyamos las incógnitas secundarias, x e y, por sendos parámetros, por ejemplo, por γ y $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = \gamma \\ y = \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$



Elijamos un punto H genérico del plano π_1 que tendrá de coordenadas: $H(\gamma, \mu, -\mu)$

Construyamos el vector $\vec{PH}$ que tendrá de coordenadas:

$\vec{PH} = (\gamma,\ \mu,\ -\mu) - (1,\ 1,\ -1) = (\gamma - 1,\ \mu - 1,\ -\mu + 1)$

Impongamos a este vector que sea perpendicular al vector de dirección de la recta r, $\vec{v}_r$

$\vec{PH} \perp \vec{v}_r \;\Rightarrow\; \vec{PH} \bullet \vec{v}_r = 0 \;\Rightarrow\; (\gamma - 1,\ \mu - 1,\ -\mu + 1) \bullet (-1,\ -1,\ 1) = 0 \;\Rightarrow$

$(\gamma - 1,\ \mu - 1,\ -\mu + 1) \bullet (-1,\ -1,\ 1) = 0 \;\Rightarrow\; -\gamma + 1 - \mu + 1 - \mu + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = 3 - 2\mu$

Sustituyamos este valor de γ en las coordenadas del vector $\vec{PH}$

$\vec{PH} = (\gamma - 1,\ \mu - 1,\ -\mu + 1) = (3 - 2\mu - 1,\ \mu - 1,\ -\mu + 1) = (2 - 2\mu,\ \mu - 1,\ -\mu + 1)$

Hemos obtenido muchos vectores $\vec{PH}$ todos con la misma dirección, pero sólo necesitamos uno, por lo que basta sustituir un valor para μ, por ejemplo, por 0 y obtendremos un vector de dirección de la recta que me pide el problema y a la que llamaremos s.

$\vec{PH} = (2 - 2\mu,\ \mu - 1,\ -\mu + 1) \;\Rightarrow\; \vec{PH} = (2 - 2 \cdot 0,\ 0 - 1,\ -0 + 1) \;\Rightarrow\; \vec{PH} = (2,\ -1,\ 1)$

La ecuación de la recta s que pasa por P, está contenida en el plano π_1 y es perpendicular a r es la ecuación de la recta que pasa por $P(1,\ 1,\ -1)$ y su vector de dirección es el $(2,\ -1,\ 1)$:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\delta \\ y = 1 - \delta \\ z = -1 + \delta \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 73 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1, 0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y=-3x+3$.

EJERCICIO 2. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=4-3|x| \quad \text{y} \quad g(x)=x^2$$

(a) [1 PUNTO]. Esboza las gráficas de f y g. Determina sus puntos de corte.
(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

EJERCICIO 3. Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A-B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

(a) [1 PUNTO]. Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y A^2-B^2.

(b) [1´5 PUNTOS]. Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$.

EJERCICIO 4. Sea el punto $P(2, 3, -1)$ y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

(a) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P.
(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula la distancia del punto P a la recta r y determina el punto simétrico de P respecto de r.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y=-x^2+3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

[**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS]. Calcula:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$$

EJERCICIO 3. Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) [1 PUNTO]. Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

(b) [1´5 PUNTOS]. Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX=2X+I$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Considera los planos π_1 y π_2 dados respectivamente por las ecuaciones

$$(x,\ y,\ z)=(-2,\ 0,\ 7)+\lambda(1,\ -2,\ \ 0)+\mu(0,\ 1,\ -1) \quad \text{y} \quad 2x+y-z+5=0$$

Determina los puntos de la recta r definida por $x=y+1=\dfrac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Como la gráfica de la función polinómica $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ tiene un punto de inflexión en (1, 0), se cumplirá que:

- $f(1) = 0$ por pertenecer el punto (0, 1) a la gráfica de la función f.
- $f''(1) = 0$ y $f'''(1) \neq 0$ por ser el punto (1, 0) un punto de inflexión.

Calculemos las derivadas sucesivas de f y apliquemos las condiciones anteriores.

Tendremos en cuenta que las funciones polinómicas son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow$

$f''(x) = 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = 6a$

Apliquemos ahora las citadas condiciones:

$f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 1$ [1]

$f''(1)=0 \quad \Rightarrow \quad 6a\cdot 1+2b=0 \quad \Rightarrow \quad 6a+2b=0$ [2]

$f'''(1)=6a \quad \Rightarrow \quad 6a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad a\neq 0$

esta última condición es evidente que se satisface ya que la función es polinómica de grado tres y por tanto el coeficiente del término de grado tres, a, tiene que ser distinto de cero.

La segunda condición que se verifica, según el problema, es que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$ tiene por ecuación $y=-3x+3$, o lo que es lo mismo que la recta tangente tiene de pendiente -3, lo que implica que $f'(1)=-3$, o sea:

· $f'(1)=-3 \quad \Rightarrow \quad 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-3 \quad \Rightarrow \quad 3a+2b+c=-3$ [3]

Resolvamos ahora el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que forman las ecuaciones [1], [2] y [3] que se han obtenido.

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ 6a+2b=0 \\ 3a+2b+c=-3 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=1\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 6 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=-4\neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: -4 · [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right)$$

Dividamos la 2ª fila por -2.
Dividamos la 3ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33}=1\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=2\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es: $2a=6$; $2b=-18$; $c=6$ $\Rightarrow$
$a=3$; $b=-9$; $c=6$.

Los valores de a, b y c, finalmente son: $a=3$; $b=-9$; $c=6$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

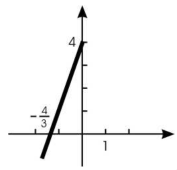
(a) Representemos en primer lugar la gráfica de $f(x)=4-3|x|$, pero expresemos esta función como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} 4-3(-x) & \text{si } x<0 \\ 4-3x & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3x+4 & \text{si } x<0 \\ -3x+4 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Dibujemos el primer trozo, $3x+4$, para los valores de $x<0$. Se trata de una función afín cuya gráfica es una recta, calculemos sus puntos de corte con los ejes coordenados.

Con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y=3x+4 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$$

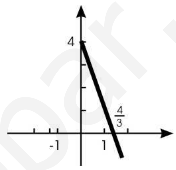


Con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{l} y=3x+4 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=3\cdot 0+4=4 \quad \Rightarrow \quad (0, 4)$$

Este trozo está dibujado al lado.

Representemos el segundo trozo, $-3x+4$, para los valores de $x \geq 0$. Obtengamos igual que antes los puntos de corte con los ejes coordenados:



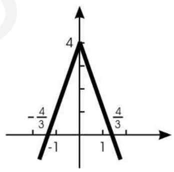
Con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y=-3x+4 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -3x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

Con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{l} y=-3x+4 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=-3\cdot 0+4=4 \quad \Rightarrow \quad (0, 4)$$

Este trozo está dibujado encima de este párrafo.



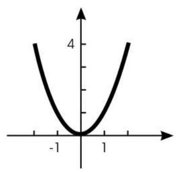
La gráfica de *f(x)* se encuentra representada al lado.

Dibujemos ahora la gráfica $g(x)=x^2$. Se trata de una parábola:

abscisa del vértice $= \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2} = 0$

ordenada del vértice $= 0^2 = 0$

Luego el vértice V tiene de coordenadas (0, 0).



Otros puntos de interés son el (1, 1) y el (-1, 1) ya que se trata de una función elemental.

Su gráfica se encuentra dibujada al lado.

Calculemos los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*.

Primeramente para los valores de $x<0$.

$$\left.\begin{array}{l} y=3x+4 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2=3x+4 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x-4=0 \quad \Rightarrow$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases} x=4>0 \quad \Rightarrow \quad \text{NO} \\ x=-1<0 \quad \Rightarrow \quad (-1, 1) \end{cases}$$

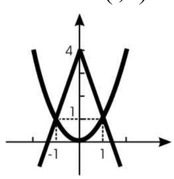
Ahora para los valores de $x \geq 0$.

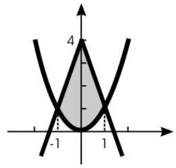
$$\left.\begin{array}{l} y=-3x+4 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2=-3x+4 \quad \Rightarrow \quad x^2+3x-4=0 \quad \Rightarrow$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}=\begin{cases} x=-4<0 \quad \Rightarrow \quad \text{NO} \\ x=1>0 \quad \Rightarrow \quad (1, 1) \end{cases}$$

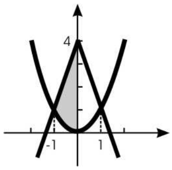
Luego los puntos de corte de ambas funciones son el (1, 1) y el (-1, 1).

La situación gráfica se encuentra representada al lado.





(b) El recinto limitado por ambas gráficas se corresponde con la zona sombreada en el gráfico situado a la derecha.



Para calcular el área del recinto anterior, calcularemos el de este otro recinto, situado a la izquierda, y el resultado lo multiplicamos por dos, ya que ambas gráficas son simétricas respecto del eje de ordenadas.

$$\int_{-1}^{0}\left(3x+4-x^2\right)dx=\left[3\cdot\frac{x^2}{2}+4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left(3\cdot\frac{0^2}{2}+4\cdot 0-\frac{0^3}{3}\right)-\left(3\cdot\frac{(-1)^2}{2}+4\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=0-\left(\frac{3}{2}-4+\frac{1}{3}\right)=-\left(\frac{9-24+2}{6}\right)=\frac{13}{6}$$

El área será: $\frac{13}{6}\cdot 2=\frac{13}{3}$ unidades de área.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos la matriz $(A+B)(A-B)$, sabiendo que:

$$A+B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}\qquad \text{y}\qquad A-B=\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot2+2\cdot(-1)&4\cdot4+2\cdot2\\3\cdot2+2\cdot(-1)&3\cdot4+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&20\\4&16\end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la matriz A^2-B^2.

Procederemos de la siguiente manera.

$$A+B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}\qquad [1]$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}$$

Sumemos miembro a miembro ambas igualdades.

$$A+B+A-B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow 2A=\begin{pmatrix}6&6\\2&4\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}3&3\\1&2\end{pmatrix}$$

Sustituyamos este valor de A en [1]

$$A+B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}-A\Rightarrow B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}$$

Calculemos ahora, A^2-B^2.

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&3\\1&2\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&3\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot3+3\cdot1&3\cdot3+3\cdot2\\1\cdot3+2\cdot1&1\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\cdot1-1\cdot2&1\cdot(-1)+(-1)\cdot0\\2\cdot1+0\cdot2&2\cdot(-1)+0\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12&15\\5&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-1\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&16\\3&9\end{pmatrix}$$

(b) Resolvamos la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$.

$XA - XB - (A+B)^t = 2I$ usamos la propiedad distributiva.

$X(A - B) - (A+B)^t = 2I$ sumamos a ambos miembros la matriz $(A+B)^t$.

$X(A - B) - (A+B)^t + (A+B)^t = 2I + (A+B)^t$

usamos la propiedad de elemento neutro respecto de la suma.

$X(A - B) + O = 2I + (A+B)^t \quad \Rightarrow$

$X(A - B) = 2I + (A+B)^t$ multiplicamos a la derecha por la inversa de $A-B$, $(A-B)^{-1}$. siempre que demostremos que exista (lo veremos después).

$X(A - B)\cdot(A-B)^{-1} = (2I+(A+B)^t)\cdot(A-B)^{-1}$

usamos la propiedad de la matriz inversa.

$X\cdot I = (2I+(A+B)^t)\cdot(A-B)^{-1}$

usamos la propiedad del elemento unidad (matriz identidad)

$X = (2I+(A+B)^t)\cdot(A-B)^{-1}$.

Antes de calcular la matriz X, veamos si existe la matriz inversa, $(A-B)^{-1}$, y si existe obtengámosla. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz $A-B$, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de $A-B$, $(A-B)^{-1}$. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz $A-B$ no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot [2^a f.] + [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz $A-B$ admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 8 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] - [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 4.
Dividamos la 2ª fila por 8.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de $A-B$, $(A-B)^{-1}$, es decir:

$$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz X.

$$X = \left(2I + (A+B)^t\right)\cdot(A-B)^{-1} = \left(2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 6\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8} & 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\cdot\frac{1}{4} \\ 2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8} & 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot\frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{9}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a r, elegiremos el vector de dirección de ésta y lo haremos coincidir con el vector normal al plano que me piden, ya que es la condición para que el plano y la recta sean perpendiculares.

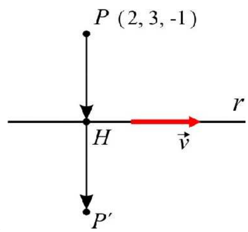
El vector de dirección de la recta r es el $(0, -2, 1)$, y que como dijimos al principio, podemos tomarlo como el vector normal al plano que nos pide el problema; sustituyamos las coordenadas de este vector por los coeficientes de las incógnitas en la ecuación general del plano:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad\Rightarrow\quad 0\cdot x-2y+z+D=0$$

Impongamos ahora la condición a este plano de que pase por el punto $P(2, 3, -1)$:

$$-2y+z+D=0 \quad\Rightarrow\quad -2\cdot 3-1+D=0 \quad\Rightarrow\quad D=7$$

La ecuación del plano que nos piden, finalmente es: $-2y+z+7=0$



(b) La ecuación de la recta r en forma paramétrica es:

$$r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

El vector de dirección de la recta r es $\vec{v}=(0,\ -2,\ 1)$.

Sea H la proyección del punto $P=(2, 3, -1)$ sobre la recta r, se cumple la condición de que el vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ de dirección de la recta, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto H por pertenecer a la recta tendrá de coordenadas $(1, -2\lambda, \lambda)$.

El vector $\overrightarrow{PH}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{PH}=(1,\ -2\lambda,\ \lambda)-(2,\ 3,\ -1)=(-1,\ \ -2\lambda-3,\ \ \lambda+1)$$

El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PH}$ y $\vec{v}$ es cero:

$$\overrightarrow{PH}\bullet\vec{v}=0 \;\Rightarrow\; (-1,\ -2\lambda-3,\ \lambda+1)\bullet(0,-2,1)=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 4\lambda+6+\lambda+1=0 \;\Rightarrow\; 5\lambda+7=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-\frac{7}{5}$$

Sustituyamos λ en el punto H y en el vector $\overrightarrow{PH}$:

$$H=(1,\ \ -2\lambda,\ \lambda)=\left(1,\ \ -2\cdot\left(-\frac{7}{5}\right),\ \ -\frac{7}{5}\right)=\left(1,\ \frac{14}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{PH}=(-1,\ \ -2\lambda-3,\ \ \lambda+1)=\left(-1,\ \ -2\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)-3,\ \ -\frac{7}{5}+1\right)=\left(-1,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$$

La distancia del punto P a la recta r coincidirá con el módulo del vector $\vec{PH}$:

dist $(P, r) = \left|\vec{PH}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{30}{25}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$ unidades de longitud

El punto $P'=(a, b, c)$, simétrico del P respecto de r, verifica que $\vec{PH} = \vec{HP'}$, es decir:

$$\vec{PH} = \vec{HP'} \Rightarrow \left(-1,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right) = (a,b,c) - \left(1,\ \frac{14}{5},\ -\frac{7}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\left(-1,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right) = \left(a-1,\ b-\frac{14}{5},\ c+\frac{7}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1 = a-1 \\ -\frac{1}{5} = b - \frac{14}{5} \\ -\frac{2}{5} = c + \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{13}{5} \\ c = -\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow P' = \left(0,\ \frac{13}{5},\ -\frac{9}{5}\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Dibujemos en primer lugar la gráfica de la función $y = -x^2 + 3$ que se corresponde con la de una parábola.

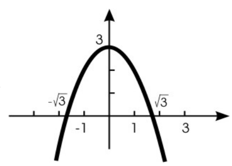
1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{matrix} y = -x^2 + 3 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = -x^2 + 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{3},\ 0\right) \\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow \left(-\sqrt{3},\ 0\right) \end{cases}$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

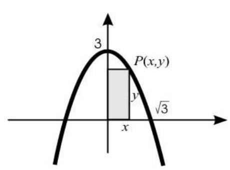
$y = - x^2 + 3 \Rightarrow y = - 0^2 + 3 = 3 \Rightarrow$ el punto es el (0, 3).

2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{0}{-2} = 0$, siendo la ordenada: $y = - x^2 + 3 \Rightarrow y = - 0^2 + 3 = 3$, por tanto, el máximo es el punto (0, 3).



La gráfica se encuentra situada a la derecha.

Llamemos x al lado del rectángulo situado sobre el eje de abscisas, es decir, a la base. La altura de dicho rectángulo se corresponderá con la ordenada del punto de la parábola que tiene de abscisa x, es decir, y.



Construyamos la función área, teniendo en cuenta que es el producto de la base por la altura.

$$A = x \cdot y$$

La relación entre los lados del rectángulo es la que hemos dicho antes: $y = -x^2 + 3$.

Sustituyamos este valor en la función área.

$$A(x) = x \cdot \left(-x^2 + 3\right) \quad \Rightarrow \quad A(x) = -x^3 + 3x$$

Se trata de una función polinómica, continua y derivable en todo su dominio, que es el intervalo abierto $\left(0, \sqrt{3}\right)$. Intervalo que fácilmente podemos deducir a partir del enunciado del problema (el rectángulo está representado en el primer cuadrante) y de la representación gráfica de la función $y = -x^2 + 3$.

Calculemos el máximo relativo o local, dentro del citado dominio.

$$A'(x) = -3x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in \left(0, \sqrt{3}\right) \\ x = -1 \notin \left(0, \sqrt{3}\right) \end{cases}$$

$A''(x) = -6x \quad \Rightarrow \quad A''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0 \quad \Rightarrow$ luego hay un máximo relativo en $x=1$.

Justifiquemos que este máximo relativo es absoluto; lo haremos estudiando la monotonía. Teniendo en cuenta que el valor, $x=1$, es el único que anula a la función primera derivada y que el dominio es el intervalo $\left(0, \sqrt{3}\right)$, construimos los intervalos de monotonía: $(0, 1)$ y $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

Probamos valores intermedios de dichos intervalos, por ejemplo, 0´5 y 1´5, respectivamente en la función primera derivada.

$A'(0'5) = -3 \cdot 0'5^2 + 3 = 2'25 > 0 \quad \Rightarrow$ Creciente en $(0, 1)$.

$A'(1'5) = -3 \cdot 1'5^2 + 3 = -3'75 < 0 \quad \Rightarrow$ Decreciente en $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

Luego el máximo relativo es máximo absoluto, por lo que las dimensiones del rectángulo de área máxima es el de base, $x=1$, y altura, $y=2$, ya que: $y = -x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad y = -1^2 + 3 = 2$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la integral siguiente.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x)\, dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$

$$dv = \cos(x)\, dx \quad ; \quad v = \int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x)\, dx = \left[x \operatorname{sen}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\, dx = \left[x \operatorname{sen}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 \cdot \operatorname{sen}(0) - \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos(0)\right)\right] = \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 - \left[0 - (-1)\right] = \frac{\pi}{2} - 1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Determinemos los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa.

Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz $A-2I$ la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de $A-2I$, $(A-2I)^{-1}$. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula o alguno de los elementos de la diagonal principal fuera cero entonces la matriz $A-2I$ no tendría matriz inversa.

Pero antes calculemos la matriz $A-2I$.

$$A-2I=\begin{pmatrix}3&0&\lambda\\-5&\lambda&-5\\\lambda&0&3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&\lambda\\-5&\lambda&-5\\\lambda&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\-5&\lambda-2&-5\\\lambda&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\lambda&1&0&0\\-5&\lambda-2&-5&0&1&0\\\lambda&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=1\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 5 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - λ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\lambda&1&0&0\\0&\lambda-2&-5+5\lambda&5&1&0\\0&0&1-\lambda^2&-\lambda&0&1\end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente y no hay ninguna fila de ceros, salvo la 2ª o la 3ª en la que a_{22} o a_{33} puede ser o no cero. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33}=0 \Rightarrow 1-\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=1$ y $\lambda=-1$. Para estos dos valores de λ la matriz $A-2I$ no tendría inversa, pues aparece una fila de ceros.

* $a_{22}=0 \Rightarrow \lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=2$. Para este otro valor de λ la matriz $A-2I$ tampoco tendría inversa, porque ya no podríamos obtener la matriz unidad a la izquierda.

* $a_{22}\neq 0$ y $a_{33}\neq 0 \Rightarrow \lambda\neq 2$ y $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -1 \Rightarrow$ para todos los valores de λ distintos de -1, 1 y 2 la matriz $A-2I$ tendría inversa.

(b) Resolvamos la ecuación matricial $AX=2X+I$, para $\lambda=-2$.

$AX=2X+I$ sumamos a ambos miembros la matriz $-2X$.
$AX-2X=2X-2X+I$ usamos la propiedad distributiva.
$(A-2I)\cdot X=2X-2X+I$ usamos la propiedad de elemento simétrico respecto de la suma.
$(A-2I)\cdot X=O+I$ usamos la propiedad de elemento neutro respecto de la suma.
$(A-2I)\cdot X=I$ multiplicamos a la izquierda por la inversa de $A-2I$, $(A-2I)^{-1}$
$(A-2I)^{-1}\cdot(A-2I)\cdot X=(A-2I)^{-1}\cdot I$ usamos la propiedad de la matriz inversa.
$I\cdot X=(A-2I)^{-1}\cdot I$ usamos la propiedad de matriz identidad respecto del producto.
$X=(A-2I)^{-1}$ $\Rightarrow$ esta matriz inversa hemos demostrado en el párrafo anterior que existe para $\lambda=-2$.

La calcularemos mediante el método de Gauss, y para ello continuamos a partir de la matriz triangulada inferior del párrafo anterior sustituyendo λ por -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\lambda&1&0&0\\0&\lambda-2&-5+5\lambda&5&1&0\\0&0&1-\lambda^2&-\lambda&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&-2-2&-5+5(-2)&5&1&0\\0&0&1-(-2)^2&2&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 5 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 ·[1ªf.] - 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 3.
Dividamos la 2ª fila por -4.
Dividamos la 3ª fila por -3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz $A-2I$, la matriz $(A-2I)^{-1}$, o lo que es lo mismo, la matriz X que queríamos calcular, es decir:

$$(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = X$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica.

$$x = y+1 = \frac{z-1}{-3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1+\alpha \\ z = 1-3\alpha \end{cases} \quad \text{para } \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

Expresemos la ecuación del plano π_1 en forma general.

$$\pi_1 \equiv (x,\ y,\ z) = (-2,\ 0,\ 7) + \lambda\,(1,\ -2,\ \ 0) + \mu\,(0,\ 1,\ -1) \Rightarrow \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = -2\lambda+\mu \\ z = 7-\mu \end{cases}$$

Procedamos a la eliminación lineal de los parámetros λ y μ.

$$\begin{cases} \lambda \qquad = x+2 \\ -2\lambda + \mu = y \\ \qquad -\mu = z-7 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+2 \\ -2 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-7 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+2 \\ 0 & 1 & 2x+y+4 \\ 0 & -1 & z-7 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+2 \\ 0 & 1 & 2x+y+4 \\ 0 & 0 & 2x+y+z-3 \end{array}\right)$$

Como el sistema es compatible la tercera ecuación debe ser trivial, por lo que la condición $2x+y+z-3=0$, sería la ecuación general del plano π_1.

Elijamos un punto genérico, P, de la recta; tendrá de coordenadas $(\alpha,\ -1+\alpha,\ 1-3\alpha)$.

La ecuación de cada uno de los planos en forma general es la siguiente.

$$\pi_1 \equiv 2x+y+z-3=0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv 2x+y-z+5=0$$

Impongamos la condición al punto P de estar a igual distancia de uno y otro plano:

$$\text{dist}(P,\pi_1)=\text{dist}(P,\pi_2) \Rightarrow \left|\frac{2\cdot\alpha+(-1+\alpha)+(1-3\alpha)-3}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{2\cdot\alpha+(-1+\alpha)-(1-3\alpha)+5}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\frac{2\alpha-1+\alpha+1-3\alpha-3}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{2\alpha-1+\alpha-1+3\alpha+5}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}\right| \Rightarrow \left|\frac{-3}{\sqrt{6}}\right| = \left|\frac{6\alpha+3}{\sqrt{6}}\right| \Rightarrow$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \left|\frac{6\alpha+3}{\sqrt{6}}\right| \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{|6\alpha+3|}{\sqrt{6}} \Rightarrow 3 = |6\alpha+3|$$

esta última ecuación, al ser en valor absoluto, da lugar a dos ecuaciones:

$$3 = 6\alpha+3 \Rightarrow 6\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$$

$$3 = -(6\alpha+3) \Rightarrow 3=-6\alpha-3 \Rightarrow 6\alpha=-6 \Rightarrow \alpha=-1$$

Para cada uno de estos valores de α obtenemos un punto de la recta que equidista de ambos planos:

$\alpha=0 \Rightarrow P(\alpha,\ -1+\alpha,\ 1-3\alpha) \Rightarrow P_1(0,\ -1+0,\ 1-3\cdot 0) \Rightarrow P_1(0,\ -1,\ 1)$

$\alpha=-1 \Rightarrow P(\alpha,\ -1+\alpha,\ 1-3\alpha) \Rightarrow P_2(-1,\ -1-1,\ 1-3\cdot(-1)) \Rightarrow P_2(-1,\ -2,\ 4)$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 74 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula un número positivo a, menor que 2, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\frac{1}{2}x^2$ y las dos rectas horizontales de ecuaciones $y=a$ e $y=2,$ tenga un área de $\frac{14}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y+4z=4 \\ 2x \qquad +z=a \\ -3x-3y+3z=-3 \end{array}\right\}$$

(a) [1´75 PUNTOS]. Discútelo según los valores del parámetro a.
(b) [0´75 PUNTOS]. Resuélvelo cuando sea posible.

EJERCICIO 4. Dada la recta r definida por $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=-z+3$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.
(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión

$$\frac{400x}{x-30}$$

Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

EJERCICIO 2. Dada la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-2x^2+3x-1$

(a) [0´5 PUNTOS]. Prueba que las rectas $y=-x+1$ e $y=3x-1$ son tangentes a su gráfica.

(b) [2 PUNTOS]. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas mencionadas en el apartado anterior.

EJERCICIO 3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

(a) [1 PUNTO]. Demuestra que $A^2+2A=I$ y que $A^{-1}=A+2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula la matriz X que verifica la ecuación $A^2+XA+5A=4I$.

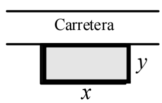
EJERCICIO 4. Dada la recta r definida por $\frac{x+7}{2}=\frac{y-7}{-2}=z$ y la recta s definida por $\begin{cases}x=2\\ y=-5\\ z=\lambda\end{cases}$

(a) [1´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.

(b) [0´75 PUNTOS]. Calcula la distancia entre r y s.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



La situación que nos plantea el problema está representada al lado.

Llamemos x al lado del cercado rectangular que está junto a la carretera y al lado paralelo, e y a cada uno de los otros dos lados del rectángulo.

Construyamos la función área, teniendo en cuenta que es el producto de la base por la altura.

$$A = x\cdot y$$

La relación entre los lados del rectángulo y el coste total del cercado, teniendo en cuenta el precio de cada metro según el lado donde se encuentre, es la siguiente:

$$3000=100\cdot x+10\cdot x+10\cdot y+10\cdot y \quad\Rightarrow\quad 3000=110x+20y \quad\Rightarrow\quad 300=11x+2y$$

Despejemos y en función de x.

$$2y = 300 - 11x \;\Rightarrow\; y = \frac{300 - 11x}{2} \;\Rightarrow\; y = 150 - \frac{11}{2}x$$

Sustituyamos este valor en la función área.

$$A(x) = x \cdot \left(150 - \frac{11}{2}x\right) \;\Rightarrow\; A(x) = -\frac{11}{2}x^2 + 150x$$

Se trata de una función polinómica, continua y derivable en todo su dominio. El dominio lo vamos a calcular a partir de su gráfica que se corresponde con la de una parábola.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{11}{2}x^2 + 150x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 0 = -\frac{11}{2}x^2 + 150x \;\Rightarrow\; x\left(-\frac{11}{2}x + 150\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \qquad\qquad\qquad \Rightarrow\; (0, 0) \\ -\frac{11}{2}x + 150 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{300}{11} \;\Rightarrow\; \left(\frac{300}{11}, 0\right) \end{array}\right.$$

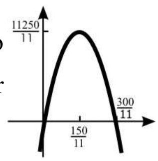
- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{11}{2}x^2 + 150x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; y = -\frac{11}{2}\cdot 0^2 + 150\cdot 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; (0, 0)$$

2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-150}{2\left(-\frac{11}{2}\right)} = \frac{150}{11}$, siendo la ordenada:

$$y = -\frac{11}{2}x^2 + 150x \;\Rightarrow\; y = -\frac{11}{2}\left(\frac{150}{11}\right)^2 + 150\cdot\frac{150}{11} \;\Rightarrow\; y = \frac{11250}{11} \;\Rightarrow\; \left(\frac{150}{11}, \frac{11250}{11}\right)$$

La gráfica se encuentra situada a la derecha.



En consecuencia podemos deducir que el dominio es el intervalo abierto $\left(0, \frac{300}{11}\right)$. Ya que los valores que han de tomar la x y el área deben ser positivos.

Calculemos el máximo relativo o local, dentro del citado dominio.

$$A(x) = -\frac{11}{2}x^2 + 150x \;\Rightarrow\; A'(x) = -11x + 150 \;\Rightarrow\; -11x + 150 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{150}{11}$$

$$A''(x) = -11 \;\Rightarrow\; A''\left(\frac{150}{11}\right) = -11 < 0 \;\Rightarrow\; \text{luego hay un máximo relativo en } x = \frac{150}{11}.$$

Justifiquemos que este máximo relativo es absoluto; lo haremos estudiando la monotonía. Teniendo en cuenta que el valor de x calculado es el único que anula a la función primera derivada y que el dominio es el intervalo $\left(0, \frac{300}{11}\right)$, construimos los dos intervalos de monotonía siguientes: $\left(0, \frac{150}{11}\right)$ y $\left(\frac{150}{11}, \frac{300}{11}\right)$.

Probamos valores intermedios de dichos intervalos, por ejemplo, 1 y 20, respectivamente en la función primera derivada.

$$A'(x) = -11x + 150 \;\Rightarrow\; A'(1) = -11\cdot 1 + 150 = 139 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Creciente en } \left(0, \frac{150}{11}\right)$$

$$A'(x) = -11x + 150 \Rightarrow A'(20) = -11\cdot 20 + 150 = -70 < 0 \Rightarrow \text{Decreciente en}\left(\frac{150}{11}, \frac{300}{11}\right).$$

Luego el máximo relativo es máximo absoluto, por lo que las dimensiones del cercado rectangular de área máxima es el que tiene de lados:

$$x = \frac{150}{11} \quad ; \quad y = 150 - \frac{11}{2}x \Rightarrow y = 150 - \frac{11}{2}\cdot\frac{150}{11} \Rightarrow y = 150 - 75 \Rightarrow y = 75$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Representemos en primer lugar la gráfica de la función elemental $y = \frac{1}{2}x^2$ que es una parábola.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

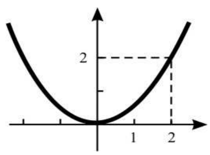
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x=0$. Basta sustituir $x=0$ en la función:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\cdot 0^2 = 0 \Rightarrow \text{el punto es el } (0, 0).$$

2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-0}{2} = 0$, siendo la ordenada:

$y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\cdot 0^2 = 0$, por tanto, el mínimo es el punto (0, 0).



La gráfica es la que se encuentra situada a la derecha.

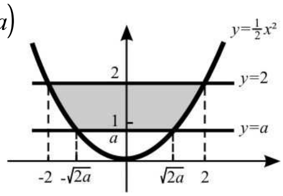
Representemos la recta horizontal de ecuación $y = 2$, y la recta $y = a$, con a mayor que cero y menor de 2, que nos permita construir el recinto limitado por la parábola y las dos rectas, $y=a$ e $y=2$, con un área igual a $\frac{14}{3}$ unidades cuadradas.

Los puntos de corte de la parábola con la recta $y=2$ son:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow (2, 2) \\ x = -2 \Rightarrow (-2, 2) \end{cases}$$

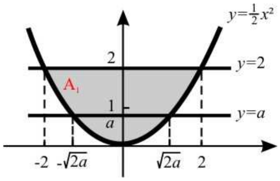
Los puntos de corte de la parábola con la recta, $y=a$, son:

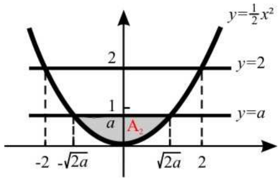
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = a \Rightarrow x^2 = 2a \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2a} \Rightarrow \left(\sqrt{2a}, a\right) \\ x = -\sqrt{2a} \Rightarrow \left(-\sqrt{2a}, a\right) \end{cases}$$

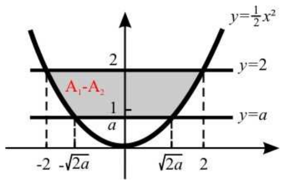


La situación gráfica está representada al lado, y donde el recinto es el que se encuentra sombreado.

En los dibujos que hay a continuación podemos observar las dos regiones cuyas áreas vamos a calcular, de manera que la diferencia de ambas será el área buscada.







Calculemos el área A_1 encerrada por la curva $y=\frac{1}{2}x^2$ y la recta $y=2$, para ello integraremos la función diferencia entre -2 y 2:

$$A_1=\int_{-2}^{2}\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2}=2\cdot 2-\frac{2^3}{6}-\left(2\cdot(-2)-\frac{(-2)^3}{6}\right)=4-\frac{8}{6}-\left(-4+\frac{8}{6}\right)=\frac{16}{6}-\left(-\frac{16}{6}\right)=\frac{16}{3}$$

Calculemos ahora el área A_2 encerrada por la curva $y=\frac{1}{2}x^2$ y la recta $y=a$, para ello integraremos la función diferencia entre $-\sqrt{a}$ y $\sqrt{a}$:

$$A_2=\int_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}}\left(a-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[ax-\frac{x^3}{6}\right]_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}}=a\sqrt{2a}-\frac{\left(\sqrt{2a}\right)^3}{6}-\left(-a\sqrt{2a}-\frac{\left(-\sqrt{2a}\right)^3}{6}\right)=$$

$$=a\sqrt{2a}-\frac{2a\sqrt{2a}}{6}+a\sqrt{2a}-\frac{2a\sqrt{2a}}{6}=\left(1-\frac{2}{6}+1-\frac{2}{6}\right)a\sqrt{2a}=\frac{4}{3}a\sqrt{2a}$$

Luego el área pedida será:

$$\text{Área}=A_1-A_2=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}a\sqrt{2a}$$

Pero esta área debe ser de $\frac{14}{3}$ unidades de área, por lo que igualaremos el resultado obtenido anteriormente con este valor:

$$\frac{16}{3}-\frac{4}{3}a\sqrt{2a}=\frac{14}{3}\ \Rightarrow\ -\frac{4}{3}a\sqrt{2a}=\frac{14}{3}-\frac{16}{3}\ \Rightarrow\ -\frac{4}{3}a\sqrt{2a}=-\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ a\sqrt{2a}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow$$

$$\sqrt{2a^3}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{2a^3}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\ \Rightarrow\ 2a^3=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ a^3=\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ a=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{2}$$

El valor de a que nos pide el ejercicio es $\frac{1}{2}$. Valor positivo y menor que 2.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el sistema de ecuaciones mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual lo expresamos en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y+4z=4 \\ 2x\qquad\ +z=a \\ -3x-3y+3z=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ -3 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=2\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & a-4 \\ 0 & -12 & 18 & 6 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la fila 1ª por 2.
Simplifiquemos la fila 3ª por 6.

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & a-4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=2\neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] +[2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que lo es. Observamos la 3ª ecuación y analizaremos los diferentes casos que pueden presentarse.

La tercera ecuación es: $0 = a - 3$.

* Si $0 = a - 3 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería $0 = 0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

* Si $0 \neq a - 3 \Rightarrow a \neq 3 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería $0 =$ nº distinto de 0 $\Rightarrow$ se trata de una ecuación absurda, nos quedaría un sistema incompatible, es decir, no tendría solución siempre que a tome un valor distinto de 3.

(b) Resolvámoslo para $a = 3$, que es cuando únicamente tiene solución. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferior que obtuvimos en el apartado anterior y suprimamos la última ecuación por ser trivial, tal como lo habíamos justificado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 3-4 \\ 0 & 0 & 0 & 3-3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2-2z \\ 0 & 2 & -1+3z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3-z \\ 0 & 2 & -1+3z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$2x = 3 - z \quad ; \quad 2y = -1 + 3z$$

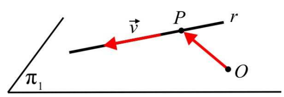
Continuemos despejando las incógnitas

$$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z \quad ; \quad y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z$$

Terminemos de despejar las incógnitas, sustituyendo la incógnita no principal o secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por λ, la solución, finalmente, será:

$$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \quad ; \quad y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda \quad ; \quad z = \lambda \quad ; \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) La ecuación de la recta r es:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$$

Expresémosla en forma continua de forma más precisa y correcta.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

Un punto P de la recta r será el $P(1, -1, 3)$ y un vector de dirección el $\vec{v}(3, 2, -1)$.

Este punto P y el vector de r serán un punto y un vector de dirección del plano π_1.

Necesitamos otro vector de dirección del plano, vector que vendrá dado por los puntos P y O (0, 0 ,0) de dicho plano, vector $\vec{OP}$ de coordenadas:

$$\vec{OP} = (1,\ -1,\ 3) - (0,\ 0,\ 0) = (1,\ -1,\ 3)$$

Comprobemos que los dos vectores del plano son linealmente independientes, es decir, que sus coordenadas no son proporcionales:

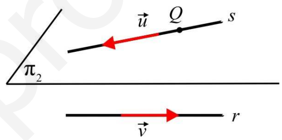
$$\frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{3}$$

También hubiera bastado comprobar que el punto O no pertenece a la recta r.

La ecuación del plano que pasa por el origen O y contiene a la recta r, será el que pasando por O tiene como vectores de dirección el de la recta r y el $\vec{OP}$.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + \mu \\ y = 2\lambda - \mu \\ z = -\lambda + 3\mu \end{cases}$$

(b) Para determinar la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r, expresaremos en primer lugar la ecuación de la recta s en forma paramétrica, y después calcularemos el vector de dirección de la recta s.



$$s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan, Para lo cual expresamos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.

Es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Nos sobra una incógnita, la z; que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2+z \end{array}\right)$$

La solución es:

$$x = 1 \quad ; \quad 2y = -2 + z$$

que terminando de despejar las incógnitas tendremos:

$$x = 1 \quad ; \quad y = -1 + \frac{1}{2}z$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $t \in \mathbb{R}$.

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

El vector de dirección de la recta s será pues:

$$\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$$

El plano π_2 que nos piden pasará por un punto de la recta s, por ejemplo, el $Q(1, -1, 0)$, ya que el plano contiene a dicha recta; y los dos vectores de dirección del plano serán, uno el de la recta r, por ser paralelo a ella, y el otro el de la recta s, ya que contiene a ésta. Probemos que estos dos vectores son linealmente independientes, es decir, que sus coordenadas no son proporcionales:

$$\frac{0}{3} \neq \frac{\frac{1}{2}}{2} \neq \frac{1}{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{0}{3} \neq \frac{1}{4} \neq \frac{1}{-1}$$

Finalmente, la ecuación del plano es:

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = -1 + 2\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ z = -\alpha + \beta \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Construyamos la función ingresos, *f(x)*, donde la variable independiente, *x*, es la edad.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 70x & \text{si} \quad 18 \leq x < 50 \\ \dfrac{400x}{x-30} & \text{si} \quad 50 \leq x \end{cases}$$

Antes de calcular el máximo absoluto de los ingresos, estudiemos la continuidad y derivabilidad de *f(x)*.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función definido para los valores de x, $18 \leq x < 50$, es el de una función polinómica, $-x^2+70x$, y como las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, la función f es continua para $18 \leq x < 50$.

- El trozo de función definido para los valores de x, $50 \leq x$, es el de una función racional, cociente de funciones polinómicas, que será continua en todo $\mathbb{R}$ menos para los valores que anulen al denominador, en este caso, al ser el denominador, $x-30$, el único valor que anularía a este denominador sería el valor de 30, pero este valor no pertenece al dominio particular de f en este trozo, luego la función f es continua para $50 \leq x$.

- El problema de la continuidad está en el punto 50, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 50^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 50^- \\ x<50}} \left(-x^2+70x\right) = -50^2+70\cdot 50 = 1000 \\ \lim\limits_{x\to 50^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 50^+ \\ x>50}} \left(\dfrac{400x}{x-30}\right) = \dfrac{400\cdot 50}{50-30} = 1000 \\ f(50) = \dfrac{400\cdot 50}{50-30} = 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 50^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 50^+} f(x) = f(50) \\ 1000 = 1000 = 1000 \end{cases}$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 50.

En definitiva, la función *f(x)* es continua para todos los valores de $18 \leq x$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad. En nuestro caso no hay ningún problema porque no hay ningún punto de discontinuidad.

- Para valores de $18 \leq x < 50$, f es derivable, por ser una función polinómica que lo es en todo $\mathbb{R}$, luego lo será en este intervalo, siendo la derivada de este trozo de función, $-2x+70$.

- Para valores de $50 \leq x$, f es derivable, por ser una función recional, que lo es en todo $\mathbb{R}$ menos para los valores que anulen al denominador, en este caso, el 30, pero que no pertenece al dominio particular de f en este trozo, luego es derivable en este dominio particular, siendo la derivada:

$$\frac{400x}{x-30} \Rightarrow \frac{400(x-30)-400x\cdot 1}{(x-30)^2} = \frac{400x-12000-400x}{(x-30)^2} = -\frac{12000}{(x-30)^2}$$

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+70 & \text{si } 18 \leq x < 50 \\ -\dfrac{12000}{(x-30)^2} & \text{si } 50 < x \end{cases}$$

- El problema está en el punto 50.

En el punto 50 será derivable, sólo si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} f'(50^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 50^- \\ x<50}} (-2x+70) = -2\cdot 50+70 = -30 \\ f'(50^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 50^+ \\ x>50}} \left(-\dfrac{12000}{(x-30)^2}\right) = -\dfrac{12000}{(50-30)^2} = -30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(50^-) = f'(50^+) \Rightarrow \\ -30 = -30 \end{array}\right.$$

luego la función *f(x)* será derivable en $x = 50$

La función derivada quedará finalmente así:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+70 & \text{si } 18 \leq x < 50 \\ -\dfrac{12000}{(x-30)^2} & \text{si } 50 \leq x \end{cases}$$

Los extremos absolutos de la función ingresos, continua para los valores $18 \leq x$ y derivable para los de $18 < x$, los localizaremos entre los máximos y mínimos relativos o locales (puntos de derivada cero) o en el extremo inferior del intervalo.

Calculemos el valor o valores que anulan a la primera derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+70 & \text{si } 18 \leq x < 50 \\ -\dfrac{12000}{(x-30)^2} & \text{si } 50 \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+70 = 0 \Rightarrow x = 35 \in [18, 50) \\ -\dfrac{12000}{(x-30)^2} \neq 0 \end{cases}$$

Para saber si este valor que anula a la 1ª derivada es máximo o mínimo relativo, recurriremos al estudio de la monotonía.

Con este valor, 35, que anula a la función primera derivada construimos los dos intervalos posibles de monotonía dentro de su dominio, el (18, 35) y el (35, +∞). Sustituiremos un valor intermedio de cada uno de esos intervalos, por ejemplo, el 20 y el 40, respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero en el intervalo correspondiente la gráfica de la función será creciente o decreciente.

$$f'(x)=\begin{cases} -2x+70 & \text{si } 18\le x<50 \Rightarrow \begin{cases} f'(20)=-2\cdot 20+70=30>0 \Rightarrow \text{ Creciente en } (18,35) \\ f'(40)=-2\cdot 40+70=-10<0 \Rightarrow \text{ Decreciente en } (35,+\infty) \end{cases} \\ -\dfrac{12000}{(x-30)^2} & \text{si } 50\le x \end{cases}$$

En consecuencia, el único valor que anulaba a la primera derivada, el 35, es un máximo relativo.

El máximo absoluto de *f(x)* hemos dicho que lo localizaremos entre el máximo relativo o local (punto de derivada cero) o en el extremo inferior del intervalo.

Calculemos la ordenada del máximo relativo, $x = 35$.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+70x & \text{si } 18\le x<50 \Rightarrow f(35)=-35^2+70\cdot 35=-1225+2450=1225 \\ \dfrac{400x}{x-30} & \text{si } 50\le x \end{cases}$$

La ordenada de este máximo relativo es 1225.

Obtengamos ahora la ordenada en el extremo inferior del intervalo [18, 50), es decir, en el punto 18.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+70x & \text{si } 18\le x<50 \Rightarrow f(18)=-18^2+70\cdot 18=-324+1260=936 \\ \dfrac{400x}{x-30} & \text{si } 50\le x \end{cases}$$

La ordenada en el extremo inferior del intervalo es 936.

En consecuencia, si comparamos las dos ordenadas obtenidas, tendremos que el Máximo absoluto es el (35, 1225), lo que significa que el máximo de los ingresos es de 1225 € y se alcanza a la edad de 35 años.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Para probar que las rectas son tangentes a la gráfica de *f(x)*, comenzaremos comprobando si tienen un punto en común, para lo cual resolveremos los sistemas de ecuaciones formados por cada una de las rectas con la ecuación de la función *f(x)*.

$$\left.\begin{array}{l} y=-2x^2+3x-1 \\ y=-x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; -2x^2+3x-1=-x+1 \;\Rightarrow\; -2x^2+4x-2=0 \;\Rightarrow$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-2)\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{-4}=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{-4}=1 \;\Rightarrow\; y=-1+1=0 \;\Rightarrow\; (1,\,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=-2x^2+3x-1 \\ y=3x-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x^2+3x-1=3x-1 \Rightarrow -2x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=3\cdot 0-1=-1 \Rightarrow (0,-1)$$

Hemos comprobado que efectivamente cada una de las rectas tienen un punto en común con la gráfica de la función.

Comprobemos ahora que la derivada de la función *f(x)* en cada uno de esos puntos coincide con la pendiente de cada una de las respectivas rectas.

$f(x) = -2x^2 + 3x - 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = -4x + 3$

* $f'(1) = -4 \cdot 1 + 3 = -1 \;\Rightarrow$ observamos que esta derivada, -1, en el punto de abscisa 1 coincide con la pendiente, -1, de la recta $y = -x + 1$, luego esta recta es tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto (1, 0).

* $f'(0) = -4 \cdot 0 + 3 = 3 \;\Rightarrow$ observamos que esta derivada, 3, en el punto de abscisa 0 coincide con la pendiente, 3, de la recta $y = 3x - 1$, luego esta recta es tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto (0, -1).

(b) Representemos, en primer lugar, la gráfica de $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ que se corresponde con la de una función polinómica de segundo grado y por tanto con la de una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = -1 \;\Rightarrow\; (0, -1)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

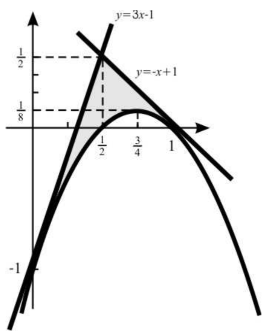
$$y = 0 \;\Rightarrow\; -2x^2 + 3x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-4} = \frac{-3 \pm 1}{-4} \begin{cases} x = 1 \;\Rightarrow\; (1, 0) \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

3.- Coordenadas del vértice V:

$$\text{abscisa del vértice} = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot (-2)} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ordenada del vértice} = f(x) = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right) - 1 = -2 \cdot \frac{9}{16} + \frac{9}{4} - 1 = \frac{1}{8}$$

Luego el vértice V tiene de coordenadas $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right)$.



Dibujemos la recta tangente, $y = -x + 1$.

Se trata de una recta que pasa por los puntos, (0, 1) y (1, 0), sabiendo que este último punto es el punto de tangencia.

Dibujemos también la recta tangente, $y = 3x - 1$.

Se trata de otra recta que pasa por los puntos, (0, -1) y $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, sabiendo que el primer punto es el punto de tangencia.

Calculemos el punto de corte de las dos rectas tangentes.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - 1 \\ y = -x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - 1 = -x + 1 \;\Rightarrow\; 4x = 2 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right.$$

Las gráficas de *f* y las de las rectas tangentes son las situadas al lado.

El recinto cuya área nos pide el ejercicio es el que se encuentra sombreado. Calculemos dicha área, teniendo en cuenta que intervienen dos rectas y la parábola.

$$\text{Área} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(3x - 1 - \left(-2x^2 + 3x - 1\right)\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(-x + 1 - \left(-2x^2 + 3x - 1\right)\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(3x - 1 + 2x^2 - 3x + 1\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(-x + 1 + 2x^2 - 3x + 1\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2x^2 - 4x + 2\right) dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 2x\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{2\cdot 0^3}{3} + \frac{2\cdot 1^3}{3} - \frac{4\cdot 1^2}{2} + 2\cdot 1 - \left(\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{12} - 0 + \frac{2}{3} - 2 + 2 - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} - \left(\frac{1-6+12}{12}\right) = \frac{9}{12} - \frac{7}{12} = \frac{1}{6}$$ unidades de área.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos la matriz A^2+2A y demostremos que $A^2+2A=I$:

$$A^2+2A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot(-1)+1\cdot 2 & -1\cdot 1+1\cdot(-1) \\ 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Luego efectivamente $A^2+2A=I$.

Demostremos ahora que $A^{-1}=A+2I$. Para ello partimos de la igualdad anterior.

$A^2+2A=I$ usamos la propiedad distributiva por la izquierda y después por la derecha.

$A(A+2I)=I$

$(A+2I)A=I$

Teniendo en cuenta la propiedad que dice que si dos matrices A y B verifican:

$$AB = BA = I$$

entonces esas dos matrices son una la inversa de la otra, es decir, $A = B^{-1}$ y que $B = A^{-1}$.

Podemos concluir que como $A(A+2I)=I$ y $A(A+2I)=I$, entonces:

$$A(A+2I)=(A+2I)A=I$$

y en consecuencia: $A+2I=A^{-1}$ y que $(A+2I)^{-1}=A$, como queríamos demostrar.

(b) Resolvamos la ecuación matricial $A^2+XA+5A=4I$.

$A^2+XA+5A=4I$ sumamos a ambos miembros la matriz A^2

$A^2+XA+5A - A^2=4I - A^2$ usamos la propiedad conmutativa de la suma.

$A^2 - A^2+XA+5A=4I - A^2$ usamos la propiedad de elemento neutro respecto de la suma.

$O+XA+5A=4I - A^2$

$XA+5A=4I - A^2$ sumamos a ambos miembros la matriz $5A$.

$XA+5A - 5A=4I - A^2 - 5A$ usamos la propiedad de elemento neutro respecto de la suma.

$XA+O=4I-A^2-5A$

$XA=4I-A^2-5A$ multiplicamos a la derecha por la inversa de A, A^{-1}. Que sabemos y hemos demostrado que existe, $A^{-1}=A+2I$.

$XAA^{-1}=(4I-A^2-5A)A^{-1}$ usamos la propiedad de la matriz inversa.

$XI=(4I-A^2-5A)A^{-1}$ usamos la propiedad del elemento unidad (matriz identidad)

$X=(4I-A^2-5A)A^{-1}$

$X=(4I-A^2-5A)(A+2I)$

Calculemos, finalmente, la matriz X.

$$X=\left(4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&5\\10&-5\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&5\\10&-5\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3\\-6&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\cdot1-3\cdot2&6\cdot1-3\cdot1\\-6\cdot1+6\cdot2&-6\cdot1+6\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\6&0\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) La ecuación de la recta r es:

$$\frac{x+7}{2}=\frac{y-7}{-1}=z$$

Un punto de esta recta es el $(-7, 7, 0)$ y un vector de dirección es el $(2, -1, 1)$. Por lo que las ecuaciones de las rectas r y s en forma paramétrica son:

$$r\equiv\begin{cases}x=-7+2\mu\\y=7-\mu\\z=\mu\end{cases}\qquad s\equiv\begin{cases}x=2\\y=-5\\z=\lambda\end{cases}$$

Elijamos de la recta r un punto genérico, P, de coordenadas $P(-7+2\mu, 7-\mu, \mu)$; y de la recta s otro, H, de coordenadas $H(2, -5, \lambda)$.

Se ha de verificar que el vector $\vec{PH}$ que determinan estos dos puntos genéricos, ha de ser perpendicular al vector de dirección de cada una de las rectas, y por tanto, los productos escalares respectivos serán cero:

$$\vec{PH}=(2,-5,\lambda)-(-7+2\mu,\ 7-\mu,\ \mu)=(9-2\mu,\ -12+\mu,\ \lambda-\mu)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{PH}\perp\vec{u}_r\Rightarrow\vec{PH}\bullet\vec{u}_r=0\Rightarrow(9-2\mu,\ -12+\mu,\ \lambda-\mu)\bullet(2,-1,1)=0\\\vec{PH}\perp\vec{v}_s\Rightarrow\vec{PH}\bullet\vec{v}_s=0\Rightarrow(9-2\mu,\ -12+\mu,\ \lambda-\mu)\bullet(0,0,1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}18-4\mu+12-\mu+\lambda-\mu=0\\\lambda-\mu=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\lambda-6\mu=-30\\\lambda-\mu=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\lambda=\mu\right\}\Rightarrow$$

$$\lambda-6\lambda=-30\Rightarrow-5\lambda=-30\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda=6\\\mu=6\end{array}\right\}$$

La ecuación de la recta que se apoya perpendicularmente en r y s, es la recta que pasa por el punto, por ejemplo, el P, y tiene como vector de dirección el vector $\vec{PH}$, es decir:

$P(-7+2\mu,\ 7-\mu,\ \mu) \quad \Rightarrow \quad P(-7+2\cdot 6,\ 7-6,\ 6) \quad \Rightarrow \quad P(5,\ 1,\ 6)$

$\overrightarrow{PH}=(9-2\cdot 6,\ -12+6,\ 6-6)=(-3,\ -6,\ 0)$

$$\begin{cases} x = 5-3\beta \\ y = 1-6\beta \\ z = 6 \end{cases}$$

Que es la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y s.

(b) La distancia entre las rectas r y s coincidirá con el módulo del vector $\overrightarrow{PH}$, es decir:

$\text{dist}(r, s) = \left|(-3,\ -6,\ 0)\right| = \sqrt{(-3)^2+(-6)^2+0^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ unidades de longitud.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 75 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Un alambre de 100 *m* de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=\frac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 1)$.

EJERCICIO 3. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3cuyos determinantes son $|A|=\frac{1}{2}$ y $|B|=-2$. Halla:

(a) [0´5 PUNTOS]. $|A^3|$.

(b) [0´5 PUNTOS]. $|A^{-1}|$.

(c) [0´5 PUNTOS]. $|-2A|$.

(d) [0´5 PUNTOS]. $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

(e) [0´5 PUNTOS]. El rango de B.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(1, 2, -1)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Halla un punto C de la recta de ecuación $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z$ que verifica que el triángulo de vértices A, B y C tiene un ángulo recto en B.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula el área del triángulo de vértices A, B y D, donde D es el punto de corte del plano de ecuación $2x-y+3z=6$ con el eje OX.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=4-x^2$

(a) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x+2y-2=0$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx$$

EJERCICIO 3. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) [0´5 PUNTOS]. Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

(b) [1´25 PUNTOS]. Justifica que A es invertible y halla su inversa.

(c) [0´75 PUNTOS]. Calcula razonadamente A^{100}.

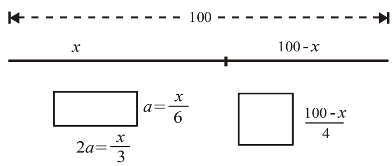
EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$3x-y+z-4=0, \qquad x-2y+z-1=0 \qquad \text{y} \qquad x+z-4=0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 1, -1)$, es paralela al plano π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 y π_3.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construimos la función área, que es la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo.

En el dibujo se encuentran reflejados los datos del problema y las diversas relaciones entre ellos.

Sólo reseñaremos que en el rectángulo se ha de verificar, según las condiciones del problema, que la suma de todos los lados es: $a + a + 2a + 2a = x \;\Rightarrow\; 6a = x \;\Rightarrow\; a = \dfrac{x}{6}$

$$A(x)=\left(\frac{100-x}{4}\right)^2+\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{6} \;\Rightarrow\; A(x)=\frac{10000+x^2-200x}{16}+\frac{x^2}{18} \;\Rightarrow$$

$$A(x)=\frac{90000+9x^2-1800x+8x^2}{144} \;\Rightarrow\; A(x)=\frac{17x^2-1800x+90000}{144}$$

El dominio de esta función es el intervalo abierto (0, 100) como se puede deducir fácilmente de la observación del dibujo; se trata de una función cuadrática (aunque no esté ordenada perfectamente), y por tanto es continua y derivable en su dominio.

Calculemos el mínimo absoluto de esta función, que coincidirá con el vértice de la parábola ya que el coeficiente de x^2 es positivo, y siempre que ese mínimo pertenezca al dominio.

$$A'(x)=\frac{34x-1800}{144}$$

$$\frac{34x-1800}{144}=0 \;\Rightarrow\; 34x-1800=0 \;\Rightarrow\; 34x=1800 \;\Rightarrow\; x=\frac{1800}{34} \;\Rightarrow\; x=\frac{900}{17}$$

Este valor de x pertenece al dominio, luego es el mínimo absoluto tal como hemos justificado anteriormente.

A este mismo resultado llegaríamos si estudiamos la monotonía. Para ello construimos, con el valor que anulaba a la primera derivada, los dos intervalos posibles de monotonía, el $\left(0,\ \frac{900}{17}\right)$ y el $\left(\frac{900}{17},\ 100\right)$. Probamos valores intermedios de estos intervalos, por ejemplo, el 10 y el 90 respectivamente en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero dicha derivada la función en el intervalo correspondiente será creciente o decreciente.

$$A'(10)=\frac{34\cdot10-1800}{144}=\frac{-1460}{144}<0 \quad\Rightarrow\quad \text{decreciente en el intervalo } \left(0,\ \frac{900}{17}\right)$$

$$A'(90)=\frac{34\cdot90-1800}{144}=\frac{1260}{144}>0 \quad\Rightarrow\quad \text{creciente en el intervalo } \left(\frac{900}{17},\ 100\right)$$

La longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima es para el trozo correspondiente al rectángulo de $x=\frac{900}{17}$ m, y para el trozo del cuadrado de $100-x$, es decir, $100-\frac{900}{17}=\frac{1700-900}{17}=\frac{800}{17}$ m.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si la función segunda derivada es, $f''(x)=\frac{1}{x}$, la función primera derivada la obtendremos mediante integración.

$$f'(x)=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln(x)+C$$

Como la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(1, 1)$ es horizontal, significa que en el punto de abscisa $x=1$ la recta tangente es paralela al eje de abscisas y por tanto de pendiente 0, lo que significa que la derivada de la función f en el punto 1 es cero, es decir, $f'(1)=0$, por tanto:

$$f'(x)=\ln(x)+C \;\Rightarrow\; f'(1)=0 \;\Rightarrow\; f'(1)=\ln(1)+C \;\Rightarrow\; 0=0+C \;\Rightarrow\; C=0$$

luego la función primera derivada será:

$f'(x) = \ln(x) + \mathrm{C} \;\Rightarrow\; f'(x) = \ln(x) + 0 \;\Rightarrow\; f'(x) = \ln(x)$

La función *f* la obtendremos mediante integración de *f′*.

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \ln(x)\,dx =$ [1]

Se trata de una integral por partes.

$u = \ln(x) \;;\; du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \;;\; v = \int dx = x$

Continuando desde [1], tendremos

$$= x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + K$$

Luego, en principio *f(x)* sería de la forma:

$f(x) = x\ln(x) - x + K$

Por otro lado, según el problema, sabemos que el punto de tangencia, *P*, tiene de coordenadas (1, 1), esto implica que $f(1) = 1$.

$f(x) = x\ln(x) - x + K \;\Rightarrow\; f(1) = 1\cdot\ln(1) - 1 + K \;\Rightarrow\; 1 = 1\cdot 0 - 1 + K \Rightarrow\; 1 = -1 + K \Rightarrow\; K = 2$

La función *f(x)* será, finalmente, $f(x) = x\ln(x) - x + 2$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Si *A* y *B* son dos matrices cuadradas del mismo orden, se verifica que:

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos generalizar a la situación del determinante del producto de una matriz por sí misma varias veces:

$|A\cdot B| = |A|\cdot|B| \;\Rightarrow\; |A\cdot A| = |A|\cdot|A| \;\Rightarrow\; |A^2| = |A|^2 \;\Rightarrow\; |A^n| = |A|^n \;\Rightarrow$

$|A^3| = |A|^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

(b) En el caso de dos matrices, una inversa de la otra, *A* y A^{-1}, se verificará:

$|A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| \;\Rightarrow\; |I| = |A|\cdot|A^{-1}| \;\Rightarrow\; 1 = |A|\cdot|A^{-1}| \;\Rightarrow\; |A| = \frac{1}{|A^{-1}|} \;\Rightarrow$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \;\Rightarrow\; |A^{-1}| = \frac{1}{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; |A^{-1}| = 2$

Donde *I* es la matriz identidad cuyo determinante vale 1.

(c) La matriz $-2A$ se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz *A*, que es de orden 3, por 2.

"Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna por un mismo número, el

valor del determinante queda multiplicado por dicho número".

"Para multiplicar un determinante por un número basta multiplicar una sola fila o columna".

Por tanto si la matriz A la multiplicamos por 2, el determinante asociado a A quedaría multiplicado por $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$, ya que es de orden 3, es decir:

$$|-2A| = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)|A| = (-2)^3|A| = -8\cdot\frac{1}{2} = -4$$

(d) "*El valor de un determinante no varía si intercambiamos entre sí todas las filas por las columnas y todas las columnas por las filas, o lo que es lo mismo, el determinante asociado a una matriz cuadrada y el correspondiente a la matriz traspuesta son iguales":*

$$|A| = |A^t|$$

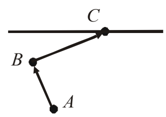
En consecuencia:

$$|A\cdot B^t| = |A|\cdot|B^t| = |A|\cdot|B| = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$$

(c) El determinante asociado a la matriz B vale -2, es decir, distinto de cero, esto significa que las tres filas o las tres columnas del determinante son linealmente independientes por lo que la matriz B tendrá de rango 3.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Expresemos la recta en forma paramétrica.



$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{siendo } \lambda\in\mathbb{R}$$

Elijamos un punto C genérico de la recta, de coordenadas $C(1+3\lambda, 2\lambda, \lambda)$.

Impongamos ahora la condición de que el triángulo ABC sea recto en B, o lo que es lo mismo, que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ sean perpendiculares, por lo que producto escalar de ambos tiene que ser cero.

Calculemos las coordenadas de estos dos vectores.

$$\vec{AB} = (1, 2, -1) - (1, 0, 2) = (0, 2, -3) \quad ; \quad \vec{BC} = (1+3\lambda, 2\lambda, \lambda) - (1, 2, -1) = (3\lambda, 2\lambda-2, \lambda+1)$$

Impongamos la condición de perpendicularidad a estos dos vectores, es decir, calculemos si su producto escalar sea cero.

$$\vec{AB} \perp \vec{BC} \;\Rightarrow\; \vec{AB}\bullet\vec{BC} = 0 \;\Rightarrow\; (0, 2, -3)\bullet(3\lambda, 2\lambda-2, \lambda+1) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 4\lambda - 4 - 3\lambda - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 7$$

Sustituyamos este valor en las coordenadas de C.

$(1+3\lambda, 2\lambda, \lambda) \;\Rightarrow\; (1+3\cdot7, 2\cdot7, 7) \;\Rightarrow\; (22, 14, 7)$ que son las coordenadas de C.

(b) Calculemos el punto D, que es el punto de corte del plano $2x - y+3z=6$ con el eje OX. Resolveremos el sistema formado por la ecuación del plano y la del eje OX.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=6 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2x-0+3\cdot 0=6 \quad \Rightarrow \quad 2x=6 \quad \Rightarrow \quad x=3 \quad \Rightarrow \quad D(3,\ 0,\ 0)$$

Para calcular el área del triángulo *A, B* y *D*, obtendremos antes las coordenadas de los vectores, $\vec{AB}$ y $\vec{BD}$.

$$\vec{AB}=(1,\ 2,\ -1)-(1,\ 0,\ 2)=(0,\ 2,\ -3) \quad ; \quad \vec{BD}=(3,\ 0,\ 0)-(1,\ 2,\ -1)=(2,\ -2,\ 1)$$

$$\text{Área } \overset{\Delta}{ABD}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{BD}\right|=\frac{1}{2}\left|(0,\ 2,\ -3)\times(2,\ -2,\ 1)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|(-4,\ -6,\ -4)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-4)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+16}=\frac{1}{2}\sqrt{68}=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 17}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{17}=\sqrt{17} \text{ unidades de área}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x_0=2$.

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

La derivada de la función $f(x)=4-x^2$ en el punto $x_0=2$ es:

$f(x)=4-x^2 \ \Rightarrow \ f'(x)=-2x \ \Rightarrow \ f'(2)=-2\cdot 2=-4 \ \Rightarrow \ f'(2)=-4$

La ordenada de la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x_0=2$, es:

$f(x)=4-x^2 \ \Rightarrow \ f(2)=4-2^2=0$

Luego la ecuación de la recta normal es:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad y-0=-\frac{1}{-4}\cdot(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$$

(b) Calculemos la pendiente de la recta $x+2y-2=0$, para lo cual despejamos la *y*:

$$x+2y-2=0 \ \Rightarrow \ 2y=-x+2 \ \Rightarrow \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{2}{2} \ \Rightarrow \ y=-\frac{1}{2}x+1$$

La pendiente de esta recta es $-\frac{1}{2}$.

Teniendo en cuenta la relación que existe entre las pendientes de rectas perpendiculares, podemos deducir que la pendiente de la recta tangente, que es perpendicular a la recta anterior, será:

pendiente de la recta tangente $= -\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}} = 2$

Esto significa que la derivada de la función en el punto de tangencia, x_1, es 2, es decir:

$$f'(x_1)=2 \;\Rightarrow\; f'(x)=-2x \;\Rightarrow\; f'(x_1)=-2x_1 \;\Rightarrow\; 2=-2x_1 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{2}{-2}=-1$$

Si la abscisa del punto de tangencia es $x_1=-1$, la ordenada será:

$$f(x)=4-x^2 \;\Rightarrow\; f(-1)=4-(-1)^2=4-1=3$$

El punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x+2y-2=0$, es:

$$P\big(x_1, f(x_1)\big) \;\Rightarrow\; P(-1, 3)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la integral indefinida siguiente:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx.$$

Se trata de una integral racional impropia donde el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador por lo que efectuaremos la división indicada.

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & +\,x^2 & & x^2+x-2 \\ \cline{4-4} -x^3 & -\,x^2 & +\,2x & x \\ \hline & & 2x & \end{array}$$

La integral anterior quedará así:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(x+\frac{2x}{x^2+x-2}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx = \qquad [1]$$

La última integral sí es una integral racional propia, por lo que el integrando lo descompondremos en una suma de fracciones elementales para ello calcularemos los valores que anulan al denominador del integrando.

$$x^2+x-2=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Descompongamos la fracción en fracciones elementales en función de sus raíces.

$$\frac{2x}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \;\Rightarrow\; \frac{2x}{x^2+x-2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \;\Rightarrow$$

$$2x=A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \;\Rightarrow\; 2\cdot 1=A(1+2)+B(1-1) \;\Rightarrow\; 2=3A \;\Rightarrow\; A=\dfrac{2}{3} \\ x=-2 \;\Rightarrow\; 2\cdot(-2)=A(-2+2)+B(-2-1) \;\Rightarrow\; -4=-3B \;\Rightarrow\; B=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$=\frac{x^2}{2}+\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{4}{3}}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Demostremos que $A^3 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot(-1) & 0\cdot 3+3\cdot(-4)+4\cdot 3 & 0\cdot 4+3\cdot(-5)+4\cdot 4 \\ 1\cdot 0-4\cdot 1-5\cdot(-1) & 1\cdot 3-4\cdot(-4)-5\cdot 3 & 1\cdot 4-4\cdot(-5)-5\cdot 4 \\ -1\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot(-1) & -1\cdot 3+3\cdot(-4)+4\cdot 3 & -1\cdot 4+3\cdot(-5)+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

(b) Hemos de calcular, si existe, la matriz inversa de A, A^{-1}. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula o alguno de los elementos de la diagonal principal fuera cero entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Llevemos la 1ª fila a la 3ª.
Llevemos la 2ª fila a la 1ª .
Llevemos la 3ª fila a la 2ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz A admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 5 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & 5 & 16 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 4 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Multipliquemos la 2ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}$$

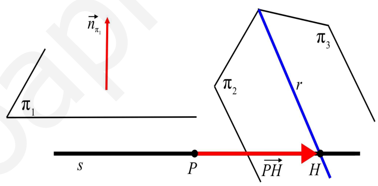
(c) Calculemos A^{100}.
Sabemos por el apartado (a) lo que obtenemos al calcular A^2 y A^3.
Podemos descomponer A^{100} de la siguiente manera.

$$A^{100}=A^{99}\cdot A=A^{3\cdot 33}\cdot A=\left(A^3\right)^{33}\cdot A=(-I)^{33}\cdot A=(-1\cdot I)^{33}\cdot A=(-1)^{33}\cdot I^{33}\cdot A=$$

$$=-1\cdot I\cdot A=-1\cdot A=-A=-\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&-4\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Para calcular la ecuación de la recta, llamémosla s, que nos pide el ejercicio, necesitamos, en primer lugar, el punto de corte de esta recta s con la recta r, intersección de los planos π_2 y π_3.



Calculemos, de entrada, la recta r intersección de dichos planos, para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos.

$$r\equiv\begin{cases}x-2y+z-1=0\\x+z-4\quad\;=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y+z=1\\\quad\;\; x+z=4\end{cases}$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\1&0&1&4\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=1\neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\0&2&0&3\end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, la incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&1-z\\0&2&3\end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=2\neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&4-z\\0&2&3\end{array}\right)$$

La solución es: $x=4-z$; $2y=3$

$x=4-z$; $y=\dfrac{3}{2}$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\lambda\in\mathbb{R}$, tendremos finalmente la ecuación de la recta r en paramétricas:

$$r\equiv\begin{cases}x=4-\lambda\\y=\dfrac{3}{2}\\z=\lambda\end{cases}$$

Elegiremos un punto genérico de esta recta, el punto $H\left(4-\lambda,\ \frac{3}{2},\ \lambda\right)$.

La recta s que queremos calcular al ser paralela al plano $\pi_1 \equiv 3x-y+z-4=0$, se verificará que el vector normal al plano, el $\vec{n}_{\pi_1}=(3,\ -1,\ 1)$, y el vector de dirección de la recta s, el $\vec{PH}$, serán perpendiculares, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

$$\vec{PH}=\left(4-\lambda,\ \frac{3}{2},\ \lambda\right)-(3,\ 1,\ -1)=\left(1-\lambda,\ \frac{1}{2},\ \lambda+1\right)$$

$$\vec{PH}\perp\vec{n}_{\pi_1} \quad\Rightarrow\quad \vec{PH}\bullet\vec{n}_{\pi_1}=0 \quad\Rightarrow\quad \left(1-\lambda,\ \frac{1}{2},\ \lambda+1\right)\bullet(3,\ -1,\ 1)=0 \quad\Rightarrow$$

$$3-3\lambda-\frac{1}{2}+\lambda+1=0 \quad\Rightarrow\quad -2\lambda=\frac{1}{2}-4 \quad\Rightarrow\quad -2\lambda=-\frac{7}{2} \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{7}{4}$$

$$\vec{PH}=\left(1-\lambda,\ \frac{1}{2},\ \lambda+1\right)=\left(1-\frac{7}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{4}+1\right)=\left(-\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{11}{4}\right)$$

La ecuación de la recta s que nos pide el ejercicio será la que pase por el punto P y tenga como vector de dirección el vector $\vec{PH}=\left(-\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{11}{4}\right)$:

$$s\equiv\begin{cases} x=3-\frac{3}{4}\mu \\ y=1+\frac{1}{2}\mu \\ z=-1+\frac{11}{4}\mu \end{cases} \qquad \text{siendo } \mu\in\mathbb{R}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN JUNIO 2012

Opción A

EJERCICIO 1. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x-2)$

(a) [1 PUNTO] Calcula las asíntotas de f.

(b) [1 PUNTO] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) [0´5 PUNTOS] Determina, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

EJERCICIO 2. Sea f una función continua en el intervalo [2, 3] y F una función primitiva de f tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcula:

(a) [0´75 PUNTOS] $\int_2^3 f(x)\,dx$ **(b)** [0´75 PUNTOS] $\int_2^3 \left(5f(x)-7\right)\,dx$

(c) [1 PUNTO] $\int_2^3 \left(F(x)\right)^2 f(x)\,dx$

EJERCICIO 3. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 PUNTO] ¿Para qué valores del parámetro k no existela inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.

(b) [1´5 PUNTOS] Para $k=0$, resuelve la ecuación matricial $(X+I)\cdot A=A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta.

EJERCICIO 4. De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A(2, -1, 0)$, $B(-2, 1, 0)$ y $C(0, 1, 2)$.

(a) [1 PUNTO] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

(b) [0´75 PUNTOS] Halla el área de dicho paralelogramo.

(c) [0´75 PUNTOS] Calcula el vértice D.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot \text{sen}(x)-xe^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

EJERCICIO 2. Sea la función f definida por $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

(a) [1´25 PUNTOS] Halla una primitiva de f.

(b) [1´25 PUNTOS] Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2, k]$ sea ln(2), ln denota el logaritmo neperiano.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda+1 \\ 3y + 2z = 2\lambda+3 \\ 3x + (\lambda-1)y + z = \lambda \end{cases}$$

(a) [1 PUNTO] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

(b) [1 PUNTO] Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.

(c) [0´5 PUNTOS] ¿Existe algún valor de λ para el que sistema admite la solución $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?

EJERCICIO 4. Sean r y s las rectas dadas por

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z = 3 \end{cases} \qquad s\equiv\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{2}$$

(a) [1´25 PUNTOS] Determina el punto de intersección de ambas rectas.

(b) [1´25 PUNTOS] Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Determinemos las posibles asíntotas de esta función.

- Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "a" tal que se satisfaga: $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$

La función que nos dan es el producto de una función polinómica, x-2, que es continua y derivable en todo$\mathbb{R}$, y de una función exponencial elemental, e^x, que también lo es en todo $\mathbb{R}$; y el producto de funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$ lo sigue siendo en todo $\mathbb{R}$. En consecuencia, no hay ningún valor real para el que la función no exista o tome valores infinitos, por lo que no hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathrm{R}$

Calculemos estos límites.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(x-2) = e^\infty(\infty-2) = \infty\cdot\infty = \infty$$

luego no hay asíntota horizontal por la derecha, cuando $x\to+\infty$, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua. Veamos si hay asíntota horizontal por la izquierda.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x-2) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(-x-2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-2}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{e^x} = \frac{-1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x=c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida *"cuando x tiende a ±∞ y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a ±∞*"

En nuestro caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en cualquier punto; ya que una es polinómica y la otra la función exponencial elemental, e^x, por lo que definitivamente se puede aplicar la Regla de L´Hôpital, incluso en los casos como éste donde los límites de las funciones numerador y denominador tienden a ±∞ cuando x tiende a ±∞.

Luego hay asíntota horizontal, $y = 0$, por la izquierda, cuando $x\to-\infty$.

Estudiemos la posición de la gráfica de la función $f(x)$ respecto de la asíntota horizontal $y = 0$, cuando $x\to-\infty$.

• Para valores de x muy pequeños, es decir, valores de $x\to-\infty$, por ejemplo, $x = -100$ se verifica que

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = e^{-100}\cdot(-100-2) = -102\cdot e^{-100} = -0'0000\ldots \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-100) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to-\infty$, va por debajo de la asíntota horizontal.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$, para cuando $x\to+\infty$. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n.

$$\mathrm{m} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x(x-2)}{x} = \frac{e^\infty(\infty-2)}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x(x-2)+e^x}{1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(e^x (x-2) + e^x \right) = e^{\infty} (\infty - 2) + e^{\infty} = \infty$$

Luego no hay asíntota oblicua, cuando $x \to +\infty$, sino que hay una rama parabólica de eje paralelo al eje de ordenadas.

(b) Calculemos los intervalos de monotonía sabiendo, como ya hemos dicho, que es una función continua y derivable en todo ℝ.

$$f(x) = e^x (x-2) \;\Rightarrow\; f'(x) = e^x (x-2) + e^x \cdot 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = e^x (x-1) \;\Rightarrow$$

$$e^x (x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$

Este valor, $x = 1$, que anula a la función primera derivada, lo llevamos sobre la recta real y construimos los intervalos de monotonía $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$. Probamos valores intermedios, por ejemplo, 0 y 2, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$f'(0) = e^0 (0-1) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $(-\infty, 1)$

$f'(2) = e^2 (2-1) = e^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $(1, +\infty)$

Veamos ahora los extremos locales o relativos. Como la función es continua y derivable en todo ℝ, los extremos sólo pueden presentarse en los puntos donde la primera derivada es cero, o bien, por las mismas razones de continuidad y derivabilidad al pasar de decreciente a creciente en el punto $x = 1$ la función presenta un mínimo relativo o local.

$$f(x) = e^x (x-2) \;\Rightarrow\; f'(x) = e^x (x-1) \;\Rightarrow\; f''(x) = e^x (x-1) + e^x \cdot 1 \;\Rightarrow\; f''(x) = e^x \cdot x$$

Sustituyamos el valor 1 que anulaba a la primera derivada en la función segunda derivada:

$f''(0) = e^1 \cdot 1 = e > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Mínimo relativo o local en $(1, -e)$.

La ordenada del extremo relativo se ha obtenido sustituyendo el valor de la abscisa en la función $f(x)$.

$$f(1) = e^1 (1-2) \;\Rightarrow\; f(1) = -e$$

(c) Los puntos de inflexión, si existen, de esta función continua y derivable en ℝ se encuentran en los puntos que anulando a la segunda derivada no anulen a la tercera derivada.

$f''(x) = e^x \cdot x \;\Rightarrow\; e^x \cdot x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\Rightarrow\;$ Hay un valor que anule a la segunda derivada, por lo que sólo hay un posible punto de inflexión para $x = 0$; sustituyamos este valor en la tercera derivada:

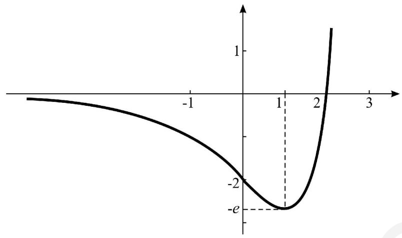
$$f''(x) = e^x \cdot x \;\Rightarrow\; f'''(x) = e^x \cdot x + e^x \;\Rightarrow\; f'''(0) = e^0 \cdot 0 + e^0 = 1 \neq 0 \;\Rightarrow$$

luego hay un punto de inflexión en $(0, -2)$.

La ordenada del punto de inflexión se ha obtenido sustituyendo el valor de la abscisa en la función $f(x)$.

$$f(0) = e^0 (0-2) \;\Rightarrow\; f(1) = 1 \cdot (-2) \;\Rightarrow\; f(1) = -2$$

(d) Con los datos anteriores la gráfica de la función es la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos $\int_2^3 f(x)\, dx$

Como F es una función primitiva de f, se verificará que $\int f(x)dx = F(x)$, por tanto:

$$\int_2^3 f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_2^3 = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1$$

(b) Calculemos $\int_2^3 \left(5f(x) - 7\right) dx$

$$\int_2^3 \left(5f(x) - 7\right) dx = \int_2^3 5f(x)\, dx - \int_2^3 7\, dx = 5\int_2^3 f(x)\, dx - 7\int_2^3 dx = 5\cdot 1 - 7[x]_2^3 = 5 - 7(3-2) =$$
$$= 5 - 7\cdot 1 = 5 - 7 = -2$$

Hemos tenido en cuenta las propiedades de la linealidad de la integral definida y el resultado del apartado anterior.

(c) Calculemos $\int_2^3 \left(F(x)\right)^2 f(x)\, dx$

Tendremos en cuenta que como $\int f(x)dx = F(x) \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$

$$\int_2^3 \left(F(x)\right)^2 f(x)\, dx = \int_2^3 \left(F(x)\right)^2 \cdot F'(x)\, dx = \left[\frac{\left(F(x)\right)^3}{3}\right]_2^3 = \frac{\left(F(3)\right)^3}{3} - \frac{\left(F(2)\right)^3}{3} =$$
$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Hemos tenido en cuenta la integral inmediata siguiente: $\int \left(g(x)\right)^n \cdot g'(x)\, dx = \dfrac{\left(g(x)\right)^{n+1}}{n+1}$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Determinemos los valores del parámetro k para los que la matriz A no tiene inversa.

Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula o alguno de los elementos de la diagonal principal fuera cero entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Llevemos la 1ª fila a la 3ª fila
Llevemos la 2ª fila a la 1ª fila
Llevemos la 3ª fila a la 2ª fila

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2k-1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente y no hay ninguna fila de ceros, salvo la 2ª en la que a_{22} puede ser o no cero. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{22} = 0 \Rightarrow 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow$ hay un valor de k que hace cero a a_{22} o lo que es lo mismo, para este valor de k la matriz A no tiene inversa.

* $a_{22} \neq 0 \Rightarrow 2k - 1 \neq 0 \Rightarrow k \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ para todos estos otros valores la matriz A siempre tendrá inversa.

(b) Calculemos, en primer lugar, la inversa de A para el valor de $k = 0$. Sustituyamos este valor en la matriz triangulada inferior obtenida en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2k-1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\cdot 0-1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2.
Dividamos la 2ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz A, la matriz A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora para $k = 0$, la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$.

Según el apartado anterior (a), la matriz A tiene inversa para cualquier valor de $k \neq \frac{1}{2}$, y por supuesto para $k = 0$; y en este apartado (b) hemos calculado la matriz inversa de A para dicho valor de k, por lo que tiene sentido operar con la matriz A^{-1}.

$(X + I) \cdot A = A^t \quad \Rightarrow \quad$ multipliquemos a la derecha por la matriz A^{-1}.

$(X+I)\cdot A\cdot A^{-1}=A^t\cdot A^{-1}$ $\Rightarrow$ por la existencia de matriz identidad.

$(X+I)\cdot I=A^t\cdot A^{-1}$

$X+I=A^t\cdot A^{-1}$ $\Rightarrow$ sumemos a ambos miembros la matriz identidad, I.

$X+I-I=A^t\cdot A^{-1}-I$ $\Rightarrow$ por la existencia de matriz nula.

$X+O=A^t\cdot A^{-1}-I^{-1}$

$X=A^t\cdot A^{-1}-I$

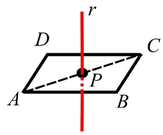
Calculemos ahora la matriz X.

$$X=A^t\cdot A^{-1}-I=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&-2\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+2\cdot0+1\cdot1&0\cdot0+2\cdot1+1\cdot0&0\cdot1+2\cdot(-2)+1\cdot0\\0\cdot(-1)+1\cdot0+0\cdot1&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0&0\cdot1+1\cdot(-2)+1\cdot0\\1\cdot(-1)+2\cdot0+1\cdot1&1\cdot0+2\cdot1+1\cdot0&1\cdot1+2\cdot(-2)+1\cdot0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-4\\0&1&-2\\0&2&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&-4\\0&0&-2\\0&2&-4\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Calculemos las coordenadas del centro $P(m,n,p)$ del paralelogramo, serán las del punto medio de la diagonal AC.

Se verificará que:

$$\vec{AP}=\vec{PC}\;\Rightarrow\;(m,\ n,\ p)-(2,\ -1,\ 0)=(0,\ 1,\ 2)-(m,\ n,\ p)\;\Rightarrow$$

$$(m-2,\ n+1,\ p)=(-m,\ 1-n,\ 2-p)\;\Rightarrow\begin{cases}m-2=\ -m&\Rightarrow\ 2a=2\ \Rightarrow\ m=1\\n+1=1-n&\Rightarrow\ 2b=0\ \Rightarrow\ n=0\\p\ =2-p&\Rightarrow\ 2c=2\ \Rightarrow\ p=1\end{cases}\Rightarrow\ P(1,\ 0,\ 1)$$

Obtengamos ahora las coordenadas del vector perpendicular al plano que determina el paralelogramo, es decir, el vector de dirección de la recta r que nos piden. Este vector será el producto vectorial de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$.

$$\vec{AB}=(-2,\ 1,\ 0)-(2,\ -1,\ 0)=(-4,\ 2,\ 0)$$

$$\vec{BC}=(0,\ 1,\ 2)-(-2,\ 1,\ 0)=(2,\ 0,\ 2)$$

$$\vec{v}_r=\vec{AB}\times\vec{BC}=(-4,\ 2,\ 0)\times(2,\ 0,\ 2)=\left(\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-4&0\\2&2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-4&2\\2&0\end{vmatrix}\right)=(4,\ 8,\ -4)$$

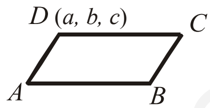
La recta r que nos piden, perpendicular al paralelogramo, tiene como vector de dirección el vector $\vec{v}_r$ recién calculado, y un punto de la misma será el punto $P(1, 0, 1)$. La ecuación de dicha recta será:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{8}=\frac{z-1}{-4}\quad\text{o bien}\quad\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

(b) El área del paralelogramo, será:

$$\text{Área} = \left|\vec{AB} \times \vec{BC}\right| = \left|(-4,\ 2,\ 0) \times (2,\ 0,\ 2)\right| = \left|(4,\ 8,\ -4)\right| = \sqrt{4^2 + 8^2 + (-4)^2} =$$

$$= \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ unidades de área}$$



(c) Tengamos el paralelogramo $ABCD$ situado al lado.

Supongamos que el vértice D tenga de coordenadas (a, b, c). Se verificará que

$$\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow (a, b, c) - (2, -1, 0) = (0, 1, 2) - (-2, 1, 0) \Rightarrow$$

$$(a-2,\ b+1,\ c) = (2,\ 0,\ 2) \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 2 & \Rightarrow a = 4 \\ b + 1 = 0 & \Rightarrow b = -1 \\ c = 2 & \Rightarrow c = 2 \end{cases} \Rightarrow D(4,\ -1,\ 2)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el límite siguiente sabiendo que es finito.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot \operatorname{sen}(x) - x e^x}{x^2} = \frac{a\cdot \operatorname{sen}(0) - 0\cdot e^0}{0^2} = \frac{0 - 0\cdot 1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot \cos(x) - e^x - x e^x}{2x} =$$

$$= \frac{a\cdot \cos(0) - e^0 - 0\cdot e^0}{2\cdot 0} = \frac{a-1}{0} =$$

La expresión que se ha obtenido al final puede presentar dos casos según que el numerador sea cero o no.

Si no lo es, es decir, si $a - 1 \neq 0$, $a \neq 1$, entonces el resultado final sería un número distinto de cero partido por cero que daría lugar a infinito, en contradicción con el enunciado del ejercicio, por tanto a no puede ser distinto de 1.

El otro caso es que sea cero, es decir, $a - 1 = 0$, $a = 1$, con lo que tendríamos una nueva indeterminación que habría que destruir, procedamos según esto último, sustituyendo a por 1.

$$= \frac{1-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot\cos(x) - e^x - x e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^x - x e^x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) - e^x - e^x - x e^x}{2} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(0) - e^0 - e^0 - 0\cdot e^0}{2} = \frac{-0 - 1 - 1 - 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

que como observamos, para $a = 1$, el límite es finito y vale -1.

Las indeterminaciones de $\left[\frac{0}{0}\right]$ la hemos destruido aplicando la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x = c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida *"cuando x tiende a ±∞ y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a ±∞"*

En nuestro caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en cualquier punto; ya que la del numerador es la suma de una función trigonométrica elemental con la del resultado del producto de otras dos funciones, una polinómica y otra exponencial elemental, todas ellas continuas y derivables en $\mathbb{R}$; y la del denominador es una función polinómica, por lo que definitivamente se puede aplicar la Regla de L´Hôpital.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Para hallar una primitiva de la función $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$, lo haremos calculando la integral siguiente:

$$\int\frac{2}{x^2-1}\,dx. \qquad [1]$$

Se trata de una integral racional propia, por lo que el integrando lo descompondremos en una suma de fracciones elementales para ello calcularemos los valores que anulan al denominador del integrando.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\frac{0\pm\sqrt{0^2+4}}{2}=\frac{\pm 2}{2}=\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}$$

Descompongamos la fracción del integrando en fracciones elementales en función de sus raíces.

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow\frac{2}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow$$

$$2=A(x+1)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases}x=1 \Rightarrow 2=A(1+1)+B(1-1) \Rightarrow 2=2A \Rightarrow A=1\\ x=-1 \Rightarrow 2=A(-1+1)+B(-1-1) \Rightarrow 2=-2B \Rightarrow B=-1\end{cases}$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$\int\frac{2}{x^2-1}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

(b) Representemos, aproximadamente y en primer lugar, la gráfica de *f(x)*.

Comencemos estudiando las asíntotas.

Para que exista asíntota vertical se ha de satisfacer que: $\lim_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$

Comprobemos que existen; habrá que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, en este caso, $x=1$ y $x=-1$. Valores que no pertenecen al dominio de la función.

Veámoslo.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{0}=\pm\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -1}\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{0}=\pm\infty$$

luego hay dos asíntotas verticales, $x=1$ y $x=-1$.

La posición de la gráfica de la función con respecto a cada una de las asíntotas es:

$$\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}}\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}}\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -1^-\\ x<-1}}\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to -1^+\\ x>-1}}\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$

Comprobemos que existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2-1}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hay una asíntota horizontal } \; y=0.$$

La posición de la gráfica de la función con respecto a la asíntota horizontal es:

$$\left.\begin{array}{l} f(100)=\dfrac{2}{100^2-1}=\dfrac{2}{9999}>0'0002... \\ y_{asintota}(100)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$f\,(100) > y_{\text{asíntota}}$ $\Rightarrow$ la gráfica de la función, cuando $x\to+\infty$ va por encima de la asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} f(-100)=\dfrac{2}{(-100)^2-1}=\dfrac{2}{9999}>0'0002... \\ y_{asintota}(-100)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$f\,(-100) > y_{\text{asíntota}}$ $\Rightarrow$ la gráfica de la función, cuando $x\to-\infty$ va por encima de la asíntota horizontal.

Esta función racional al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, debemos tener en cuenta que se trata de una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}-\{1,\,-1\}$, es decir todo $\mathbb{R}$ menos los valores, 1 y -1, que anulan al denominador. Por ello es una función continua también en $\mathbb{R}-\{1,\,-1\}$.

Para determinar los intervalos de monotonía partimos de la primera derivada.

$$f'(x)=\frac{-2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Función que existe para todo $\mathbb{R}$ menos para los valores, 1 y -1, por ser valores que anulan al denominador y donde la función además no existía. Por tanto el dominio de derivabilidad es $\mathbb{R}-\{1,\,-1\}$.

Los valores que anulan a esta primera derivada, serán: $4x=0 \;\Rightarrow\; x=0$.

Como es una función continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1,\,-1\}$, deberemos tener en cuenta el valor, 0, que anula a la primera derivada y los valores, 1 y -1, donde la función no existe para construir los intervalos de monotonía, que serán: $(-\infty,\,-1)$, $(-1,\,0)$, $(0,\,1)$ y $(1,\,+\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -2, $-0'5$, $0'5$ y 2, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

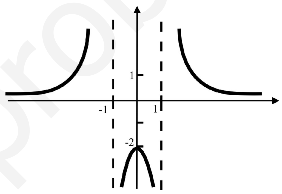
$$f'(-2)=\frac{-4\cdot(-2)}{\left((-2)^2-1\right)^2}=\frac{8}{9}>0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Creciente en } (-\infty,\ -1)$$

$$f'(-0'5)=\frac{-4\cdot(-0'5)}{\left((-0'5)^2-1\right)^2}=\frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{32}{9}>0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Creciente en } (-1,\ 0)$$

$$f'(0'5)=\frac{-4\cdot 0'5}{\left(0'5^2-1\right)^2}=\frac{-2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{-32}{9}<0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Decreciente en } (0,\ 1)$$

$$f'(2)=\frac{-4\cdot 2}{\left(2^2-1\right)^2}=\frac{-8}{9}<0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Decreciente en } (1,\ +\infty)$$

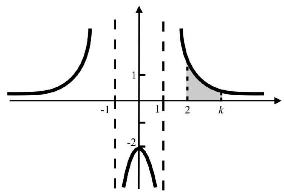
Los extremos relativos, teniendo en cuenta todo lo estudiado anteriormente, sólo pueden darse en los puntos de derivada cero, es decir, en x=0. Como además, en dicho punto la función pasa de creciente a decreciente, podemos concluir que la gráfica de la función en $x=0$ presenta un máximo relativo o local. La ordenada de este punto será:



$$f(0)=\frac{2}{0^2-1}=-2 \ \Rightarrow \ \text{hay un máximo relativo en } (0,\ -2).$$

La gráfica aproximada de la función f es la representada al lado.

Calculemos ahora el valor de k que nos pide el ejercicio, que según el mismo lo que nos dice es que: $\int_2^k \frac{2}{x^2-1}\,dx=\ln(2)$



Según el apartado anterior, tendremos

$$\int_2^k \frac{2}{x^2-1}\,dx=\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^k=\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|-\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|-\ln\frac{1}{3}=\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|-(\ln 1-\ln 3)=\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|-(0-\ln 3)=\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|+\ln 3$$

Igualemos este último valor con el que nos dice el problema que ha de valer esta área:

$$\ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|+\ln 3=\ln 2 \ \Rightarrow \ \ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|=\ln 2-\ln 3 \ \Rightarrow \ \ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|=\ln\frac{2}{3} \ \Rightarrow \ \frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{3} \ \Rightarrow$$

$$3k-3=2k+2 \ \Rightarrow \ 3k-2k=2+3 \ \Rightarrow \ k=5$$

Hemos tenido en cuenta en el valor absoluto que k era mayor que dos, por lo que el cociente era positivo.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Resolvamos el sistema para $\lambda=1$, por lo que sustituiremos este valor en el sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=\lambda+1 \\ 3y+2z=2\lambda+3 \\ 3x+(\lambda-1)y+z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1+1 \\ 3y+2z=2\cdot 1+3 \\ 3x+(1-1)y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ 3y+2z=5 \\ 3x+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad 3y + 2z = 5 \\ 3x \quad + z = 1 \end{cases}$$ Resolveremos el sistema por el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ El sistema está triangulado inferiormente, la 3ª ecuación es trivial, la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$ Nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-z \\ 0 & 3 & 5-2z \end{array}\right)$$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1-z \\ 0 & 3 & 5-2z \end{array}\right)$$ El sistema está diagonalizado, la solución es:
$3x = 1 - z \quad ; \quad 3y = 5 - 2z$

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\mu \in \mathbb{R}$, la solución del sistema, finalmente, es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}z \\ y = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\mu \\ y = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

(b) Hallemos los valores de λ para los que el sistema tenga una única solución, es decir, vamos a clasificar el sistema y lo haremos mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual lo expresamos en forma matricial.

$$\begin{cases} x + \quad y \quad + z = \lambda + 1 \\ \quad 3y \quad + 2z = 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 3 & \lambda-1 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 0 & \lambda-4 & -2 & -2\lambda-3 \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - (λ-4) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & -2\lambda^2-\lambda+3 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería $0 = -2\lambda^2 - \lambda + 3 \Rightarrow 0 = -2\cdot 1^2 - 1 + 3 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones. Se ha resuelto en el apartado anterior.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería una ecuación normal, es decir, todos los elementos de la diagonal principal serían distintos de cero, por lo que tendríamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Veamos si existe un valor de λ para el que el sistema tenga como solución $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Comprobemos si, para el valor de $\lambda = 1$, es o no una solución particular de la solución general que habíamos calculado en el apartado a).

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mu \\ y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mu \\ 0 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\mu \\ \frac{1}{2} = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}\mu = \frac{5}{3} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{5}{2} \\ \mu = \frac{5}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que no existe un único valor del parámetro μ que me permita obtener la solución $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, luego el valor de $\lambda = 1$ no puede ser el valor buscado.

Comprobemos, si hay un valor de $\lambda \neq 1$, para el que el sistema tenga como solución $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Para ello iremos sustituyendo esta solución en el sistema triangulado inferior del apartado anterior b).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & -2\lambda^2-\lambda+3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ 3y + 2z = 2\lambda + 3 \\ (2-2\lambda)z = -2\lambda^2 - \lambda + 3 \end{cases}$$

Sustituyamos, x, y y z por $\frac{-1}{2}$, 0 y $\frac{1}{2}$, respectivamente

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \lambda + 1 \\ 3\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 2\lambda + 3 \\ (2-2\lambda)\cdot\frac{1}{2} = -2\lambda^2 - \lambda + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda + 1 \\ 1 = 2\lambda + 3 \\ 1 - \lambda = -2\lambda^2 - \lambda + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \\ 2\lambda^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

Lugo podemos concluir que sí hay un valor de λ, $\lambda = -1$, para el que el sistema admite como solución: $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Determinemos el punto de corte de las rectas *r* y *s* de ecuaciones respectivas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{2}$$

Expresemos la ecuación de la recta *s* en forma paramétrica.

$$s \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-1+6\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$$

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

$$\begin{cases} \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-1+6\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \\ \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases} \end{cases}$$

Sustituyamos las incógnitas *x*, *y* y *z*, de la ecuación de la recta *s* en las ecuaciones de la recta *r*.

$$\begin{cases} 1-\lambda-1+6\lambda-2\lambda=6 \\ 1-\lambda+2\lambda=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda=6 \\ \lambda=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda=2 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado con una única solución, $\lambda=2$.

Sustituyamos este valor de λ en las ecuaciones paramétricas de la recta *s*:

$$\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-1+6\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2 \\ y=-1+6\cdot 2 \\ z=2\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=11 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow (-1,\ 11,\ 4)$$ es el punto de corte entre *r* y *s*.

(b) La ecuación del plano π que contiene a *r* y *s*, será la del plano que pase por un punto cualquiera de ambas rectas, por ejemplo el de corte de ambas rectas el (- 1, 11, 4), y los vectores de dirección del plano serán el de cada uno de los vectores de dirección de las rectas *r* y *s*, es decir, el $\vec{u}_s=(-1,6,2)$ y el de la recta *r* lo calcularemos mediante el producto vectorial de los vectores normales a cada unos de los planos que la definen:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{\pi_1}=(1,\ 1,\ -1) \\ \vec{n}_{\pi_2}=(1,\ 0,\ 1) \end{cases}$$

$$\vec{v}_r=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}=(1,\ 1,\ -1)\times(1,\ 0,\ 1)=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\right)=(1,\ -2,\ -1)$$

La ecuación del plano que contiene a las rectas, *r* y *s* es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x=-1+\alpha-\beta \\ y=11-2\alpha+6\beta \\ z=4-\alpha+2\beta \end{cases}$$ siendo α y β ∈ ℝ.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2012

Opción A

EJERCICIO 1. Sea la función continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x+k & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

(a) [1´25 PUNTOS] Calcula el valor de k.
(b) [1´75 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 2. Sea $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$

(a) [1´75 PUNTOS] Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t=\sqrt{1-x}$
(b) [0´75 PUNTOS] Calcula el valor de I.

EJERCICIO 3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} kx + 2y = 2 \\ 2x + ky = k \\ x - y = -1 \end{cases}$$

(a) [0´5 PUNTOS] Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.
(b) [1 PUNTO] Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
(c) [1 PUNTO] Halla las soluciones en cada caso.

EJERCICIO 4. Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$.
(a) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
(b) [0´5 PUNTOS] Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
(c) [1 PUNTO] Calcula la distancia del punto D al plano π.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea la función f definida por $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

(a) [1´25 PUNTOS] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f.

(b) [1´25 PUNTOS] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

EJERCICIO 2. Sean $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{9-x^2}{4}$

(a) [0´75 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) [1´75 PUNTOS] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} x - y = \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z = \lambda \\ -x - y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

(a) [1´25 PUNTOS] Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.

(b) [1´25 PUNTOS] Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS] Halla el punto simétrico de $P\,(2, 1, -5)$ respecto de la recta r definida por

$$\begin{cases} x-z = 0 \\ x+y+2 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Estudiemos la continuidad de la función f sabiendo que lo es.

Para valores de $x<0$, el trozo de función f definido en este intervalo es el de una función polinómica, que es continua en todo $\mathbb{R}$, luego la función es continua en este trozo, es decir, para valores de $x<0$.

Para valores de $0<x$, el trozo de función definido en este otro intervalo es el cociente de una función exponencial de base e que es continua en $\mathbb{R}$, más una función constante que también lo es en todo $\mathbb{R}$, y el denominador que es el de una función polinómica que es continua en $\mathbb{R}$, por tanto la función cociente es continua en $\mathbb{R}$ menos para los valores que anulan al

denominador que en este caso es el $x = 0$, pero este valor no pertenece al dominio particular de este trozo, por lo que la función es continua en este trozo, es decir, para valores de $0 < x$.

Estudiemos ahora la continuidad en el punto 0. Para que sea continua en este punto se ha de verificar que el valor de la función en dicho punto debe coincidir con los límites laterales de la función en el citado punto, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} (x+k) = 0+k = k \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = \dfrac{e^{0^2}-1}{0^2} = \dfrac{1-1}{0} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \dfrac{e^{x^2}\cdot 2x}{2x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} e^{x^2} = e^{0^2} = 1 \\ f(0) = 0+k = k \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \\ k = 1 = k \end{cases}$$

Luego la función es continua en el punto 0, siempre que k tome el valor 1, es decir, $k = 1$.

La indeterminación de $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ la hemos destruido aplicando la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x=c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida *"cuando x tiende a ±∞ y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a ±∞"*

En nuestro caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en cualquier punto; la continuidad la hemos justificado al principio del ejercicio y la derivabilidad se puede justificar de forma similar, por lo que definitivamente se puede aplicar la Regla de L´Hôpital.

(b) Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto de abscisa x_0 es: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$, será:

$$f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(1) = \frac{e^{1^2}-1}{1^2} = e-1$$

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}\cdot 2x\cdot x^2 - \left(e^{x^2}-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{e^{x^2}\cdot 2x^3 - e^{x^2}\cdot 2x + 2x}{x^4} \qquad \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{e^{1^2}\cdot 2\cdot 1^3 - e^{1^2}\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 1}{1^4} = \frac{e\cdot 2 - e\cdot 2 + 2}{1} = 2$$

$y-(e-1)=2\,(x-1) \;\Rightarrow\; y-e+1=2x-2 \;\Rightarrow\; y=2x+e-3$

Que es la ecuación de la recta tangente.

Hemos tenido en cuenta que el trozo de función con el que hemos trabajado ha sido el correspondiente a los valores de $x>0$, porque el punto de tangencia era $x=1$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Hagamos el cambio de variable, $t=\sqrt{1-x}$, en la integral I.

$$t=\sqrt{1-x} \Rightarrow dt=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}dx \Rightarrow dx=-2\sqrt{1-x}\,dt \Rightarrow dx=-2t\,dt$$

$$t=\sqrt{1-x} \Rightarrow t^2=1-x \Rightarrow x=1-t^2$$

Los nuevos límites de integración serán:

$$t=\sqrt{1-x} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\sqrt{1-1} \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=\sqrt{1-0} \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

La integral, finalmente, después del cambio de variable será:

$$I=\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx=\int_1^0 \frac{1-t^2}{1+t}(-2t)\,dt=\int_1^0 \frac{2t^3-2t}{1+t}\,dt=\int_1^0 \frac{2t\left(t^2-1\right)}{t+1}\,dt=$$

$$=\int_1^0 \frac{2t(t+1)(t-1)}{t+1}\,dt=\int_1^0 2t(t-1)\,dt=\int_1^0 \left(2t^2-2t\right)dt \qquad [1]$$

(b) La última integral es una integral inmediata, por lo que continuamos desde [1]:

$$I=\int_1^0 \left(2t^2-2t\right)dt=\left[\frac{2t^3}{3}-\frac{2t^2}{2}\right]_1^0=\frac{2\cdot 0^3}{3}-\frac{2\cdot 0^2}{2}-\left(\frac{2\cdot 1^3}{3}-\frac{2\cdot 1^2}{2}\right)=0-\left(\frac{2}{3}-1\right)=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Vamos a estudiar inicialmente el sistema según los diversos valores del parámetro k y lo haremos mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual lo expresamos en forma matricial, de esa manera podremos justificar, tal como dice el ejercicio, que el sistema es compatible para cualquier valor de k.

$$\begin{cases} kx+2y=2 \\ 2x+ky=k \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$ Intercambiemos entre sí las ecuaciones o filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & k & k \\ k & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}=1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - k · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & k+2 & k+2 \\ 0 & k+2 & k+2 \end{array}\right)$ Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & k+2 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Hemos triangulado inferiormente y obtenido una ecuación trivial, la eliminamos.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & k+2 & k+2 \end{array}\right)$ Nos queda un sistema donde todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{22} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{22} = 0 \Rightarrow k+2 = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow$ la segunda ecuación sería $0=k+2 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de una ecuación y dos incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

* Si $a_{22} \neq 0 \Rightarrow k \neq -2 \Rightarrow$ la segunda ecuación sería una ecuación normal, es decir, todos los elementos de la diagonal principal serían distintos de cero, por lo que tendríamos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, o sea, un sistema compatible determinado, con una única solución.

En consecuencia, el sistema, para cualquier valor de k, siempre es compatible.

(b) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, para $k = -2$, el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico.

Para todos los valores de $k \neq -2$ el sistema es compatible determinado.

(c) Resolvamos el sistema para $k = -2$. Sustituiremos este valor en el sistema triangulado inferior que obtuvimos al final del apartado (a).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & k+2 & k+2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2+2 & -2+2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$ Nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -1+y \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = -1 + y$$

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la incógnita secundaria, y, por un parámetro, por ejemplo, por $\mu\in\mathbb{R}$, la solución del sistema, finalmente, es:

$$\begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = \mu \end{cases}$$

Resolvamos ahora el sistema para todos los valores de $k \neq -2$. Continuaremos desde el sistema triangulado inferior que obtuvimos al final del apartado (a)

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & k+2 & k+2 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = k+2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $(k+2)\cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} k+2 & 0 & 0 \\ 0 & k+2 & k+2 \end{array}\right)$$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

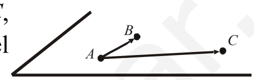
$$(k+2)x = 0 \quad ; \quad (k+2)y = k+2$$

Terminemos de despejar las incógnitas, recordando que $k+2$ es distinto de cero:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k+2}{k+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) La ecuación del plano π determinado por los puntos *A*, *B* y *C*, será la ecuación del plano que pasa por un punto, por ejemplo, por el *A*, y sus vectores de dirección son el $\vec{AB}$ y el $\vec{AC}$.



Las coordenadas del punto *A* y la de los vectores de dirección son:

$A\,(0, 0, 1)$

$\vec{AB} = (1,\ 0,\ -1) - (0,\ 0,\ 1) = (1,\ 0,\ -2)$

$\vec{AC} = (0,\ 1,\ -2) - (0,\ 0,\ 1) = (0,\ 1,\ -3)$

La ecuación del plano en paramétricas es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 1 - 2\alpha - 3\beta \end{cases}$$

(b) Para demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios, basta justificar que el punto *D* no pertenece al plano, es decir, que sus coordenadas no satisfacen la ecuación del plano π.

$$D(1,\ 2,\ 0) \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 1 - 2\alpha - 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ 2 = \beta \\ 0 = 1 - 2\alpha - 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ 0 = 1 - 2\cdot 1 - 3\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ 0 = -7 \end{cases}$$

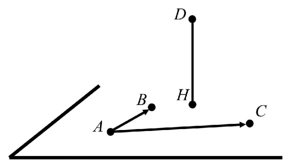
Luego el punto *D* no pertenece al plano π porque hemos obtenido una condición absurda, $0 = -7$, por tanto, los cuatro puntos no son coplanarios.

(c) Calculemos ahora la distancia de punto, $D(1,2,0)$, a este plano π.

El vector $\vec{DH}$ es perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, el $\vec{AB} = (1,\ 0,\ -2)$ y el $\vec{AC} = (0,\ 1,\ -3)$. Siendo *H* un punto del plano, el pié de la perpendicular al plano desde *D*.

El punto H inicialmente, por pertenecer al plano π, tendrá las coordenadas genéricas siguientes:

$$H\,(\alpha,\ \beta,\ 1-2\alpha-3\beta)$$



$\vec{DH} = (\alpha,\ \beta,\ 1-2\alpha-3\beta) - (1,\ 2,\ 0) = (\alpha - 1,\ \ \beta - 2,\ \ 1 - 2\alpha - 3\beta)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{DH} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{DH}\bullet\vec{AB} = 0 \\ \vec{DH} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{DH}\bullet\vec{AC} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\alpha - 1,\ \beta - 2,\ 1 - 2\alpha - 3\beta)\bullet(1,\ 0,\ -2) = 0 \\ (\alpha - 1,\ \beta - 2,\ 1 - 2\alpha - 3\beta)\bullet(0,\ 1,\ -3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-1-2+4\alpha+6\beta=0\\ \beta-2-3+6\alpha+9\beta=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}5\alpha+6\beta=3\\ 6\alpha+10\beta=5\end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$\left(\begin{array}{cc|c}5 & 6 & 3\\ 6 & 10 & 5\end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $5 \cdot [2^a f.] - 6 \cdot [1^a f.]$

$\left(\begin{array}{cc|c}5 & 6 & 3\\ 0 & 14 & 7\end{array}\right)$ Dividamos la 2ª fila por 7

$\left(\begin{array}{cc|c}5 & 6 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $[1^a f.] - 3 \cdot [2^a f.]$

$\left(\begin{array}{cc|c}5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{array}\right)$ La solución del sistema es:
$5\alpha = 0 \quad ; \quad 2\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 1/2$

Teniendo en cuenta estos valores, el vector $\vec{DH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{DH} = (\alpha-1,\ \beta-2,\ 1-2\alpha-3\beta) = \left(0-1,\ \frac{1}{2}-2,\ 1-2\cdot 0-3\cdot\frac{1}{2}\right) = \left(-1,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

La distancia del punto D al plano coincidirá con el módulo del vector $\vec{DH}$.

$$\left|\vec{DH}\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$ unidades de longitud.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Obtengamos las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de la función *f*.
Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $1 - x = 0 \Rightarrow x=1$, o donde no esté definida la función. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{e^{-1}}{1-1} = \frac{1}{e\cdot 0} = \frac{1}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical: } x=1.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}}\dfrac{e^{-x}}{1-x} = \dfrac{e^{-1}}{1-1^-} = \dfrac{1}{e\cdot 0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}}\dfrac{e^{-x}}{1-x} = \dfrac{e^{-1}}{1-1^+} = \dfrac{1}{e\cdot 0^-} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x se acerca a 1 por la izquierda, y a $-\infty$ cuando lo hace por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{e^{-\infty}}{1-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}\cdot(-\infty)}=\frac{1}{\infty\cdot(-\infty)}=\frac{1}{-\infty}=0$$

luego hay asíntota horizontal, $y=0$, cuando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-(-x)}}{1-(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{1+x}=\frac{e^{\infty}}{1+\infty}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{1}=\frac{e^{\infty}}{1}=\infty$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x=c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida *"cuando x tiende a ±∞ y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a ±∞"*

En nuestro caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en cualquier punto; ya que la del numerador es una exponencial elemental y la del denominador una función polinómica, por lo que definitivamente se puede aplicar la Regla de L´Hôpital, incluso en los casos como éste donde los límites de las funciones numerador y denominador tienden a ±∞ cuando x tiende a ±∞ .

No existe, por tanto, asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$, sin embargo se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua, veámoslo.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$, $y=\mathrm{m}x+\mathrm{n}$.

Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\mathrm{m}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^{-x}}{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{(1-x)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-(-x)}}{(1-(-x))\cdot(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{(1+x)\cdot(-x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{x}}{x^{2}+x}=\frac{-\infty}{\infty\cdot}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{x}}{2x+1}=\frac{-\infty}{\infty}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{x}}{2}=\frac{-\infty}{2}=-\infty$$

Luego no hay asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$ sino que hay una rama parabólica paralela al eje de ordenadas.

Hemos vuelto a aplicar la Regla de L´Hôpital para destruir la indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal $y=0$, cuando $x\to+\infty$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(100)=\dfrac{e^{-100}}{1-100}=-0'0......3 \\ y_{\text{asíntota}}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \quad f(100)<y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to+\infty$, va por debajo de la asíntota horizontal.

(b) Se trata de una función continua y derivable en todo su dominio que es ℝ menos el punto $x = 1$, por tratarse del cociente entre una función exponencial, e^{-x}, que lo es en todo ℝ y el de una función polinómica, $1 - x$, que lo es en también en todo ℝ, salvo en los valores que anulan al denominador, en esta caso el 1; por tanto la función f es continua y derivable en todo ℝ menos en el $x = 1$.

Calculemos los intervalos de monotonía.

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) - e^{-x}(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} \;\Rightarrow$$

$$xe^{-x} = 0 \quad\Rightarrow\quad e^{-x} \neq 0 \quad ; \quad x = 0$$

Este valor, $x = 0$, que anula a la función primera derivada junto con el que no pertenece al dominio el, $x = 1$, los llevamos sobre la recta real y construimos los intervalos de monotonía $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. Probamos valores intermedios, por ejemplo, -1, $0'5$ y 2, respectivamente de cada uno de esos intervalos, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(-1) = \frac{-1 \cdot e^{-(-1)}}{(1-(-1))^2} = \frac{-e}{4} < 0 \qquad \Rightarrow \text{ Decreciente en } (-\infty, 0)$$

$$f'(0'5) = \frac{0'5 \cdot e^{-0'5}}{(1-0'5)^2} = \frac{0'5 \cdot e^{-0'5}}{0'25} = \frac{2}{e^{0'5}} > 0 \qquad \Rightarrow \text{ Creciente en } (0, 1)$$

$$f'(2) = \frac{2 \cdot e^{-2}}{(1-2)^2} = \frac{2 \cdot e^{-2}}{1} = \frac{2}{e^2} > 0 \qquad \Rightarrow \text{ Creciente en } (1, +\infty)$$

Veamos ahora los extremos locales o relativos. Como la función es continua y derivable en todo ℝ menos en el punto $x = 1$, donde no existe, los extremos sólo pueden presentarse en los puntos donde la primera derivada es cero, o bien, por las mismas razones de continuidad y derivabilidad al pasar de decreciente a creciente en el punto $x = 0$ la función presenta un mínimo relativo o local.

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} \;\Rightarrow$$

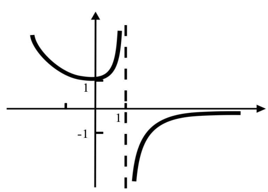
$$f''(x) = \frac{\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)(1-x)^2 - xe^{-x} \cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)(1-x) + xe^{-x} \cdot 2}{(1-x)^3} =$$

$$= \frac{e^{-x} - xe^{-x} - xe^{-x} + x^2e^{-x} + 2xe^{-x}}{(1-x)^3} = \frac{e^{-x} + x^2e^{-x}}{(1-x)^3} = \frac{e^{-x}\left(x^2+1\right)}{(1-x)^3}$$

Sustituyamos el valor 0 que anulaba a la primera derivada en la función segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{e^{-x}\left(x^2+1\right)}{(1-x)^3} \;\Rightarrow\; f''(0) = \frac{e^{-0}\left(0^2+1\right)}{(1-0)^3} = \frac{1}{1} = 1 \;\Rightarrow \text{ Mínimo relativo o local en } (0, 1)$$

La ordenada del extremo relativo se ha obtenido sustituyendo el valor de la abscisa en la función $f(x)$.



$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} \;\Rightarrow\; f(0) = \frac{e^{-0}}{(1-0)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

La representación gráfica está situada al lado.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en un punto de abscisa x_0 es: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$ $\Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$, será:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; y_0 = f(1) = -\frac{1}{4}\cdot 1^2 + \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{4} = -\frac{1}{2}x \;\Rightarrow\; f'(x_0) = f'(1) = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \;\Rightarrow\; y - 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + 2 + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Que es la ecuación de la recta tangente.

(b) Esbocemos el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $x + 2y = 5$ y el eje de abscisas.

La gráfica de la función cuadrática $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}$ es una parábola. Representémosla.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 0 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}x^2 = \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; x^2 = 9 \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \;\Rightarrow\; (3,\,0) \\ x = -3 \;\Rightarrow\; (-3,\,0) \end{array}\right.$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

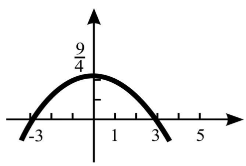
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; f(0) = -\frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; \left(0,\,\frac{9}{4}\right)$$

2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{0}{-\frac{1}{2}} = 0$,

siendo la ordenada: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; f(0) = -\frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \;\Rightarrow$

luego el vértice es el punto $\left(0,\,\frac{9}{4}\right)$.

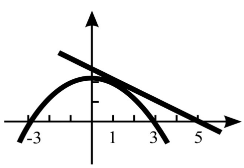
La gráfica se encuentra situada a la derecha.



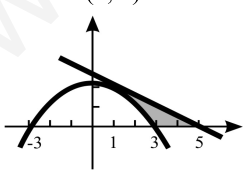
La gráfica de la recta $x + 2y = 5$, es la de la recta tangente calculada en el apartado anterior (a), ya que:

$$x + 2y = 5 \;\Rightarrow\; 2y = -x + 5 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

La gráfica de la recta tangente es una recta que pasa por el punto de tangencia (1, 2) y por el punto de corte con el eje de abscisas (0, 5).

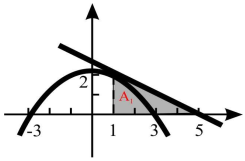


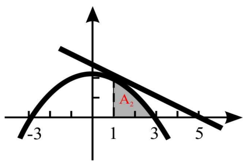
La representación gráfica está situada a la derecha.



El recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta $x + 2y = 5$, es el que se encuentra sombreado y situado a la izquierda.

El área del recinto anterior, el que nos pide el ejercicio, la obtendremos restando al área A_1 el área A_2:





El área A_1 se corresponde con el área de un triángulo:

$$\text{Área } A_1 = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

El área A_2 se corresponde con el área encerrada por la parábola entre 1 y 3:

$$\text{Área } A_2 = \int_1^3 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x\right]_1^3 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{3^3}{3} + \frac{9}{4}\cdot 3 - \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1^3}{3} + \frac{9}{4}\cdot 1\right) =$$

$$= -\frac{9}{4} + \frac{27}{4} - \left(-\frac{1}{12} + \frac{9}{4}\right) = \frac{18}{4} - \left(-\frac{1}{12} + \frac{27}{12}\right) = \frac{18}{4} - \left(\frac{26}{12}\right) = \frac{54}{12} - \frac{26}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

El área que nos piden será:

$$\text{Área} = A_1 - A_2 = 4 - \frac{7}{3} = \frac{12-7}{3} = \frac{5}{3} \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el sistema según los diversos valores del parámetro λ. Lo haremos mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual lo expresamos en forma matricial.

$$\left\{\begin{array}{rl} x - y &= \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z &= \lambda \\ -x - y + \lambda z &= 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & -2 & \lambda & \lambda \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & -2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + λ · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & -2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda=0$ y $\lambda=-1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería:

** Para $\lambda=0 \Rightarrow 0=\lambda^2+\lambda \Rightarrow 0=0^2+0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

** Para $\lambda=-1 \Rightarrow 0=\lambda^2+\lambda \Rightarrow 0=(-1)^2+(-1) \Rightarrow 0=0 \Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería una ecuación normal, es decir, todos los elementos de la diagonal principal serían distintos de cero, por lo que tendríamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvamos el sistema para $\lambda = 0$, para ello sustituiremos este valor en el sistema triangulado inferior al que habíamos llegado en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & -2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^2+0 & 0^2+0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] - [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$2x = 0 \quad ; \quad -2y = 0$$

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$, la solución del sistema, finalmente, es:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Resolvamos ahora el sistema para $\lambda = -1$, para ello sustituiremos este valor en el sistema triangulado inferior al que habíamos llegado en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & -2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (-1)^2+(-1) & (-1)^2+(-1) \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1+z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] - [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1-z \\ 0 & -2 & -1+z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$2x = -1 - z \quad ; \quad -2y = -1 + z$$

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\beta \in \mathbb{R}$, la solución del sistema, finalmente, es:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta \\ z = \beta \end{cases} \quad \text{con } \beta \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos, en primer lugar, la ecuación de la recta r en forma paramétrica, para ello encontraremos la soluciones del sistema formado por las ecuaciones de la recta definida por:

$$\begin{cases} x - z \quad = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. Exprésemoslo en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

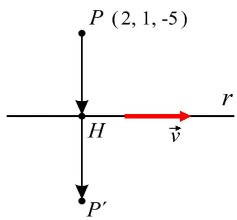
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & -2 - z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = z \quad ; \quad y = -2 - z \quad \Rightarrow$$

Terminemos de despejar las incógnitas, sustituyendo la incógnita secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\lambda \in \mathbb{R}$, la solución del sistema será:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$



que es la ecuación de la recta r en forma paramétrica.

El vector de dirección de la recta r es $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

Sea H la proyección del punto $P = (2, 1, -5)$ sobre la recta r, se cumple la condición de que el vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ dedirección de la recta, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto H por pertenecer a la recta tendrá de coordenadas $(\lambda, -2-\lambda, \lambda)$.

El vector $\overrightarrow{PH}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{PH} = (\lambda, -2-\lambda, \lambda) - (2, 1, -5) = (\lambda - 2, -\lambda - 3, \lambda + 5)$$

El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PH}$ y $\vec{v}$ es cero:

$$\overrightarrow{PH} \bullet \vec{v} = 0 \Rightarrow (\lambda - 2, -\lambda - 3, \lambda + 5) \bullet (1, -1, 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda - 2 + \lambda + 3 + \lambda + 5 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

Sustituyamos λ en el punto H y en el vector $\overrightarrow{PH}$:

$$H = (\lambda, -2-\lambda, \lambda) = (-2, -2-(-2), -2) = (-2, 0, -2)$$

$$\vec{PH}=(\lambda-2,\ -\lambda-3,\ \lambda+5)=(-2-2,\ -(-2)-3,\ -2+5)=(-4,\ -1,\ 3)$$

El punto $P'=(a, b, c)$, simétrico del P respecto de r, verifica que $\vec{PH}=\vec{HP'}$, es decir:

$$\vec{PH}=\vec{HP'} \Rightarrow (-4,-1,3)=(a,b,c)-(-2,\ 0,\ -2) \Rightarrow$$

$$(-4,\ -1,\ 3)=(a+2,\ \ b-0,\ c+2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4=a+2 \\ -1=b \\ 3=c+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \quad P'=(-6,\ -1,\ 1)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 76 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ dinde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1´75 PUNTOS] Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

(b) [0´75 PUNTOS] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=e$.

EJERCICIO 2. Sean $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\cos(x)$ respectivamente.

(a) [0´75 PUNTOS] Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) [1´75 PUNTOS] Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS] Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AXB = C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C.

EJERCICIO 4. El punto $M(1,-1,0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2,1,-1)$ y $B(0,-2,3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.

(a) [1 PUNTO] Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

(b) [1´5 PUNTOS] Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 2$.

(a) [1 PUNTO] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.

(b) [1 PUNTO] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

(c) [0´5 PUNTOS] Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de *f* donde ésta corta a la asíntota horizontal.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Sea *f* la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\cdot\cos(x)$. Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (π, 1).

EJERCICIO 3. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} kx+2y &= 3 \\ -x+2kz &= -1 \\ 3x-y-7z &= k+1 \end{aligned}$$

(a) [1´75 PUNTOS] Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro *k*.

(b) [0´75 PUNTOS] Resuélvelo para *k* = 1.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS] Calcula de manera razonada la distancia del eje *OX* a la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 2x-3y-z=0 \end{cases}$

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) La función *f* es la suma de una función racional y de la función logaritmo neperiano, la primera es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo para el valor, $x=0$, que es el que anula al denominador y por tanto será continua y derivable en el intervalo (0, +∞); la segunda es la función logaritmo neperiano, que es continua y derivable en (0, +∞), luego la función *f(x)* que es la suma de ambas seguirá siendo continua y derivable en (0, +∞).

Los extremos absolutos de esta función *f*, continua y derivable en (0, +∞), que queremos encontrar en el intervalo cerrado $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, los localizaremos entre los máximos y mínimos relativos o locales (puntos de derivada cero) que se encuentren dentro de dicho intervalo, o en los extremos del mismo.

Calculemos el valor o valores que anulan a la primera derivada.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{-1+x}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; -1+x=0 \;\Rightarrow\; x=1$$

Para saber si este valor que anula a la 1ª derivada es máximo o mínimo relativo, recurriremos al estudio de la monotonía, también podríamos recurrir al comportamiento de la segunda derivada en este punto.

Con este valor 1 que anula a la función primera derivada construimos los dos intervalos posibles de monotonía dentro del intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, el $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ y el $(1, e)$. Sustituiremos un valor intermedio de cada uno de esos intervalos, por ejemplo, el 0´5 y el 2, respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero en el intervalo correspondiente la gráfica de la función será creciente o decreciente.

$f'(0'5) = \frac{-1+0'5}{0'5^2} = \frac{-0'5}{0'25} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$

$f'(2) = \frac{-1+2}{2^2} = \frac{1}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $(1, e)$

En consecuencia, el valor que anulaba a la primera derivada, el 1, es un mínimo relativo.

Los extremos absolutos de *f(x)* hemos dicho que los localizaremos entre los máximos y mínimos relativos o locales (puntos de derivada cero) o en los extremos del intervalo.

Calculemos la ordenada del mínimo relativo, $x = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{1}{1} + \ln(1) = 1 + 0 = 1$$

La ordenada de este mínimo relativo es 1.

Obtengamos ahora las ordenadas en los extremos del intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \quad \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = e + \ln\left(e^{-1}\right) = e - 1 = 1'7182... \\ f(e) = \frac{1}{e} + \ln(e) = \frac{1}{e} + 1 = 1'3678... \end{cases}$$

La ordenada en el extremo inferior es $e - 1$ y en el extremo superior del mismo es $\frac{1}{e} + 1$.

En consecuencia, si comparamos las 3 ordenadas obtenidas, tendremos:

Mínimo absoluto en (1, 1).

Máximo absoluto en $\left(\frac{1}{e}, e-1\right)$.

(b) Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f* en un punto de abscisa x_0 es: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = e$, será:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(e) = \frac{1}{e} + \ln(e) = \frac{1}{e} + 1$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = f'(e) = \frac{e-1}{e^2}$$

$$y - \left(\frac{1}{e} + 1\right) = \frac{e-1}{e^2}(x - e) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{e} - 1 = \frac{e-1}{e^2}x - \frac{e-1}{e^2}\cdot e \quad \Rightarrow$$

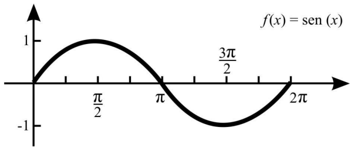
$$y - \frac{1}{e} - 1 = \frac{e-1}{e^2}x - \frac{e-1}{e^2}\cdot e \quad \Rightarrow \quad y = \frac{e-1}{e^2}x - \frac{e^2-e}{e^2} + \frac{1}{e} + 1 \quad \Rightarrow$$

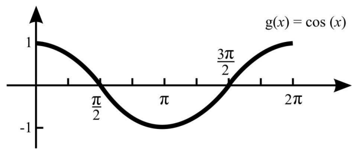
$$y = \frac{e-1}{e^2}x - \frac{e^2}{e^2} + \frac{e}{e^2} + \frac{1}{e} + 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{e-1}{e^2}x - 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{e-1}{e^2}x + \frac{2}{e}$$

Que es la ecuación de la recta tangente.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Las gráficas de las funciones elementales $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ en su dominio principal $[0, 2\pi]$ son las situadas al lado.

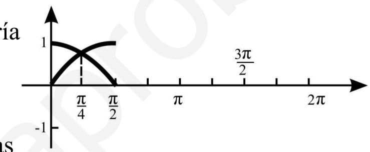




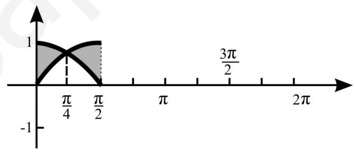
Vamos a representarlas conjuntamente en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pero antes calculemos el punto de intersección de las gráficas de ambas funciones en dicho intervalo, lo haremos resolviendo el sistema de ecuaciones formado por ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{sen}(x) \\ y = \cos(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

es decir, que el punto de corte es el $x = \frac{\pi}{4}$, la situación sería la dibujada al lado.



(b) Los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ son los que se encuentran sombreados al lado.



El área será:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))dx =$$

$$= \left[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - (\operatorname{sen}(0) + \cos(0)) + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0+1) + (-0-1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1 - 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Resolvamos la ecuación matricial $AXB = C^t$.

$AXB = C^t$	multiplicamos a la derecha por la inversa de B, B^{-1}, siempre que demostremos que exista (lo veremos después).
$AXB \cdot B^{-1} = C^t \cdot B^{-1}$	usamos la propiedad de elemento unidad (matriz identidad).
$AX \cdot I = C^t \cdot B^{-1}$	
$AX = C^t \cdot B^{-1}$	multiplicamos a la izquierda por la inversa de A, A^{-1}, siempre que demostremos que exista (lo veremos después)
$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}$	usamos la propiedad de elemento unidad (matriz identidad)

$I{\cdot}X = A^{-1}{\cdot}C^t{\cdot}B^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}{\cdot}C^t{\cdot}B^{-1}$

Antes de calcular la matriz X, veamos si existen las matrices inversas, A^{-1} y B^{-1}, y si existen las obtendremos. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de cada una de las matrices A y B, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz identidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A y B respectivamente, A^{-1} y B^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz correspondiente no tendría matriz inversa.

Comencemos con la matriz A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz A admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz identidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora la matriz B.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de B, B^{-1}, es decir:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz X.

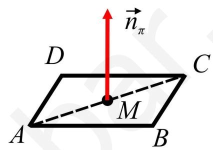
$$X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3\cdot(-1)-2\cdot 2+4\cdot 0 & -3\cdot 1-2\cdot 1+4\cdot 2 \\ 2\cdot(-1)+1\cdot 2-2\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot 1-2\cdot 2 \\ -1\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot 0 & -1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot 0+3\cdot 1 & -1\cdot 1+3\cdot 0 \\ 0\cdot 0-1\cdot 1 & 0\cdot 1-1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Calculemos las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AM}$.

$\vec{AB} = (0,\ -2,\ 3) - (2,\ 1,\ -1) = (-2,\ -3,\ 4)$

$\vec{AM} = (1,\ -1,\ 0) - (2,\ 1,\ -1) = (-1,\ -2,\ 1)$

El producto vectorial de estos dos vectores será un vector perpendicular al plano π.

$$\vec{n}_\pi = \vec{AB}\times\vec{AM} = (-2,\ -3,\ 4)\times(-1,\ -2,\ 1) = \left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (5,\ -2,\ 1)$$

La ecuación general de un plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, donde (A, B, C) representa las coordenadas de un vector perpendicular al plano, en nuestro caso $(A,\ B,\ C) = \vec{n}_\pi = (5,\ -2,\ 1)$ por lo que la ecuación general del plano que nos piden será, en principio de la forma:

$$5x - 2y + z + D = 0$$

Para calcular el valor de D, impondremos la condición a este plano que pase por uno cualquiera de los puntos que determinan el paralelogramo, por ejemplo, el A (2, 1, -1).

$$5x - 2y + z + D = 0 \quad\Rightarrow\quad 5\cdot 2 - 2\cdot 1 + (-1) + D = 0 \quad\Rightarrow\quad 10 - 2 - 1 + D = 0 \quad\Rightarrow\quad D = -7$$

Sustituyendo este valor en [1], tendremos que la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo será: $5x - 2y + z - 7 = 0$

(b) Vamos a calcular las coordenadas del punto C (a, b, c). Según el dibujo del apartado anterior, se verificará: $\vec{AM} = \vec{MC}$.

$$\vec{AM} = \vec{MC} \quad\Rightarrow\quad (-1,\ -2,\ 1) = (a,\ b,\ c) - (1,\ -1,\ 0) \quad\Rightarrow\quad (-1,\ -2,\ 1) = (a-1,\ b+1,\ c) \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1 = a-1 & \Rightarrow\quad a = 0 \\ -2 = b+1 & \Rightarrow\quad b = -3 \\ \ \ 1 = c & \Rightarrow\quad c = 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad C(0,\ -3,\ 1)$$

Obtengamos las coordenadas del vector $\vec{BC}$ para poder calcular el área del paralelogramo.

$\vec{BC} = (0,\ -3,\ 1) - (0,\ -2,\ 3) = (0,\ -1,\ -2)$

$$\text{Área} = \left|\vec{AB}\times\vec{BC}\right| = \left|(-2,\ -3,\ 4)\times(0,\ -1,\ -2)\right| = \left|\left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right)\right| =$$

$$= \left|(10,\ -4,\ 2)\right| = \sqrt{10^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{100 + 16 + 4} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30} \text{ unidades de área}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Asíntotas Verticales.

Para que exista asíntota vertical, $x = x_0$, se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, por ser una función racional hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $(x+1)(x-2)=0 \Rightarrow x=-1$ y $x=2$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2\cdot(-1)^2}{(-1+1)(-1-2)} = \frac{2}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \text{ Hay un asíntota vertical: } x = -1.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2\cdot 2^2}{(2+1)(2-2)} = \frac{8}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \text{ Hay un asíntota vertical: } x = 2.$$

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal, y = b, se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2 \quad \Rightarrow \text{ Hay asíntota horizontal: } y = 2.$$

La indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ se ha destruido teniendo en cuenta que se trata de un cociente de expresiones polinómicas de igual grado, y su límite, cuando x tiende a infinito, coincide con el cociente de los coeficientes de los términos de mayor e igual grado.

En las funciones racionales, si hay asíntota oblicua para $x \to +\infty$, también la habrá para $x \to -\infty$, siendo además la misma.

Al tratarse, como hemos dicho de una función racional y tener asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1}} \dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{2\left(-1^-\right)^2}{\left(-1^-+1\right)\left(-1^--2\right)} = \dfrac{2}{0^-\cdot(-3)} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1^+ \\ x>-1}} \dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{2\left(-1^+\right)^2}{\left(-1^++1\right)\left(-1^+-2\right)} = \dfrac{2}{0^+\cdot(-3)} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a 1 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} \dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{2\cdot\left(2^-\right)^2}{\left(2^-+1\right)\left(2^--2\right)} = \dfrac{8}{3\cdot 0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} \dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{2\cdot\left(2^+\right)^2}{\left(2^++1\right)\left(2^+-2\right)} = \dfrac{8}{3\cdot 0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a -1 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal $y = 2$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(100) = \dfrac{2\cdot 100^2}{(100+1)(100-2)} = 2'0206... \\ y_{\text{asíntota}} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(100) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -100 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{2\cdot(-100)^2}{(-100+1)(-100-2)} = 1'9805... \\ y_{\text{asíntota}} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-100) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to -\infty$, va por debajo de la asíntota horizontal.

(b) Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Hallemos los valores que anulan a la función primera derivada de $f(x)$.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x^2}{x^2-x-2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-x-2)-2x^2(2x-1)}{(x+1)^2(x-2)^2} \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4x^3-4x^2-8x-4x^3+2x^2}{(x+1)^2(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2-8x}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

$$\frac{-2x^2-8x}{(x+1)^2(x-2)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2-8x = 0 \Rightarrow -2x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Hemos obtenido dos valores que anulan a la función primera derivada. Para construir los intervalos de monotonía tendremos en cuenta además de los puntos anteriores los puntos de no continuidad y los de no derivabilidad así como los puntos donde la función no existe que son el -1 y el 2. Ordenamos todos estos puntos y construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty, -4)$, $(-4, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -5, -2, $-0'5$, 1 y 3 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

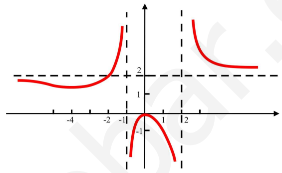
$$\begin{cases} f'(-5) = \dfrac{-2(-5)^2-8(-5)}{(-5+1)^2(-5-2)^2} = -\dfrac{5}{392} < 0 & \Rightarrow \text{Estrictamente decreciente en } (-\infty, -4) \\ f'(-2) = \dfrac{-2(-2)^2-8(-2)}{(-2+1)^2(-2-2)^2} = \dfrac{1}{2} > 0 & \Rightarrow \text{Estrictamente creciente en } (-4, -1) \\ f'(-0'5) = \dfrac{-2(-0'5)^2-8(-0'5)}{(-0'5+1)^2(-0'5-2)^2} = \dfrac{56}{25} > 0 & \Rightarrow \text{Estrictamente creciente en } (-1, 0) \\ f'(1) = \dfrac{-2\cdot 1^2-8\cdot 1}{(1+1)^2(1-2)^2} = -\dfrac{5}{2} < 0 & \Rightarrow \text{Estrictamente decreciente en } (0, 2) \\ f'(3) = \dfrac{-2\cdot 3^2-8\cdot 3}{(3+1)^2(3-2)^2} = -\dfrac{21}{8} > 0 & \Rightarrow \text{Estrictamente decreciente en } (2, +\infty) \end{cases}$$

(c) Calculemos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con la asíntota horizontal. Para ello resolveremos el sistema de ecuaciones formado por la función y la asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{2x^2}{x^2-x-2} \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{2x^2}{x^2-x-2}=2 \;\Rightarrow\; 2x^2=2x^2-2x-4 \;\Rightarrow\; 2x=-4 \;\Rightarrow\; x=-2$$

Hay un punto de corte para $x=-2$. La ordenada del punto decorte la obtendremos sustituyendo este valor de abscisa en la función.

$$f(-2)=\frac{2(-2)^2}{(-2+1)(-2-2)}=\frac{8}{-1\cdot(-4)}=\frac{8}{4}=2$$



El punto de corte de la función con la asíntota horizontal es el (-2, 2).

Una representación aproximada de la gráfica de f es la situada a la derecha.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la integral indefinida siguiente.

$$\int x^2\cos(x)\,dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u=x^2 \quad ; \quad du=2x\,dx$$
$$dv=\cos(x)\,dx \quad ; \quad v=\int\cos(x)\,dx=\operatorname{sen}(x)$$

$$\int x^2\cos(x)\,dx=x^2\operatorname{sen}(x)-\int 2x\operatorname{sen}(x)\,dx=x^2\operatorname{sen}(x)-2\int x\operatorname{sen}(x)\,dx= \qquad [1]$$

Volvemos a obtener otra integral por partes.

$$u=x \quad ; \quad du=dx$$
$$dv=\operatorname{sen}(x)\,dx \quad ; \quad v=\int\operatorname{sen}(x)\,dx=-\cos(x)$$

Continuando desde [1].

$$=x^2\operatorname{sen}(x)-2\left(-x\cos(x)-\int-\cos(x)\,dx\right)=x^2\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)-2\int\cos(x)\,dx=$$
$$=x^2\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)-2\operatorname{sen}(x)+k$$

La familia de primitivas es: $F(x)=x^2\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)-2\operatorname{sen}(x)+k$

Calculemos la primitiva cuya gráfica pase por el punto (π, 0), para ello sustituimos en $F(x)$ la x por π, el valor que obtendremos es cero, es decir, $F(\pi)=0$.

$$F(x)=x^2\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)-2\operatorname{sen}(x)+k \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; F(\pi)=\pi^2\operatorname{sen}(\pi)+2\pi\cos(\pi)-2\operatorname{sen}(\pi)+k \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 0=\pi^2\cdot 0+2\pi(-1)-2\cdot 0+k \;\Rightarrow\; k=-2\pi$$

La primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (π, 0) es:

$$F_1(x)=x^2\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)-2\operatorname{sen}(x)+2\pi$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Estudiemos el sistema para lo distintos valores del parámetro k mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual expresaremos el sistema en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{r} kx+2y \;=\; 3 \\ -x+2kz \;=\; -1 \\ 3x-y-7z = k+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & -1 & -7 & k+1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -7 & k+1 \\ -1 & 0 & 2k & -1 \\ k & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] + [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - k · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -7 & k+1 \\ 0 & -1 & 6k-7 & k-2 \\ 0 & 6+k & 7k & 9-k-k^2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (6+k) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -7 & k+1 \\ 0 & -1 & 6k-7 & k-2 \\ 0 & 0 & 6k^2+36k-42 & 3k-3 \end{array}\right)$$

La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; 6k^2+36k-42=0 \;\Rightarrow\; k^2+6k-7=0 \;\Rightarrow$

$$k = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot(-7)}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{64}}{2} = \frac{-6\pm 8}{2} = \begin{cases} 1 \\ -7 \end{cases}$$

** $k=1 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería: $(6k^2+36k-42)x = 3k-3 \;\Rightarrow\; 0\cdot x = 3\cdot1-3 \;\Rightarrow$ $0 = 0 \;\Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

** $k=-7 \Rightarrow$ la tercera ecuación sería: $(6k^2+36k-42)x = 3k-3 \;\Rightarrow\; 0\cdot x = 3\cdot(-7)-3 \;\Rightarrow$ $0 \neq -8 \;\Rightarrow$ se trata de una ecuación absurda por lo que el sistema sería un sistema incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{33} \neq 0 \;\Rightarrow\; 6k^2+36k-42 \neq 0 \Rightarrow\; k \neq 1$ y $k \neq -7 \;\Rightarrow$ la tercera ecuación sería una ecuación normal, es decir, todos los elementos de la diagonal principal serían distintos de cero, por lo que tendríamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvámoslo para $k = 1$. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferior que obtuvimos en el apartado anterior y suprimamos la última ecuación por ser trivial, tal como lo habíamos justificado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -7 & k+1 \\ 0 & -1 & 6k-7 & k-2 \\ 0 & 0 & 6k^2+36k-42 & 3k-3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -7 & 1+1 \\ 0 & -1 & 6\cdot1-7 & 1-2 \\ 0 & 0 & 6\cdot1^2+36\cdot1-42 & 3\cdot1-3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$ Nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2+7z \\ 0 & -1 & -1+z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 3+6z \\ 0 & -1 & -1+z \end{array}\right)$ Dividamos la 1ª por 3.
Multipliquemos la 2ª fila por -1.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1+2z \\ 0 & 1 & 1-z \end{array}\right)$ La matriz está diagonalizada, la solución es:
$x = 1 + 2z$; $y = 1 - z$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, z, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha \in \mathbb{R}$, finalmente, la solución será: $x = 1 + 2\alpha$; $y = 1 - \alpha$; $z = \alpha$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

La ecuación del eje OX es:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Estudiemos la posición relativa del eje OX y la recta r discutiendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas. Lo haremos mediante el método de Gauss para lo cual expresamos el sistema en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + [3ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ La matriz está triangulada inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero. Hemos obtenido una sóla ecuación absurda, la 4ª, $0 = -4$, por lo que el sistema es incompatible y las dos rectas se cruzan en el espacio.

Calculemos la mínima distancia entre ambas rectas. Expresemos la recta r en forma paramétrica. Para ello resolveremos el sistema de ecuaciones de r mediante el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right) \end{array}$ La matriz está triangulada inferiormente, nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4+3y \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \end{array}$ La matriz está diagonalizada, la solución es:

$2x = 4 + 3y \quad ; \quad -z = -4$

Terminemos de despejar las incógnitas, y a la incógnita no principal o secundaria, la *y*, la sustituiremos por un parámetro, por ejemplo, por $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = 2 + \dfrac{3}{2}y \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad r \equiv \begin{cases} x = 2 + \dfrac{3}{2}\mu \\ y = \mu \\ z = 4 \end{cases}$$

Que es la ecuación de la recta *r* en paramétricas. La ecuación del eje *OX* en paramétricas es: $OX \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$

Elijamos de la recta *r* un punto genérico, *P*, de coordenadas $P\left(2 + \frac{3}{2}\mu,\ \mu,\ 4\right)$ y del eje *OX* otro, *H*, de coordenadas $H(\lambda, 0, 0)$.

Se ha de verificar que el vector $\vec{PH}$ que determinan estos dos puntos genéricos, ha de ser perpendicular al vector de dirección de cada una de las rectas, y por tanto, los productos escalares respectivos serán cero:

$$\vec{PH} = (\lambda,\ 0,\ 0) - \left(2 + \frac{3}{2}\mu,\ \mu,\ 4\right) = \left(\lambda - 2 - \frac{3}{2}\mu,\ -\mu,\ -4\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{PH} \perp \vec{u}_r \ \Rightarrow\ \vec{PH} \bullet \vec{u}_r = 0 \ \Rightarrow\ \left(\lambda - 2 - \frac{3}{2}\mu,\ -\mu,\ -4\right) \bullet \left(\frac{3}{2},\ 1,\ 0\right) = 0 \\ \vec{PH} \perp \vec{v}_{OX} \ \Rightarrow\ \vec{PH} \bullet \vec{v}_{OX} = 0 \ \Rightarrow\ \left(\lambda - 2 - \frac{3}{2}\mu,\ -\mu,\ -4\right) \bullet (1,\ 0,\ 0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{3}{2}\lambda - 3 - \frac{9}{4}\mu - \mu = 0 \\ \lambda - 2 - \frac{3}{2}\mu = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 6\lambda - 12 - 9\mu - 4\mu = 0 \\ 2\lambda - 4 - 3\mu = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 6\lambda - 13\mu = 12 \\ 2\lambda - 3\mu = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Terminemos de resolver el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -13 & 12 \\ 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 6 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -13 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 4 · [1ªf.] + 13 · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 24 & 0 & 48 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$ La matriz está diagonalizada, la solución es:

$24\lambda = 48 \quad ; \quad 4\mu = 0$

Terminemos de despejar las incógnitas, $\lambda = 2 \ ; \ \mu = 0$.

Sustituyamos estos valores de λ y μ en las coordenadas del vector $\vec{PH}$:

$$\vec{PH}=\left(\lambda-2-\frac{3}{2}\mu,\quad -\mu,\quad -4\right)=\left(2-2-\frac{3}{2}\cdot 0,\quad -0,\quad -4\right)=\left(0,\quad 0,\quad -4\right)$$

La distancia entre la recta r y el eje OX coincidirá con el módulo del vector $\vec{PH}$, es decir:

dist (r, OX) $=\left|\left(0,\quad 0,\quad -4\right)\right|=\sqrt{0^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{16}=4$ unidades de longitud.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 77 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea la función f: $[1, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) [1 PUNTO]. Calcula los extremos absolutos y relativos de la función f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(c) [0´75 PUNTOS]. Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.

EJERCICIO 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) [0´75 PUNTOS]. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -x - 2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

(c) [1 PUNTO]. Calcula el área del recinto anterior.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + (k+1)y + 2z &=& -1 \\ kx + y + z &=& 2 \\ x - 2y - z &=& k+1 \end{array}\right.$$

(a) [1´75 PUNTOS]. Clasifícalo según los distintos valores de k.

(b) [0´75 PUNTOS]. Resuélvelo para el caso $k = 2$.

EJERCICIO 4. Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x+3}{-6} = \dfrac{y-9}{4} = \dfrac{z-8}{4}$ y $s \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-9}{-2} = \dfrac{z-8}{-2}$

(a) [1 PUNTO]. Determina la posición relativa de las rectas r y s.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula la distancia entre r y s.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea la función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x\left(x^2 - x + 1\right)$

(a) [0´75 PUNTOS]. Calcula $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

(c) [0´5 PUNTOS]. Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f.

[**EJERCICIO 2**. Sean $f, g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=-x^2+4x$ respectivamente.

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Encuentra la matrix X que satisface la ecuación $XA+A^3B=A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Los puntos $A(1, 1, 5)$ y $B(1, 1, 2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C, consecutivo a B, está en la recta $x = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$. Determina los vértices C y D.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, debemos tener en cuenta que se trata de la suma de una función polinómica, x^2, que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y de la función elemental, logaritmo neperiano de x, que es continua y derivable para todos los valores de $x>0$; por tanto, la función suma es continua y derivable para estos últimos valores y por supuesto para los valores donde está definida la función en este ejercicio, el intervalo cerrado $[1, e]$.

Para estudiar la monotonía partimos de la primera derivada.

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x - \frac{8}{x}$$

Los valores que anulan a esta primera derivada, serán:

$$2x - \frac{8}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x^2 - 8}{x} = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 8 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

Como es una función continua y derivable en $[1, e]$, sólo tendremos en cuenta uno de los valores que anulan a la primera derivada, el 2, para construir los intervalos de monotonía, que serán, el $[1, 2)$ y el $(2, e]$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 1´5 y 2´5, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente.

$$f'(1'5) = 2\cdot 1'5 - \frac{8}{1'5} = 3 - \frac{16}{3} = -\frac{7}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } [1, 2)$$

$$f'(2'5) = 2\cdot 2'5 - \frac{8}{2'5} = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (2, e]$$

(b) Estudiemos los extremos relativos o locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, es decir, en el 2, o también en los puntos de no continuidad o en los de no derivabilidad, pero en este caso al ser la función continua y derivable en $[1, e]$, los extremos locales sólo los podremos encontrar en el punto 2.

Teniendo en cuenta lo analizado en el apartado anterior, podemos asegurar que hay un mínimo relativo o local en $x = 2$, ya que la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer.

La ordenada de este extremo relativo se obtiene sustituyendo la abscisa del mismo en la función *f(x)*, es decir:

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x) \Rightarrow f(2) = 2^2 - 8\ln(2) \Rightarrow f(2) = 4 - 8\ln(2) \Rightarrow f(2) \cong -1'545...$$

luego hay un mínimo relativo en $(2,\ 4 - 8\ln(2))$.

Veamos ahora los extremos absolutos.

Al tratarse de una función continua y derivable y estar definida en un intervalo cerrado, sólo podrán existir extremos absolutos en los puntos de derivada cero o en los extremos del intervalo.

Para calcularlos obtendremos las ordenadas en los puntos 2 (derivada cero) y 1 y e (extremos del intervalo). El mayor valor se corresponderá con el máximo absoluto, y el menor con el mínimo absoluto.

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x) \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2^2 - 8\ln(2) \cong -1'545... \\ f(1) = 1^2 - 1\cdot\ln(1) = 1 \\ f(e) = e^2 - 8\ln(e) = e^2 - 8 \cong -0'61... \end{cases}$$

Luego hay un mínimo absoluto en $(2,\ 4 - 8\ln(2))$. Que era también un mínimo relativo.

Hay un máximo absoluto en (1, 1).

(c) Estudiemos los intervalos de concavidad y convexidad.

Como es una función continua y derivable en el intervalo cerrado $[1, e]$, necesitaremos sólo los puntos que anulen a derivada segunda.

$$f(x)=x^2-8\ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x)=2x-\frac{8}{x} \;\Rightarrow\; f''(x)=2-\frac{-8}{x^2} \;\Rightarrow\; f''(x)=2+\frac{8}{x^2}$$

$$2+\frac{8}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; \frac{2x^2+8}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; 2x^2+8=0 \;\Rightarrow\; x^2=-4 \;\Rightarrow\; x=\sqrt{-4}$$

luego no hay ningún valor que anule a la segunda derivada, por lo que construiremos un sólo intervalo de curvatura, el $[1, e]$, así es que basta sustituir un valor cualquiera de este intervalo, por ejemplo, el 2, en la segunda derivada y según nos salga mayor o menor que cero la curva será convexa o cóncava respectivamente en dicho intervalo.

$$f''(x)=2+\frac{8}{x^2} \;\Rightarrow\; f''(2)=2+\frac{8}{2^2}=4>0 \;\Rightarrow\; \text{Convexa en } [1, e].$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto de abscisa x_0 es: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$ $\Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$, será:

$$f(x)=x^3-4x \;\Rightarrow\; y_0=f(1)=1^3-4\cdot 1=-3$$

$$f'(x)=3x^2-4 \;\Rightarrow\; f'(x_0)=f'(1)=3\cdot 1^2-4=-1$$

$$y-(-3)=-1\,(x-1) \;\Rightarrow\; y+3=-x+1 \;\Rightarrow\; y=-x-2$$

Que es la ecuación de la recta tangente.

(b) Vamos a representar la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$, que es una función polinómica y después la recta tangente calculada en el apartado anterior. Para ello obtengamos, en primer lugar, los puntos en los que la curva corta al eje de abscisas, lo haremos resolviendo el sistema formado por dicha función y la ecuación del eje, $y=0$.

$$\left.\begin{array}{l} y=x^3-4x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-4x=0 \;\Rightarrow\; x\left(x^2-4\right)=0 \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \;\Rightarrow\; (0,\,0) \\ x^2-4=0 \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \;\Rightarrow\; (-2,\,0) \\ x=2 \;\Rightarrow\; (2,\,0) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Estudiemos la monotonía.

La función primera derivada es: $f'(x)=3x^2 - 4$. Los valores que anulen a esta derivada son:

$$3x^2-4=0 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}} \;\Rightarrow\; x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Con estos dos valores construimos los intervalos de monotonía: $\left(-\infty,\,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\,+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\,+\infty\right)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -2, 0 y 2, respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$f'(x) = 3x^2 - 4 \;\Rightarrow$

$f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 4 = 8 > 0 \quad \Rightarrow$ creciente en $\left(-\infty,\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$f'(0) = 3\cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \quad \Rightarrow$ decreciente en $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ +\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$f'(2) = 3\cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \quad \Rightarrow$ creciente en $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$

Como es una función polinómica, es continua y derivable en todo ℝ, y por tanto los extremos relativos serán:

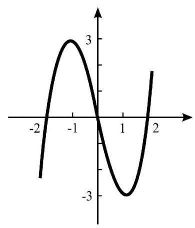
* máximo relativo en $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{16\sqrt{3}}{9}\right)$

* mínimo relativo en $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{16\sqrt{3}}{9}\right)$

Las ordenadas de los extremos relativos se han obtenido sustituyendo cada una de las abscisas en la función $f(x) = x^3 - 4x$.

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{24\sqrt{3}}{27} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = -\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{24\sqrt{3}}{27} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$$



Observamos también que la gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas, ya que:

$\forall x \in R \;\Rightarrow\; -x \in R$

$f(x) = x^3 - 4x \;\Rightarrow\; f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) \;\Rightarrow$

$f(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x)$

La gráfica aproximada de $f(x)$ es la situada al lado.

Los puntos de corte de las gráficas de f y de la recta tangente son:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 4x \\ y = -x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow\; x^3 - 4x = -x - 2 \;\Rightarrow\; x^3 - 3x + 2 = 0 \;\Rightarrow \text{ Aplicamos la Regla de Ruffini}$$

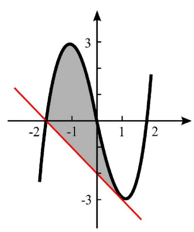
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \;\Rightarrow\; x^2 + x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Si $x = 1 \;\Rightarrow\; y = -1 - 2 = -3 \;\Rightarrow\; (1, -3)$

Si $x = -2 \;\Rightarrow\; y = -2 - (-2) = 0 \;\Rightarrow\; (-2, 0)$

Luego los puntos de corte de ambas gráficas son el $(1, -3)$ y el $(-2, 0)$.

El recinto limitado por ambas gráficas es el que se encuentra sombreado y situado al lado.



(b) El área de este recinto será la integral definida entre -2 y 1 de la función diferencia entre f y la recta tangente $y = -x - 2$.

$$\text{Área} = \int_{-2}^{1}\left(x^3-4x-(-x-2)\right)dx = \int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+2\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1^4}{4}-\frac{3\cdot 1^2}{2}+2\cdot 1-\left(\frac{(-2)^4}{4}-\frac{3\cdot(-2)^2}{2}+2\cdot(-2)\right) = \frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2-(4-6-4) = \frac{3}{4}+6 =$$

$$= \frac{27}{4} \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores de k.

$$\begin{cases} x+(k+1)y+2z = -1 \\ kx+y+z = 2 \\ x-2y-z = k+1 \end{cases}$$

Expresaremos el sistema anterior en forma matricial y lo discutiremos mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$$

Pasemos la 1ª columna a la 2ª columna.
Pasemos la 2ª columna a la 3ª columna.
Pasemos la 3ª columna a la 1ª columna.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & k+1 & -1 \\ 1 & k & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & k+1 \end{array}\right) \end{array}$$

Pasemos la 1ª fila a la 2ª fila.
Pasemos la 2ª fila a la 3ª fila.
Pasemos la 3ª fila a la 1ª fila.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & k+1 \\ 2 & 1 & k+1 & -1 \\ 1 & k & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & k+1 \\ 0 & 3 & k-3 & 2k+1 \\ 0 & k+1 & -1 & k+3 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - $(k+1)$ · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & k+1 \\ 0 & 3 & k-3 & 2k+1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & -2k^2+8 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow -k^2+2k = 0 \Rightarrow k(-k+2) = 0 \Rightarrow k = 0$ y $k = 2$.

** $k = 0 \Rightarrow$ la 3ª ecuación es, $0 = -2k^2+8 \Rightarrow 0 = -2\cdot 0^2+8 \Rightarrow 0 \neq 8$, que es una ecuación absurda por lo que el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

** $k = 2 \Rightarrow$ la 3ª ecuación es, $0 = -2k^2+8 \Rightarrow 0 = -2\cdot 2^2+8 \Rightarrow 0 = 0$, que es una ecua trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$ y $k \neq 2 \Rightarrow$ la 3ª ecuación sería una ecuación normal y el sistema sería un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvamos el sistema para $k = 2$. Según el apartado anterior la tercera ecuación era trivial por lo que la eliminamos y seguimos resolviendo el sistema a partir del sistema triangulado inferiormente al que habíamos llegado en el apartado anterior.

$$\begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & k+1 \\ 0 & 3 & k-3 & 2k+1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & -2k^2+8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 2+1 \\ 0 & 3 & 2-3 & 2\cdot 2+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} (z) & (x) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (z) & (x) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3+2y \\ 0 & 3 & 5+y \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $3 \cdot [1^a f.] - [2^a f.]$

$$\begin{array}{cc} (z) & (x) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & 4+5y \\ 0 & 3 & 5+y \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$-3z = 4 + 5y \quad ; \quad 3x = 5 + y$$

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos después la incógnita no principal o secundaria, la y, por un parámetro, por ejemplo por $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$z = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}y \quad ; \quad x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}y \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}\lambda \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Obtengamos los vectores de dirección de cada una de las rectas.

$$\vec{u_r} = (-6, 4, 4) \quad ; \quad \vec{v_s} = (3, -2, -2)$$

Veamos si tienen la misma dirección o dirección paralela, comprobemos si sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{-6}{3} = \frac{4}{-2} = \frac{4}{-2} \quad \Rightarrow \quad -2 = -2 = -2$$

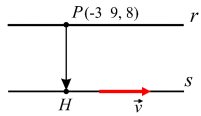
Como son proporcionales, en principio, las rectas son paralelas o coincidentes. Para diferenciar lo uno o lo otro, elegiremos un punto de una de las rectas, por ejemplo, el $(-3, 9, 8)$ de la recta r y comprobaremos si pertenece o no a la otra recta, para ello sustituiremos dichas coordenadas en la ecuación de la recta s para comprobar si la satisface o no.

$$s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2} \Rightarrow \frac{-3-3}{3} = \frac{9-9}{-2} = \frac{8-8}{-2} \Rightarrow -2 \neq 0 = 0$$

Como podemos observar el punto de r no pertenece a la recta s luego las rectas son paralelas en sentido estricto.

(b) Calculemos la distancia entre ambas rectas, sabiendo que son paralelas.

Expresemos, en primer lugar, la ecuación de la recta s en forma paramétrica.



$$s \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 9 - 2\lambda \\ z = 8 - 2\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

El vector de dirección de la recta s es $\vec{v_s} = (3, -2, -2)$.

Sea H la proyección del punto $P = (-3, 9, 8)$ de r sobre la recta s, se cumple la condición de que el vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular al vector $\vec{v_s}$ de dirección de la recta s, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto H por pertenecer a la recta s tendrá de coordenadas genéricas $(3+3\lambda, 9-2\lambda, 8-2\lambda)$.

El vector $\overrightarrow{PH}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{PH} = (3+3\lambda,\ 9-2\lambda,\ 8-2\lambda) - (-3,\ 9,\ 8) = (6+3\lambda,\ -2\lambda,\ -2\lambda)$$

El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PH}$ y $\vec{v_s}$ es cero:

$$\overrightarrow{PH} \bullet \vec{v_s} = 0 \;\Rightarrow\; (6+3\lambda,\ -2\lambda,\ -2\lambda) \bullet (3, -2, -2) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 18 + 9\lambda + 4\lambda + 4\lambda = 0 \;\Rightarrow\; 17\lambda + 18 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{18}{17}$$

Sustituyamos λ en el vector $\overrightarrow{PH}$:

$$\overrightarrow{PH} = (6+3\lambda,\ -2\lambda,\ -2\lambda) = \left(6 + 3\cdot\left(-\frac{18}{17}\right),\ -2\cdot\left(-\frac{18}{17}\right),\ -2\cdot\left(-\frac{18}{17}\right)\right) = \left(\frac{48}{17},\ \frac{36}{17},\ \frac{36}{17}\right)$$

La distancia entre las dos rectas coincidirá con la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra, en nuestro caso con el módulo del vector $\overrightarrow{PH}$.

$$\text{dist}\,(r, s) = \left|\overrightarrow{PH}\right| = \sqrt{\left(\frac{48}{17}\right)^2 + \left(\frac{16}{17}\right)^2 + \left(\frac{16}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{48^2 + 16^2 + 16^2}{17^2}} = \frac{\sqrt{2816}}{17} = \frac{\sqrt{2^8 \cdot 11}}{17} =$$

$$= \frac{2^4\sqrt{11}}{17} = \frac{16\sqrt{11}}{17} \text{ unidades de longitud}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos cada uno de los límites que nos pide el ejercicio.

$$\lim_{x\to -\infty} e^x\left(x^2 - x + 1\right) = \lim_{x\to +\infty} e^{-x}\left((-x)^2 - (-x) + 1\right) = \lim_{x\to +\infty} e^{-x}\left(x^2 + x + 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *"dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x = c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)":*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida *"cuando x tiende a ±∞ y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a ±∞"*

En nuestro caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en cualquier punto; ya que la del numerador es una función polinómica y la del denominador una exponencial elemental, por lo que definitivamente se puede aplicar la Regla de L´Hôpital, incluso en los casos como éste donde los límites de las funciones numerador y denominador tienden a ±∞ cuando x tiende a ±∞ .

Calculemos el segundo de los límites.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(x^2-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty} e^x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x+1\right)=e^\infty\cdot\lim_{x\to+\infty}x^2=\infty\cdot\infty=\infty$$

(b) Hallemos los extremos relativos de f. Estudiemos previamente la monotonía sabiendo que es una función continua y derivable en todo ℝ, por ser el producto de dos funciones que lo son, ya que una es una función exponencial elemental y la otra una función polinómica.

$$f(x)=e^x\left(x^2-x+1\right)\ \Rightarrow\ f'(x)=e^x\left(x^2-x+1\right)+e^x(2x-1)\ \Rightarrow$$

$$f'(x)=e^x\left(x^2-x+1+2x-1\right)\ \Rightarrow\ f'(x)=e^x\left(x^2+x\right)\ \Rightarrow$$

$$e^x\left(x^2+x\right)=0\ \Rightarrow\ x^2+x=0\ \Rightarrow\ x(x+1)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=0\\x=-1\end{cases}$$

Estos valores de $x = 0$ y $x = -1$ que anulan a la función primera derivada, lo llevamos sobre la recta real y construimos los intervalos de monotonía (-∞, -1), (-1, 0) y (0, +∞).

Probamos valores intermedios, por ejemplo, -2, -0´5 y 1, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(-2)=e^{-2}\left((-2)^2+(-2)\right)=e^{-2}\cdot 2>0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (-\infty,\ -1)$$

$$f'(-0'5)=e^{-0'5}\left((-0'5)^2+(-0'5)\right)=e^{-0'5}\cdot(-0'25)<0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (-1,\ 0)$$

$$f'(1)=e^1\left(1^2+1\right)=e\cdot 2>0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (0,\ +\infty)$$

Veamos ahora los extremos locales o relativos. Como la función es continua y derivable en todo ℝ, los extremos sólo pueden presentarse en los puntos donde la primera derivada es cero, o bien, por las mismas razones de continuidad y derivabilidad al pasar de creciente a decreciente en el punto $x = -1$ la función presenta un máximo relativo, y en el punto $x = 0$ la función presenta un mínimo relativo o local porque pasa de decreciente a creciente.

También podíamos haber calculado la segunda derivada y comprobar si para los valores que anulaban a la primera derivada, la segunda es mayor o menor que cero, en el primer caso se correspondería con un mínimo y en el segundo con un máximo.

Comprobémoslo.

$f(x)=e^x\left(x^2-x+1\right) \;\Rightarrow\; f'(x)=e^x\left(x^2+x\right) \;\Rightarrow$

$f''(x)=e^x\left(x^2+x\right)+e^x(2x+1) \;\Rightarrow\; f''(x)=e^x\left(x^2+x+2x+1\right) \;\Rightarrow$

$f''(x)=e^x\left(x^2+3x+1\right)$

$f''(-1)=e^{-1}\left((-1)^2+3\cdot(-1)+1\right)=e^{-1}(-1)<0 \quad\Rightarrow\quad$ máximo relativo en $x=-1$

$f''(0)=e^0\left(0^2+3\cdot 0+1\right)=1>0 \quad\Rightarrow\quad$ mínimo relativo en $x=0$

Evidentemente hemos obtenido los mismos resultados. Calculemos ahora los valores que toma la función en cada uno de estos extremos relativos, es decir, las ordenadas de dichos puntos.

Sustituyamos los valores -1 y 0 en la función *f*.

$f(x)=e^x\left(x^2-x+1\right)$

$f(-1)=e^{-1}\left((-1)^2-(-1)+1\right)=e^{-1}\cdot 3=\frac{3}{e} \;\Rightarrow\; \left(-1,\ \frac{3}{e}\right)$ máximo relativo

$f(0)=e^0\left(0^2-0+1\right)=1 \;\Rightarrow\; (0,\ 1)$ mínimo relativo

(c) Los puntos de inflexión, si existen, de esta función continua y derivable en $\mathbb{R}$ se encuentran en los puntos que anulando a la segunda derivada no anulen a la tercera derivada.

$f''(x)=e^x\left(x^2+3x+1\right) \;\Rightarrow\; e^x\left(x^2+3x+1\right)=0 \;\Rightarrow\; x^2+3x+1=0 \;\Rightarrow$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\\[2mm]\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

Hay dos valores que anulan a la segunda derivada, por lo que hay dos posibles puntos de inflexión; sustituyamos cada uno de estos valores en la tercera derivada:

$f''(x)=e^x\left(x^2+3x+1\right) \;\Rightarrow\; f'''(x)=e^x\left(x^2+3x+1\right)+e^x(2x+3) \;\Rightarrow$

$f'''(x)=e^x\left(x^2+3x+1+2x+3\right) \;\Rightarrow\; f'''(x)=e^x\left(x^2+5x+4\right)$

Calculemos los valores que anulan a la tercera derivada.

$$e^x\left(x^2+5x+4\right)=0 \;\Rightarrow\; x^2+5x+4=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}=\begin{cases}-4\\-1\end{cases}$$

Luego podemos asegurar que el valor de la tercera derivada para los valores que anulaban a la segunda será distinto de cero, es decir:

$$f'''\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)=e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}\left(\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2+5\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)+4\right)\neq 0$$

$$f'''\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)=e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\left(\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2+5\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)+4\right)\neq 0$$

En definitiva, hay dos puntos de inflexión de abscisas: $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

La ordenada de cada uno de los puntos de inflexión se obtendrían sustituyendo el valor de la abscisa en la función *f(x)*.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Representemos, primeramente, la función *f* cuya gráfica es una parábola.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad 0 = x(x-2) \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: $A(0, 0)$ y $B(2, 0)$.

2.- Punto de corte con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Bastaría sustituir $x = 0$ en la función.

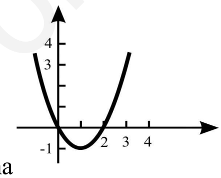
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 0^2 - 2\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{el punto es el } (0, 0).$$

3.- El mínimo se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-(-2)}{2} = 1$, siendo la ordenada:

$$y = x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = 1^2 - 2\cdot 1 = -1$$

por tanto, el vértice de la parábola es el punto (1, - 1).

La gráfica es la situada al margen.



Representemos ahora la gráfica de la función *g*.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 4x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = -x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad 0 = -x(x-4) \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: $C(0, 0)$ y $D(4, 0)$.

2.- Punto de corte con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Bastaría sustituir $x = 0$ en la función.

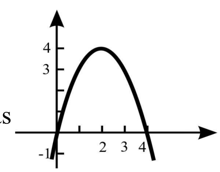
$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 4x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = -0^2 + 4\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{el punto es el } (0, 0).$$

3.- El máximo se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-4}{2\cdot(-1)} = 2$, siendo la ordenada:

$$y = -x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad y = -2^2 + 4\cdot 2 = 4$$

por tanto, el vértice de la parábola es el punto (2, 4).

La gráfica es la situada al margen.



Calculemos ahora los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

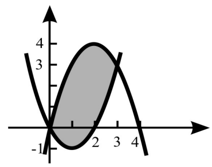
Resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas parábolas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2 - 2x = -x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x-3) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0^2 - 2\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,\ 0) \\ y = 3^2 - 2\cdot 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad (3,\ 3) \end{array}\right.$$

luego los puntos de corte de ambas gráficas son el $(0,\ 0)$ y el (3, 3).

El recinto limitado por ambas gráficas es el que se encuentra sombreado y situado al lado.



(b) El área de este recinto será la integral definida de la función diferencia, $h(x) = g(x) - f(x)$, entre 0 y 3.

$$\text{Área} = \int_0^3 h(x)\,dx = \int_0^3 \left(-x^2+4x-\left(x^2-2x\right)\right)dx = \int_0^3 \left(-2x^2+6x\right)dx = \left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= -\frac{2\cdot 3^3}{3}+\frac{6\cdot 3^2}{2}-\left(-\frac{2\cdot 0^3}{3}+\frac{6\cdot 0^2}{2}\right) = -18+27-0 = 9 \text{ unidades de área}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Calculemos la matriz X que verifica $XA + A^3B = A$.

$XA + A^3B = A$	sumamos a ambos miembros la matriz A^3B.
$XA + A^3B - A^3B = A - A^3B$	usamos la propiedad de elemento neutro respecto de la suma.
$XA + O = A - A^3B \;\Rightarrow$	
$XA = A - A^3B$	multiplicamos a la derecha por la matriz inversa de A, A^{-1}. Siempre que demostremos que exista, lo haremos más adelante.
$XA\cdot A^{-1} = (A - A^3B)\cdot A^{-1}$	usamos la propiedad asociativa.
$X\cdot(A\cdot A^{-1}) = (A - A^3B)\cdot A^{-1}$	usamos la propiedad de la matriz inversa.
$X\cdot I = (A - A^3B)\cdot A^{-1}$	usamos la propiedad del elemento unidad (matriz identidad)
$X = (A - A^3B)\cdot A^{-1}$	usamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
$X = A\cdot A^{-1} - A^3B\cdot A^{-1}$	usamos la propiedad de la matriz inversa
$X = I - A^3B\cdot A^{-1}$	calculemos esta matriz X.

Pero antes de calcular esta matriz X hemos de calcular, si existe, la matriz inversa de A, A^{-1}. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz X $\Rightarrow$ $X = I - A^3B\cdot A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

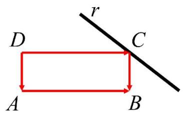
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica.



$$r \equiv x = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = 6 - 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Elegimos un punto genérico de r, el C, de coordenadas $(\lambda,\ 6-2\lambda,\ -1+2\lambda)$. Calculemos el valor de λ que permita que el punto C cumpla la condición de que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CB}$ sean perpendiculares, para ello el producto escalar de ambos debe ser cero.

$$\vec{AB} = (1,\ 1,\ 2) - (1,\ 1,\ 5) = (0,\ 0,\ -3)$$

$$\vec{CB} = (1,\ 1,\ 2) - (\lambda,\ 6-2\lambda,\ -1+2\lambda) = (1-\lambda,\ -5+2\lambda,\ 3-2\lambda)$$

$$\vec{AB} \perp \vec{CB} \ \Rightarrow \ \vec{AB} \bullet \vec{CB} = 0 \ \Rightarrow \ (0,\ 0,\ -3) \bullet (1-\lambda,\ -5+2\lambda,\ 3-2\lambda) = 0 \ \Rightarrow$$

$$-9 + 6\lambda = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{9}{6} \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{3}{2}$$

$$C(\lambda,\ 6-2\lambda,\ -1+2\lambda) \ \Rightarrow \ C\left(\frac{3}{2},\ 6-2\cdot\frac{3}{2},\ -1+2\cdot\frac{3}{2}\right) \ \Rightarrow \ C\left(\frac{3}{2},\ 3,\ 2\right)$$

El vértice $D(a, b, c)$ verificará que: $\vec{AB} = \vec{DC}$.

$$\vec{DC} = \left(\frac{3}{2},\ 3,\ 2\right) - (a,\ b,\ c) = \left(\frac{3}{2} - a,\ 3-b,\ 2-c\right)$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \ \Rightarrow \ (0,\ 0,\ -3) = \left(\frac{3}{2} - a,\ 3-b,\ 2-c\right) \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{3}{2} - a \\ 0 = 3 - b \\ -3 = 2 - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 3 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow \ D\left(\frac{3}{2},\ 3,\ 5\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 78 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultantes sea mínima.

EJERCICIO 2. Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y=4x$, $y=8-4x$ y la curva $y=2x-x^2$.

(a) [0´5 PUNTOS]. Realiza un esbozo de dicho recinto.

(b) [2 PUNTOS]. Calcula su área.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rl} x + ky + 2z = & k+1 \\ x + 2y + kz = & 3 \\ (k+1)x + y + z = & k+2 \end{array}\right.$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.

(b) [0´5 PUNTOS]. ¿Existe algún valor de k para el cual el sistema no tiene solución?

(c) [0´75 PUNTOS]. Resuelve el sistema para $k=0$.

EJERCICIO 4. Se consideran los vectores $\vec{u}=(k,\ 1,\ 1)$, $\vec{v}=(2,\ 1,\ -2)$ y $\vec{w}=(1,\ 1,\ k)$, donde k es un número real.

(a) [0´75 PUNTOS]. Determina los valores de k para los que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

(b) [1 PUNTO]. Determina los valores de k para los que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{v}-\vec{w}$ son ortogonales.

(c) [0´75 PUNTOS]. Para $k=1$, determina aquellos valores que son ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y tienen módulo 1.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x + 3\right) - x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1´5 PUNTOS]. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 PUNTO]. Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 27 - 8\ln(4)$$

EJERCICIO 3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

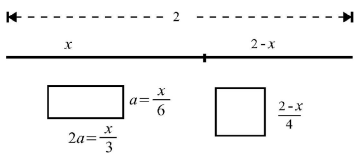
(a) [1 PUNTO]. Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.

(b) [1´5 PUNTOS]. Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z - 3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x - 2y + 2z = 1$ vale cuatro unidades.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construimos la función área, que es la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo.

En el dibujo se encuentran reflejados los datos del problema y las diversas relaciones entre ellos.

$$A(x) = \left(\frac{2-x}{4}\right)^2 + \frac{x}{6}\cdot\frac{x}{3} \;\Rightarrow\; A(x) = \frac{4 + x^2 - 4x}{16} + \frac{x^2}{18} \;\Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{18} - \frac{4x}{16} + \frac{4}{16} \;\Rightarrow\; A(x) = \frac{8x^2 + 9x^2}{144} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; A(x) = \frac{17}{144}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

El dominio de esta función es el intervalo abierto (0, 2) como se puede deducir fácilmente de la observación del dibujo; se trata de una función cuadrática, y por tanto es continua y derivable en su dominio.

Calculemos el mínimo absoluto de esta función, que coincidirá con el vértice de la parábola ya que el coeficiente de x^2 es positivo, y siempre que ese mínimo pertenezca al dominio.

$$A'(x) = \frac{34}{144}x - \frac{1}{4}$$

$$\frac{34}{144}x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 34x - 36 = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{36}{34} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{18}{17}$$

Este valor de x pertenece al dominio, luego es el mínimo absoluto tal como hemos justificado anteriormente.

A este mismo resultado habríamos llegado si estudiamos la monotonía; para ello construimos los dos intervalos siguientes: $\left(0, \frac{18}{17}\right)$ y $\left(\frac{18}{17}, 2\right)$, elegimos un punto cualquiera de cada uno de estos intervalos, por ejemplo, el 1 y el 1´5, y los sustituimos en la 1ª derivada según nos salga mayor o menor que cero la función será creciente o decreciente en dicho intervalo.

$$A'(1) = \frac{34}{144}\cdot 1 - \frac{1}{4} = \frac{34}{144} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{72} < 0 \quad \Rightarrow \qquad \text{decreciente en el intervalo } \left(0, \frac{18}{17}\right)$$

$$A'(1'5) = \frac{34}{144}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{51}{144} - \frac{1}{4} = \frac{5}{48} > 0 \quad \Rightarrow \qquad \text{creciente en el intervalo } \left(\frac{18}{17}, 2\right)$$

luego la función presenta, como ya sabíamos, un mínimo absoluto en $x = \frac{18}{17}$.

La longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima es para el trozo correspondiente al rectángulo de $x = \frac{18}{17}$ m, y para el trozo del cuadrado de $2 - x$, es decir, $2 - \frac{18}{17} = \frac{16}{17}$ m.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Dibujemos en primer lugar la gráfica de $f(x) = 2x - x^2$ que se corresponde con la de una parábola.

1.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

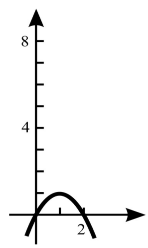
$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - x^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = 2x - x^2 \quad \Rightarrow \quad x(2 - x) = 0 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x = 0 & & \Rightarrow \ (0, 0) \\ 2 - x = 0 \ \Rightarrow & x = 2 & \Rightarrow \ (2, 0) \end{array}\right.$$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la funcióny la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = 2x - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = 2\cdot 0 - 0^2 = 0 \quad \Rightarrow$ el punto es el (0, 0).

2.- El vértice se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-2}{2\cdot(-1)} = 1$, siendo la ordenada: $y = 2x - x^2 \Rightarrow y = 2\cdot 1 - 1^2 = 1$, por tanto, el máximo es el punto (1, 1).

La gráfica se encuentra situada a la derecha.



Calculemos el punto de corte de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} y=4x \\ y=8-4x \end{array}\right\} \Rightarrow \ 4x=8-4x \ \Rightarrow \ 8x=8 \ \Rightarrow \ x=1 \Rightarrow \ y=4x=4\cdot 1=4 \ \Rightarrow \ (1,\ 4)$$

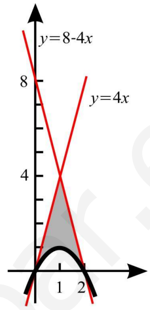
Representemos ahora la recta $y = 4x$.

Se trata de una función lineal que pasa por el punto (0, 0) y por el punto (1, 4).

Representemos la recta $y = 8 - 4x$.

Es una función afín que pasa por los puntos (0, 8), (1, 4) y (2, 0).

La situación gráfica de ambas gráficas junto con la parábola es la dibujada a la derecha. El recinto que limitan todas ellas es el que se encuentra sombreado.



(b) Calculemos el área del recinto sombreado anterior.

$$\text{Área} = \int_0^1 \left(4x-\left(2x-x^2\right)\right)dx + \int_1^2 \left(8-4x-\left(2x-x^2\right)\right)dx = \int_0^1 \left(2x+x^2\right)dx + \int_1^2 \left(8-6x+x^2\right)dx =$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[8x-\frac{6x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[8x-3x^2+\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \left[x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[8x-3x^2+\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 1^2+\frac{1^3}{3}-\left(0^2+\frac{0^3}{3}\right)+\left(8\cdot 2-3\cdot 2^2+\frac{2^3}{3}\right)-\left(8\cdot 1-3\cdot 1^2+\frac{1^3}{3}\right) =$$

$$= 1+\frac{1}{3}+\left(16-12+\frac{8}{3}\right)-\left(8-3+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}+\frac{20}{3}-\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{4}{3}+\frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores de k.

$$\left\{\begin{array}{rl} x + ky + 2z = & k+1 \\ x + 2y + kz = & 3 \\ (k+1)x + y + z = & k+2 \end{array}\right.$$

Expresaremos el sistema anterior en forma matricial y lo discutiremos mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 2 & k+1 \\ 1 & 2 & k & 3 \\ k+1 & 1 & 1 & k+2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 1 & 1 & k+2 \\ 1 & 2 & k & 3 \\ 1 & k & 2 & k+1 \end{array}\right)$$

Pasemos la 1ª columna a la 3ª columna.
Pasemos la 2ª columna a la 1ª columna.
Pasemos la 3ª columna a la 2ª columna.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (y) & (z) & (x) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k+1 & k+2 \\ 2 & k & 1 & 3 \\ k & 2 & 1 & k+1 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - k · [1ªf.]

$$\begin{array}{ccc|c} (y) & (z) & (x) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k+1 & k+2 \\ 0 & k-2 & -2k-1 & -2k-1 \\ 0 & 2-k & 1-k^2-k & -k^2-k+1 \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{ccc|c} (y) & (z) & (x) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k+1 & k+2 \\ 0 & k-2 & -2k-1 & -2k-1 \\ 0 & 0 & -k^2-3k & -k^2-3k \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} y el a_{22} que pueden serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{22} = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2.$

Sustituyamos este valor de k en el sistema triangulado anterior y analicemos lo que ocurre.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} (y) & (z) & (x) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2+1 & 2+2 \\ 0 & 2-2 & -2\cdot 2-1 & -2\cdot 2-1 \\ 0 & 0 & -2^2-3\cdot 2 & -2^2-3\cdot 2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} (y) & (z) & (x) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} (y) & (z) & (x) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \end{array}$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} (y) & (x) & (z) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -10 & 0 & -10 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} (y) & (x) & (z) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente. Hemos obtenido una fila de ceros que es una ecuación trivial, la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

Por tanto, para $k = 2$, obtenemos un sistema con infinitas soluciones, o como dice el problema con más de una solución.

* $a_{22} \neq 0 \Rightarrow k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2.$

Veamos para este otro caso las diferentes situaciones que pueden presentarse con el a_{33}.

** $a_{33} = 0 \Rightarrow -k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k(-k - 3) = 0 \Rightarrow k = 0$ y $k = -3$.

*** $k = 0 \Rightarrow$ la 3ª ecuación es, $0 = -k^2 - 3k \Rightarrow 0 = -0^2 - 3\cdot 0 \Rightarrow 0 = 0$, que es una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, con infinitas soluciones, o como dice el problema con más de una solución.

*** $k = -3 \Rightarrow$ la 3ª ecuación es, $0 = -k^2 - 3k \Rightarrow 0 = -(-3)^2 - 3\cdot(-3) \Rightarrow 0 = 0$, que es una ecua trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones, o como dice el problema con más de una solución.

** $a_{33} \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$ y $k \neq -3 \Rightarrow$ la 3ª ecuación sería una ecuación normal y el sistema sería un sistema compatible determinado, con solución única.

Los valores de k para los que el sistema tiene infinitas soluciones, o como nos dice el problema con más de una solución, son: $k = 2$, $k = 0$ y $k = -3$.

Un resumen esquemático de los resultados anteriormente obtenidos sería:

$k = 2 \quad \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

$$k \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 & \Rightarrow \text{ sistema compatible indeterminado uniparamétrico.} \\ k = -3 & \Rightarrow \text{ sistema compatible indeterminado uniparamétrico.} \\ k \neq 0 \text{ y } k \neq -3 & \Rightarrow \text{ sistema compatible determinado.} \end{cases}$$

(b) Según el apartado anterior no existe ningún valor de k para el cual el sistema no tiene solución.

(c) Resolvamos el sistema para $k = 0$. Según el apartado anterior la tercera ecuación era trivial por lo que la eliminamos y seguimos resolviendo el sistema a partir del sistema triangulado inferiormente al que habíamos llegado en el apartado anterior.

$$\begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k+1 & k+2 \\ 0 & k-2 & -2k-1 & -2k-1 \\ 0 & 0 & -k^2-3k & -k^2-3k \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0+1 & 0+2 \\ 0 & 0-2 & -2\cdot 0-1 & -2\cdot 0-1 \\ 0 & 0 & -0^2-3\cdot 0 & -0^2-3\cdot 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Nos sobra una incógnita, la x, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-x \\ 0 & -2 & -1+x \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3-x \\ 0 & -2 & -1+x \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$2y = 3 - x \quad ; \quad -2z = -1 + x$$

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos después la incógnita no principal o secundaria, la x, por un parámetro, por ejemplo por $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x \quad ; \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Para determinar los valores de k para los que los tres vectores $\vec{u} = (k,\ 1,\ 1)$, $\vec{v} = (2,\ 1,\ -2)$ y $\vec{w} = (1,\ 1,\ k)$, sean linealmente dependientes, lo haremos calculando para qué valores de k el determinante formado por las coordenadas de dichos vectores es igual a cero.

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 2 + 2 - 1 + 2k - 2k = k^2 - 1 \;\Rightarrow\; k^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Para estos dos valores de *k*, 1 y -1, los tres vectores serán linealmente dependientes. Para los valores de *k* distintos de 1 y -1 los vectores serían linealmente independientes.

(b) Obtengamos, en primer, lugar los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{v}-\vec{w}$.

$\vec{u}+\vec{v} = (k,\ 1,\ 1) + (2,\ 1,\ -2) = (k+2,\ 2,\ -1)$

$\vec{v}-\vec{w} = (2,\ 1,\ -2) - (1,\ 1,\ k) = (1,\ 0,\ -2-k)$

Estos dos vectores serán ortogonales si el producto escalar de ambos es cero.

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{v}-\vec{w}\right) = (k+2,\ 2,\ -1) \bullet (1,\ 0,\ -2-k) = k+2-(-2-k) = k+2+2+k = 2k+4$

$2k+4=0 \;\Rightarrow\; 2k=-4 \;\Rightarrow\; k=-2$

Este será el valor de *k* para el que los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{v}-\vec{w}$ serán ortogonales.

(c) Para $k = -1$, los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tendrán de coordenadas:

$\vec{v} = (2,\ 1,\ -2)\ \ ;\ \ \vec{w} = (1,\ 1,\ k) \;\Rightarrow\; \vec{v} = (2,\ 1,\ -2)\ \ ;\ \ \vec{w} = (1,\ 1,\ -1)$

Sean (*a*, *b*, *c*) las coordenadas genéricas de los vectores que queremos calcular, y que han de ser ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$, para ello el producto escalar de aquel con cada uno de estos vectores será cero.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} \bullet (a,\ b,\ c) = 0 \;\Rightarrow\; (2,\ 1,\ -2) \bullet (a,\ b,\ c) = 0 \\ \vec{w} \bullet (a,\ b,\ c) = 0 \;\Rightarrow\; (1,\ 1,\ -1) \bullet (a,\ b,\ c) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+b-2c=0 \\ a+b-c=0 \end{array}\right\}$$

Resolvamos este sistema mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual expresamos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot$ [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. La incógnita que nos sobra la *c* la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2c \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$2a = 2c \quad ; \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c \quad ; \quad b = 0$$

Los vectores que son ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ serán de la forma (*a*, 0, *a*).

Calculemos entre estos vectores los que tienen de módulo 1.

$$\left|(a,\ 0,\ a)\right| = \sqrt{a^2+0^2+a^2} = 1 \ \Rightarrow\ \sqrt{2a^2} = 1 \ \Rightarrow\ 2a^2 = 1 \ \Rightarrow\ a^2 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \ \Rightarrow\ a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Los vectores que son ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y tienen módulo 1, son los siguientes:

$$(a,\ 0,\ a) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad y \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, debemos tener en cuenta que se trata de la suma de una función polinómica, *x*, que es continua y derivable en todo ℝ y de la función logaritmo neperiano de una función polinómica $g(x) = x^2+3x+3$, que será continua y derivable para todos los valores de *x* que hagan $g(x) > 0$ (justificaremos que estos valores serán todo ℝ); por tanto, la función suma será continua y derivable para todo ℝ.

Demostremos que $g(x) > 0$ para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$.

Resolvamos la inecuación $x^2+3x+3 > 0$.

Calculemos, en primer lugar, los valores que la hagan cero: $x^2+3x+3 = 0$

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1} = \frac{-3\pm\sqrt{9-12}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}$$

No hay ningún valor que haga cero a la inecuación, por lo que construiremos un único intervalo, ℝ, en donde la inecuación será mayor o menor que cero, para lo cual bastará comprobarlo para un valor cualquiera de ℝ, por ejemplo, el 0:

$x^2+3x+3 \quad \Rightarrow \quad 0^2+3\cdot0+3 = 3 > 0 \quad \Rightarrow$ la inecuación siempre se conserva > 0.

En definitiva, *f(x)* será continua y derivable para todo ℝ, que es donde además nos dicen que está definida.

Para estudiar la monotonía partimos de la primera derivada.

$$f(x) = \ln\left(x^2+3x+3\right) - x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1$$

Los valores que anulan a esta primera derivada, serán:

$$\frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \frac{2x+3-\left(x^2+3x+3\right)}{x^2+3x+3} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{2x+3-x^2-3x-3}{x^2+3x+3} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{-x^2-x}{x^2+3x+3} = 0 \ \Rightarrow\ -x^2-x = 0 \ \Rightarrow\ -x(x+1) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \ \Rightarrow\ x = -1 \end{cases}$$

Como es una función continua y derivable en ℝ, sólo tendremos en cuenta los valores que anulan a la primera derivada para construir los intervalos de monotonía, que serán: $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 0)$ y $(0,\ +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -2, -0´5 y 1, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$f'(-2)=\frac{2\cdot(-2)+3}{(-2)^2+3\cdot(-2)+3}-1=\frac{-1}{1}-1=-2<0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (-\infty,\ -1).$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3}-1=\frac{8}{7}-1=\frac{1}{7}>0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (-1,\ 0).$$

$$f'(1)=\frac{2\cdot 1+3}{1^2+3\cdot 1+3}-1=\frac{5}{7}-1=-\frac{2}{7}<0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (0,\ +\infty).$$

Estudiemos los extremos locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, es decir, en el 0 y en el -1, o también en los puntos de no continuidad o en los de no derivabilidad, pero en este caso al ser la función continua y derivable en $\mathbb{R}$, los extremos locales sólo los podremos encontrar en los puntos antes citados de derivad cero.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora, podemos asegurar que hay un mínimo relativo o local en $x = -1$, ya que la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer. Y un máximo relativo o local en $x = 0$, ya que la gráfica pasa de creciente a decreciente.

La ordenada de cada uno de estos extremos relativos se obtiene sustituyendo la abscisa respectiva en la función *f(x)*, es decir:

$$f(x)=\ln\left(x^2+3x+3\right)-x \quad \Rightarrow \quad f(-1)=\ln\left((-1)^2+3\cdot(-1)+3\right)-(-1)=\ln(1)-(-1)=0+1=1$$

luego hay un mínimo relativo en $(-1, 1)$.

$$f(x)=\ln\left(x^2+3x+3\right)-x \quad \Rightarrow \quad f(0)=\ln\left(0^2+3\cdot 0+3\right)-0=\ln(3)$$

luego hay un máximo relativo en $(0, \ln(3))$.

(b) Obtengamos la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -2$.

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad y-f(-2)=-\frac{1}{f'(-2)}\left(x-(-2)\right)$$

Necesitaremos calcular la ordenada de la función en este punto y el valor de la derivada de f en dicho punto.

$$f(x)=\ln\left(x^2+3x+3\right)-x \quad \Rightarrow \quad f(-2)=\ln\left((-2)^2+3\cdot(-2)+3\right)-(-2) \quad \Rightarrow$$

$$f(-2)=\ln(1)+2 \quad \Rightarrow \quad f(-2)=0+2 \quad \Rightarrow \quad f(-2)=2$$

$$f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}-1 \quad \Rightarrow \quad f'(-2)=\frac{2\cdot(-2)+3}{(-2)^2+3\cdot(-2)+3}-1=\frac{-1}{1}-1=-2$$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisas $x = -2$ será:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad y-f(-2)=-\frac{1}{f'(-2)}\left(x-(-2)\right) \quad \Rightarrow$$

$$y-2=-\frac{1}{-2}\left(x-(-2)\right) \quad \Rightarrow \quad y-2=\frac{1}{2}(x+2) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+1+2 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+3$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

La función *f(x)* es la suma de una función polinómica ax^2, que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y de la función logaritmo neperiano elemental multiplicada por una constante, $b\ln(x)$, que es continua y derivable para todos los valores estrictamente mayores que cero, por tanto, la función *f(x)* es continua y derivable para todos los valores de x pertenecientes al intervalo $(0, +\infty)$, que es donde está definida la función.

En consecuencia, si tiene un extremo relativo en $x = 1$, es que la derivada de la función en dicho punto es 0.

$$f(x)= ax^2 + b\ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x)= 2ax + \frac{b}{x} \;\Rightarrow$$

$$f'(1)= 0 \;\Rightarrow\; f'(1)= 2a\cdot 1+\frac{b}{1} \;\Rightarrow\; 0= 2a + b \;\Rightarrow\; b = -2a \qquad [1]$$

Y además debe cumplirse que la segunda derivada en dicho punto ha de ser distinta de cero:

$$f''(x)= 2a + \frac{-b}{x^2} \;\Rightarrow\; f''(x)= 2a - \frac{b}{x^2} \;\Rightarrow\; f''(1)= 2a - \frac{b}{1^2} \;\Rightarrow\; f''(1)= 2a - b \;\Rightarrow$$

$$f''(1) \neq 0 \;\Rightarrow\; 0 \neq 2a - b \;\Rightarrow\; b \neq 2a \qquad [2]$$

Por otro lado el problema nos dice que:

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 27 - 8\ln(4)$$

y como $f(x)= ax^2 + b\ln(x) \;\Rightarrow$

$$\int_1^4 \left(ax^2 + b\ln(x)\right) dx = 27 - 8\ln(4) \;\Rightarrow$$

$$\int_1^4 \left(ax^2 + b\ln(x)\right) dx = \int_1^4 ax^2\,dx + \int_1^4 b\ln(x)\,dx = \int_1^4 ax^2\,dx + b\int_1^4 \ln(x)\,dx = \qquad [3]$$

Calculemos la integral indefinida de la función logaritmo neperiano.

$$\int \ln(x)\,dx =$$

la resolveremos haciendo uso del método de integración por partes.

$$u = \ln(x) \qquad du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = dx \qquad v = \int dx = x$$

$$= x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x$$

Teniendo en cuenta este último resultado continuamos desde [3].

$$[3] = \left[\frac{ax^3}{3}\right]_1^4 + \left[b\left(x\ln(x) - x\right)\right]_1^4 = \frac{a\cdot 4^3}{3} - \frac{a\cdot 1^3}{3} + b\left(4\cdot\ln(4) - 4\right) - b\left(1\cdot\ln(1) - 1\right) =$$

Teniendo en cuenta el resultado [1], sustituyamos b por $-2a$, y sigamos simplificando la expresión.

$$= \frac{64a}{3} - \frac{a}{3} - 2a\left(4\cdot\ln(4) - 4\right) - (-2a)\left(1\cdot\ln(1) - 1\right) = \frac{63a}{3} - 8a\cdot\ln(4) + 8a + 2a\left(1\cdot 0 - 1\right) =$$

$$= \frac{63a}{3} - 8a\cdot\ln(4) + 8a - 2a = \frac{63a}{3} - 8a\cdot\ln(4) + 6a = \frac{63+18}{3}a - 8a\cdot\ln(4) = 27a - 8a\cdot\ln(4)$$

Este resultado lo hacemos coincidir con el que nos da el problema para poder calcular a.

$27a - 8a\cdot \ln(4) = 27 - 8\ln(4) \;\Rightarrow\; a\big(27 - 8\ln(4)\big) = 27 - 8\ln(4) \;\Rightarrow$

$a = \dfrac{27 - 8\ln(4)}{27 - 8\ln(4)} = 1 \;\Rightarrow\; a = 1$

Y el valor de b, según [1], será:

$b = -2a \;\Rightarrow\; b = -2\cdot 1 \;\Rightarrow\; b = -2$

Y la última condición que nos queda por verificar es la [2], que $b \neq -2a$, comprobémoslo:

$b \neq 2a \;\Rightarrow\; -2 \neq 2\cdot 1 \;\Rightarrow\; -2 \neq 2$

Evidentemente se cumple, luego los valores de a y b son $a = 1$ y $b = -2$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calculemos, si existe, la matriz inversa de A. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz identidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz identidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente. Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$. Sustituyamos la 2ª fila por: $3\cdot[2^{a}f.] - 5\cdot[1^{a}f.]$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente. Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 13 \neq 0$. Sustituyamos la 1ª fila por: $13\cdot[1^{a}f.] + 2\cdot[2^{a}f.]$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \end{array}\right)$ Dividamos la 1ª fila por 39. Dividamos la 2ª fila por 13.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{39} & \frac{6}{39} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{13} & \frac{3}{13} \end{array}\right)$ Simplifiquemos.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{13} & \frac{3}{13} \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{-5}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

Comprobemos ahora que la matriz B posee inversa, pero antes vamos a calcular dicha matriz. Para lo cual, resolveremos la ecuación matricial $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, multiplicando a la izquierda por la inversa de A, A^{-1}.

$$A^{-1}AB = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; I\cdot B = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; B = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

hemos tenido en cuenta la propiedad asociativa del producto de matrices y la existencia de la matriz unidad.

Continuemos operando.

$$B = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; B=\begin{pmatrix}\frac{1}{13} & \frac{2}{13}\\ -\frac{5}{13} & \frac{3}{13}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{13}+\frac{14}{13} & \frac{1}{13}+\frac{6}{13}\\ \frac{10}{13}+\frac{21}{13} & -\frac{5}{13}+\frac{9}{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{7}{13}\\ \frac{31}{13} & \frac{4}{13}\end{pmatrix}$$

La matriz B tendrá inversa si el determinante asociado a B es distinto de cero.

$$B=\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{7}{13}\\ \frac{31}{13} & \frac{4}{13}\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; |B|=\begin{vmatrix}\frac{12}{13} & \frac{7}{13}\\ \frac{31}{13} & \frac{4}{13}\end{vmatrix}=\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{13}-\frac{7}{13}\cdot\frac{31}{13}=\frac{48}{13^2}-\frac{217}{13^2}=-\frac{169}{13^2}=-1\neq 0$$

luego la matriz B posee inversa.

(b) Resolvamos la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$, procederemos de la siguiente manera.

$A^{-1}X - B = BA$	$\Rightarrow$	sumemos a ambos miembros la matriz B.
$A^{-1}X - B + B = BA + B$	$\Rightarrow$	por la existencia de elemento neutro o matriz nula.
$A^{-1}X + O = BA + B$	$\Rightarrow$	simplificando.
$A^{-1}X = BA + B$	$\Rightarrow$	multiplicamos a la izquierda por la matriz A.
$A\,A^{-1}X = A(BA + B)$	$\Rightarrow$	por la propiedad asociativa del producto de matrices.
$(A\,A^{-1})\,X = A(BA + B)$	$\Rightarrow$	por la existencia de la matriz unidad.
$I\cdot X = A(BA + B)$	$\Rightarrow$	simplificando.
$X = A(BA + B)$		

Ahora sí podemos calcular la matriz X.

$$X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{7}{13}\\ \frac{31}{13} & \frac{4}{13}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{7}{13}\\ \frac{31}{13} & \frac{4}{13}\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}\frac{36+35}{13} & \frac{-24+7}{13}\\ \frac{93+20}{13} & \frac{-62+4}{13}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{7}{13}\\ \frac{31}{13} & \frac{4}{13}\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}\frac{71}{13} & \frac{-17}{13}\\ \frac{113}{13} & \frac{-58}{13}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{7}{13}\\ \frac{31}{13} & \frac{4}{13}\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{83}{13} & \frac{-10}{13}\\ \frac{144}{13} & \frac{-54}{13}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot\frac{83}{13}-2\cdot\frac{144}{13} & 3\cdot\frac{-10}{13}-2\cdot\frac{-54}{13}\\ 5\cdot\frac{83}{13}+1\cdot\frac{144}{13} & 5\cdot\frac{-10}{13}+1\cdot\frac{-54}{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{249}{13}-\frac{288}{13} & \frac{-30}{13}+\frac{108}{13}\\ \frac{415}{13}+\frac{144}{13} & \frac{-50}{13}-\frac{54}{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{39}{13} & \frac{78}{13}\\ \frac{559}{13} & \frac{-104}{13}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 43 & -8\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica.

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3 \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1} \;\Rightarrow \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$$

Elijamos un punto genérico, P, de la recta; tendrá de coordenadas $(1+4\lambda,\ 2-2\lambda,\ 3+\lambda)$.

Expresemos la ecuación del plano en forma general.

$$\pi \equiv x - 2y + 2z = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

Impongamos la condición al punto P de estar a una distancia del plano π de 4 unidades:

$$\text{dist }(P, \pi) = 4 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1+4\lambda - 2(2-2\lambda) + 2(3+\lambda) - 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \right| = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\left| \frac{1+4\lambda - 4 + 4\lambda + 6 + 2\lambda - 1}{\sqrt{9}} \right| = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\left| \frac{10\lambda + 2}{3} \right| = 4 \quad \Rightarrow$$

esta última ecuación, al ser en valor absoluto, da lugar a dos ecuaciones:

$$\frac{10\lambda + 2}{3} = 4 \;\Rightarrow\; 10\lambda + 2 = 12 \;\Rightarrow\; 10\lambda = 10 \;\Rightarrow\; \lambda = 1$$

$$\frac{10\lambda + 2}{3} = -4 \;\Rightarrow\; 10\lambda + 2 = -12 \;\Rightarrow\; 10\lambda = -14 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{14}{10} \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{7}{5}$$

Para cada uno de estos valores de λ obtenemos un punto de la recta que está a una distancia de 4 unidades del plano.

$$P(1+4\lambda,\ 2-2\lambda,\ 3+\lambda) \;\Rightarrow\; P_1(1+4\cdot 1,\ 2-2\cdot 1,\ 3+1) \;\Rightarrow\; P_1(5,\ 0,\ 4)$$

$$P(1+4\lambda,\ 2-2\lambda,\ 3+\lambda) \;\Rightarrow\; P_2\left(1+4\cdot\left(-\frac{7}{5}\right),\ 2-2\cdot\left(-\frac{7}{5}\right),\ 3+\left(-\frac{7}{5}\right)\right) \;\Rightarrow\; P_1\left(-\frac{23}{5},\ \frac{24}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 79 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se considera la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{a}{x-2} & \text{si} \quad x<1 \\ a+\dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (- 1, 0).

EJERCICIO 3. Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

(a) [1´25 PUNTOS]. ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

(b) [1´25 PUNTOS]. Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50%, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

EJERCICIO 4. [1´25 PUNTOS]. Determina el punto P de la recta $r\equiv \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(3, 2, 1)$.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

EJERCICIO 2. Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{x^2}{4}$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$ respectivamente

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ 2x + ky = 1 \\ y + 2z = k \end{cases}$$

(a) [1 PUNTO]. Clasifica el sistema según los valores del parámetro *k*.

(b) [0´75 PUNTOS]. Resuélvelo para $k = 1$.

(c) [0´75 PUNTOS]. Resuélvelo para $k = -1$.

EJERCICIO 4. Considera el punto $P(1,0,2)$ y la recta *r* dada por las ecuaciones $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$

(a) [1 PUNTO]. Calcula la ecuación del plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r*.

(b) [1´75 PUNTOS]. Calcula el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la función *f(x)* es derivable en todo $\mathbb{R}$ tiene que ser continua también en $\mathbb{R}$.

Calculemos el valor de a y de b para que la función sea, primeramente, continua.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de *x* menores que 1, $x < 1$, es la suma de una función constante y de una función racional, la primera es continua en todo $\mathbb{R}$ y la segunda lo es para todo $\mathbb{R}$ menos para los valores que anulan al denominador, el 2, pero este valor no pertenece al dominio particular de este trozo de función, luego la función suma lo será en el dominio común, es decir, para todos lo valores de $x \neq 2$, luego la función *f* es continua para $x < 1$.

- El trozo de función para valores de x mayores que 1, $x > 1$, es la suma de una función constante, a, que es continua en todo $\mathbb{R}$ y de una función cociente de dos funciones la del numerador que es una función constante, b, que es continua en todo $\mathbb{R}$ y la del denominador que es la función raíz cuadrada de x que es continua para todos los valores mayores o iguales a cero pero que al estar en el denominador, el cero que es el valor que anula al denominador no pertenecería al dominio, luego esta función cociente sería continua para todos lo valores mayores que cero, y en consecuencia, la función suma sería continua para el dominio de continuidad común, es decir, para los valores de $x > 0$, finalmente podemos concluir que la función f es continua para $x > 1$.

- El problema de la continuidad está en el punto 1, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} \left(1+\dfrac{a}{x-2}\right) = 1+\dfrac{a}{1-2} = 1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \left(a+\dfrac{b}{\sqrt{x}}\right) = a+\dfrac{b}{\sqrt{1}} = a+b \\ f(1) = a+\dfrac{b}{\sqrt{1}} = a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \\ 1-a = a+b \Rightarrow b = 1-2a \end{array}\right. \qquad [1]$$

Luego $f(x)$ será continua en el punto 1, si se verifica que: $b = 1 - a$.

En definitiva, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, siempre y cuando se satisfaga que $b = 1 - a$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad.

- Para valores de $x < 1$, es la suma de una función constante y de una función racional, la primera es derivable en todo $\mathbb{R}$ y la segunda lo es para todo $\mathbb{R}$ menos para los valores que anulan al denominador, el 2, pero este valor no pertenece al dominio particular de este trozo de función, luego la función suma lo será en el dominio común, es decir, para todos lo valores de $x \neq 2$, luego la función f es derivable para $x < 1$, siendo la derivada de este trozo de función, $-\dfrac{a}{(x-2)^2}$.

- Para valores de $x > 1$, f es derivable por ser es la suma de una función constante, a, que es derivable en todo $\mathbb{R}$ y de una función cociente de dos funciones la del numerador que es una función constante, b, que es derivable en todo $\mathbb{R}$ y la del denominador que es la función raíz cuadrada de x que es derivable para todos los valores mayores o iguales a cero pero que al estar en el denominador, el cero que es el valor que anula al denominador no pertenecería al dominio, luego esta función cociente sería derivable para todos lo valores mayores que cero, y en consecuencia, la función suma sería derivable para el dominio de derivabilidad común, es decir, para los valores de $x > 0$, finalmente podemos concluir que la función f es derivable para $x > 1$, siendo la derivada, $\dfrac{-b\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=-\dfrac{b}{2x\sqrt{x}}$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{a}{(x-2)^2} & \text{si } x<1\\[2mm] -\dfrac{b}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x>1\end{cases}$$

- El problema está en el punto 1.

En el punto 1 será derivable, si las derivadas laterales coinciden y en este caso se debe satisfacer además la condición de continuidad [1].

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(1^-\right)=\displaystyle\lim_{\substack{x\to1^-\\x<1}}\left(-\frac{a}{(x-2)^2}\right)=-\frac{a}{\left(1^--2\right)^2}=-a\\ f'\left(1^+\right)=\displaystyle\lim_{\substack{x\to1^+\\x>1}}\left(-\frac{b}{2x\sqrt{x}}\right)=-\frac{b}{2\cdot1^+\sqrt{1^+}}=-\frac{b}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(1^-)=f'(1^+)\ \Rightarrow\\ -a=-\dfrac{b}{2}\ \Rightarrow\ b=2a\end{array}\right. \qquad [2]$$

luego la función $f(x)$ será derivable en $x = 1$ siempre y cuando se verifiquen las condiciones [1] y [2] simultáneamente, para lo cual resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}b=1-2a\\ b=2a\end{array}\right\}\Rightarrow\ 1-2a=2a\ \Rightarrow\ 4a=1\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ b=2a=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{4}\\[2mm] b=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Para estos valores de a y de b, la función será derivable en $\mathbb{R}$.

La función derivada quedará finalmente, una vez sustituidos a y b por los valores calculados, así:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4(x-2)^2} & \text{si } x<1\\[2mm] -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} & \text{si } x\geq1\end{cases}$$

La función f, una vez sustituidos los valores de a y b será:

$$f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{4(x-2)} & \text{si } x<1\\[2mm] \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x\geq1\end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos primeramente una primitiva de $f(x)$.

$$F(x)=\int\left(1-x^2\right)e^{-x}dx$$

Se trata de una integral por partes.

$u=1-x^2 \qquad du=-2x\,dx$

$dv=e^{-x}dx \quad v=\int dv=\int e^{-x}dv=-e^{-x}$

$$\int\left(1-x^2\right)e^{-x}dx=\left(1-x^2\right)\left(-e^{-x}\right)-\int-2x\left(-e^{-x}\right)dx=-\left(1-x^2\right)e^{-x}-2\int x\,e^{-x}dx= \qquad [1]$$

Hemos obtenido una nueva integral que hay que resolverla mediante una nueva integración por partes:

$$\int x\, e^{-x} dx$$

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx \quad v = \int dv = \int e^{-x} dv = -\, e^{-x}$$

$$\int x\, e^{-x} dx = x\left(-e^{-x}\right) - \int -e^{-x}\, dx = -x\, e^{-x} + \int e^{-x} dx = -\, x\, e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(-x-1) \qquad [2]$$

Continuemos desde [1], sustituyendo el resultado [2] que hemos obtenido.

$$= -\left(1-x^2\right)e^{-x} - 2\,e^{-x}(-x-1) = e^{-x}\left(-1+x^2+2x+2\right) = e^{-x}\left(x^2+2x+1\right) + k$$

La integral indefinida de *f(x)* es:

$$F(x) = \int \left(1-x^2\right) e^{-x} dx = e^{-x}\left(x^2+2x+1\right) + k$$

Obtengamos ahora la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (-1, 0), es decir, que $F(-1)=0$.

$$F(x) = e^{-x}\left(x^2+2x+1\right) + k \;\Rightarrow\; F(-1) = e^{-(-1)}\left((-1)^2 + 2\cdot(-1)+1\right) + k \;\Rightarrow$$

$$0 = e(1-2+1) + k \;\Rightarrow\; 0 = 0 + k \;\Rightarrow\; k = 0$$

La primitiva que nos pide el ejercicio es:

$$F(x) = e^{-x}\left(x^2+2x+1\right)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Llamemos x al precio del libro, y al precio de la calculadora y z al precio del estuche. El enunciado del problema nos dice que la compra de estos tres productos valen 57 euros, lo que lo podemos expresar como:

$$x + y + z = 57$$

Por otro lado el problema nos dice que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche, lo que podemos expresarlo como:

$$x = 2(y+z) \;\Rightarrow\; x = 2y + 2z \;\Rightarrow\; x - 2y - 2z = 0$$

Resolvamos el sistema formado por estas dos ecuaciones mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$ Expresemos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & -3 & -3 & -57 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 57-z \\ 0 & -3 & -57+3z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 114 \\ 0 & -3 & -57+3z \end{array}\right)$ Dividamos la 1ª fila por 3. Dividamos la 2ª fila por 3.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 19-z \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = 38 \quad ; \quad y = 19 - z$$

Podemos pues concluir que el precio del libro es de $x = 38$ euros y se ha podido determinar de forma única. Sin embargo el de la calculadora, y, no es posible determinarlo ya que está en función del valor del estuche, z, siendo la relación existente entre ambos la que se ha calculado anteriormente y que era de: $y = 19 - z$.

(b) Teniendo en cuenta ahora que si nos han hecho un descuento del 50% en el libro, de un 20% en la calculadora y de un 25% en el estuche, eso significa que hemos pagado un 50% del libro, un 80% de la calculadora y un 75% del estuche, habiendo pagado en total 34 euros. Esto lo expresamos mediante esta ecuación:

$$\frac{50}{100}x+\frac{80}{100}y+\frac{75}{100}z=34 \Rightarrow \frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y+\frac{3}{4}z=34 \Rightarrow \frac{10}{20}x+\frac{16}{20}y+\frac{15}{20}z=\frac{680}{20} \Rightarrow$$

$$10x+16y+15z=680$$

Resolvamos ahora el sistema formado por las dos ecuaciones del apartado anterior junto a esta última que hemos obtenido.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \\ 10x+16y+15z=680 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sitema en forma matricial y procedamos a resolverlo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 10 & 16 & 15 & 680 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente. Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$. Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.] Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 10 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & -3 & -3 & -57 \\ 0 & 6 & 5 & 110 \end{array}\right)$ Dividamos la 2ª fila por -3.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 1 & 19 \\ 0 & 6 & 5 & 110 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$. Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 6 · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente. Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$. Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.] Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [3ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 53 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$. Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = 38 \quad ; \quad y = 15 \quad ; \quad z = 4.$$

El precio del libro es de 38 €, el de la calculadora de 15 € y el del estuche de 4 €.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3+2\lambda \\ y = -5+3\lambda \\ z = -4+3\lambda \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ya que el vector de dirección de la recta r es el vector $\vec{v} = (2, 3, 3)$ y un punto de la misma es el $(-3, -5, -4)$.

Elijamos un punto genérico, P, de la recta r, tendrá de coordenadas:

$$(-3+2\lambda,\ -5+3\lambda,\ -4+3\lambda).$$

Impongamos ahora la condición de que la distancia de P al origen de coordenadas, O, y punto $A(3, 2, 1)$ sean iguales, es decir, los módulos de los vectores $\vec{PO}$ y $\vec{PA}$ son iguales.

al Construyamos los vectores $\vec{PO}$ y $\vec{PA}$.

$$\vec{PO} = (0,0,0) - (-3+2\lambda,\ -5+3\lambda,\ -4+3\lambda) = (3-2\lambda,\ 5-3\lambda,\ 4-3\lambda)$$

$$\vec{PA} = (3,2,1) - (-3+2\lambda,\ -5+3\lambda,\ -4+3\lambda) = (6-2\lambda,\ 7-3\lambda,\ 5-3\lambda)$$

Los módulos de estos vectores deben ser iguales.

$$\text{dist}(P, O) = \text{dist}(P, A) \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{PO}\right| = \left|\vec{PA}\right| \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(3-2\lambda)^2 + (5-3\lambda)^2 + (4-3\lambda)^2} = \sqrt{(6-2\lambda)^2 + (7-3\lambda)^2 + (5-3\lambda)^2} \quad \Rightarrow$$

$$(3-2\lambda)^2 + (5-3\lambda)^2 + (4-3\lambda)^2 = (6-2\lambda)^2 + (7-3\lambda)^2 + (5-3\lambda)^2 \quad \Rightarrow$$

$$9+4\lambda^2-12\lambda+25+9\lambda^2-30\lambda+16+9\lambda^2-24\lambda = 36+4\lambda^2-24\lambda+49+9\lambda^2-42\lambda+25+9\lambda^2-30\lambda$$

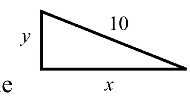
$$50+22\lambda^2-66\lambda = 110+22\lambda^2-96\lambda \Rightarrow 96\lambda-66\lambda = 110-50 \Rightarrow 30\lambda = 60 \Rightarrow \lambda = 2$$

Sustituyamos en las coordenadas del punto P el valor de λ por 2.

$$P(-3+2\cdot 2,\ -5+3\cdot 2,\ -4+3\cdot 2) \quad \Rightarrow \quad P(1, 1, 2)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construyamos la función área de un triángulo rectángulo, que es la que me piden que sea máxima. Tomemos como variable independiente, x, la base del triángulo.

$$A(x) = \frac{x \cdot y}{2} \qquad [1]$$

Busquemos la relación existente entre la x y la y, es decir, la condición que nos da el problema y es que la hipotenusa mide 10 metros; por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

Despejemos y en función de la x:

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

Sustituyamos este valor de y en [1].

$$A(x)=\frac{x\cdot y}{2} \quad\Rightarrow\quad A(x)=\frac{x\sqrt{100-x^2}}{2}$$

Calculemos el dominio de esa función. De entrada, los valores de x tendrán que ser mayores que cero, es decir, estrictamente positivos. Pero como los valores que puede tomar y son también mayores que cero, observando la relación entre x e y, deducimos que el mayor valor que puede tomar x es menor que 10.

En definitiva, el dominio de $A(x)$ serán los valores del intervalo (0, 10).

La función es continua y derivable en este dominio, ya que se trata del producto de una función polinómica, x, que lo es en todo $\mathbb{R}$, por la raíz cuadrada de otra función polinómica que lo es en el intervalo (0, 10) por lo que el producto de ambas lo será en (0, 10).

Calculemos el máximo relativo o local. Obtengamos la función primera derivada.

$$A(x)=\frac{x\sqrt{100-x^2}}{2} \quad\Rightarrow\quad A'(x)=\frac{\sqrt{100-x^2}+x\,\dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}}{2} \quad\Rightarrow$$

$$A'(x)=\frac{\sqrt{100-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}}{2} \quad\Rightarrow\quad A'(x)=\frac{\dfrac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}}}{2} \quad\Rightarrow\quad A'(x)=\frac{100-2x^2}{2\sqrt{100-x^2}}$$

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada.

$$\frac{100-2x^2}{2\sqrt{100-x^2}}=0 \;\Rightarrow\; 100-2x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{100}{2}=50 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=\sqrt{50} & \Rightarrow \quad x=5\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{50} & \Rightarrow \quad x=-5\sqrt{2} \end{cases}$$

Hemos obtenido dos valores pero sólo el $5\sqrt{2}$ pertenece al dominio de la función $A(x)$. Comprobemos que este valor que anula a la primera derivada y que pertenece al dominio es el máximo relativo y también el absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: el $\left(0,\ 5\sqrt{2}\right)$ y el $\left(5\sqrt{2},\ 10\right)$.

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 1 y 9, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$A'(x)=\frac{100-2x^2}{2\sqrt{100-x^2}} \;\Rightarrow\; A'(1)=\frac{100-2\cdot 1^2}{2\sqrt{100-1^2}}=\frac{98}{2\sqrt{99}}>0 \qquad \Rightarrow \text{Creciente en } \left(0,\ 5\sqrt{2}\right)$$

$$A'(x)=\frac{100-2x^2}{2\sqrt{100-x^2}} \;\Rightarrow\; A'(4)=\frac{100-2\cdot 9^2}{2\sqrt{100-9^2}}=\frac{-62}{2\sqrt{19}}<0 \qquad \Rightarrow \text{Decreciente en } \left(5\sqrt{2},\ 10\right)$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es el máximo relativo sino también máximo absoluto. En definitiva el cateto de la base que da lugar al triángulo rectángulo de área máxima es el de $5\sqrt{2}$ unidades.

El cateto altura correspondiente a esta área máxima mide:

$$y=\sqrt{100-x^2} \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=5\sqrt{2} \text{ unidades.}$$

Como puede observarse se trata de un triángulo rectángulo isósceles.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

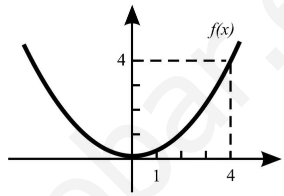
(a) Dibujemos la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2}{4}$. Se trata de una parábola, cuya gráfica en cualquier punto x de su dominio coincide con la de x^2 en el mismo punto pero multiplicando la ordenada de la función x^2 por $\frac{1}{4}$, es decir, reduciendo a la cuarta parte $\left(\frac{1}{4}\right)$ la distancia al eje OX de la de x^2, no obstante calculemos el vértice y algún punto más:

abscisa del vértice = $\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2\cdot\frac{1}{4}}=0$

ordenada del vértice = $f(0)=\frac{0^2}{4}=0$

Luego el vértice V tiene de coordenadas (0, 0).

Otros puntos de interés son el $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$ y el (4, 4).

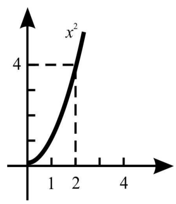


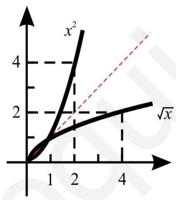
La gráfica de *f*, según lo anterior sería la situada a la derecha.

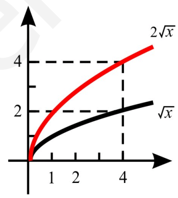
La gráfica de la función g la haremos a partir de la de x^2. Sabemos que la función inversa de x^2 para valores de $x\geq 0$ es la función $\sqrt{x}$ y las gráficas de ambas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

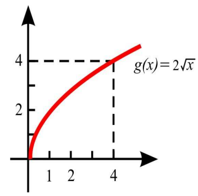
La función g que sabemos que es: $g(x)=2\sqrt{x}$, nos permite deducir que la gráfica de g en cualquier punto x del dominio de $\sqrt{x}$ coincide con la de $\sqrt{x}$ en el mismo punto pero multiplicando la ordenada de la función $\sqrt{x}$ por 2.

La gráfica de g será, teniendo en cuenta todo lo anterior, la siguiente:





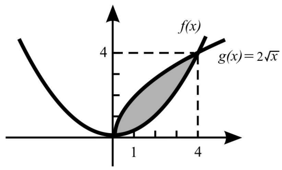




Los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g* se calcularán resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{4} \\ y=2\sqrt{x}\end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{4}=2\sqrt{x}\ \Rightarrow\ x^2=8\sqrt{x}\ \Rightarrow\ x^4=64x\ \Rightarrow\ x^4-64x=0\ \Rightarrow\ x\left(x^3-64\right)=0\Rightarrow \\ \qquad\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \Rightarrow\ (0,\ 0) \\ x^3-64=0\ \Rightarrow\ x^3=64\ \Rightarrow\ x=\sqrt[3]{64}\ \Rightarrow\ x=4\ \Rightarrow\ (4,\ 4)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Con estos dos puntos de corte de las gráficas de ambas funciones, podemos dibujar el recinto que limitan y que se encuentra sombreado al lado.



(b) El recinto cuya área nos piden es el sombreado y situado a la derecha.

$$\text{Área} = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \int_0^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left[\frac{4\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{4\sqrt{4^3}}{3} - \frac{4^3}{12} - \left(\frac{4\sqrt{0^3}}{3} - \frac{0^3}{12}\right) = \frac{4\cdot 8}{3} - \frac{16}{3} - 0 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Clasifiquemos el siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores de k.

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ 2x + ky = 1 \\ y + 2z = k \end{cases}$$

Expresaremos el sistema anterior en forma matricial y lo discutiremos mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 2 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array}\right)$$

Pasemos la 2ª fila a la 3ª fila.
Pasemos la 3ª fila a la 2ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 2 & k & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & k-2 & -2k & -1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - (k - 2) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & 4-4k & -k^2+2k-1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 4 - 4k = 0 \Rightarrow 4k = 4 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ la 3ª ecuación es, $0 = -k^2+2k-1 \Rightarrow 0 = -1^2+2\cdot 1 - 1 \Rightarrow \Rightarrow 0 = 0$, que es una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow k \neq 1 \Rightarrow$ la 3ª ecuación sería una ecuación normal y el sistema sería un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvamos el sistema para $k = 1$. Según el apartado anterior la tercera ecuación era trivial por lo que la eliminamos y seguimos resolviendo el sistema a partir del sistema triangulado inferiormente al que habíamos llegado en el apartado anterior, sabiendo ya que es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferior del apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & 4-4k & -k^2+2k-1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-4\cdot 1 & -1^2+2\cdot 1-1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente. Nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-z \\ 0 & 1 & 1-2z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1-2z \end{array}\right)$ La solución del sistema es:

$$x = z \quad ; \quad y = 1 - 2z$$

Terminemos de resolver el sistema sustituyendo la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo por $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

(c) Resolvamos el sistema para $k = -1$. Según el primer apartado, (a), se trataría de un sistema compatible determinado. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferior al que habíamos llegado en el apartado (a).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & 4-4k & -k^2+2k-1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4-4\cdot(-1) & -(-1)^2+2\cdot(-1)-1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{array}\right)$ Dividamos la 3ª fila por 4.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 8 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] + [3ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

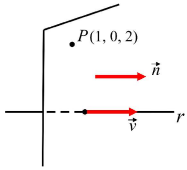
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ La solución del sistema es:

$$2x = 1 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad 2z = -1$$

Terminemos de despejar las incógnitas.

$$x = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = -\frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Para hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a r, elegiremos el vector de dirección de ésta y lo haremos coincidir con el vector normal al plano que me piden, ya que la condición para que el plano y la recta sean perpendiculares es que las coordenadas del vector de dirección de la recta y el normal al plano sean proporcionales.

Expresemos la ecuación de la recta en forma paramétrica para poder obtener el vector de dirección de la misma. Busquemos la soluciones del sistema formado por las ecuaciones de la recta definida por:

$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente. Nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 8-2z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 12-2z \\ 0 & 1 & 8-2z \end{array}\right)$ La solución del sistema es:
$2x = 12 - 2z \quad ; \quad y = 8 - 2z \quad \Rightarrow \quad x = 6 - z \quad ; \quad y = 8 - 2z$

Terminemos de resolver el sistema sustituyendo la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo por $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = 8 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El vector de dirección de la recta r es el $(-1, -2, 1)$, y como dijimos al principio, podemos tomarlo como el vector normal al plano que nos pide el problema; sustituyamos las coordenadas de este vector por los coeficientes de las incógnitas en la ecuación general del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot x - 2y + z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -x - 2y + z + D = 0$$

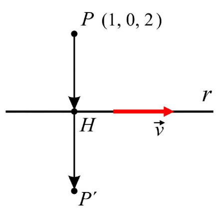
Impongamos ahora la condición a este plano de que pase por el punto $P(1, 0, 2)$:

$$-x - 2y + z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 - 2\cdot 0 + 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -1$$

La ecuación del plano que nos piden, finalmente es: $-x - 2y + z - 1 = 0$.

(b) La ecuación de la recta r en forma paramétrica la hemos obtenido en el apartado anterior:

$$r \equiv \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = 8 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$



El vector de dirección de la recta r es $\vec{v} = (-1, -2, 1)$.

Sea H la proyección del punto $P = (1, 0, 2)$ sobre la recta r, se cumple la condición de que el vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ de dirección de la recta, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto H por pertenecer a la recta r tendrá de coordenadas genéricas $(6-\lambda,\ 8-2\lambda,\ \lambda)$.
El vector $\vec{PH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{PH}=(6-\lambda,\ 8-2\lambda,\ \lambda)-(1,\ 0,\ 2)=(5-\lambda,\ 8-2\lambda,\ \lambda-2)$$

El producto escalar de los vectores $\vec{PH}$ y $\vec{v}$ es cero:

$$\vec{PH}\bullet\vec{v}=0 \Rightarrow (5-\lambda,\ 8-2\lambda,\ \lambda-2)\bullet(-1,-2,1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -5+\lambda-16+4\lambda+\lambda-2=0 \Rightarrow 6\lambda-23=0 \Rightarrow \lambda=\frac{23}{6}$$

Sustituyamos λ en el punto H y en el vector $\vec{PH}$:

$$H=(6-\lambda,\ 8-2\lambda,\ \lambda)=\left(6-\frac{23}{6},\ 8-2\cdot\frac{23}{6},\ \frac{23}{6}\right)=\left(\frac{13}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{23}{6}\right)$$

$$\vec{PH}=(5-\lambda,\ 8-2\lambda,\ \lambda-2)=\left(5-\frac{23}{6},\ 8-2\cdot\frac{23}{6},\ \frac{23}{6}-2\right)=\left(\frac{7}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{11}{6}\right)$$

El punto $P'=(a,b,c)$, simétrico del P respecto de r, verifica que $\vec{PH}=\vec{HP'}$, es decir:

$$\vec{PH}=\vec{HP'} \Rightarrow \left(\frac{7}{6},\frac{1}{3},\frac{11}{6}\right)=(a,b,c)-\left(\frac{13}{6},\frac{1}{3},\frac{23}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{7}{6},\frac{1}{3},\frac{11}{6}\right)=\left(a-\frac{13}{6},\ b-\frac{1}{3},\ c-\frac{23}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{7}{6}=a-\frac{13}{6}\\ \frac{1}{3}=b-\frac{1}{3}\\ \frac{11}{6}=c-\frac{23}{6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{7}{6}+\frac{13}{6}=\frac{10}{3}\\ b=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\\ c=\frac{11}{6}+\frac{23}{6}=\frac{17}{3}\end{cases} \Rightarrow \quad P'=\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3},\frac{17}{3}\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN JUNIO 2013

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x)+b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

EJERCICIO 2. Sean $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=\left|x(x-2)\right| \quad \text{y} \quad g(x)=x+4$$

(a) [1´25 PUNTOS] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
(b) [1´25 PUNTOS] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

EJERCICIO 3. Sea $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$.

(a) [0´75 PUNTOS] Determina los valores de m para los que los vectores fila de M son linealmente independientes.
(b) [1 PUNTO] Estudia el rango de M según los valores de m.
(c) [0´75 PUNTOS] Para m = 1, calcular la inversa de M.

EJERCICIO 4. Sea r la recta que pasa por el punto (1, 0, 0) y tiene como vector de dirección (a, 2a, 1) y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=\ \ 0 \end{cases}$$

(a) [1 PUNTO] Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.
(b) [1´5 PUNTOS] Calcula, para a = 1, la distancia entre r y s.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f\,(-\infty\,,1) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x+2\,e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0, \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1\,. \end{cases}$

(a) [1´5 PUNTOS] Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

(b) [1 PUNTO] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS] Sea $g\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) [1´5 PUNTOS] Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}.

(b) [1 PUNTO] Calcula A^{2013} y su inversa .

EJERCICIO 4. Considera los puntos $P(2, 3, 1)$ y $Q(0, 1, 1)$.

(a) [1´75 PUNTOS] Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.

(b) [0´75 PUNTOS] Calcula la distancia de P a π.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el límite siguiente sabiendo que es finito.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)+b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3} = \frac{0\cos(0)+b\ \mathrm{sen}(0)}{0^3} = \frac{0\cdot 1+b\cdot 0}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

La indeterminación de $\left[\frac{0}{0}\right]$ la hemos destruido aplicando la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, "*dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y derivables en $x = c$, si $f(x)$ y $g(x)$ tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de $f(x)$ y $g(x)$ es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$, siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)*":

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida *"cuando x tiende a $\pm\infty$ y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a $\pm\infty$"*.

En nuestro caso, se puede usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en cualquier punto; ya que la del numerador es la suma de una función, producto de dos funciones una polinómica y otra trigonométrica elemental con la de una función trigonométrica elemental a su vez multiplicada por una constante, todas ellas continuas y derivables en $\mathbb{R}$; y la del denominador es una función polinómica, por lo que definitivamente se puede aplicar la Regla de L´Hôpital.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x) + b\,\cos(x)}{3x^2} = \frac{\cos(0) - 0\cdot\mathrm{sen}(0) + b\cdot\cos(0)}{3\cdot 0^2} = \frac{1 - 0\cdot 0 + b\cdot 1}{0} =$$

$$= \frac{1+b}{0} =$$

La expresión que se ha obtenido al final puede presentar dos casos según que el numerador sea cero o no.

Si no lo es, es decir, si $1+b \neq 0$, $b \neq -1$, entonces el resultado final sería un número distinto de cero partido por cero que daría lugar a infinito, en contradicción con el enunciado del ejercicio, por tanto b no puede ser distinto de -1.

El otro caso es que sea cero, es decir, $1+b = 0$, $b = -1$, con lo que tendríamos una nueva indeterminación que habría que destruir, procedamos según esto último, sustituyendo b por -1.

$$= \frac{1-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\,\mathrm{sen}(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{sen}(x)}{3x} =$$

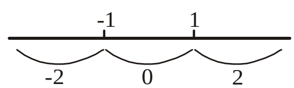
$$= \frac{-\mathrm{sen}(0)}{3\cdot 0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{3} = -\frac{1}{3}$$

La indeterminación de $\left[\frac{0}{0}\right]$ la hemos destruido aplicando la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

En nuestro caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en cualquier punto; ya que la del numerador es una función trigonométrica elemental y la del denominador es una función polinómica, por lo que definitivamente se puede aplicar la Regla de L´Hôpital.

En definitiva, para que el límite sea finito se ha de cumplir que $b = -1$, siendo el valor del límite, $-\frac{1}{3}$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



(a) Expresemos la función *f(x)* como una función a trozos, teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto:

$$f(x) = |x\,(x-2)| \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x\cdot(x-2) & \text{si} \quad x(x-2) \geq 0 \\ -x\cdot(x-2) & \text{si} \quad x(x-2) < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad x(x-2)\geq 0 \\ -x^2+2x & \text{si} \quad x(x-2)<0 \end{cases}$$

Resolvamos las inecuaciones correspondientes a los dominios de cada trozo de función, para lo cual resolveremos, en primer lugar, la ecuación $x\,(x-2)=0$.

$$x(x-2)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \end{cases}$$

estos valores, 0 y 2, que anulan a la ecuación, los situamos ordenadamente en la recta real y construimos los posibles intervalos de solución, $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$; elegimos valores intermedios de los mismos, por ejemplo, -1, 1 y 3, y los probamos en las inecuaciones, viendo qué intervalos satisfacen a una u otra inecuación.

Si $x=-1$ $\rightarrow$ $x\,(x-2)=-1\cdot(-1-2)=3>0$ $\rightarrow$ $x\,(x-2)>0$ en $(-\infty, 0)$

Si $x=1$ $\rightarrow$ $x\,(x-2)=1\cdot(1-2)=-1<0$ $\rightarrow$ $x\,(x-2)<0$ en $(0, 2)$

Si $x=3$ $\rightarrow$ $x\,(x-2)=3\cdot(3-2)=3>0$ $\rightarrow$ $x\,(x-2)>0$ en $(2, +\infty)$

A la vista de estos intervalos, podemos definir la función *f(x)* más precisamente en función de los mismos.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad x\leq 0 \\ -x^2+2x & \text{si} \quad 0<x<2 \\ x^2-2x & \text{si} \quad 2\leq x \end{cases}$$

Representemos primeramente el trozo de función, $y=x^2-2x$, para valores de $x\leq 0$. Se trata de una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-2x \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=0^2-2\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad (0,\ 0)$$

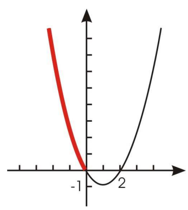
2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-2x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2\pm\sqrt{4-0}}{2}=\frac{2\pm 2}{2}=\begin{cases} 2 \quad \Rightarrow \quad (2,\ 0) \\ 0 \quad \Rightarrow \quad (0,\ 0) \end{cases}$$

3.- Coordenadas del vértice V:

$x=-b/(2a)=-(-2)/(2\cdot 1)=1$ $\rightarrow$

$y=1^2-2\cdot 1=-1$ $\rightarrow$ $V(1, -1)$



La gráfica de este trozo es la situada al lado y que hemos destacado en rojo, aunque se ha dibujado el resto de la gráfica.

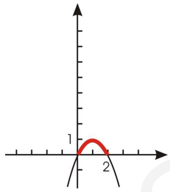
Representemos ahora el siguiente trozo, $y=-x^2+2x$, para valores de $0<x<2$. Se trata de una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+2x \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=-0^2+2\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad (0,\ 0)$$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+2x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -x^2+2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-2\pm\sqrt{4+0}}{-2}=\frac{-2\pm 2}{-2}=\begin{cases} 0 \quad \Rightarrow \quad (0,\ 0) \\ 2 \quad \Rightarrow \quad (2,\ 0) \end{cases}$$



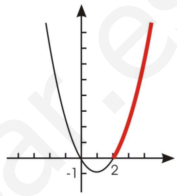
3.- Coordenadas del vértice V:

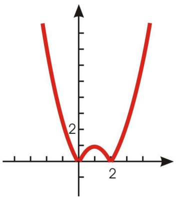
$x = -b/(2a) = -2/(2\cdot(-1)) = 1 \quad \rightarrow$

$y = -1^2+2\cdot1 = 1 \quad \rightarrow \quad$ V(1, 1)

La gráfica de este otro trozo es la situada al lado y que hemos destacado en rojo, aunque se ha representado el resto de la gráfica.

El tercer trozo, $y = x^2 - 2x$, para valores de $x \geq 2$, sería la continuación de la primera de las gráficas para estos valores de $x \geq 2$. La gráfica de este otro trozo es la situada al lado y que hemos destacado en rojo.



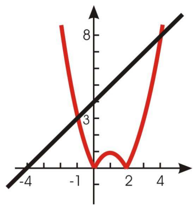


En definitiva la gráfica de la función *f(x)* es la situada a la izquierda.

Representemos la gráfica de la función $g(x)=x+4$, se trata de una recta. Calculemos los puntos de corte con los ejes.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y=x+4 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=0+4 \quad \Rightarrow \quad y=4 \quad \Rightarrow \quad (0,\ 4)$$



2.- Punto de corte con el eje de abscisas:

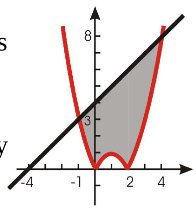
$$\left.\begin{array}{l} y=x+4 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-4 \quad \Rightarrow \quad (-4,\,0)$$

La gráfica de las funciones *f(x)* y *g(x)* son las representadas al lado.

Calculemos los puntos de corte de ambas gráficas, para ello tendremos en cuenta las gráficas ya representadas, es decir, que la recta cortará sólo al primer y tercer trozo de la función *f(x)*.

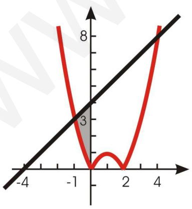
$$\left.\begin{array}{l} y=x+4 \\ y=x^2-2x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2x=x+4 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\left\{\begin{array}{l} 4 \Rightarrow (4,8) \\ -1 \Rightarrow (-1,3) \end{array}\right.$$

Los puntos obtenidos son los puntos de corte de las funciones *f(x)* y *g(x)*.



(b) Calculemos el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)*, recinto que se encuentra sombreado al lado.

Lo haremos por partes, ya que *f(x)* es una función a trozos.



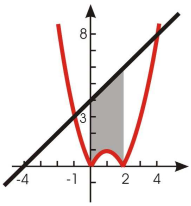
Obtengamos el área del primer trozo sombreado y situado a la izquierda.

$$A_1=\int_{-1}^{0}\left(x+4-\left(x^2-2x\right)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(-x^2+3x+4\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{0}=-\frac{0^3}{3}+3\cdot\frac{0^2}{2}+4\cdot0-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+3\cdot\frac{(-1)^2}{2}+4\cdot(-1)\right)=$$

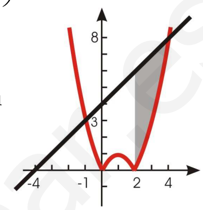
$$=-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)=-\left(\frac{2+9-24}{6}\right)=\frac{13}{6}\text{ unidades de área.}$$

Calculemos el área del segundo de los trozos que se encuentra sombreado y situado a continuación.



$$A_2=\int_0^2\left(x+4-\left(-x^2+2x\right)\right)dx=\int_0^2\left(x^2-x+4\right)dx=$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^2=\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+4\cdot 2-\left(\frac{0^3}{3}-\frac{0^2}{2}+4\cdot 0\right)=$$
$$=\frac{8}{3}-2+8-0=\frac{8}{3}+6=\frac{8+18}{3}=\frac{26}{3}\text{ unidades de área.}$$

Calculemos el área del tercero de los trozos que se encuentra sombreado y situado al lado.



$$A_3=\int_2^4\left(x+4-\left(x^2-2x\right)\right)dx=\int_2^4\left(-x^2+3x+4\right)dx=$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right]_2^4=-\frac{4^3}{3}+3\cdot\frac{4^2}{2}+4\cdot 4-\left(-\frac{2^3}{3}+3\cdot\frac{2^2}{2}+4\cdot 2\right)=$$
$$=-\frac{64}{3}+24+16-\left(-\frac{8}{3}+\frac{12}{2}+8\right)=-\frac{64}{3}+40-\left(\frac{34}{6}\right)=\frac{56}{3}-\frac{34}{3}=\frac{22}{3}\text{ unidades de área.}$$

El área pedida será la suma de las tres áreas calculadas, es decir:

$$\text{Área} = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{13}{6}+\frac{26}{3}+\frac{22}{3}=\frac{13+52+44}{6}=\frac{109}{6}\text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Determinemos los valores del parámetro m para los que los vectores fila de M son linealmente independientes.

Lo haremos calculando el rango de la matriz M, ya que el rango de una matriz coincide con el máximo número de vectores fila o columna linealmente independientes.

El cálculo del rango lo haremos mediante el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & m+1 & 0\\ 1 & 1 & m-1\end{pmatrix}$$
Intercambiemos entre sí la 2ª fila con la 3ª fila

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & m-1\\ 0 & m+1 & 0\end{pmatrix}$$
Triangulemos inferiormente

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & m\\ 0 & m+1 & 0\end{pmatrix}$$
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $(m+1)$ · [2ªf.]

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & m\\ 0 & 0 & -m(m+1)\end{pmatrix}$$
La matriz está triangulada inferiormente y no hay ninguna fila de ceros, salvo la 3ª en la que a_{33} puede ser o no cero. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; -m\cdot(m+1) = 0 \;\Rightarrow\; m = 0$ y $m = -1 \;\Rightarrow$ hay dos valores de m que hacen cero a a_{33}, o lo que es lo mismo, para estos valores de m los vectores fila son linealmente dependientes, ya que la 3ª fila es toda de ceros. El rango de la matriz M sería 2.

* $a_{33} \neq 0 \;\Rightarrow\; -m\cdot(m+1) \neq 0 \;\Rightarrow\; m \neq 0$ y $m \neq -1 \;\Rightarrow\;$ para todos los valores de m distintos de 0 y de -1, los vectores fila son linealmente independientes, ya que no hay ninguna fila de ceros. El rango de la matriz M sería 3.

(b) El estudio del rango de la matriz M lo hemos realizado en el apartado anterior.

Si $m = 0$ o $m = -1 \;\Rightarrow\;$ Rango $(M) = 2$

Si $m \neq 0$ y $m \neq -1 \;\Rightarrow\;$ Rango $(M) = 3$

(c) Para $m = 1$ el rango de la matriz M es 3, luego tiene inversa. Sustituyamos en M el valor de m por 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcularemos la matriz inversa de M, mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz M, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de M, M^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula o alguno de los elementos de la diagonal principal fuera cero entonces la matriz M no tendría matriz inversa, pero en este caso sabemos que no es posible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2.
Dividamos la 2ª fila por 2.
Dividamos la 3ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz M, la matriz M^{-1}, es decir:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) La ecuación de la recta *r*, que pasa por el punto (1, 0, 0) y tiene como vector de dirección (*a*, 2*a*, 1), en forma continua es:

$$r \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-0}{2a} = \frac{z-0}{1}$$

Expresemos esta ecuación en forma de intersección de dos planos.

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-0}{2a} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y-0}{2a} & \Rightarrow \quad 2ax-2a=ay \quad \Rightarrow \quad 2ax-ay=2a \\ \dfrac{y-0}{2a} = \dfrac{z-0}{1} & \Rightarrow \quad y=2az \quad \Rightarrow \quad y-2az=0 \end{cases}$$

Estudiemos la posición relativa de las rectas *r* y *s* según los valores de *a*, con ello veremos para cuáles de ellos las rectas son paralelas; lo haremos discutiendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

$$s \equiv \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=\ \ 0 \end{cases} \qquad r \equiv \begin{cases} 2ax-ay=2a \\ y-2az=\ \ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=\ \ 0 \\ 2ax-ay=2a \\ y-2az=\ \ 0 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -2 \\ -a & 0 & 1 & 0 \\ 2a & -a & 0 & 2a \\ 0 & 1 & -2a & 0 \end{array}\right)$$

Pasemos la 2ª fila a la 3ª.
Pasemos la 3ª fila a la 4ª.
Pasemos la 4ª fila a la 2ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2a & 0 \\ -a & 0 & 1 & 0 \\ 2a & -a & 0 & 2a \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - *a* · [1ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + *a* · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2a & 0 \\ 0 & -a & 2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido una fila de ceros, se trata de una ecuación trivial, la eliminamos. Las rectas ya no pueden cruzarse en el espacio, independientemente del valor o valores de *a*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2a & 0 \\ 0 & -a & 2 & 2a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + *a* · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 2-2a^2 & 2a \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, y para que las rectas sean paralelas, el sistema debe ser un sistema incompatible; tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas donde todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo o no, veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 2 - 2a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ o $a = -1 \Rightarrow$ hay dos valores de *a* que hacen cero a a_{33}, veamos lo que le ocurre a la tercera ecuación para cada uno de ellos.

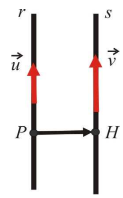
** $a=1 \;\Rightarrow\; 0=2a \;\Rightarrow\; 0=2\cdot 1 \;\Rightarrow\; 0=2$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema es un sistema incompatible, o lo que es lo mismo, las dos recta son paralelas.

** $a=-1 \;\Rightarrow\; 0=2a \;\Rightarrow\; 0=2\cdot(-1) \;\Rightarrow\; 0=-2$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema es un sistema incompatible, o lo que es lo mismo, las dos recta son paralelas.

* $a_{33}\neq 0 \;\Rightarrow\; 2-2a^2\neq 0 \;\Rightarrow\; a^2\neq 1 \;\Rightarrow\; a\neq 1$ y $a\neq -1 \;\Rightarrow$ para todos los valores de a distintos de 1 y de -1, el sistema sería un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible determinado, y las dos rectas se cortarían en un punto.

Las dos rectas son paralelas para los valores de $a=1$ y $a=-1$.

(b) Para $a=1$, las ecuaciones de las rectas r y s serán:



$$r\equiv\frac{x-1}{a}=\frac{y-0}{2a}=\frac{z-0}{1} \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{1} \;\Rightarrow \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\;2\lambda \\ z=\;\;\lambda \end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=\;\;0 \end{cases} \;\Rightarrow \begin{cases} -2x+y=-2 \\ \;\;-x+z=\;\;0 \end{cases}$$

Elijamos de la recta r un punto genérico, P, de coordenadas $P(1+\lambda,\ 2\lambda,\ \lambda)$; y de la recta s uno concreto, H, para ello, sustituimos la x, por ejemplo, por cero y terminamos de calcular la y y la z, así obtenemos el punto, $H(0,\ -2,\ 0)$.

Se ha de verificar que el vector $\overrightarrow{PH}$ que determinan estos dos puntos ha de ser perpendicular al vector de dirección de cada una de las rectas, y por tanto, los productos escalares respectivos serán cero, pero al ser las rectas paralelas, basta aplicar uno de los productos escalares:

$$\overrightarrow{PH}=(0,\ -2,\ 0)-(1+\lambda,\ 2\lambda,\ \lambda)=(-1-\lambda,\ -2-2\lambda,\ -\lambda)$$

$$\overrightarrow{PH}\perp\vec{u}_r \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PH}\bullet\vec{u}_r=0 \;\Rightarrow\; (-1-\lambda,\ -2-2\lambda,\ -\lambda)\bullet(1,\ 2,\ 1)=0 \;\Rightarrow$$

$$-1-\lambda-4-4\lambda-\lambda=0 \;\Rightarrow\; -6\lambda-5=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-\frac{5}{6}$$

Sustituyamos este valor de λ en el vector $\overrightarrow{PH}$

$$\overrightarrow{PH}=(-1-\lambda,\ -2-2\lambda,\ -\lambda) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PH}=\left(-1-\left(-\frac{5}{6}\right),\ -2-2\cdot\left(-\frac{5}{6}\right),\ -\left(-\frac{5}{6}\right)\right) \;\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PH}=\left(-\frac{1}{6},\ -\frac{2}{6},\ \frac{5}{6}\right)$$

La distancia entre las rectas r y s coincidirá con el módulo del vector $\overrightarrow{PH}$, es decir:

$$\text{dist}(r,\,s)=\left|\left(-\frac{1}{6},\ -\frac{2}{6},\ \frac{5}{6}\right)\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{4}{36}+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{30}{36}}=$$

$$=\frac{\sqrt{30}}{6}\text{ unidades de longitud.}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Como la función *f(x)* es derivable en todo $\mathbb{R}$ tiene que ser continua también en $\mathbb{R}$.

Calculemos el valor de a y de b para que la función sea, primeramente, continua.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de x menores que 0, $x < 0$, es la suma de una función polinómica y de una función exponencial elemental, la primera es continua en todo $\mathbb{R}$ y la segunda lo es también para todo $\mathbb{R}$, luego la función suma lo será en el dominio común, es decir, para todos lo valores $\mathbb{R}$, luego la función f es continua para $x < 0$.

- El trozo de función para valores de x comprendidos entre 0 y 1, $0 < x < 1$, es el producto de una función constante, a, que es continua en todo $\mathbb{R}$, por la raíz cuadrada de una función polinómica de primer grado, $b - x$, que es continua para todos los valores de x que hagan que $b - x \geq 0$, o lo que es lo mismo, $b \geq x$, es decir, para todos los valores de x menores o iguales a b, y como x toma valores entre 0 y 1, b debe tomar valores mayores o iguales a 1, $b \geq 1$; luego esta función será continua para todos lo valores menores o iguales a 1 (siempre que b sea mayor o igual a 1), y en consecuencia, la función producto sería continua para el dominio de continuidad común, es decir, para los valores de $x < 1$ (siempre que b sea mayor o igual a 1); finalmente podemos concluir que la función f es continua para $0 < x < 1$, siempre que $b \geq 1$.

- El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \left(x + 2e^{-x}\right) = 0 + 2\cdot e^{-0} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \left(a\sqrt{b-x}\right) = a\sqrt{b-0} = a\sqrt{b} \\ f(0) = x + 2e^{-x} = 0 + 2e^{-0} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \\ 2 = a\sqrt{b} \;\Rightarrow\; a\sqrt{b} = 2 \end{array}\right. \qquad [1]$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 0, si se verifica que: $a\sqrt{b} = 2$.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $(-\infty, 1)$, siempre y cuando se satisfaga que $a\sqrt{b} = 2$ y $b \geq 1$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad.

- Para valores de $x < 0$, el trozo de función es la suma de una función polinómica y de una función exponencial elemental, la primera es derivable en todo $\mathbb{R}$ y la segunda lo es también para todo $\mathbb{R}$, luego la función suma lo será en el dominio común, es decir, para todos lo valores $\mathbb{R}$, luego la función f es derivable para $x < 0$, luego la función f es derivable para $x<0$, siendo la derivada de este trozo de función, $1-2e^{-x}$.

- Para valores de $0<x<1$, f es derivable por ser es el producto de una función constante, a, que es derivable en todo $\mathbb{R}$, por la raíz cuadrada de una función polinómica de primer grado, $b-x$, que es derivable para todos los valores de x menores o iguales a 1(siempre que b sea mayor o igual a 1), y en consecuencia, la función producto sería derivable para el dominio de derivablidad común, es decir, para los valores de $x<1$ (siempre que b sea mayor o igual a 1); finalmente podemos concluir que la función f es derivable para $0 < x < 1$, siempre que $b \geq 1$, siendo la derivada, $a \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{b-x}} = -\dfrac{a}{2\sqrt{b-x}}$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es:

$$f'(x)=\begin{cases} 1-2e^{-x} & \text{si} \quad x<0 \\ -\dfrac{a}{2\sqrt{b-x}} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$$

- El problema está en el punto 0.

En el punto 0 será derivable, si las derivadas laterales coinciden y en este caso se debe satisfacer además la condición de continuidad [1] y $b \geq 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}}\left(1-2e^{-x}\right)=1-2e^{-0}=1-2=-1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}}\left(-\dfrac{a}{2\sqrt{b-x}}\right)=-\dfrac{a}{2\sqrt{b-0}}=-\dfrac{a}{2\sqrt{b}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow \\ -1=-\dfrac{a}{2\sqrt{b}} \Rightarrow a=2\sqrt{b} \end{array}\right. \qquad [2]$$

luego la función $f(x)$ será derivable en $x=0$ siempre y cuando se verifiquen las condiciones [1], [2] y $b \geq 1$, simultáneamente, para lo cual resolveremos el sistema formado por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{b}=2 \\ a=2\sqrt{b} \\ b\geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}=2 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{b}\right)^2=1 \;\Rightarrow\; b=1 \;\Rightarrow\; a=2\sqrt{b}=2\sqrt{1}=2 \;\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

Para estos valores de a y de b, la función será derivable en su dominio, $(-\infty, 1)$.

La función derivada quedará finalmente, una vez sustituidos a y b por los valores calculados, así:

$$f'(x)=\begin{cases} 1-2e^{-x} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ -\dfrac{a}{2\sqrt{b-x}} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1-2e^{-x} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ -\dfrac{2}{2\sqrt{1-x}} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$$

La función f, una vez sustituidos los valores de a y b será:

$$f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ 2\sqrt{1-x} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$$

(b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$, es:

$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(0) = f'(0)\,(x - 0) \quad \Rightarrow$

La derivada de la función en el punto 0, $f'(0)$, es:

$$f'(x)=\begin{cases} 1-2e^{-x} & \text{si } x\le 0 \\ -\dfrac{2}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } 0<x<1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=1-2e^{-0}=1-2=-1$$

y el valor de la función en dicho punto será:

$$f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si } x\le 0 \\ 2\sqrt{1-x} & \text{si } 0<x<1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(0)=0+2e^{-0}=0+2=2$$

La ecuación de la recta tangente será:

$y - f(0) = f'(0)\,(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -1\cdot x \quad \Rightarrow \quad y = -x + 2$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$, es:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}(x-0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y-2=-\frac{1}{-1}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=x+2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos, inicialmente, la integral indefinida siguiente:

$$\int \ln\left(x^2+1\right) dx$$

la resolveremos haciendo uso del método de integración por partes.

$$u=\ln\left(x^2+1\right) \qquad du=\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$dv=dx \qquad v=\int dx=x$$

$$\int \ln\left(x^2+1\right) dx = \ln\left(x^2+1\right)\cdot x-\int x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx = x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-\int\frac{2x^2}{x^2+1}dx= \qquad [1]$$

Hemos obtenido una integral racional impropia, por lo que efectuaremos la división.

$2x^2$	x^2+1
$-2x^2-2$	2
-2	

Continuando desde [1], tendremos:

$$=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-\int\left(2-\frac{2}{x^2+1}\right)dx=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-\int 2dx+\int\frac{2}{x^2+1}\,dx=$$

$$= x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\,\mathrm{arc\,tg}\,(x)+\mathrm{K}$$

Obtengamos ahora de toda esta familia de primitivas aquella cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0, 0).

$$F(x)= x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\,\mathrm{arc\,tg}\,(x)+\mathrm{K} \Rightarrow F(0)= 0\cdot\ln\left(0^2+1\right)-2\cdot 0+2\,\mathrm{arc\,tg}\,(0)+\mathrm{K} \Rightarrow$$

$$0= 0-0+2\cdot 0+\mathrm{K} \Rightarrow \mathrm{K}=0 \Rightarrow \quad F_1(x)= x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\,\mathrm{arc\,tg}\,(x)$$

Luego la primitiva de g que pasa por el punto (0, 0) es la función F_1 que acabamos de obtener.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Comprobemos que $A^2 = 2I$.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot(-1)\\ 1\cdot1+(-1)\cdot1 & 1\cdot1+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$2I=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Efectivamente, $A^2 = 2I$.

Calculemos, si existe, la matriz inversa de A, A^{-1}. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula o alguno de los elementos de la diagonal principal fuera cero entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz A admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2.
Dividamos la 2ª fila por -2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(b) Calculemos A^{2013}.

Sabemos por el apartado (a) lo que obtenemos al calcular A^2, calculemos las sucesivas potencias de A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2I$$

$$A^3=A^2\cdot A=2I\cdot A=2A$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=2I\cdot 2I=4I^2=4I=2^2 I$$

$$A^5=A^3\cdot A^2=2A\cdot 2I=4A=2^2 A$$

Observando las sucesivas potencias de *A*, según sean pares o impares, podemos deducir la regla para la obtención de cualquier otra potencia de *A*.

Calculemos A^{2013}, para ello descompondremos la potencia de la siguiente manera.

$$A^{2013}=A^{2012}\cdot A=A^{2\cdot 1006}\cdot A=\left(A^2\right)^{1006}\cdot A=\left(2I\right)^{1006}\cdot A=2^{1006}I^{1006}\cdot A=2^{1006}\cdot I\cdot A=2^{1006}A=$$

$$=2^{1006}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{1006} & 2^{1006}\\ 2^{1006} & -2^{1006}\end{pmatrix}$$

Las fórmulas para la obtención de las sucesivas potencias de *A* son:

Si la potencia es par:

$$A^{2n}=\left(A^2\right)^n=\left(2I\right)^n=2^n I^n=2^n I \quad \text{para n=1, 2, 3, ...}$$

Si la potencia es impar:

$$A^{2n-1}=A^{2n}\cdot A^{-1}=2^n I\cdot A^{-1}=2^n A^{-1}=2^n\cdot 2^{-1}A=2^{n-1}A$$

hemos tenido en cuenta el resultado del cálculo de la inversa de *A* en el apartado anterior, es decir:

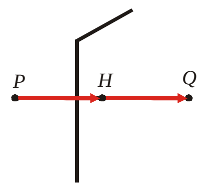
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot A=2^{-1}A$$

Calculemos ahora la inversa de A^{2013}. Tendremos en cuenta lo obtenido anteriormente.

$$\left(A^{2013}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{2013}=\left(2^{-1}A\right)^{2013}=\left(2^{-1}\right)^{2013}A^{2013}=2^{-2013}\cdot 2^{1006}A=2^{-1007}A=$$

$$=2^{-1007}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{-1007} & 2^{-1007}\\ 2^{-1007} & -2^{-1007}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}}\\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}}\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) La ecuación del plano π que nos pide el ejercicio es la del plano que pasa por el punto medio, *H*, del segmento *PQ* y tiene como vector normal el vector $\vec{PQ}$.

Calculemos las coordenadas del punto *H*(*a*, *b*, *c*). Se verificará lo siguiente:

$$\vec{PH}=\vec{HQ} \quad \Rightarrow$$

$$\left(a,b,c\right)-\left(2,3,1\right)=\left(0,1,1\right)-\left(a,b,c\right) \quad \Rightarrow \quad \left(a-2,\, b-3,\, c-1\right)=\left(-a,\, 1-b,\, 1-c\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a-2=-a\\ b-3=1-b\\ c-1=1-c\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\\ b=2\\ c=1\end{array}\right\}\Rightarrow H\left(1,\ 2,\ 1\right)$$

El vector $\vec{PQ}$ será:

$$\vec{PQ}=\left(0,1,1\right)-\left(2,3,1\right)=\left(-2,-2,0\right)$$

Hallemos la ecuación del plano que pasa por el punto *H*(1, 2, 1) y es perpendicular al segmento *PQ*.

El vector $\vec{PQ}$ de coordenadas (-2, -2, 0), podemos tomarlo como un vector normal al plano que nos pide el problema; sustituyamos las coordenadas de este vector por los coeficientes de las incógnitas en la ecuación general del plano.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x - 2y + 0\cdot z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x - 2y + D = 0$$

Impongamos ahora la condición a este plano de que pase por el punto $H(1, 2, 1)$:

$$-2x - 2y + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\cdot 1 - 2\cdot 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 6$$

La ecuación del plano que nos piden, finalmente es: $-2x - 2y + 6 = 0$

(b) La distancia del punto P al plano π, coincidirá con el módulo del vector $\vec{PH}$.

dist (P, π) = $\left| \vec{PH} \right|$

El vector $\vec{PH}$ tendrá de coordenadas:

$\vec{PH} = (1, 2, 1) - (2, 3, 1) = (-1, -1, 0)$

La distancia será:

dist(P, π) = $\left| \vec{PH} \right| = \left| (-1, -1, 0) \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ unidades de longitud.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EXAMEN SEPTIEMBRE 2013

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS] Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

EJERCICIO 2. **(a)** [2 PUNTOS] Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
(b) [0´5 PUNTOS] Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

EJERCICIO 3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) [1 PUNTO] Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1}.
(b) [0´25 PUNTOS] Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A.
(c) [1´25 PUNTOS] Calcula la matriz X que satisface $AX - B = AB$.

EJERCICIO 4. Considera el plano π de ecuación $2x+y+3z-6=0$.
(a) [1´5 PUNTOS] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.
(b) [1 PUNTO] Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f\,(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x^2}$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

(a) [1´75 PUNTOS] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [0´75 PUNTOS] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

EJERCICIO 2. Sea $g\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.

(a) [0´75 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 4$.

(b) [1´75 PUNTOS] Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $x - 2y + 2 = 0$. Calcula el área de este recinto.

EJERCICIO 3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left.\begin{array}{rl} 2x - 4y + 6z &= 6 \\ my + 2z &= m+1 \\ -3x + 6y - 3mz &= -9 \end{array}\right\}.$$

(a) [1´75 PUNTOS] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

(b) [0´75 PUNTOS] Resuélvelo para $m = 3$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $y = 0$.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 3, 1)$, $C(2, 1, 2)$ y $D(1, 0, 4)$.

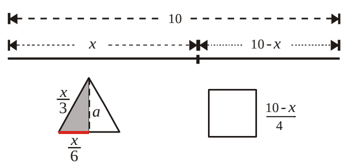
(a) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene a A, B y C.

(b) [1´5 PUNTOS] Halla el punto simétrico de D respecto del plano $x - y - 5z + 9 = 0$.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Construiremos la función área, que es la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo.



En el dibujo se encuentran reflejados los datos del problema y los diversos valores de los lados del cuadrado y del triángulo. En primer lugar, hemos de expresar la altura, a, del triángulo equilátero en función de x.

Por el Teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo sombreado, tendremos,

$$a=\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^2} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{36}} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{4x^2-x^2}{36}} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{3x^2}{36}} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}\,x}{6}$$

La función área será:

$$A(x)=\frac{\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}x}{6}}{2}+\left(\frac{10-x}{4}\right)^2 \Rightarrow A(x)=\frac{\sqrt{3}x^2}{36}+\frac{x^2-20x+100}{16} \Rightarrow$$

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{36}x^2+\frac{1}{16}x^2-\frac{20}{16}x+\frac{100}{16} \Rightarrow A(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{1}{16}\right)x^2-\frac{5}{4}x+\frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$A(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{1}{16}\right)x^2-\frac{5x}{4}+\frac{25}{4} \Rightarrow A(x)=\frac{4\sqrt{3}+9}{144}x^2-\frac{5x}{4}+\frac{25}{4}$$

El dominio de esta función es el intervalo abierto (0, 10) como se puede deducir fácilmente de la observación del dibujo; se trata de una función cuadrática, y por tanto es continua y derivable en su dominio.

Calculemos el mínimo absoluto de esta función, que coincidirá con el vértice de la parábola ya que el coeficiente de x^2 es positivo, y siempre que ese mínimo pertenezca al dominio. Pero lo vamos a hacer obteniendo primeramente el mínimo relativo, es decir, el valor que anule a la primera derivada.

$$A'(x)=2\cdot\frac{4\sqrt{3}+9}{144}x-\frac{5}{4} \Rightarrow A'(x)=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}x-\frac{5}{4}$$

$$\frac{4\sqrt{3}+9}{72}x-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x-90}{72}=0 \Rightarrow \left(4\sqrt{3}+9\right)x-90=0 \Rightarrow x=\frac{90}{4\sqrt{3}+9} \Rightarrow$$

$$x=\frac{90\left(4\sqrt{3}-9\right)}{\left(4\sqrt{3}+9\right)\left(4\sqrt{3}-9\right)} \Rightarrow x=\frac{90\left(4\sqrt{3}-9\right)}{\left(4\sqrt{3}\right)^2-9^2} \Rightarrow x=\frac{90\left(4\sqrt{3}-9\right)}{16\cdot 3-81} \Rightarrow$$

$$x=\frac{90\left(4\sqrt{3}-9\right)}{-33} \Rightarrow x=\frac{30\left(4\sqrt{3}-9\right)}{-11} \Rightarrow x=\frac{120\sqrt{3}-270}{-11} \Rightarrow$$

$$x=\frac{270-120\sqrt{3}}{11}\cong 5'65\in \mathrm{Dom}\,A(x)=(0,10)$$

Este valor de x pertenece al dominio, luego es un mínimo relativo y también el mínimo absoluto tal como hemos justificado anteriormente.

A este mismo resultado habríamos llegado si estudiamos la monotonía; para ello construimos los dos intervalos siguientes: $\left(0,\frac{270-120\sqrt{3}}{11}\right)$ y $\left(\frac{270-120\sqrt{3}}{11},10\right)$, elegimos un punto cualquiera de cada uno de estos intervalos, por ejemplo, el 1 y el 8, respectivamente y los sustituimos en la 1ª derivada, según nos salga mayor o menor que cero la función será creciente o decreciente en dicho intervalo.

$$A'(1)=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}\cdot 1-\frac{5}{4}=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}-\frac{90}{72}<0 \Rightarrow \text{decreciente en el intervalo } \left(0,\frac{270-120\sqrt{3}}{11}\right)$$

$$A'(8)=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}\cdot 8-\frac{5}{4}=\frac{4\sqrt{3}+9}{9}-\frac{5}{4}>0 \;\Rightarrow\;$$ creciente en el intervalo $\left(\frac{270-120\sqrt{3}}{11},10\right)$

luego la función presenta, como ya sabíamos, un mínimo absoluto en $x=\frac{270-120\sqrt{3}}{11}$.

La longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima es, para el trozo correspondiente al triángulo equilátero, de $x=\frac{270-120\sqrt{3}}{11}$ metros, y para el trozo del cuadrado, de $10-x$, es decir, $10-\frac{270-120\sqrt{3}}{11}=\frac{110-270+120\sqrt{3}}{11}=\frac{120\sqrt{3}-160}{11}$ metros.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos primeramente la familia de primitivas, *F(x)*, de *f´(x)*.

$$F(x)=\int (2x+1)\,e^{-x}\,dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u=2x+1 \qquad du=2dx$$
$$dv=e^{-x}dx \qquad v=\int dv=\int e^{-x}\,dv=-e^{-x}$$

$$\int (2x+1)\,e^{-x}\,dx=(2x+1)\left(-e^{-x}\right)-\int 2\left(-e^{-x}\right)dx=-(2x+1)e^{-x}+2\int e^{-x}dx=$$

$$=-(2x+1)e^{-x}+2\int e^{-x}dx=-(2x+1)e^{-x}+2\left(-e^{-x}\right)=-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}=(-2x-3)e^{-x}+\mathrm{C}$$

La integral indefinida de *f´(x)* es:

$$F(x)=\int (2x+1)e^{-x}dx=(-2x-3)e^{-x}+\mathrm{C}$$

Obtengamos ahora la primitiva *f(x)* de *f´(x)* cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0, 0), lo que implica que $F(0)=0$.

$$F(x)=(-2x-3)e^{-x}+\mathrm{C} \;\Rightarrow\; F(0)=(-2\cdot 0-3)e^{-0}+\mathrm{C} \;\Rightarrow\; 0=-3e^{0}+\mathrm{C} \;\Rightarrow\; \mathrm{C}=3$$

La primitiva que nos pide el ejercicio es:

$$f(x)=(-2x-3)e^{-x}+3$$

(b) Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f* en un punto de abscisa x_0 es: $y-y_0=f'(x_0)\,(x-x_0) \;\Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$, será:

$$f(x)=(-2x-3)e^{-x}+3 \quad\Rightarrow\quad y_0=f(0)=(-2\cdot 0-3)e^{-0}+3=-3\cdot 1+3=0$$

$$f'(x)=(2x+1)e^{-x} \quad\Rightarrow\quad f'(x_0)=f'(0)=(2\cdot 0+1)e^{-0}=1$$

$$y-0=1\cdot(x-0) \quad\Rightarrow\quad y=x$$

Que es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Calcularemos la matriz inversa de A, si es posible, mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula o alguno de los elementos de la diagonal principal fuera cero entonces la matriz A no tendría matriz inversa..

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, luego la matriz A admite inversa, terminemos de calcularla.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2.
Dividamos la 2ª fila por 2.
Dividamos la 3ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz A, la matriz A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Procedamos de igual manera para la obtención, si es posible, de la inversa de B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, pero el elemento a_{22} es cero, luego la matriz B no admite inversa.

(b) Hallemos el determinante de $A B^{2013} A^t$.

$$\left| AB^{2013} A^t \right| = |A| \cdot \left| B^{2013} \right| \cdot \left| A^t \right| = \qquad [1]$$

La propiedad que hemos usado es la que dice:

"*Si tenemos varias matrices cuadradas del mismo orden, el determinante del producto de todas ellas es igual al producto de los determinantes de cada una de ellas*".

En este caso, las matrices A, B^{2013} y A^t son todas matrices cuadradas de orden 3.

Continuando desde [1].

$$=\left|A\right|\cdot\left(\left|B\right|\right)^{2013}\cdot\left|A^t\right|= \qquad [2]$$

La propiedad que hemos usado es la que dice:

"*El determinante de una matriz cuadrada elevada a una potencia es igual al valor del determinante de dicha matriz elevado a la citada potencia*".

Es decir: $\left|B^{2013}\right|=\left(\left|B\right|\right)^{2013}$, que es la propiedad usada anteriormente.

Continuemos desde [2].

$$=\left|A\right|\cdot 0^{2013}\cdot\left|A^t\right|=\left|A\right|\cdot 0\cdot\left|A^t\right|=0$$

La propiedad que hemos usado es la que dice:

"*Si una matriz no tiene inversa, el determinante asociado a dicha matriz es cero*".

En nuestro caso, hemos justificado en el apartado anterior que la matriz B no tiene inversa, luego el determinante asociado a ella es cero, o sea: $\left|B\right|=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\left|B\right|\right)^{2013}=0^{2013}=0.$

El determinante que nos piden vale, por tanto, cero.

Un resumen de todo lo realizado, lo podemos ver a continuación.

$$\left|AB^{2013}A^t\right|=\left|A\right|\cdot\left|B^{2013}\right|\cdot\left|A^t\right|=\left|A\right|\cdot\left(\left|B\right|\right)^{2013}\cdot\left|A^t\right|=\left|A\right|\cdot 0^{2013}\cdot\left|A^t\right|=\left|A\right|\cdot 0\cdot\left|A^t\right|=0$$

(c) Hallemos la matriz X que satisface $AX - B = AB$.

Lo primero es sumar a ambos miembros la matriz B.

$$AX-B=AB \qquad\Rightarrow\qquad AX-B+B=AB+B$$

Por la existencia de elemento neutro, O, respecto de la suma,

$$AX+O=AB+B \qquad\Rightarrow\qquad AX=AB+B$$

Sabemos que la matriz A admite inversa. En consecuencia, podemos multiplicar a la izquierda por la inversa de A, A^{-1}.

$$AX=AB+B \qquad\Rightarrow\qquad A^{-1}AX=A^{-1}\left(AB+B\right)$$

por la propiedad asociativa,

$$\left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}\left(AB+B\right) \qquad\Rightarrow\qquad I\,X=A^{-1}\left(AB+B\right)$$

por la existencia de matriz unidad respecto del producto de matrices,

$$I\cdot X=A^{-1}\left(AB+B\right) \qquad\Rightarrow\qquad X=A^{-1}\left(AB+B\right)$$

Calculemos la matriz X.

$$X=A^{-1}\left(AB+B\right)=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\right]=$$

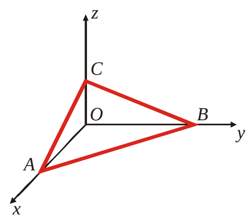
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot(-1)+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot1+1\cdot(-1) \\ 1\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot(-1)+0\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot1+0\cdot(-1) \\ 0\cdot(-1)+0\cdot1+2\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot(-1)+2\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot1+2\cdot(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+0\cdot1-\frac{1}{2}\cdot0 & 1\cdot2+0\cdot(-1)-\frac{1}{2}\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot3-\frac{1}{2}\cdot(-3) \\ -1\cdot(-2)+1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot0 & -1\cdot2+1\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot0 & -1\cdot1+1\cdot3+\frac{1}{2}\cdot(-3) \\ 0\cdot(-2)+0\cdot1+\frac{1}{2}\cdot0 & 0\cdot2+0\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot3+\frac{1}{2}\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Calculemos el punto de corte del plano $\pi \equiv 2x+y+3z-6=0$ con cada uno de los ejes coordenados.



Con el eje *OX*.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+3x=6 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+0+3\cdot0=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow A(3,0,0)$$

Con el eje *OY*.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+3x=6 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot0+y+3\cdot0=6 \Rightarrow y=6 \Rightarrow B(0,6,0)$$

Con el eje *OZ*.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+3x=6 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot0+0+3x=6 \Rightarrow z=2 \Rightarrow A(0,0,2)$$

El área del triángulo *ABC* se calcula mediante la expresión: $\overset{\Delta}{\text{Area}}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$

Calculemos las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$\vec{AB}=(0,\ 6,\ 0)-(3,\ 0,\ 0)=(-3,\ 6,\ 0)$

$\vec{AC}=(0,\ 0,\ 2)-(3,\ 0,\ 0)=(-3,\ 0,\ 2)$

El producto vectorial de estos dos vectores será:

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=(-3,6,0)\times(-3,0,2)=\left(\begin{vmatrix}6&0\\0&2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-3&0\\-3&2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-3&6\\-3&0\end{vmatrix}\right)=(12,\ 6,\ 18)$$

Luego el área del triángulo será:

$$\overset{\Delta}{\text{Area}}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|(12,\ 6,\ 18)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+6^2+18^2}=\frac{1}{2}\sqrt{144+36+324}=\frac{1}{2}\sqrt{504}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{14}=3\sqrt{14}\ \text{ unidades de área.}$$

(b) Obtengamos las coordenadas del vector $\vec{AO}$ para poder calcular el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

$$\vec{AO}=(0,0,0)-(3,0,0)=(-3,0,0)$$

$$\text{Volumen }=\left|\frac{1}{6}\cdot\left[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AO}\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-3&6&0\\-3&0&2\\-3&0&0\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot(-36)\right|=6\ \text{ unidades de volumen.}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, debemos tener en cuenta que se trata del cociente de la función elemental, logaritmo neperiano de x, que es continua y derivable para todos los valores de $x>0$, entre una función polinómica, x^2, que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$; por tanto, la función cociente es continua y derivable para el dominio común de continuidad y derivabilidad, es decir, para todos los valores de $x>0$, excepto para los valores que anulen al denominador, en este caso, el cero, pero que no forma parte del dominio común; en definitiva, la función f es continua y derivable para los valores de de $x>0$, que son además donde está definida.

Para estudiar la monotonía partimos de la primera derivada.

$$f(x)=\frac{2\ln(x)}{x^2}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x^2-2\ln(x)\cdot 2x}{x^4}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{2x-4x\ln(x)}{x^4}\ \Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2-4\ln(x)}{x^3}$$

Los valores que anulan a esta primera derivada, serán:

$$\frac{2-4\ln(x)}{x^3}=0\ \Rightarrow\ 2-4\ln(x)=0\ \Rightarrow\ 4\ln(x)=2\ \Rightarrow\ \ln(x)=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=e^{\frac{1}{2}}$$

Como es una función continua y derivable en $(0,+\infty)$, sólo tendremos en cuenta los valores que anulan a la primera derivada para construir los intervalos de monotonía, que serán: $\left(0, e^{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 1 y *e*, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$f'(1) = \frac{2-4\ln(1)}{1^3} = \frac{2-4\cdot 0}{1} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } \left(0, e^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$f'(e) = \frac{2-4\ln(e)}{e^3} = \frac{2-4\cdot 1}{e^3} = \frac{-2}{e^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } \left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$$

Estudiemos los extremos locales o relativos. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, es decir, en el $e^{\frac{1}{2}}$, o también en los puntos de no continuidad o en los de no derivabilidad, pero en este caso al ser la función continua y derivable en $(0, +\infty)$, los extremos locales sólo los podremos encontrar en el punto $e^{\frac{1}{2}}$.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora, podemos asegurar que hay un máximo relativo o local en $x = e^{\frac{1}{2}}$, ya que la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer.

La ordenada de este extremo relativo se obtiene sustituyendo la abscisa del mismo en la función *f(x)*, es decir:

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x^2} \;\Rightarrow\; f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

luego hay un máximo relativo en $\left(e^{\frac{1}{2}}, e^{-1}\right)$.

(b) Determinemos las posibles asíntotas de esta función.

- Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "*a*" tal que se satisfaga: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

La función que nos dan, al tratarse de una función cociente y teniendo en cuenta el estudio de la continuidad y derivabilidad realizado en el apartado anterior, los posibles valores de "*a*" hay que buscarlos entre los que anulan al denominador, en nuestro caso, sólo hay uno, el cero.

Calculemos dicho límite, pero cuando *x* tienda a cero sólo por la derecha ya que hemos de tener en cuenta el dominio de la función.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\ln(x)}{x^2} = \frac{2\ln(0^+)}{\left(0^+\right)^2} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

Luego hay una asíntota vertical $x = 0$, cuando *x* tiene a cero por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Calculemos este límite.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x^2} = \frac{2\ln(\infty)}{\infty^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty^2} = 0$$

luego hay asíntota horizontal por la derecha, cuando x6+4, y es $y=0$.

No puede haber asíntota horizontal por la izquierda, ya que el dominio es el intervalo $(0, +\infty)$.

La indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ la hemos destruido aplicando la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, "*dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en x = c, si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)*":

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida "*cuando x tiende a ±∞ y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a ±∞*".

En nuestro caso, se puede usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables para todos los valores de $x > 0$, según vimos en el aparatado a), por lo que se puede aplicar la Regla de L´Hôpital.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy grandes, en este caso es suficiente tomar, por ejemplo, $x=10, \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(10) = \dfrac{2\ln(10)}{10^2} = 0'046... \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(10) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x\to+\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Calculemos la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa $x_0=4$.

$$y - y_0 = -\frac{1}{g'(x_0)}(x - x_0)$$

La derivada de la función $g(x) = -x^2+6x-5$ en el punto $x_0=4$ es:

$g(x) = -x^2+6x-5 \Rightarrow g'(x) = -2x+6 \Rightarrow g'(4) = -2\cdot 4+6 = -2 \Rightarrow g'(4) = -2$

La ordenada de la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0=4$, es:

$g(x) = -x^2+6x-5 \Rightarrow g(4) = -4^2+6\cdot 4-5 = -16+24-5 = 3$

Luego la ecuación de la recta normal es:

$$y - y_0 = -\frac{1}{g'(x_0)}(x-x_0) \Rightarrow y-3 = -\frac{1}{-2}\cdot(x-4) \Rightarrow y-3 = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x+1$$

(b) Representemos primeramente la función, $g(x)=-x^2+6x-5$. Se trata de una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+6x-5 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-0^2+6\cdot 0-5 \Rightarrow y=-5 \Rightarrow (0,-5)$$

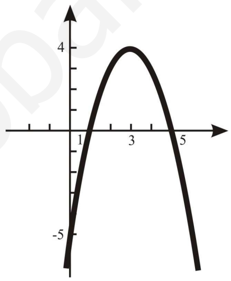
2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+6x-5 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+6x-5=0 \Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-6\pm 4}{-2}=\begin{cases} 1 \Rightarrow (1,0) \\ 5 \Rightarrow (5,0) \end{cases}$$

3.- Coordenadas del vértice V:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\cdot(-1)}=3 \Rightarrow$$

$$y=-x^2+6x-5 \Rightarrow y=-3^2+6\cdot 3-5=4 \Rightarrow V(3,4)$$



La gráfica de esta función es la situada al lado.

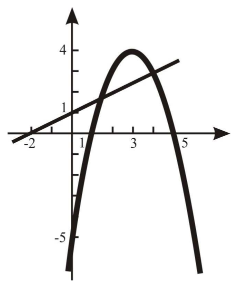
Representemos ahora la recta, $x-2y+2=0$. Se trata de una función afín, $2y=x+2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$, cuya gráfica no pasa por el origen de coordenadas. Calculemos los puntos de corte con los ejes.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x+1 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 0+1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$$

2.- Punto de corte con el eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x+1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x+1=0 \Rightarrow \frac{1}{2}x=-1 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2,0)$$



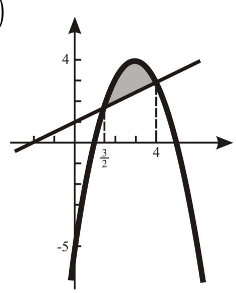
La gráfica de esta recta junto a la gráfica anterior es la situada al lado.

Calculemos los puntos de corte de la gráfica de *g* con la recta.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+6x-5 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+6x-5=\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow -2x^2+12x-10=x+2 \Rightarrow -2x^2+11x-12=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4(-2)(-12)}}{2(-2)}=\frac{-11\pm 5}{-4}=\begin{cases} \frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+1=\frac{7}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right) \\ 4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 4+1=3 \Rightarrow (4,3) \end{cases}$$

Los puntos obtenidos son los puntos de corte de la gráfica de *g(x)* con la recta.



Calculemos el área del recinto limitado por la gráfica de *g(x)* con la recta, recinto que se encuentra sombreado al lado.

$$\text{Área} = \int_{\frac{3}{2}}^{4}\left(-x^2+6x-5-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right)dx=\int_{\frac{3}{2}}^{4}\left(-x^2+\frac{11}{2}x-6\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{11}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-6x\right]_{\frac{3}{2}}^{4}=-\frac{4^3}{3}+\frac{11}{2}\cdot\frac{4^2}{2}-6\cdot4-\left(-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3}+\frac{11}{2}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}-6\cdot\frac{3}{2}\right)=$$

$$=-\frac{64}{3}+\frac{11}{2}\cdot\frac{16}{2}-24-\left(-\frac{\frac{27}{8}}{3}+\frac{11}{2}\cdot\frac{\frac{9}{4}}{2}-\frac{18}{2}\right)=-\frac{64}{3}+\frac{88}{2}-24-\left(-\frac{9}{8}+\frac{99}{16}-\frac{18}{2}\right)=$$

$$=\frac{-128+264-144}{6}-\left(\frac{-18+99-144}{16}\right)=\frac{-8}{6}-\frac{-63}{16}=\frac{-4}{3}+\frac{63}{16}=\frac{-64+189}{48}=$$

$=\frac{125}{48}$ unidades de área

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro m.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-4y+6z=6 \\ my+2z=m+1 \\ -3x+6y-3mz=-9 \end{array}\right\}.$$

Expresaremos el sistema anterior en forma matricial y lo discutiremos mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & m & 2 & m+1 \\ -3 & 6 & -3m & -9 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 2.
Simplifiquemos la 3ª fila por 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & m & 2 & m+1 \\ -1 & 2 & -m & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & m & 2 & m+1 \\ 0 & 0 & 3-m & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí la 2ª y 3ª columna.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & m & m+1 \\ 0 & 3-m & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - (3 - m) · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & m & m+1 \\ 0 & 0 & -m(3-m) & -(3-m)(m+1) \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad -m(3-m) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} -m=0 \Rightarrow m=0 \\ 3-m=0 \Rightarrow m=3 \end{cases}$

Estudiemos cada uno de estos dos casos.

** $m = 0 \Rightarrow$ la 3ª ecuación será, $0=-(3-m)(m+1) \Rightarrow 0=-(3-0)(0+1) \Rightarrow 0=-3 \Rightarrow$ hemos obtenido una ecuación absurda, el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

** $m = 3 \Rightarrow$ la 3ª ecuación será, $0=-(3-m)(m+1) \Rightarrow 0=-(3-3)(3+1) \Rightarrow 0=0 \Rightarrow$ hemos obtenido una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$ y $m \neq 3 \Rightarrow$ la 3ª ecuación sería una ecuación normal y el sistema sería un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvamos el sistema para $m = 3$. Según el apartado anterior la tercera ecuación era trivial por lo que la eliminamos y seguimos resolviendo el sistema a partir del sistema triangulado inferiormente al que habíamos llegado en el apartado anterior, sabiendo ya que es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferior del apartado anterior.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & m & m+1 \\ 0 & 0 & -m(3-m) & -(3-m)(m+1) \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3+1 \\ 0 & 0 & -3\cdot(3-0) & -(3-3)(3+1) \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Nos sobra una incógnita, la y, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3+2y \\ 0 & 2 & 4-3y \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] - 3 \cdot [2^a f.]$

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -6+13y \\ 0 & 2 & 4-3y \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución del sistema es:

$$2x = -6 + 13y \quad ; \quad 2z = 4 - 3y$$

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la y, por un parámetro, por ejemplo por $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = -3 + \dfrac{13}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \dfrac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

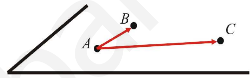
Veamos si es posible una solución en la que $y = 0$.

Sustituyamos este valor de y en la solución general anterior y comprobemos si podemos obtener algún valor para las otras incógnitas.

$$\begin{cases} x=-3+\frac{13}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-\frac{3}{2}\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3+\frac{13}{2}\lambda \\ y=\lambda=0 \\ z=2-\frac{3}{2}\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3+\frac{13}{2}\cdot 0 \\ y=\lambda=0 \\ z=2-\frac{3}{2}\cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

luego sí hemos encontrado una solución para $y = 0$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) La ecuación del plano π determinado por los puntos *A*, *B* y *C*, será la ecuación del plano que pasa por un punto, por ejemplo, por el *A*, y sus vectores de dirección son el $\vec{AB}$ y el $\vec{AC}$.

Las coordenadas del punto *A* y la de los vectores de dirección son:

$A\,(1, 0, 2)$

$\vec{AB}=(-1, 3, 1)-(1, 0, 2)=(-2, 3, -1)$

$\vec{AC}=(2, 1, 2)-(1, 0, 2)=(1, 1, 0)$

La ecuación del plano en paramétricas es:

$$\pi\equiv\begin{cases} x=1-2\alpha+\beta \\ y=3\alpha+\beta \\ z=2-\alpha \end{cases} \qquad \forall\alpha,\beta\in R$$

(b) Hallemos el punto simétrico *D´* de *D*(1,0,4) respecto del plano $x-y-5z+9=0$.

Expresemos la ecuación de este plano en forma paramétrica. Lo haremos resolviendo un sistema formado por una sola ecuación y tres incógnitas, mediante el método de Gauss.

$x-y-5z+9=0 \quad\Rightarrow\quad x-y-5z=-9$; pongámoslo en forma matricial:

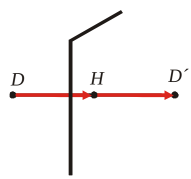
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -5 & -9 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado, nos sobran dos incógnitas, la *y* y la *z* que las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -9+y+5z \end{array}\right)$ La solución del sistema es: $x = -9 + y + 5z$

Terminemos de resolverlo expresando las incógnitas no principales o secundarias en función de un parámetro cada una de ellas, es decir:

$$x=-9+y+5z \quad\Rightarrow\begin{cases} x=-9+\lambda+5\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases} \qquad \forall\lambda,\mu\in R$$

Calculemos el simétrico del punto *D*, el *D´*



El vector $\vec{DH}$ es perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, cuya ecuación acabamos de expresarla en forma paramétrica, y en donde podemos leer los dos vectores de dirección del mismo, el $\vec{u}=(1, 1, 0)$ y el $\vec{v}=(5, 0, 1)$. Siendo *H* un punto del plano, el pié de la perpendicular al plano desde *D*.

El punto H, inicialmente, por pertenecer al plano tendrá las coordenadas genéricas siguientes: $H(-9+\lambda+5\mu,\ \lambda,\ \mu)$

$$\vec{DH}=(-9+\lambda+5\mu,\ \ \lambda,\ \ \mu)-(1,\ 0,\ 4)=(-10+\lambda+5\mu,\ \ \lambda,\ \ \mu-4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{DH}\perp\vec{u}\ \Rightarrow\ \vec{DH}\bullet\vec{u}=0\\ \vec{DH}\perp\vec{v}\ \Rightarrow\ \vec{DH}\bullet\vec{v}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(-10+\lambda+5\mu,\ \ \lambda,\ \ \mu-4)\bullet(1,\ 1,\ 0)=0\\ (-10+\lambda+5\mu,\ \ \lambda,\ \ \mu-4)\bullet(5,\ 0,\ 1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}-10+\lambda+5\mu+\lambda=0\\ -50+5\lambda+25\mu+\mu-4=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}2\lambda+5\mu=10\\ 5\lambda+26\mu=54\end{array}\right\}$$ Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & 5 & 10\\ 5 & 26 & 54\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: $5\cdot[2^a f.] - 2\cdot[1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & 5 & 10\\ 0 & 27 & 58\end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 27 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: $27\cdot[1^a f.] - 5\cdot[2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c}54 & 0 & -20\\ 0 & 27 & 58\end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{cc|c}27 & 0 & -10\\ 0 & 27 & 58\end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$27\lambda = -10\ \ ;\ \ 27\mu = 58 \quad\Rightarrow\quad \lambda=-\frac{10}{27}\quad ;\quad \mu=\frac{58}{27}$$

Teniendo en cuenta estos valores, el vector $\vec{DH}$ y el punto H tendrán de coordenadas:

$$\vec{DH}=(-10+\lambda+5\mu,\ \ \lambda,\ \ \mu-4)\ \Rightarrow\ \vec{DH}=\left(-10-\frac{10}{27}+5\cdot\frac{58}{27},\ \ -\frac{10}{27},\ \ \frac{58}{27}-4\right)\ \Rightarrow$$

$$\vec{DH}=\left(\frac{-270-10+290}{27},\ -\frac{10}{27},\ \frac{58-108}{27}\right)\ \Rightarrow\ \vec{DH}=\left(\frac{10}{27},\ -\frac{10}{27},\ -\frac{50}{27}\right)$$

$$H=(-9+\lambda+5\mu,\ \ \lambda,\ \ \mu)\ \Rightarrow\ H=\left(-9-\frac{10}{27}+5\cdot\frac{58}{27},\ \ -\frac{10}{27},\ \ \frac{58}{27}\right)\ \Rightarrow$$

$$H=\left(\frac{-243-10+290}{27}+5\cdot\frac{58}{27},\ \ -\frac{10}{27},\ \ \frac{58}{27}-4\right)\ \Rightarrow\ H=\left(\frac{37}{27},\ -\frac{10}{27},\ \frac{58}{27}\right)$$

Calculemos las coordenadas del punto simétrico $D'(a, b, c)$. Se verificará lo siguiente:

$$\vec{DH}=\vec{HD'}\ \Rightarrow$$

$$\left(\frac{10}{27},\ -\frac{10}{27},\ -\frac{50}{27}\right)=(a,b,c)-\left(\frac{37}{27},\ -\frac{10}{27},\ \frac{58}{27}\right)\ \Rightarrow$$

$$\left(\frac{10}{27},\ -\frac{10}{27},\ -\frac{50}{27}\right)=\left(a-\frac{37}{27},\ b+\frac{10}{27},\ c-\frac{58}{27}\right)\ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{10}{27}=a-\frac{37}{27}\\ -\frac{10}{27}=b+\frac{10}{37}\\ -\frac{50}{27}=c-\frac{58}{27}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=\frac{10}{27}+\frac{37}{27}\\ b=-\frac{10}{27}-\frac{10}{27}\\ c=-\frac{50}{27}+\frac{58}{27}\end{array}\right\}\Rightarrow\ D'\left(\frac{47}{27},\ -\frac{20}{27},\ \frac{8}{27}\right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 80 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea g la función definida por $g(x)=\dfrac{mx^3}{(x-n)^2}$ para $x\neq n$.

(a) [1´75 PUNTOS]. Halla m y n sabiendo que la recta $y=2x-4$ es una asíntota de la gráfica de g.

(a) [0´75 PUNTOS]. Determina si la gráfica de g es simétrica respecto del origen.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la gráfica tiene un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{5}{4}$. Calcula a, b, c, y d.

EJERCICIO 3. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&2\\-1&6\end{pmatrix}$.

(a) [0´75 PUNTOS]. Halla A^{-1}.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula la matriz X que satisface $AX = B^t C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

(c) [0´25 PUNTOS]. Halla el determinente de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Calcula la distancia entre las rectas

$$r\equiv x=y=z \quad \text{y} \quad s\equiv x-1=y-2=z-3.$$

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de *f* tiene abscisa $x=1$ y que *f* tiene un mínimo relativo en $x=2$ de valor -9. Calcula *a*, *b* y *c*.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx$.

EJERCICIO 3. Sabiendo que el determinante de una matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas.

(a) [1 PUNTO]. $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

(b) [1´5 PUNTOS]. $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Considera las rectas

$$r\equiv x=y=z \qquad s\equiv\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \qquad t\equiv\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\quad 3\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$$

Halla la recta que corta a “*r*” y a “*s*” y es paralela a “*t*”.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Si la recta $y=2x-4$ es una asíntota de la gráfica de *g* es que se trata de una asíntota oblicua.

Si la ecuación de una asíntota oblicua es $y=ax+b$, ya sabemos que el valor de *a* es 2 y el de *b*, -4. Calculemos los límites correspondientes, conociendo de antemano cuál es el resultado.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad\Rightarrow\quad 2=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{mx^3}{(x-n)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^3}{x(x-n)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^3}{x\left(x^2-2nx+n^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^3}{x\left(x^2-2nx+n^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^3}{x^3-2nx^2+n^2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}m=m$$

luego *m* vale 2.

Procedamos ahora para el valor de *b*.

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)\quad\Rightarrow\quad -4=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{mx^3}{(x-n)^2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-2nx+n^2}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^3+4nx^2-2n^2x}{x^2-2nx+n^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4nx^2-2n^2x}{x^2-2nx+n^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4nx^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}4n=4n\ \Rightarrow$$

$$-4=4n\quad\Rightarrow\quad n=-1$$

luego el valor de *n* es -1.

(b) La gráfica de una función es simétrica respecto al origen de coordenadas si se verifican las dos condiciones siguientes:

1) $\forall x\in\mathrm{Dom}(g)\ \Rightarrow\ -x\in\mathrm{Dom}(g)$
2) $\forall x\in\mathrm{Dom}(g)\ \Rightarrow\ g(x)=-g(-x)$

Sabemos por el enunciado que el dominio de la función *g(x)* es todo R menos el valor de $x = n$, es decir, $\mathrm{R}-\{-1\}$, ya que $n=-1$. Podemos observar que la primera condición no se satisface ya que como el 1 pertenece al dominio de la función, $1\in\mathrm{R}-\{-1\}$, -1debería también pertenecer al dominio y no es así, luego la gráfica de la función *g(x)* no es simétrica respecto al origen. No es preciso comprobar, en este caso, si la segunda condición se satisface o no, aunque en este caso tampoco la cumpliría, ya que:

$$g(x)=\frac{mx^3}{(x-n)^2}$$

$$g(-x)=\frac{m(-x)^3}{(-x-n)^2}=\frac{-mx^3}{(x+n)^2}\ \Rightarrow\ -g(-x)=-\frac{-mx^3}{(x+n)^2}=\frac{mx^3}{(x+n)^2}\neq g(x)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos una función, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, de forma que alcance un máximo relativo en el punto de abscisa $x=1$, para ello se ha de verificar que $f'(1)=0$ y $f''(1)<0$.

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \Rightarrow\ f'(x)=3ax^2+2bx+c\ \Rightarrow\ f'(1)=3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=0\ \Rightarrow$$
$$3a+2b+c=0 \qquad [1]$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ \Rightarrow\ f''(x)=6ax+2b\ \Rightarrow\ f''(1)=6a\cdot 1+2b<0\ \Rightarrow$$
$$6a+2b<0 \qquad [2]$$

Si la gráfica tiene un punto de inflexión en el (0, 0), se ha de verificar que $f''(0)=0$, $f'''(0)\neq 0$ y $f(0)=0$.

$$f''(x)=6ax+2b\ \Rightarrow\ f''(0)=6a\cdot 0+2b=0\ \Rightarrow\ 2b=0\ \Rightarrow\ b=0 \qquad [3]$$
$$f'''(x)=6a\ \Rightarrow\ 6a\neq 0\ \Rightarrow\ a\neq 0 \qquad [4]$$

evidentemente *a* debe ser distinto de cero, sino no sería una función polinómica de tercer grado.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad\Rightarrow\quad f(0)=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+\mathrm{d} \quad\Rightarrow\quad 0=\mathrm{d}$ [5]

La función, según [3] y [5], es decir, $b = 0$ y $d = 0$ tendrá este otro aspecto por ahora:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad\Rightarrow\quad f(x)=ax^3+0\cdot x^2+cx+0 \quad\Rightarrow\quad f(x) = ax^3 + cx.$

Por último, nos dicen que se verifica que $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$, o lo que es lo mismo:

$$\int_0^1\left(ax^3+cx\right)dx=\frac{5}{4} \Rightarrow \int_0^1\left(ax^3+cx\right)dx=\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{cx^2}{2}\right]_0^1=\frac{a\cdot 1^4}{4}+\frac{c\cdot 1^2}{2}-\left(\frac{a\cdot 0^4}{4}+\frac{c\cdot 0^2}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{c}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{4}+\frac{c}{2}=\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a+2c}{4}=\frac{5}{4} \Rightarrow a+2c=5 \qquad [6]$$

Resolvamos el sistema formado por las condiciones [2], [3] y [4].

$$\left.\begin{array}{r}6a+2b<0\\ b=0\\ a\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}6a+2\cdot 0<0\\ b=0\\ a\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}6a<0\\ b=0\\ a\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}a<0\\ b=0\\ a\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}a<0\\ b=0\end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema formado por las condiciones [1] y [6], teniendo en cuenta ya que $a<0,\ b=0$ y $d=0$.

$$\left.\begin{array}{r}3a+2b+c=0\\ a+2c=5\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}3a+2\cdot 0+c=0\\ a+2c=5\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}3a+c=0\\ a+2c=5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 5\end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $3 \cdot$ [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 15\end{array}\right)$ Dividamos la 2ª fila por 5.

$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right)$ Dividamos la 1ª fila por 3.

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado, la solución es:
$a = -3 \quad ; \quad c = 3$

En resumen, los valores que nos piden son: $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$ y $d = 0$.

La expresión de la función $f(x)$, finalmente, será: $f(x) = -x^3 + 3x$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Para hallar la matriz inversa de A, lo haremos mediante el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula o alguno de los elementos de la diagonal principal fuera cero entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por -2.
Dividamos la 2ª fila por 2.
Dividamos la 3ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz A, la matriz A^{-1}, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Hallemos la matriz X que satisface $A \cdot X = B^t \cdot C$. [1]

Sabemos que la matriz A admite inversa. En consecuencia, en la expresión [1], podemos multiplicar a la izquierda por la inversa de A, A^{-1}.

$$A \cdot X = B^t \cdot C \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C$$

por la propiedad asociativa:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C \quad \Rightarrow \quad \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C$$

Calculemos la matriz X, haciendo uso de la propiedad asociativa para multiplicar.

$$X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(c) Hallemos el determinante de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$.

Calculemos, inicialmente, la matriz producto de B^tB.

$$B^t\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\2&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot1&2\cdot0+2\cdot1&1\cdot0+0\cdot1\\0\cdot2+1\cdot2&2\cdot2+2\cdot2&1\cdot2+0\cdot2\\0\cdot1+1\cdot0&2\cdot1+2\cdot0&1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&8&2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

Calculemos su determinante.

$$\left|B^t\cdot B\right|=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&8&2\\0&2&1\end{vmatrix}=8+0+0-0-4-4=0$$

Hallemos ahora el determinante que nos pide el ejercicio.

$$\left|A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}\right|=\left|A^{2013}B^tB\left(A^{-1}\right)^{2013}\right|=\left|A^{2013}\right|\cdot\left|B^tB\right|\cdot\left|\left(A^{-1}\right)^{2013}\right|= \qquad [1]$$

La propiedad que hemos usado es la que dice:

"*Si tenemos varias matrices cuadradas del mismo orden, el determinante del producto de todas ellas es igual al producto de los determinantes de cada una de ellas*".

En este caso, las matrices A^{2013}, B^tB y $(A^{-1})^{2013}$ son todas matrices cuadradas de orden 3.

Continuando desde [1].

$$=\left|A^{2013}\right|\cdot0\cdot\left|\left(A^{-1}\right)^{2013}\right|=0$$

Podíamos haber tenido en cuenta también estas otras propiedades:

$$\left|A^{2013}\right|=\left(|A|\right)^{2013} \quad ; \quad \left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|} \quad ; \quad \left|\left(A^{-1}\right)^{2013}\right|=\left(\left|A^{-1}\right|\right)^{2013}=\frac{1}{\left(|A|\right)^{2013}}$$

y al haber continuado desde [1], tendríamos:

$$=\left(|A|\right)^{2013}\cdot0\cdot\frac{1}{\left(|A|\right)^{2013}}=\frac{\left(|A|\right)^{2013}}{\left(|A|\right)^{2013}}\cdot0=1\cdot0=0$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Lo primero que hay que hacer es estudiar la posición relativa de ambas rectas, lo haremos discutiendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

Pero antes, expresemos las ecuaciones de las rectas en forma de intersección de dos planos.

$$r\equiv x=y=z \quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=y\\y=z\end{array}\right.\quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y=0\\y-z=0\end{array}\right.$$

$$s\equiv x-1=y-2=z-3 \quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-1=y-2\\y-2=z-3\end{array}\right.\quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y=-1\\y-z=-1\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}x-y=\ \ 0\\y-z=\ \ 0\\x-y=-1\\y-z=-1\end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, hemos obtenido dos ecuaciones absurdas, la 3ª y la 4ª, por lo que las dos rectas son paralelas en sentido estricto.

Calculemos la distancia entre ambas rectas, al ser paralelas, basta calcular la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra.

El punto que elegimos es el $P(0, 0, 0)$ de la recta $r \equiv x = y = z$.

Expresemos la ecuación de la recta s en forma paramétrica.

$$s \equiv x-1 = y-2 = z-3 \quad \Rightarrow \quad x-1 = y-2 = z-3 = \lambda \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para calcular el punto de la recta s que esté más cercano al punto $P(0, 0, 0)$ de r, elegiremos un punto genérico de la recta s, por ejemplo, $H = (1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$, que satisfaga la condición siguiente:

El vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular al vector de dirección de r y s, es decir, al vector (1, 1, 1).

$$\overrightarrow{PH} = (1+\lambda,\ 2+\lambda,\ 3+\lambda) - (0, 0, 0) = (1+\lambda,\ 2+\lambda,\ 3+\lambda)$$

$$\overrightarrow{PH} \perp \vec{v}_r \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PH} \bullet \vec{v}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+\lambda,\ 2+\lambda,\ 3+\lambda) \bullet (1, 1, 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1+\lambda+2+\lambda+3+\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda+6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda = -6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$$

Utilicemos este valor para obtener las coordenadas del punto H de s más cercano a P.

$$H = (1+\lambda,\ 2+\lambda,\ 3+\lambda) = (1+(-2),\ 2+(-2),\ 3+(-2)) = (-1,\ 0,\ 1)$$

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{PH}$ serán:

$$\overrightarrow{PH} = (1+\lambda,\ 2+\lambda,\ 3+\lambda) = (1+(-2),\ 2+(-2),\ 3+(-2)) = (-1,\ 0,\ 1)$$

El módulo de este vector coincidirá con la distancia entre ambas rectas.

$$\text{dist}\,(r, s) = \text{dist}\,(P, H) = \left|\overrightarrow{PH}\right| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2} \text{ unidades de longitud.}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Sabemos que la función polinómica $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Su primera, segunda y tercera derivada son:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f'''(x) = 6$

El punto de inflexión, en $x=1$, de la función al tener ésta derivada segunda, coincidirá con el valor que anule a la segunda derivada y no anule a la tercera, es decir:

$f''(x) = 6x + 2a \;\Rightarrow\; f''(1) = 6\cdot 1 + 2a \;\Rightarrow\; 0 = 6 + 2a \;\Rightarrow\; a = -3.$

$f'''(1) = 6 \neq 0$

Hemos obtenido el valor de a, calculemos ahora el valor de b y c.

La función f tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 2$, para ello se ha de verificar que $f'(2) = 0$ y $f''(2) > 0$.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\Rightarrow\; f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + c \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 6x + b \;\Rightarrow$

$f'(2) = 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + b \;\Rightarrow\; 0 = 12 - 12 \;\Rightarrow\; b = 0.$

$f''(x) = 6x + 2a \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x - 6 \;\Rightarrow\; f''(2) = 6\cdot 2 - 6 = 6 > 0$

La función f será ahora: $f(x) = x^3 - 3x^2 + c$.

Sabemos, por el problema, que el mínimo relativo en $x = 2$ toma el valor -9, lo que significa que $f(2) = -9$, por tanto:

$f(2) = -9 \;\Rightarrow\; f(x) = x^3 - 3x^2 + c \;\Rightarrow\; f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + c \;\Rightarrow$

$-9 = 8 - 12 + c \;\Rightarrow\; c = -5$

La función f, finalmente, será: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si observamos la integral racional vemos que se trata de una integral racional impropia debido a que el grado del polinomio del numerador es de igual grado que el del denominador.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2 - 6x + 5 \\ \cline{2-2} -x^2 + 6x - 5 & 1 \\ \cline{1-1} 6x - 5 & \end{array}$$

La integral indefinida será:

$$\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = \int\left(1+\frac{6x-5}{x^2-6x+5}\right)dx = \int 1\cdot dx + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx = \qquad [1]$$

Descompongamos el integrando de la integral racional propia en una suma de fracciones elementales, pero antes calculemos las raíces del denominador.

$$x^2-6x+5=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}5\\1\end{cases}$$

$$\frac{6x-5}{x^2-6x+5}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1} \;\Rightarrow\; \frac{6x-5}{x^2-6x+5}=\frac{A(x-1)+B(x-5)}{(x-5)(x-1)} \;\Rightarrow$$

$$6x-5=A(x-1)+B(x-5) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow 6\cdot 1-5=A(1-1)+B(1-5) \Rightarrow 1=-4B \Rightarrow B=-\dfrac{1}{4} \\ x=5 \Rightarrow 6\cdot 5-5=A(5-1)+B(5-5) \Rightarrow 25=4A \Rightarrow A=\dfrac{25}{4} \end{cases}$$

Continuando desde [1]

$$=x+\int\left(\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}\right)dx=x+\int\frac{\frac{25}{4}}{x-5}dx+\int\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}dx=x+\frac{25}{4}\int\frac{1}{x-5}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx=$$

$$=x+\frac{25}{4}\,\mathrm{Ln}|x-5|-\frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}|x-1|+k$$

Calculemos ahora la integral definida.

$$\int_2^4\frac{x^2}{x^2-6x+5}dx=\left[x+\frac{25}{4}\,\mathrm{Ln}|x-5|-\frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}|x-1|\right]_2^4=$$

$$=4+\frac{25}{4}\,\mathrm{Ln}|4-5|-\frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}|4-1|-\left(2+\frac{25}{4}\,\mathrm{Ln}|2-5|-\frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}|2-1|\right)=$$

$$=4+\frac{25}{4}\,\mathrm{Ln}(1)-\frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}(3)-\left(2+\frac{25}{4}\,\mathrm{Ln}(3)-\frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}(1)\right)=$$

$$=4+\frac{25}{4}\,\mathrm{Ln}(1)-\frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}(3)-2-\frac{25}{4}\,\mathrm{Ln}(3)+\frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}(1)=$$

$$=2+\frac{26}{4}\,\mathrm{Ln}(1)-\frac{26}{4}\,\mathrm{Ln}(3)=2+\frac{26}{4}\cdot 0-\frac{13}{2}\,\mathrm{Ln}(3)=2-\frac{13}{2}\,\mathrm{Ln}(3)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) La matriz $-2A$ es:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ p & q & r\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ -2\cdot A=\begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c\\ -2d & -2e & -2f\\ -2p & -2q & -2r\end{pmatrix}$$

El $\det(-2A)$ será:

$$|-2\cdot A|=\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c\\ -2d & -2e & -2f\\ -2p & -2q & -2r\end{vmatrix}=(-2)(-2)(-2)\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ p & q & r\end{vmatrix}=-8\cdot 4=-32$$

Hemos utilizado la propiedad de los determinantes que dice: "*Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante están multiplicados por un mismo número, éste podemos sacarlo fuera del símbolo del determinante como factor común*". En el ejercicio hemos sacado factor común -2 tres veces.

El $\det(A^{-1})$ será:

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{4}$$

Hemos usado la propiedad de los determinantes que dice: "*el determinante de la matriz inversa de una matriz cuadrada regular es igual al inverso del valor del determinante de dicha matriz*".

(b) calculemos el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = 2(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2\cdot 4 = -8$$

Hemos utilizado la propiedad de los determinantes que dice: "*Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante están multiplicados por un mismo número, éste podemos sacarlo fuera del símbolo del determinante como factor común*". En el ejercicio hemos sacado factor común 2, y después -1.

Calculemos ahora este otro:

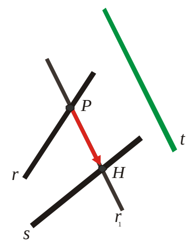
$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = (-1)(-3)\cdot\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3\cdot 4 = -12$$

Hemos utilizado, en un primer momento, la propiedad de los determinantes que dice: "*Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante están multiplicados por un mismo número, éste podemos sacarlo fuera del símbolo del determinante como factor común*". En el ejercicio hemos sacado factor común -1y -3.

Después hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "*Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo*". En el ejercicio hemos intercambiado entre sí las filas 1ª y 2ª, por eso hemos multiplicado a su vez por -1, paar que el determinante no modifique su valor.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos las ecuaciones de las recta *r* y *s* en forma paramétrica.



$$r \equiv x = y = z \;\Rightarrow \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta \\ z = \beta \end{cases} \quad \text{para } \forall \beta \in R$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \;\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases} \quad \text{para } \forall \alpha \in R$$

Llamemos r_1 a la recta que nos piden, como corta a *r* y *s*, eligiremos de la recta *r* un punto genérico, *P*, de coordenadas *P*(β, β, β); y de la recta *s* otro punto genérico, *H*, de coordenadas, *H*(2, 1, α).

El vector de dirección de la recta que hemos de calcular, será pues el vector $\overrightarrow{PH}$.

Se ha de verificar que el vector $\overrightarrow{PH}$ que determinan estos dos puntos ha de ser paralelo al vector de dirección de la recta *t*, y por tanto, sus coordenadas serán proporcionales. Veámoslo.

$$\overrightarrow{PH} = (2,\ 1,\ \alpha) - (\beta,\ \beta,\ \beta) = (2-\beta,\ \ 1-\beta,\ \ \alpha-\beta)$$

$$t \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \quad 3\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \;\Rightarrow\; \vec{v}_t = (2, 3, 1)$$

Impongamos la condición de paralelismo de vectores que hemos dicho anteriormente.

$$\frac{2-\beta}{2}=\frac{1-\beta}{3}=\frac{\alpha-\beta}{1} \;\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\beta}{2}=\dfrac{1-\beta}{3} \\ \dfrac{1-\beta}{3}=\dfrac{\alpha-\beta}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6-3\beta= 2-2\beta \\ 1-\beta = 3\alpha-3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=4 \\ 2\beta=3\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta=4 \\ 2\cdot 4=3\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=4 \\ 8=3\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=4 \\ \alpha=3 \end{cases}$$

Sustituyamos estos valores de α y β, en el punto P y en el vector $\overrightarrow{PH}$.

$$P(\beta,\ \beta,\ \beta) \quad \Rightarrow \quad P(4,\ 4,\ 4)$$

$$\overrightarrow{PH}=(2-\beta,\ 1-\beta,\ \alpha-\beta) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PH}=(2-4,\ 1-4,\ 3-4) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PH}=(-2,-3,-1)$$

La ecuación de la recta que corta a r y s, y es paralela a t, será la ecuación de la recta que pasa por el punto P o por el H y tiene como vector de dirección, el vector $\overrightarrow{PH}$, o el vector de la recta t, el (2, 3, 1). La ecuación en forma continua es:

$$r_1 \equiv \frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-4}{1}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 81 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

EJERCICIO 2. Sean f y g las funciones definidas por $f(x)=2-x$ y $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$ para $x\neq -1$.

(a) [0´5 PUNTOS]. Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g.
(b) [0´5 PUNTOS]. Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.
(c) [1´5 PUNTOS]. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

EJERCICIO 3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left.\begin{array}{rl} x+2y+z &= 0 \\ x-y+mz &= m-2 \\ mx+y+3z &= m-2 \end{array}\right\}.$$

(a) [1´75 PUNTOS]. Discute el sistema según los valores del parámetro m.
(b) [0´75 PUNTOS]. Resuélvelo, si es posible, para $m = 2$.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Determina el punto de la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=z+1$ que equidista de los planos

$$\pi_1\equiv x-y+3z+2=0 \quad \text{y} \quad \pi_2\equiv\begin{cases} x=-4+\lambda-3\mu \\ y=1+\lambda \\ z=\mu \end{cases}$$

Opción B

EJERCICIO 1. Sea f la función definida por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ para $x \geq -1$, $x \neq 0$.

(a) [1 PUNTO]. Calcula los límites laterales de f en $x = 0$.

(b) [1´5 PUNTOS]. Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula $\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\, dx$. *Sugerencia*: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$.

EJERCICIO 3. Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es det(M) = 2. Calcula:

(a) [0´5 PUNTOS]. El rango de M^3.

(b) [0´75 PUNTOS]. El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M).

(c) [0´75 PUNTOS]. El determinante de $(M^{-1})^2$.

(d) [0´5 PUNTOS]. El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.

EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(-1, 4, 3)$, $C(1, 2, 1)$ y $D(2, 3, 1)$.

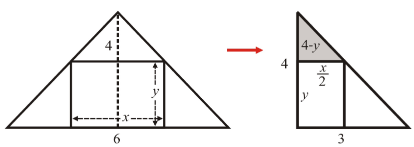
(a) [1´75 PUNTOS]. Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo.

(b) [0´75 PUNTOS]. Calcula el área de dicho rectángulo.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Construyamos la función área del rectángulo inscrito en el triángulo isósceles, que es la que me piden que sea máxima. Tomemos como variable independiente la base del rectángulo.



$$A(x) = x \cdot y \qquad [1]$$

Busquemos la relación existente entre la x y la y, teniendo en cuenta la condición que nos da el problema, es decir, que la altura del triángulo mide 4 metros y la base (lado desigual), 6 metros; por el Teorema de Thales, según la mitad de la figura, la relación entre los lados del triángulo sombreado y el triángulo mayor es:

$$\frac{4-y}{\frac{x}{2}}=\frac{4}{3}$$

Despejemos y en función de la x:

$$3(4-y)=4\cdot\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad 12-3y=2x \quad\Rightarrow\quad -3y=2x-12 \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{2}{3}x+4$$

Sustituyamos este valor de y en [1]

$$A(x)=x\cdot y \quad\Rightarrow\quad A(x)=x\left(-\frac{2}{3}x+4\right) \quad\Rightarrow\quad A(x)=-\frac{2}{3}x^2+4x$$

Calculemos el dominio de esa función. De entrada, los valores de x tendrán que ser mayores que cero, es decir, estrictamente positivos. Pero de la misma figura deducimos que el mayor valor que puede tomar x es menor que 6.

En definitiva, el dominio de *A(x)* serán los valores del intervalo (0, 6).

La función es continua y derivable en este dominio, ya que se trata de una función polinómica, que lo es en todo $\mathbb{R}$, por lo que lo será en (0, 6).

Calculemos el máximo relativo o local. Obtengamos la función primera derivada.

$$A(x)=-\frac{2}{3}x^2+4x \quad\Rightarrow\quad A'(x)=-\frac{4}{3}x+4$$

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada.

$$-\frac{4}{3}x+4=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{4}{3}x=-4 \quad\Rightarrow\quad x=3$$

Hemos obtenido un único valor que pertenece al dominio de la función *A(x)*.

Comprobemos que este valor que anula a la primera derivada y que pertenece al dominio es el máximo relativo y también el absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: el (0, 3) y el (3, 6).

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 1 y 4, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$A'(x)=-\frac{4}{3}x+4 \Rightarrow A'(1)=-\frac{4}{3}\cdot 1+4=-\frac{4}{3}+4=\frac{-4+12}{3}=\frac{8}{3}>0 \quad\Rightarrow\quad \text{Creciente en } (0, 3).$$

$$A'(x)=-\frac{4}{3}x+4 \Rightarrow A'(4)=-\frac{4}{3}\cdot 4+4=-\frac{16}{3}+4=\frac{-16+12}{3}=-\frac{4}{3}<0 \quad\Rightarrow\quad \text{Decreciente en } (3, 6).$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es el máximo relativo sino también máximo absoluto. En definitiva la base del rectángulo que da lugar al rectángulo de área máxima es el de 3 metros.

La altura de este rectángulo de área máxima mide:

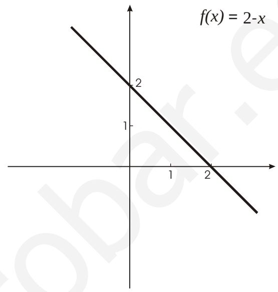
$$y=-\frac{2}{3}x+4 \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{2}{3}\cdot 3+4 \quad\Rightarrow\quad y=-2+4 \quad\Rightarrow\quad y=2 \text{ metros.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(a) Los puntos de corte de las gráficas de f y g los calcularemos resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{2}{x+1} \\ y=2-x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{2}{x+1}=2-x \Rightarrow 2=(2-x)(x+1) \Rightarrow 2=2x+2-x^2-x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x=0 & & \Rightarrow \; y=2-0=2 \\ x-1=0 & \Rightarrow \; x=1 & \Rightarrow \; y=2-1=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (0,2) \\ (1,1) \end{array}\right.$$



(b) Dibujemos, en primer lugar, la gráfica de *f(x)* = 2 - *x*. Se trata de una función afín cuya gráfica es una recta que no pasa por el origen.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 2 \;\Rightarrow\; (0, 2)$

2.- Punto de corte con el eje de abscisas:

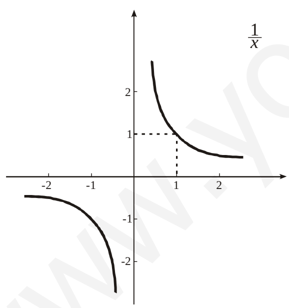
$y = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \;\Rightarrow\; (2, 0)$

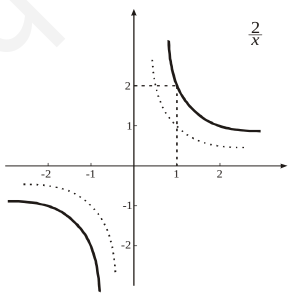
La gráfica está representada al lado.

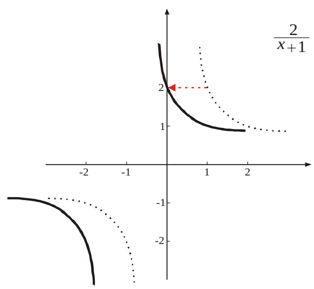
Representemos ahora la función $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$. Se trata de una función de proporcionalidad inversa, cuya gráfica es una hipérbola equilátera.

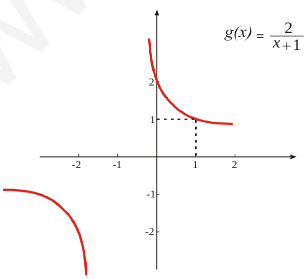
La obtendremos a partir de la función de proporcionalidad inversa elemental $\dfrac{1}{x}$. Para ello dibujaremos la gráfica de $\dfrac{2}{x}$, gráfica que en cualquier punto de su domino coincide con la de $\dfrac{1}{x}$ en el mismo punto pero multiplicando la ordenada de ésta por 2. Una vez que ya hemos obtenido la de $\dfrac{2}{x}$, obtendremos la de $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$, desplazando la gráfica de la función de proporcionalidad inversa $\dfrac{2}{x}$, una unidad a la izquierda.

Lo explicado anteriormente se encuentra expuesto y representado a continuación.



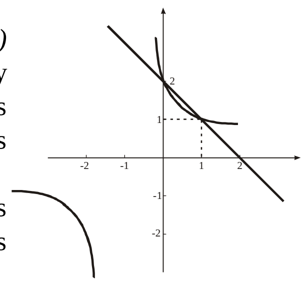




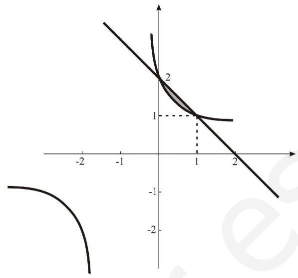


La gráfica aproximada de *g(x)* es la situada a la izquierda, y hemos tenido en cuenta los puntos (0, 2) y (1, 1) que eran los puntos de corte con la gráfica de *f(x)*.

Las dos gráficas representadas en unos mismos ejes son las situadas a la derecha.



(c) El recinto limitado por ambas gráficas es el que se encuentra sombreado y situado al lado. Calculemos el área de dicho recinto sombreado.



Construyamos la función diferencia entre la recta y la curva:

$$h(x)=f(x)-g(x) \quad \Rightarrow \quad h(x)=2-x-\frac{2}{x+1}$$

e integremos esta función entre 0 y 1, que eran los puntos de corte de ambas funciones.

$$\text{Área} = \int_0^1 \left(2-x-\frac{2}{x+1}\right) dx = \left[2x-\frac{x^2}{2}-2\cdot\ln|x+1|\right]_0^1 =$$

$$=2\cdot 1-\frac{1^2}{2}-2\cdot\ln|1+1|-\left(2\cdot 0-\frac{0^2}{2}-2\cdot\ln|0+1|\right)=2-\frac{1}{2}-2\cdot\ln(2)-\left(0-0-2\cdot\ln(1)\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-2\cdot\ln(2)-(-2\cdot 0)=\frac{3}{2}-2\cdot\ln(2) \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Discutamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro *m*.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ x-y+mz=m-2 \\ mx+y+3z=m-2 \end{array}\right\}.$$

Expresaremos el sistema anterior en forma matricial y lo discutiremos mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & m-2 \\ m & 1 & 3 & m-2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & m-1 & m-2 \\ 0 & 1-2m & 3-m & m-2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] + (1-2m) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & m-1 & m-2 \\ 0 & 0 & -2m^2+8 & -2m^2+8m-8 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow -2m^2 + 8 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-2 \end{cases}$

Estudiemos cada uno de estos dos casos.

** $m = 2 \Rightarrow$ la 3ª ecuación será, $0 = -2m^2 + 8m - 8 \Rightarrow 0 = -2\cdot 2^2 + 8\cdot 2 - 8 \Rightarrow$ $0 = 0 \Rightarrow$ hemos obtenido una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones.

** $m = -2 \Rightarrow$ la 3ª ecuación será, $0=-2m^2+8m-8 \Rightarrow 0=-2\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)-8 \Rightarrow$

$0 \neq -32 \Rightarrow$ hemos obtenido una ecuación absurda, el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$ y $m \neq -2 \Rightarrow$ la 3ª ecuación sería una ecuación normal y el sistema sería un sistema compatible determinado, con solución única.

(b) Resolvamos el sistema para $m = 2$. Según el apartado anterior la tercera ecuación era trivial por lo que la eliminamos y seguimos resolviendo el sistema a partir del sistema triangulado inferiormente al que habíamos llegado en el apartado anterior, sabiendo ya que es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferior del apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & m-1 & m-2 \\ 0 & 0 & -2m^2+8 & -2m^2+8m-8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2-1 & 2-2 \\ 0 & 0 & -2\cdot 2^2+8 & -2\cdot 2^2+8\cdot 2-8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Nos sobra una incógnita, la z, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -z \\ 0 & -3 & -z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: $3 \cdot [1^a f.] + 2 \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -5z \\ 0 & -3 & -z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución del sistema es:

$$3x = -5z \quad ; \quad -3y = -z$$

Terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo por $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5}{3}\lambda \\ y = \dfrac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica.

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -1+\alpha \end{cases} \quad \text{para} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Expresemos la ecuación del plano π_2 en forma general.

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -4+\lambda-3\mu \\ y = 1+\lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Procedamos a la eliminación lineal de los parámetros λ y μ.

$$\begin{cases} \lambda-3\mu = x+4 \\ \lambda \quad\quad = y-1 \\ \quad\quad \mu = \ z \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & x+4 \\ 1 & 0 & y-1 \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & x+4 \\ 0 & 3 & -x+y-5 \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & x+4 \\ 0 & 3 & -x+y-5 \\ 0 & 0 & x-y+3z+5 \end{array}\right)$$

Como el sistema es compatible la tercera ecuación debe ser trivial, por lo que la condición $x - y + 3z + 5 = 0$, sería la ecuación general del plano π_2.

Elijamos un punto genérico, P, de la recta r; tendrá de coordenadas $(1+3\alpha,\ 2\alpha,\ -1+\alpha)$.

La ecuación de cada uno de los planos en forma general es la siguiente.

$$\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv x - y + 3z + 5 = 0$$

Impongamos la condición al punto P de estar a igual distancia de uno y otro plano:

$$\text{dist}(P,\pi_1) = \text{dist}(P,\pi_2) \Rightarrow \left|\frac{1+3\alpha-2\alpha+3(-1+\alpha)+2}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}}\right| = \left|\frac{1+3\alpha-2\alpha+3(-1+\alpha)+5}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1+3\alpha-2\alpha-3+3\alpha+2}{\sqrt{11}}\right| = \left|\frac{1+3\alpha-2\alpha-3+3\alpha+5}{\sqrt{11}}\right| \Rightarrow \left|\frac{4\alpha}{\sqrt{11}}\right| = \left|\frac{4\alpha+3}{\sqrt{11}}\right| \Rightarrow$$

esta última ecuación, al ser en valor absoluto, da lugar a dos ecuaciones:

$$|4\alpha| = |4\alpha+3| \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 4\alpha+3 \\ 4\alpha = -(4\alpha+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \neq 3 \\ 4\alpha = -4\alpha-3 \Rightarrow 8\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

La primera de las ecuaciones da lugar a una ecuación absurda y la segunda a la solución de $\alpha = -\frac{3}{8}$. Para este valor de α obtenemos un punto de la recta que equidista de ambos planos:

$$\alpha = -\frac{3}{8} \Rightarrow P(1+3\alpha,\ 2\alpha,\ -1+\alpha) \Rightarrow P\left(1+3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right),\ 2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right),\ -1+\left(-\frac{3}{8}\right)\right) \Rightarrow$$

$$P\left(1-\frac{9}{8},\ -\frac{6}{8},\ -1-\frac{3}{8}\right) \Rightarrow P\left(-\frac{1}{8},\ -\frac{6}{8},\ -\frac{11}{8}\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos los límites laterales de *f* en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0^- \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = 0^+ \cdot e^{\frac{1}{0^+}} = 0 \cdot e^{+\infty} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{\infty} = \infty$$

La indeterminación de $[0 \cdot \infty]$ la hemos destruido transformándola en otra de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, y ésta a su vez la hemos destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, *“dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y derivables en $x = c$, si $f(x)$ y $g(x)$ tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de $f(x)$ y $g(x)$ es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$, siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)”:*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida *“cuando x tiende a $\pm\infty$ y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a $\pm\infty$ ”.*

En nuestro caso, se ha podido usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en cualquier punto del dominio donde está definida la función *f*.

(b) Obtengamos las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de la función *f*.

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador del exponente de la función exponencial, $x = 0$, es decir, donde no está definida la función. Pero este estudio ya está hecho en el apartado anterior, por lo que podemos deducir que sólo hay asíntota vertical, $x = 0$, cuando x se acerca a 0 por la derecha, tendiendo la función *f(x)* a $+\infty$.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe pero sólo para valores de x que tiendan a $+\infty$, ya que el dominio de la función es $x \geq -1$, $x \neq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = \infty \cdot e^0 = \infty \cdot 1 = \infty$$

Luego no hay asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$. Sin embargo se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua, veámoslo.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$, $y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$.

Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\mathrm{m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

$$\mathrm{n} = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \infty\cdot\left(e^{\frac{1}{+\infty}} - 1\right) =$$

$$= \infty\cdot\left(e^0 - 1\right) = \infty\cdot(1-1) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{+\infty}} - 1}{\frac{1}{+\infty}} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

Luego hay asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$, siendo la ecuación de esta asíntota: $y = x + 1$.

La indeterminación de $[\infty\cdot 0]$ la hemos destruido transformándola en otra de $\left[\frac{0}{0}\right]$, y ésta a su vez la hemos destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota oblicua $y = x + 1$, cuando $x \to +\infty$.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, x = 100 $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(100) = 100\cdot e^{\frac{1}{100}} = 101'005016... \\ y_{\text{asíntota}} = 100+1=101 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(100) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la integral definida siguiente $\displaystyle\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$.

Antes obtendremos la integral indefinida correspondiente, haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$.

Diferenciemos la expresión anterior teniendo en cuenta que: $t = \sqrt{e^x} \Rightarrow t^2 = e^x$.

$$dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}\,dx \Rightarrow dx = \frac{2\sqrt{e^x}}{e^x}\,dt \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2}dt \Rightarrow dx = \frac{2}{t}dt$$

La integral indefinida, I, mediante este cambio de variable quedará así:

$$I = \int \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\,dx = \int \frac{t^2}{1+t}\,\frac{2}{t}\,dt = \int \frac{2t}{1+t}\,dt = \qquad [1]$$

Terminemos de calcular la integral I. Se trata de una integral racional impropia, ya que el grado del polinomio del numerador es del mismo grado menor que el del denominador.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{r|l} 2t & t+1 \\ \cline{2-2} -2t-2 & 2 \\ \hline -2 & \end{array}$$

Continuando desde [1], la integral indefinida será:

$$=\int\left(2-\frac{2}{t+1}\right)dt=\int 2\,dt-\int\frac{2}{t+1}dt=2t-2\int\frac{1}{t+1}dt=2t-2\ln|t+1|= \qquad [2]$$

Deshaciendo el cambio inicial obtendremos la integral indefinida I.

$$=2\sqrt{e^x}-2\ln\left|\sqrt{e^x}+1\right| \qquad [3]$$

Calculemos ahora la integral definida que nos pide el ejercicio, teniendo en cuenta el resultado obtenido en [3].

$$\int_2^4\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}dx=\left|2\sqrt{e^x}-2\ln\left|\sqrt{e^x}+1\right|\right|_2^4=$$

$$=2\sqrt{e^4}-2\ln\left|\sqrt{e^4}+1\right|-\left(2\sqrt{e^2}-2\ln\left|\sqrt{e^2}+1\right|\right)=2e^2-2\ln\left(e^2+1\right)-2e+2\ln(e+1)=$$

$$=2e^2-2e-2\ln\left(e^2+1\right)+2\ln(e+1)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) La matriz M^3, es una matriz cuadrada de orden tres, ya que la obtendremos multiplicando M por M tres veces.

$M^3 = M \times M \times M$

Y sabemos que el producto de matrices cuadradas de orden tres es otra matriz cuadrada de orden tres.

Por otro lado, tenemos que:

$$\det\left(M^3\right)=\det(M\times M\times M)=\det(M)\cdot\det(M)\cdot\det(M)=2\cdot2\cdot2=8$$

Hemos usado la propiedad de los determinantes que dice: "*El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices*".

Al ser M^3 una matriz cuadrada de orden tres y su determinante valer 8, distinto de cero, entonces la matriz M^3 tiene de rango 3.

(b) Calculemos el determinante de $2M^t$.

$$\det\left(2M^t\right)=2\cdot\det\left(M^t\right)=2\cdot\det(M)=2\cdot2=4$$

Hemos usado las siguientes propiedades de los determinantes:

"*El determinante del producto de un número por una matriz cuadrada es igual al producto del número por el determinante de la matriz*".

"*El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su matriz traspuesta*".

(c) Calculemos el determinante de $(M^{-1})^2$.

$$\det\left(\left(M^{-1}\right)^2\right)=\det\left(M^{-1}\cdot M^{-1}\right)=\det\left(M^{-1}\right)\cdot\det\left(M^{-1}\right)=\frac{1}{\det(M)}\cdot\frac{1}{\det(M)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Hemos usado las siguientes propiedades de los determinantes:

"El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices".

"El determinante de la matriz inversa de una matriz cuadrada regular es igual al inverso del valor del determinante de dicha matriz".

(d) Calculemos el determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.

$$\det(N)=-\det(M)=-2$$

Hemos usado la propiedad de los determinantes que dice:

"Si se intercambian dos filas o dos columnas en una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por -1".

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Los cuatro puntos A, B, C y D, serán coplanarios si los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$, son linealmente dependientes, es decir, si el determinante formado por sus coordenadas vale cero.

Las coordenadas de los vectores son:

$$\vec{AB}=(-1,4,3)-(0,5,3)=(-1,-1,0)$$
$$\vec{AC}=(1,2,1)-(0,5,3)=(1,-3,-2)$$
$$\vec{AD}=(2,3,1)-(0,5,3)=(2,-2,-2)$$

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & -3 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}=-6+0+4-0-(-4)-2=0$$

Luego al ser los tres vectores linealmente dependientes, entonces los cuatro puntos son coplanarios.

Demostremos ahora que $ABCD$ es un rectángulo, para ello comprobaremos primeramente la ortogonalidad de los vectores, según podemos observar en el dibujo, tendremos:

$$\vec{AB}=(-1,-1,0)$$
$$\vec{BC}=(1,2,1)-(-1,4,3)=(2,-2,-2)$$
$$\vec{CD}=(2,3,1)-(1,2,1)=(1,1,0)$$
$$\vec{AD}=(2,-2,-2)$$

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero, veámoslo.

$$\vec{AB}\perp\vec{BC}\ \Rightarrow\ \vec{AB}\bullet\vec{BC}=0\ \Rightarrow\ (-1,-1,0)\bullet(2,-2,-2)=-2+2-0=0$$

$$\vec{BC} \perp \vec{CD} \Rightarrow \vec{BC} \bullet \vec{CD} = 0 \Rightarrow (2,-2,-2) \bullet (1,1,0) = 2-2-0=0$$
$$\vec{CD} \perp \vec{AD} \Rightarrow \vec{CD} \bullet \vec{AD} = 0 \Rightarrow (1,1,0) \bullet (2,-2,-2) = 2-2-0=0$$

Luego los lados correspondientes son perpendiculares.

Comprobemos ahora que las longitudes de los lados paralelos son iguales.

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$\left|\vec{BC}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left|\vec{CD}\right| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$\left|\vec{AD}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Efectivamente los lados opuestos tienen igual longitud. En definitiva los cuatro puntos forman un rectángulo.

(b) El área del rectángulo será:

Área = base x altura = $\left|\vec{AB}\right| \times \left|\vec{AD}\right| = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$ unidades de área.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 82 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea *f* la función definida por $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$ para $x>0$, $x\neq 1$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

(a) [1´25 PUNTOS]. Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=e$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sea $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}}.$$

Determina la primitiva de *g* cuya gráfica pasa por el punto *P*(1, 0). *Sugerencia*: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

EJERCICIO 3. Sean

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Determina el rango de *A* según los valores del parámetro *m*.

(b) [0´75 PUNTOS]. Discute el sistema *AX* = *B* según los valores del parámetro *m*.

(c) [0´5 PUNTOS]. Resuelve el sistema *AX* = *B* para *m* = 1.

EJERCICIO 4. Considera los puntos *A*(1, 2, 1), *B*(-1, 0, 2) y *C*(3, 2, 0) y el plano π determinado por ellos.

(a) [1´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la recta *r* que está contenida en π y tal que *A* y *B* son simétricos respecto de *r*.

(b) [0´75 PUNTOS]. Calcula la distancia de *A* a *r*.

Opción B

EJERCICIO 1. Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x\neq a$ y $x\neq \frac{1}{2}$.

(a) [1 PUNTO]. Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (0, 2) y que la recta $x=2$ es una asíntota.

(b) [1´5 PUNTOS]. Para $k=4$ y $a=2$, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\text{sen}(2x)\,dx$.

EJERCICIO 3. Sean A y B las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula las matrices X e Y para las que $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la matriz Z que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ (I denota la matriz identidad y B^t la matriz traspuesta de B).

EJERCICIO 4. Considera las rectas r y s dadas por

$$r\equiv\begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=3+5\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad y \quad s\equiv\begin{cases} x+y-1=0 \\ z-5=0 \end{cases}$$

(a) [1 PUNTO]. Determina la posición relativa de r y s.

(b) [1´5 PUNTOS]. Calcula la distancia entre r y s.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Determinemos las posibles asíntotas de la gráfica de f.

- Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "a" tal que se satisfaga: $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$

La función que nos dan, al tratarse de una función cociente y teniendo en cuenta donde está definida la función, y que el denominador es la función logaritmo neperiano, los posibles valores de "a" hay que buscarlos entre los que anulan al denominador, en nuestro caso, sólo hay uno, el uno.

Calculemos dicho límite, cuando x tienda a uno.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\ln(x)}=\frac{1}{\ln(1)}=\frac{1}{0}=\pm\infty$$

Luego hay una asíntota vertical, $x=0$.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\ln(x)}=\frac{1}{\ln(1^-)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln(x)}=\frac{1}{\ln(1^+)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathrm{R}$

Calculemos este límite pero sólo para $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)}=\frac{\infty}{\ln(\infty)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

Luego no hay asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que exista asíntota oblicua.

La indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ la hemos destruido aplicando la Regla de L´Hôpital que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

La regla dice que, "*dadas dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en* $x=c$, *si f(x) y g(x) tienden ambas a cero cuando x tiende a c, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente de f(x) y g(x) es igual al límite, cuando x tiende a c, del cociente de las derivadas de f(x) y g(x), siempre que este límite exista (c puede ser finito o infinito)*":

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también es válida "*cuando x tiende a* $\pm\infty$ *y los límites de f(x) y g(x) tienden ambos a* $\pm\infty$".

En nuestro caso, se puede usar esta regla debido que las funciones del numerador y del denominador son continuas y derivables en todo el dominio de definición de la función f.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$, $y=\mathrm{m}x+\mathrm{n}$.

Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\mathrm{m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{\ln(\infty)}=\frac{1}{\infty}=0$$

Luego no hay asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$, sino una rama parabólica paralela al eje de abscisas.

(b) Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto de abscisa x_0 es: $y - y_0 = f´(x_0)\,(x - x_0)$ $\Rightarrow$ la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0=e$, será:

$$f(x)=\frac{x}{\ln(x)} \Rightarrow y_0=f(e)=\frac{e}{\ln(e)}=\frac{e}{1}=e$$

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-x\cdot\frac{1}{x}}{\left(\ln(x)\right)^2}=\frac{\ln(x)-1}{\left(\ln(x)\right)^2} \Rightarrow f'(x_0)=f'(e)=\frac{\ln(e)-1}{\left(\ln(e)\right)^2}=\frac{1-1}{1^2}\frac{0}{1}=0$$

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y-e=0\cdot(x-e) \quad \Rightarrow \quad y-e=0 \quad \Rightarrow \quad y=e$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0=e$, es $y=e$.

Calculemos la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0=e$.

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad y-f(e)=-\frac{1}{f'(e)}(x-e) \quad \Rightarrow$$

$$y-e=-\frac{1}{0}(x-e) \Rightarrow (y-e)\cdot 0=-(x-e) \Rightarrow$$

$$0=-(x-e) \Rightarrow 0=x-e \Rightarrow x=e$$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0=e$, es $x=e$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Obtengamos una primitiva de *g(x)*, para ello calcularemos la integral indefinida siguiente

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx.$$

Hagamos el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

Diferenciemos la expresión anterior teniendo en cuenta que: $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x$.

$$dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx=2\sqrt{x}\,dt \Rightarrow dx=2\,t\,dt$$

La integral indefinida mediante este cambio de variable quedará así:

$$G(x) = \int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{1}{t^2+t}\,2t\,dt=\int \frac{2t}{t^2+t}\,dt=\int \frac{2}{t+1}\,dt=2\int \frac{1}{t+1}\,dt=2\ln\left|t+1\right|=$$

Deshaciendo el cambio inicial obtendremos la integral indefinida.

$$=2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$$

Determinemos la primitiva cuya gráfica pasa por el punto $P(1, 0)$.

$$G(x)=2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C \Rightarrow G(1)=0 \Rightarrow G(1)=2\ln\left|\sqrt{1}+1\right|+C \Rightarrow$$

$$0=2\ln(2)+C \Rightarrow C=-2\ln(2) \quad \Rightarrow \quad G_1(x)=2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-2\ln(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Estudiaremos el rango de la matriz A mediante el método de Gauss.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Tomemos como pivote el elemento a_{11} = -2 ≠ 0.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + m · [1ªf.]

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2m-1 & 2m-1 \\ 0 & m & 4-3m \end{pmatrix}$ Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [3ªf.]

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 8m-9 \\ 0 & m & 4-3m \end{pmatrix}$ Tomemos como pivote el elemento a_{22} = -1 ≠ 0.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + m · [2ªf.]

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 8m-9 \\ 0 & 0 & 8m^2-12m+4 \end{pmatrix}$ El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33}=0 \;\Rightarrow\; 8m^2-12m+4=0 \Rightarrow m=\dfrac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 8\cdot 4}}{2\cdot 8}=\dfrac{12\pm\sqrt{16}}{16}=\dfrac{12\pm 4}{16}=\begin{cases}1\\ \dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow$
para estos dos valores de m el rango de A es 2, ya que quedarían sólo dos filas linealmente independientes.

* $a_{33} \neq 0 \;\Rightarrow\; 8m^2-12m+4\neq 0 \Rightarrow m\neq 1$ y $m\neq\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$ para todos estos otros valores del parámetro m el rango de la matriz A es tres.

(b) Discutamos el sistema $AX=B$ según los valores del parámetro m.

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & m & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento a_{11} = -2 ≠ 0.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2m-1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & m & 4-3m & m \end{array}\right)$ Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [3ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 8m-9 & 1-2m \\ 0 & m & 4-3m & m \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento a_{22} = -1 ≠ 0.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + m · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 8m-9 & 1-2m \\ 0 & 0 & 8m^2-12m+4 & -2m^2+2m \end{array}\right)$ El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33}=0 \;\Rightarrow\; 8m^2-12m+4=0 \Rightarrow m=\dfrac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 8\cdot 4}}{2\cdot 8}=\dfrac{12\pm\sqrt{16}}{16}=\dfrac{12\pm 4}{16}=\begin{cases}1\\ \dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow$
veamos lo que ocurre con la tercera ecuación para cada uno de estos valores de m.

** $m = 1 \;\Rightarrow\; 0 = -2m^2+2m \;\Rightarrow\; 0 = -2\cdot 1^2+2\cdot 1 \;\Rightarrow\; 0=0 \;\Rightarrow$ que es una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** $m=\frac{1}{2} \Rightarrow 0=-2m^2+2m \Rightarrow 0=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 0\neq\frac{1}{2} \Rightarrow$ que es una ecuación absurda, nos queda un sistema incompatible, no tendría solución.

* $a_{33}\neq 0 \Rightarrow 8m^2-12m+4\neq 0 \Rightarrow m\neq 1$ y $m\neq\frac{1}{2} \Rightarrow$ para todos estos otros valores del parámetro m la tercera ecuación sería una ecuación normal, y saldrían sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, sistemas compatibles determinados, con solución única.

(c) Resolvamos el sistema $AX=B$ para el valor de $m = 1$.

Sustituyamos este valor de m en el sistema triangulado al que habíamos llegado en el apartado a).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 8m-9 & 1-2m \\ 0 & 0 & 8m^2-12m+4 & -2m^2+2m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 8\cdot 1-9 & 1-2\cdot 1 \\ 0 & 0 & 8\cdot 1^2-12\cdot 1+4 & -2\cdot 1^2+2\cdot 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Ya sabíamos que se trata de un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Lo resolveremos mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1+3z \\ 0 & -1 & -1+z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 4z \\ 0 & -1 & -1+z \end{array}\right)$$

El sistema esta diagonalizado.
La solución es: $-2x = 4z$; $-y = -1+z$.

Terminemos de despejar las incógnitas.

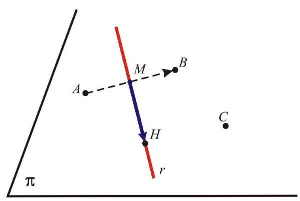
$$x = -2z \quad ; \quad y = 1 - z.$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria, la z, por un parámetro, por ejemplo por $\alpha\in\mathbb{R}$, tendremos finalmente la solución del sistema:

$$x = -2\alpha \quad ; \quad y = 1-\alpha. \quad ; \quad z = \alpha.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) La ecuación del plano π que determinan los puntos A, B y C es:



$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 0,\ 2)-(1,\ 2,\ 1)=(-2,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{AC}=(3,\ 2,\ 0)-(1,\ 2,\ 1)=(2,\ 0,\ -1)$

La ecuación del plano π es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1-2\alpha+2\beta \\ y = 2-2\alpha \\ z = 1+\alpha-\beta \end{cases}$$

La recta *r* que me piden es la recta que pasa por el punto medio, *M*, del segmento que determinan los puntos *A* y *B*, y por un punto *H* del plano π con la condición de que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{MH}$ sean perpendiculares.

Las coordenadas del punto *M* (*a*, *b*, *c*) serán:

$$\vec{AM} = \vec{MB}$$

$$\vec{AM} = (a, b, c) - (1, 2, 1) = (a-1, b-2, c-1)$$

$$\vec{MB} = (-1, 0, 2) - (a, b, c) = (-1-a, -b, 2-c)$$

$$(a-1, b-2, c-1) = (-1-a, -b, 2-c) \Rightarrow \begin{cases} a-1 = -1-a & \Rightarrow\ 2a = 0 \ \Rightarrow\ a = 0 \\ b-2 = \ -b & \Rightarrow\ 2b = 2 \ \Rightarrow\ b = 1 \\ c-1 = \ 2-c & \Rightarrow\ 2c = 3 \ \Rightarrow\ c = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$$

Las coordenadas genéricas de un punto *H* del plano π, serán:

$$H(1-2\alpha+2\beta,\ 2-2\alpha,\ 1+\alpha-\beta)$$

Las coordenadas del vector $\vec{MH}$ serán:

$$\vec{MH} = (1-2\alpha+2\beta,\ 2-2\alpha,\ 1+\alpha-\beta) - \left(0, 1, \frac{3}{2}\right) = \left(1-2\alpha+2\beta,\ 1-2\alpha,\ \alpha-\beta-\frac{1}{2}\right)$$

Impongamos ahora la condición de que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{MH}$ sean perpendiculares, es decir, que su producto escalar sea cero.

$$\vec{AB} \bullet \vec{MH} = 0 \ \Rightarrow\ (-2,\ -2,\ 1) \bullet \left(1-2\alpha+2\beta,\ 1-2\alpha,\ \alpha-\beta-\frac{1}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$-2+4\alpha-4\beta-2+4\alpha+\alpha-\beta-\frac{1}{2} = 0 \ \Rightarrow\ 9\alpha-5\beta-\frac{9}{2} = 0 \ \Rightarrow\ 18\alpha-10\beta-9 = 0 \ \Rightarrow\ \beta = \frac{18\alpha-9}{10}$$

Evidentemente hay muchos puntos *H* que verifican esta condición, obtengamos uno, por ejemplo, el que saldría para el valor de α=0, es decir:

$$\beta = \frac{18\alpha-9}{10} \ \Rightarrow\ \beta = \frac{18\cdot 0-9}{10} = -\frac{9}{10} \ \Rightarrow$$

$$H(1-2\alpha+2\beta,\ 2-2\alpha,\ 1+\alpha-\beta) \ \Rightarrow$$

$$H\left(1-2\cdot 0+2\cdot\left(-\frac{9}{10}\right),\ 2-2\cdot 0,\ 1+0-\left(-\frac{9}{10}\right)\right) \ \Rightarrow\ H\left(-\frac{8}{10},\ 2,\ \frac{19}{10}\right)$$

El vector de dirección de la recta *r*, el vector $\vec{MH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{MH}\left(1-2\alpha+2\beta,\ 1-2\alpha,\ \alpha-\beta-\frac{1}{2}\right) \ \Rightarrow$$

$$\vec{MH}\left(1-2\cdot 0+2\cdot\left(-\frac{9}{10}\right),\ 1-2\cdot 0,\ 0-\left(-\frac{9}{10}\right)-\frac{1}{2}\right) \ \Rightarrow\ \vec{MH}\left(-\frac{8}{10},\ 1,\ \frac{4}{10}\right)$$

La ecuación de la recta *r* en forma paramétrica será:

$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{8}{10}\lambda \\ y = 1+\lambda & \qquad \forall \lambda \in \mathrm{R} \\ z = \frac{3}{2}+\frac{4}{10}\lambda \end{cases}$$

(b) Calculemos la distancia de A a r. Teniendo en cuenta las condiciones del ejercicio y el dibujo que hemos representado en el apartado anterior, tendremos:

$$\text{dist}\,(A,r)=\text{dist}\,(A,M)=\left|\vec{AM}\right|$$

Las coordenadas del vector $\vec{AM}$ son:

$$\vec{AM}=\left(0,1,\frac{3}{2}\right)-(1,2,1)=\left(-1,-1,\frac{1}{2}\right)$$

Finalmente la distancia pedida será:

$$\text{dist}\,(A,r)=\left|\vec{AM}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\text{ unidades de longitud.}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(a) Calculemos a y k.

Si la gráfica de f pasa por el punto (0, 2), significa que $f(0) = 2$, es decir, se cumplirá:

$$f(x)=\frac{k}{(x-a)(2x-1)}\ \Rightarrow\ f(0)=\frac{k}{(0-a)(2\cdot 0-1)}\ \Rightarrow\ 2=\frac{k}{a}\ \Rightarrow\ k=2a \qquad [1]$$

Si $x = 2$ es una asíntota de la gráfica de f, se trata de una asíntota vertical, y por tanto se verificará la condición de existencia de asíntota vertical.

Para que exista asíntota vertical, $x = 2$, se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$

Comprobemos que lo es.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{k}{(x-a)(2x-1)}=\frac{k}{(2-a)(2\cdot 2-1)}=\frac{k}{(2-a)\cdot 3}=\pm\infty\ \Rightarrow$$

$$(2-a)\cdot 3=0\ \Rightarrow\ 2-a=0\ \Rightarrow\ a=2$$

Sustituyamos este valor en [1]:

$$k=2a\ \Rightarrow\ k=2\cdot 2=4$$

(b) Para $k = 4$ y $a = 2$, hallemos los extremos relativos de f y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

$$f(x)=\frac{k}{(x-a)(2x-1)}\quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{4}{(x-2)(2x-1)}$$

Se trata de una función racional continua y derivable en todo su dominio que es $\mathbb{R}$ menos en los puntos 2 y $\frac{1}{2}$.

Hallemos los valores que anulan a la función primera derivada de $f(x)$.

$$f(x)=\frac{4}{(x-2)(2x-1)}$$

$$f'(x)=\frac{0-4\left[(2x-1)+(x-2)\cdot 2\right]}{(x-2)^2(2x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-4(4x-5)}{(x-2)^2(2x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{-4(4x-5)}{(x-2)^2(2x-1)^2}=0 \Rightarrow -4(4x-5)=0 \Rightarrow 4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

Hemos obtenido un valor que anula a la función primera derivada. Para construir los intervalos de monotonía tendremos en cuenta además del punto anterior los puntos de no continuidad y los de no derivabilidad así como los puntos donde la función no existe que son el 2 y el $\frac{1}{2}\cdot$ Ordenamos todos estos puntos y construimos los posibles intervalos de monotonía:

$$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right),\ \left(\frac{5}{4},\ 2\right),\ \left(2,\ +\infty\right).$$

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 0, 1, 1´5, y 3 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(0)=\frac{-4(4\cdot 0-5)}{(0-2)^2(2\cdot 0-1)^2}=\frac{20}{4}=5>0 & \Rightarrow \text{ Estrictamente creciente en } \left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right) \\ f'(1)=\frac{-4(4\cdot 1-5)}{(1-2)^2(2\cdot 1-1)^2}=\frac{4}{1}=4>0 & \Rightarrow \text{ Estrictamente creciente en } \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right) \\ f'(1'5)=\frac{-4(4\cdot 1'5-5)}{(1'5-2)^2(2\cdot 1'5-1)^2}=-\frac{4}{1}=-4<0 & \Rightarrow \text{ Estrictamente decreciente en } \left(\frac{5}{4},\ 2\right) \\ f'(3)=\frac{-4(4\cdot 3-5)}{(3-2)^2(2\cdot 3-1)^2}=-\frac{28}{25}<0 & \Rightarrow \text{ Estrictamente decreciente en } \left(2,\ +\infty\right) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta donde la función es continua, donde no está definida, y la monotonía, podemos concluir que la función presenta un máximo relativo o local en el punto de abscisa $\frac{5}{4}$.

La ordenada de este punto será:

$$f(x)=\frac{4}{(x-2)(2x-1)} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{4}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\left(2\cdot\frac{5}{4}-1\right)} \Rightarrow f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{4}{-\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{4}} \Rightarrow f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{4\cdot 16}{18} \Rightarrow f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{32}{9}$$

Las coordenadas del máximo relativo son: $\left(\frac{5}{4},\ -\frac{32}{9}\right)$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la integral siguiente.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ \mathrm{sen}\,(2x)\,dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u=x \quad ; \quad du=dx$$
$$dv=\mathrm{sen}\,(2x)\,dx \quad ; \quad v=\int \mathrm{sen}(2x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ \mathrm{sen}\,(2x)\,dx=\left[x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx=$$

$$=\left[x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\,x\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\cos(2\cdot 0)\right)+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\left(2\cdot 0\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\cdot(-1)-0+\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{4}\cdot 0=\frac{\pi}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Resolvamos el sistema de ecuaciones matricial siguiente.

$$\left.\begin{array}{r} 2X-\ Y=A \\ X-3Y=B \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & A \\ 1 & -3 & B \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & A \\ 0 & -5 & 2B-A \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 5 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 6A-2B \\ 0 & -5 & 2B-A \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada, la solución es:

$$10\,X = 6A - 2B \quad ; \quad -5Y = 2B - A$$

Terminemos de despejar las incógnitas.

$$X=\frac{1}{10}(6A-2B) \quad ; \quad Y=-\frac{1}{5}(2B-A)$$

Calculemos, finalmente, X e Y.

$$X=\frac{1}{10}(6A-2B)=\frac{1}{10}\left(6\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{10}\left(\begin{pmatrix} 12 & -18 \\ -18 & 30 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y=-\frac{1}{5}(2B-A)=-\frac{1}{5}\left(2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -15 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Resolvamos la ecuación matricial $B^2 + ZA + B^t = 3I$.

$B^2 + ZA + B^t = 3I$ sumamos a ambos miembros la matriz $-B^2$.

$-B^2 + B^2 + ZA + B^t = 3I - B^2$ usamos la propiedad de elemento opuesto respecto de la suma.

$O + ZA + B^t = 3I - B^2$ usamos la propiedad de elemento neutro respecto de la suma.

$ZA + B^t = 3I - B^2$ sumamos a ambos miembros la matriz $-B^t$.

$ZA + B^t - B^t = 3I - B^2 - B^t$ usamos la propiedad de elemento opuesto respecto de la suma.

$ZA + O = 3I - B^2 - B^t$ usamos la propiedad de elemento neutro respecto de la suma.

$ZA = 3I - B^2 - B^t$ multiplicamos a la derecha por la inversa de A, A^{-1}, siempre que demostremos que exista (lo veremos después).

$ZA \cdot A^{-1} = (3I - B^2 - B^t)\, A^{-1}$ usamos la propiedad asociativa respecto del producto.

$Z(A \cdot A^{-1}) = (3I - B^2 - B^t)\, A^{-1}$ usamos la propiedad de la matriz inversa.

$X \cdot I = (3I - B^2 - B^t)\, A^{-1}$ usamos la propiedad del elemento unidad (matriz identidad)

$X = (3I - B^2 - B^t)\, A^{-1}$

Antes de calcular la matriz X, veamos si existe la matriz inversa, A^{-1}, y si existe obtengámosla. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz A no tendría matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot [2^a f.] + 3 \cdot [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz A admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $[1^a f.] + 3 \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}, es decir:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz X.

$$X=\left(3I-B^2-B^t\right)\cdot A^{-1}=\left(3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}^t\right)\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-4\\-9&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-4\\-9&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-9\\-4&5\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\cdot1-4\cdot(-9)&1\cdot(-4)-4\cdot5\\-9\cdot1+5\cdot(-9)&-9\cdot(-4)+5\cdot5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-9\\-4&5\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}37&-24\\-54&61\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-9\\-4&5\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}-34&24\\54&-58\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-9\\-4&5\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-35&33\\58&-63\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-35\cdot5+33\cdot3&-35\cdot3+33\cdot2\\58\cdot5-63\cdot3&58\cdot3-63\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-175+99&-105+66\\290-189&174-126\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-76&-39\\101&48\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(a) Estudiemos la posición relativa de ambas rectas, lo haremos discutiendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

Pero antes, expresemos la ecuación de la recta *s* en forma paramétrica.

$$s\equiv\begin{cases}x+y-1=0\\ z-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\ z=5\end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&1&5\end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{c}(x)\ (z)\ (y)\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&0&5\end{array}\right)\end{array}$$

La matriz está diagonalizada. Nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como una incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c}(x)\ (z)\\ \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1-y\\0&1&5\end{array}\right)\end{array}$$

La solución del sistema es:

$$x = 1 - y \quad ; \quad z = 5$$

Sustituyamos la incógnita no principal o secundaria por un parámetro, por ejemplo, por μ. Las ecuaciones paramétricas de la recta *s* son:

$$s\equiv\begin{cases}x=1-\mu\\ y=\mu\\ z=5\end{cases}\quad\forall\mu\in R$$

Discutamos ahora el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, para estudiar su posición relativa.

$$r\equiv\begin{cases}x&=&2-3\lambda\\ y&=&3+5\lambda\\ z&=&\lambda\end{cases}\quad;\quad s\equiv\begin{cases}x&=&1-\mu\\ y&=&\mu\\ z&=&5\end{cases}$$

Igualemos las *x*, las *y* y las *z* entre sí para analizar cuántos puntos tienen en común las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{r} 2-3\lambda=1-\mu \\ 3+5\lambda=\quad\mu \\ \lambda=\quad 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \mu-3\lambda=-1 \\ -\mu+5\lambda=-3 \\ \lambda=\ \ 5 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, hemos obtenido una única ecuación absurda, la 3ª, se trata de un sistema incompatible, por lo que las dos rectas se cruzan en el espacio.

(b) Calculemos la mínima distancia entre ambas rectas.

Elijamos de la recta *r* un punto genérico, *P*, de coordenadas $P(2-3\lambda,\ 3+5\lambda,\ \lambda)$ y de la recta *s* otro, *H*, de coordenadas $H(1-\mu,\ \mu,\ 5)$.

Se ha de verificar que el vector $\overrightarrow{PH}$ que determinan estos dos puntos genéricos, ha de ser perpendicular al vector de dirección de cada una de las rectas, y por tanto, los productos escalares respectivos serán cero:

$$\overrightarrow{PH}=(1-\mu,\ \mu,\ 5)-(2-3\lambda,\ 3+5\lambda,\ \lambda)=(-1-\mu+3\lambda,\ -3+\mu-5\lambda,\ 5-\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PH}\perp\vec{u}_r \Rightarrow \overrightarrow{PH}\bullet\vec{u}_r=0 \Rightarrow (-1-\mu+3\lambda,\ -3+\mu-5\lambda,\ 5-\lambda)\bullet(-3,\ 5,\ 1)=0 \\ \overrightarrow{PH}\perp\vec{v}_s \Rightarrow \overrightarrow{PH}\bullet\vec{v}_s=0 \Rightarrow (-1-\mu+3\lambda,\ -3+\mu-5\lambda,\ 5-\lambda)\bullet(-1,\ 1,\ 0)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 3+3\mu-9\lambda-15+5\mu-25\lambda+5-\lambda=0 \\ 1+\mu-3\lambda-3+\mu-5\lambda=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 8\mu-35\lambda-7=0 \\ 2\mu-8\lambda-2=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 8\mu-35\lambda=7 \\ 2\mu-8\lambda=2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Terminemos de resolver el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{rr|r} 8 & -35 & 7 \\ 2 & -8 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 8 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 4 · [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} 8 & -35 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + 35 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} 24 & 0 & 56 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz está diagonalizada, la solución es:

$$24\mu = 56 \quad ; \quad 3\lambda = 1$$

Terminemos de despejar las incógnitas, $\mu=\dfrac{56}{24}\ ;\ \lambda=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \mu=\dfrac{7}{3}\ ;\ \lambda=\dfrac{1}{3}$

Sustituyamos estos valores de λ y μ en las coordenadas del vector $\overrightarrow{PH}$.

$$\vec{PH}=\left(-1-\mu+3\lambda,\ \ -3+\mu-5\lambda,\ \ 5-\lambda\right) \Rightarrow \vec{PH}=\left(-1-\frac{7}{3}+3\cdot\frac{1}{3},\ \ -3+\frac{7}{3}-5\cdot\frac{1}{3},\ \ 5-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{PH}=\left(-\frac{7}{3},\ \ -\frac{7}{3},\ \ \frac{14}{3}\right)$$

La distancia entre las rectas *r* y *s* coincidirá con el módulo del vector $\vec{PH}$, es decir:

dist (*r*, *s*) = $\left|\vec{PH}\right| = \left|\left(-\frac{7}{3},\ -\frac{7}{3},\ \frac{14}{3}\right)\right| = \sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2+\left(-\frac{7}{3}\right)^2+\left(\frac{14}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{9}+\frac{49}{9}+\frac{196}{9}} =$

$= \sqrt{\frac{294}{9}} = \frac{7}{3}\sqrt{6}$ unidades de longitud.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

MODELO 83 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Halla $\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,dx$. *Sugerencia*: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

EJERCICIO 3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{array}\right\}.$$

(a) [1´5 PUNTOS]. Determina el valor de *m* para el que al añadir la ecuación

$$x+my+4z=-3$$

al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.

(b) [1 PUNTO]. Calcula la solución del sistema para que la suma de los valores de las incógnitas sea 6.

EJERCICIO 4. Del paralelogramo *ABCD* se conocen los vértices $A(-1, 0, 3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(3, 2, -3)$.

(a) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo

(b) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal *AC* del paralelogramo.

(c) [0´5 PUNTOS]. Calcula las coordenadas del vértice *D*.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y + x = -3$ y que el punto de inflexión tiene de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 2. Sea $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

(a) [1´25 PUNTOS]. Esboza el recinto limitado por las gráficas de g y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula el área del recinto anterior.

EJERCICIO 3. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta de A).

(b) [1´25 PUNTOS]. Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.

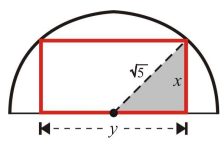
EJERCICIO 4. Considera los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(-1, 0, 4)$.

(a) [1´25 PUNTOS]. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

(b) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



La construcción del rectángulo está simulado en el gráfico adjunto.

La función perímetro que vamos a construir y que queremos maximizar, será:

$$P(x) = 2x + 2y$$

Teniendo en cuenta los datos del ejercicio y la figura anterior, la relación entre x e y es:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow 5 = x^2 + \frac{y^2}{4} \Rightarrow 20 = 4x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 20 - 4x^2 \Rightarrow y = \sqrt{20 - 4x^2}$$

Sustituyendo este valor de y en $P(x)$, la función perímetro, tendremos:

$$P(x)=2x+2y \quad \Rightarrow \quad P(x)=2x+2\sqrt{20-4x^2}$$

Del enunciado del problema y del dibujo, deducimos que el dominio de esta función es el intervalo $\left(0,\sqrt{5}\right)$. Siendo además una función continua y derivable en dicho dominio ya que es la suma de una función polinómica, que lo es en todo $\mathbb{R}$, y de la raíz cuadrada de otra función polinómica que lo es en el intervalo $\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$.

Calculemos el máximo absoluto, calculando previamente el máximo relativo.

$$P'(x)=2+2\cdot\frac{-8x}{2\sqrt{20-4x^2}}=2-\frac{8x}{\sqrt{20-4x^2}}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada

$$2-\frac{8x}{\sqrt{20-4x^2}}=0 \Rightarrow 2=\frac{8x}{\sqrt{20-4x^2}} \Rightarrow 1=\frac{4x}{\sqrt{20-4x^2}} \Rightarrow \sqrt{20-4x^2}=4x \quad \Rightarrow$$

$$20-4x^2=16x^2 \Rightarrow 20x^2=20 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\ \ 1 \\ x=-1 \end{cases}$$

De los dos valores obtenidos, de entrada, el único que nos puede valer es el 1, porque es el que únicamente pertenece al dominio de *P(x)*.

Estudiemos la monotonía de la función *P(x)*, en los intervalos $(0,1)$ y $\left(1,\sqrt{5}\right)$, ya que al ser continua y derivable en su dominio y no existir, por tanto, puntos de no continuidad y de no derivabilidad, el valor que anula a la derivada es el único punto que nos sirve de referencia para la construcción de dichos intervalos.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, 0'5 y 2, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$P'(0'5)=2-\frac{8\cdot 0'5}{\sqrt{20-4\cdot 0'5^2}}=2-\frac{4}{\sqrt{19}}>0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Creciente en } (0,1)$$

$$P'(2)=2-\frac{8\cdot 2}{\sqrt{20-4\cdot 2^2}}=2-\frac{16}{2}=-6<0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Decreciente en } \left(1,\sqrt{5}\right)$$

Luego el valor que anulaba a la primera derivada es el máximo absoluto.

Consecuentemente la altura del rectángulo de perímetro máximo es 1 cm y la base del mismo será 4 cm, ya que:

$$y=\sqrt{20-4x^2} \Rightarrow y=\sqrt{20-4\cdot 1^2}=4$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la integral indefinida siguiente

$$\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

Hagamos el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

Diferenciemos la expresión anterior teniendo en cuenta que: $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x$.

$$dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx=2\sqrt{x}\,dt \Rightarrow dx=2\,t\,dt$$

La integral indefinida mediante este cambio de variable quedará así:

$$\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{t^2+1}{1+t}\,2t\,dt=\int \frac{2t^3+2t}{1+t}\,dt=$$

Si observamos la integral racional vemos que se trata de una integral racional impropia debido a que el grado del polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2t^3 & & +2t & & 1+t \\ \cline{5-5} -2t^3 & -2t^2 & & & 2t^2-2t+4 \\ \cline{1-3} & -2t^2 & +2t & & \\ & 2t^2 & +2t & & \\ \cline{2-3} & & 4t & & \\ & & -4t & -4 & \\ \cline{3-4} & & & -4 & \end{array}$$

Efectuemos la división que se encuentra situada al lado.

La integral indefinida será:

$$=\int \frac{2t^3+2t}{1+t}\,dt=\int\left(2t^2-2t+4-\frac{4}{1+t}\right)dt=\frac{2}{3}t^3-\frac{2}{2}t^2+4t-\int\frac{4}{1+t}\,dt=$$

$$=\frac{2}{3}t^3-\frac{2}{2}t^2+4t-\int\frac{4}{1+t}\,dt=\frac{2}{3}t^3-t^2+4t-4\ln|1+t|=$$

Deshaciendo el cambio inicial obtendremos la integral indefinida.

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+\mathrm{C}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Expresemos el sistema inicial en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} x-\ y+z=0 \\ 2x+3y-z=3 \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero; nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, luego se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

Discutamos ahora el sistema formado por el sistema inicial al que le vamos a añadir la ecuación $x+my+4z=-3$, y deduciremos el valor de m para que el nuevo sistema tenga las mismas soluciones que el sistema inicial. Lo haremos mediante el método de reducción de Gauss, para ello expresaremos el sistema en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=\ 0 \\ 2x+3y-z=\ 3 \\ x+my+4z=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & m & 4 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & m+1 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 5 · [3ªf.] - (m+1) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3m-18 & -3m-18 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33}, que puede serlo. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse teniendo en cuenta que lo que buscamos es un sistema con el mismo conjunto de soluciones que el inicial, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* $a_{33} = 0 \Rightarrow 3m + 18 = 0 \Rightarrow m = -6 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es, $0 = -3m - 18 \Rightarrow 0 = -3(-6) - 18 \Rightarrow 0 = 0$, que es trivial, la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, o sea, el mismo sistema inicial.

* $a_{33} \ldots 0 \Rightarrow m \ldots -6 \Rightarrow$ La tercera ecuación es una ecuación normal, tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se trataría de un sistema compatible determinado.

El valor de m que nos pide el ejercicio es el -6.

(b) Resolvamos el sistema inicial al que le vamos añadir la ecuación $x+y+z=6$, es decir, que la suma de los valores de las incógnitas valga 6.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2x+3y-z=3 \\ x+y+z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 5 · [3ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por 6

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 3 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 5 · [1ªf.] + [2ªf.]

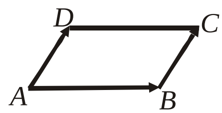
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado.
La solución es: $5x = -5$; $5y = 15$; $z = 4$

Terminemos de despejar las incógnitas.

$$x = -1 \quad ; \quad y = 3 \quad ; \quad z = 4$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Calculemos las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$\vec{AB} = (2, -1, 1) - (-1, 0, 3) = (3, -1, -2)$

$\vec{AC} = (3, 2, -3) - (-1, 0, 3) = (4, 2, -6)$

La ecuación del plano que contiene al paralelogramo es: $\left\{\begin{array}{l} x = -1+3\lambda+4\mu \\ y = -\lambda+2\mu \\ z = 3-2\lambda-6\mu \end{array}\right.$

(b) La ecuación de la recta que contiene a la diagonal *AC* del paralelogramo, es la recta que pasa por el punto *A*, por ejemplo, y el vector de dirección es el vector $\vec{AC}$.

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{-6}$$

(c) Supongamos que el punto *D* tiene de coordenadas (*a*, *b*, *c*). Por otro lado se ha de satisfacer que los vectores $\vec{BC}$ y $\vec{AD}$, son equivalentes, es decir, sus coordenadas son iguales.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{BC}=(3,\,2,\,-3)-(2,\,-1,\,1)=(1,\,3,\,-4)\\ \vec{AD}=(a,\,b,\,c)-(-1,\,0,\,3)=(a+1,\,b,\,c-3)\end{array}\right\}\Rightarrow\ (1,\,3,\,-4)=(a+1,\,b,\,c-3)\ \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lll}1=a+1 & \Rightarrow & a=0\\ 3=b & \Rightarrow & b=3\\ -4=c-3 & \Rightarrow & c=-1\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad D(0,\,3,\,-1)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Sabemos que la función polinómica $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es una función continua y derivable en todo ℝ. Su primera, segunda y tercera derivada son:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f'''(x) = 6$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto $x=0$ es $y+x=-3$, o lo que es lo mismo, $y=-x-3$, lo que significa que la pendiente de esta recta es -1. Teniendo en cuenta la relación existente entre las pendientes de las rectas normal y tangente, y la derivada de la función en el punto de tangencia, deduciremos que:

$$m_{normal}=-1\ \Rightarrow\ m=\frac{-1}{f'(0)}\ \Rightarrow\ -1=\frac{-1}{3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b}\ \Rightarrow\ 1=\frac{1}{b}\ \Rightarrow\ b=1$$

Sustituyendo este valor en la función, tendremos:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\ \Rightarrow\ f(x)=x^3+ax^2+1\cdot x+c\ \Rightarrow\quad f(x)=x^3+ax^2+x+c$$

Las coordenadas del punto, *P*, de tangencia son:

$$y=-x-3\quad\Rightarrow\quad y=-0-3\quad\Rightarrow\quad y=-3\quad\Rightarrow\quad P(0,-3)$$

Lo que significa que este punto es un punto de la gráfica de la función, es decir:

$$f(x)=x^3+ax^2+x+c\ \Rightarrow\ f(0)=-3\ \Rightarrow\ -3=0^3+a\cdot 0^2+0+c\ \Rightarrow\ -3=c$$

Sustituyendo este valor en la función, tendremos:

$$f(x)=x^3+ax^2+x+c\quad\Rightarrow\quad f(x)=x^3+ax^2+x-3$$

El punto de inflexión, en $x=1$, de la gráfica de la función al tener ésta derivada segunda, coincidirá con el valor que anule a la segunda derivada y no anule a la tercera, es decir:

$f''(1) = 0$

$f''(x) = 6x + 2a \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 6\cdot 1 + 2a \quad \Rightarrow \quad 0 = 6 + 2a \quad \Rightarrow \quad a = -3.$

$f'''(1) = 6 \neq 0$

Hemos obtenido el valor de a que nos faltaba. La función f, finalmente, será:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3.$$

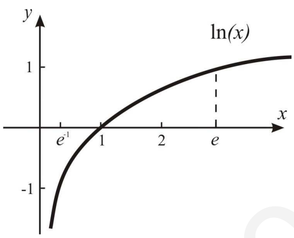
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

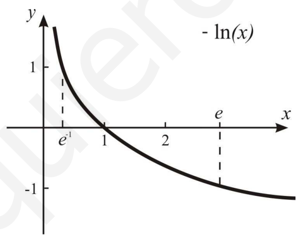
(a) Expresemos *g(x)* como una función a trozos, teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto:

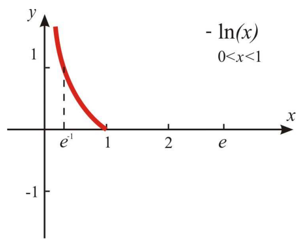
$$g(x)=|\ln(x)|=\begin{cases}-\ln(x) & \text{si } \ln(x)<0\\ \ln(x) & \text{si } \ln(x)\geq 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad g(x)=|\ln(x)|=\begin{cases}-\ln(x) & \text{si } 0<x<1\\ \ln(x) & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

La gráfica de *g(x)* es la de la función elemental ln*(x)* para los valores de x mayores o iguales a 1, y la de -ln*(x)* para los valores comprendidos entre 0 y 1.

Dibujemos el primero de los trozos de la gráfica de esta función, el -ln*(x)*, para los valores de $0<x\leq 1$, cuya gráfica es la opuesta de la del ln*(x)*.

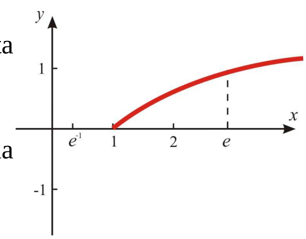




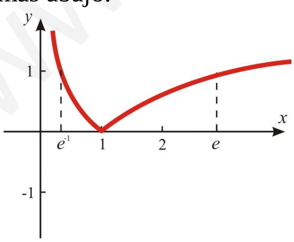


Dibujemos el segundo de los trozos de la gráfica de esta función, el ln*(x)*, para los valores de $1\leq x$.

La representación gráfica es la situada a la derecha.



Finalmente, la gráfica de la función *g(x)* es la representada más abajo.

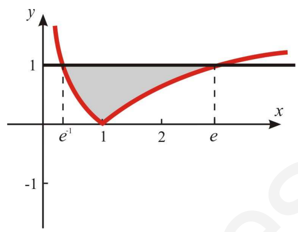


Los puntos de corte de la gráfica de g con la recta $y = 1$, que es una recta paralela al eje de abscisas, son:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\ln(x)\\ y=1\end{array}\right\} \Rightarrow -\ln(x) \Rightarrow \ln(x)=-1 \Rightarrow x=e^{-1} \Rightarrow \left(e^{-1},1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\ln(x)\\ y=1\end{array}\right\} \Rightarrow \ln(x)=1 \Rightarrow x=e \Rightarrow (e,1)$$

El recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$, que es una recta paralela al eje de abscisas, es el sombreado en el dibujo representado a la derecha.



(c) El área del recinto limitado por la gráfica de la función g y la recta $y = 1$, dibujado en el apartado anterior, lo haremos desdoblando en dos dicho recinto, los correspondientes a cada uno de los trozos de la función $g(x)$. El área será:

$$\text{Área} = \int_{e^{-1}}^{e} \left(1-g(x)\right)dx = \int_{e^{-1}}^{1} 1-\left(-\ln(x)\right)dx + \int_{1}^{e}\left(1-\ln(x)\right)dx = \int_{e^{-1}}^{1}\left(1+\ln(x)\right)dx + \int_{1}^{e}\left(1-\ln(x)\right)dx = \quad [1]$$

Para calcular una primitiva de cada una de estas integrales definidas, lo haremos mediante el método de integración por partes.

Para la primera de las integrales:

$$u = 1+\ln(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$
$$\int\left(1+\ln(x)\right)dx = x\left(1+\ln(x)\right) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\left(1+\ln(x)\right) - \int dx = x + x\ln(x) - x = x\ln(x)$$

Para la segunda de las integrales:

$$u = 1-\ln(x) \quad ; \quad du = -\frac{1}{x}dx$$
$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$
$$\int\left(1-\ln(x)\right)dx = x\left(1-\ln(x)\right) - \int x\cdot\frac{-1}{x}\,dx = x - x\ln(x) + \int dx = x - x\ln(x) + x = 2x - x\ln(x)$$

Continuemos desde [1], sustituyendo estas primitivas que hemos calculado.

$$= \int_{e^{-1}}^{1}\left(1+\ln(x)\right)dx + \int_{1}^{e}\left(1-\ln(x)\right)dx = \left[x\ln(x)\right]_{e^{-1}}^{1} + \left[2x - x\ln(x)\right]_{1}^{e} =$$
$$= 1\cdot\ln(1) - e^{-1}\cdot\ln\left(e^{-1}\right) + 2\cdot e - e\cdot\ln(e) - \left(2\cdot1 - 1\cdot\ln(1)\right) =$$
$$= 1\cdot 0 - e^{-1}\cdot(-1) + 2e - e\cdot 1 - (2 - 1\cdot 0) = e^{-1} + 2e - e - 2 = e^{-1} + e - 2 \text{ unidades de área.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(a) Resolvamos el sistema de ecuaciones matriciales siguiente.

$$\left.\begin{aligned} X - Y &= A^t \\ 2X - Y &= B \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & A^t \\ 2 & -1 & B \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & A^t \\ 0 & 1 & B-2A^t \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & B-A^t \\ 0 & 1 & B-2A^t \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado.
La solución es: $X = B - A^t$; $Y = B - 2A^t$

Terminemos de calcular las incógnitas.

$$X = B - A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y = B - 2A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Calculemos Z tal que $AZ = BZ + A$.

Procederemos de la siguiente manera.

$AZ = BZ + A$ sumamos a ambos miembros la matriz opuesta de BZ, $-BZ$

$AZ - BZ = BZ - BZ + A$ usamos la propiedad distributiva.

$(A - B)Z = O + A$ usamos la propiedad del elemento neutro respectode la suma.

$(A-B)Z = A$ multiplicamos a la izquierda por la inversa de $A-B$, $(A-B)^{-1}$.
Más adelante veremos si existe y si es así, la calcularemos.

$(A-B)^{-1}(A-B)Z = (A-B)^{-1}A$ usamos la propiedad de la matriz inversa.

$IZ = (A-B)^{-1}A$ usamos la propiedad del elemento unidad (matriz identidad)

$Z = (A-B)^{-1}A$

Antes de calcular la matriz Z, veamos si existe la matriz inversa, $(A-B)^{-1}$, y si existe obtengámosla. Lo haremos mediante el método de Gauss, método que consiste en poner a la derecha de la matriz $A-B$, la matriz unidad e intentar que aparezca mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la matriz que quede a la derecha es la matriz inversa de $A-B$, $(A-B)^{-1}$. No obstante, si al triangular inferiormente apareciese alguna fila nula entonces la matriz $A-B$ no tendría matriz inversa.

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot$ [2ªf.] - [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Hemos triangulado inferiormente, y como no ha salido ninguna fila nula, la matriz $A-B$ admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + $3 \cdot$ [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Dividamos la 1ª fila por -2.
Dividamos la 2ª fila por -1.

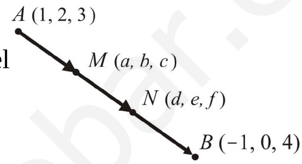
$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ La matriz está diagonalizada. En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la parte que queda a la derecha es la matriz inversa de $A-B$, $(A-B)^{-1}$, es decir:

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz *Z*.

$$Z=(A-B)^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)-3\cdot 0 & 1\cdot 2-3\cdot 1\\ 1\cdot(-1)-2\cdot 0 & 1\cdot 2-2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(a) Según el enunciado del problema y teniendo en cuenta el dibujo, tendremos: $\left.\begin{array}{l}3\vec{AM}=\vec{AB}\\ 3\vec{NB}=\vec{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}3[(a,b,c)-(1,2,3)]=(-1,0,4)-(1,2,3)\\ 3[(-1,0,4)-(d,e,f)]=(-1,0,4)-(1,2,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3(a-1,\ b-2,\ c-3)=(-2,-2,1)\\ 3(-1-d,\ -e,\ 4-f)=(-2,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}(3a-3,\ 3b-6,\ 3c-9)=(-2,-2,1)\\ (-3-3d,\ -3e,\ 12-3f)=(-2,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}3a-3=-2\\ 3b-6=-2\\ 3c-9=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=\frac{1}{3}\\ b=\frac{4}{3}\\ c=\frac{10}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow M\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right)\quad;\quad\left.\begin{array}{l}-3-3d=-2\\ -3e=-2\\ 12-3f=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}d=-\frac{1}{3}\\ e=\frac{2}{3}\\ f=\frac{11}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow N\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{11}{3}\right)$$

(b) Hallemos la ecuación del plano que pasa por el punto *A* y es perpendicular al segmento *AB*.

El vector $\vec{AB}$ que hemos calculado en el apartado (a) tiene de coordenadas (-2, -2, 1) y podemos tomarlo como un vector normal al plano que nos pide el problema; sustituyamos las coordenadas de este vector por los coeficientes de las incógnitas en la ecuación general del plano:

$Ax+By+Cz+D=0 \quad\Rightarrow\quad -2x-2y+1\cdot z+D=0 \quad\Rightarrow\quad -2x-2y+z+D=0$

Impongamos ahora la condición a este plano de que pase por el punto *A*(1, 2, 3):

$-2x-2y+2z+D=0 \quad\Rightarrow\quad -2\cdot 1-2\cdot 2+3+D=0 \quad\Rightarrow\quad D=3$

La ecuación del plano que nos piden, finalmente es: $-2x-2y+z+3=0$