

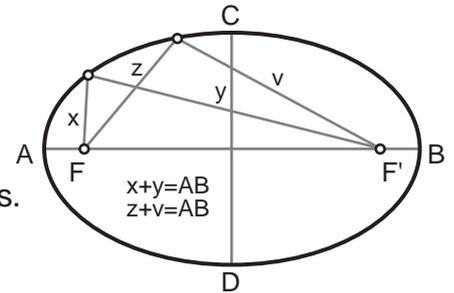
LA ELIPSE:

"la elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de radio vectores (distancias desde la elipse a los dos focos) es constante e igual al eje mayor".

Elementos paramétricos:

son las tres magnitudes que caracterizan la elipse.

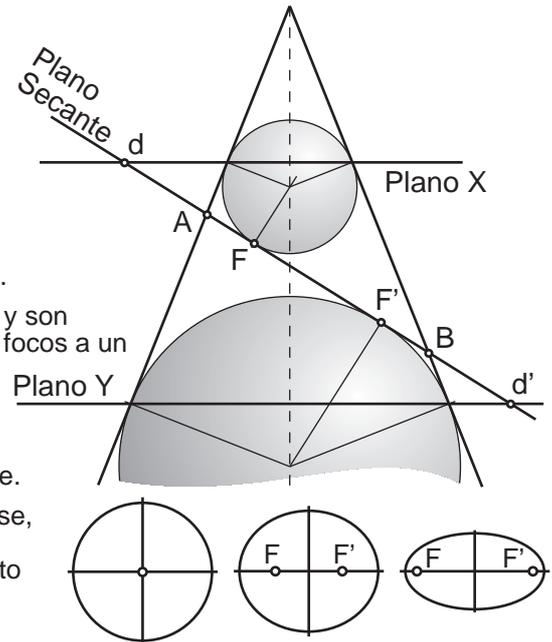
1. Eje mayor AB: llamado real o principal. Es eje de simetría.
 2. Eje menor CD: llamado imaginario o secundario. También es eje de simetría.
- Ambos son perpendiculares entre sí cortándose en sus puntos medios.
3. Focos F, F': Puntos fijos sobre el eje mayor, de referencia de distancias



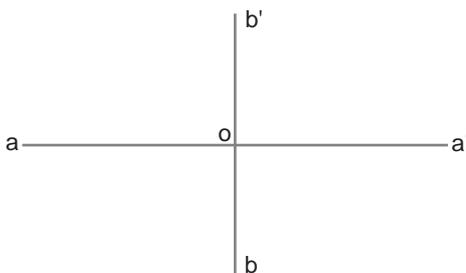
TEOREMA DE DANDELIN EN LA ELIPSE

ELEMENTOS QUE INTERVIENEN

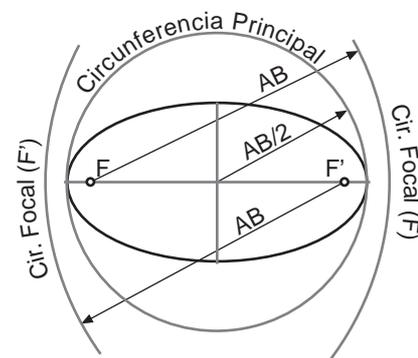
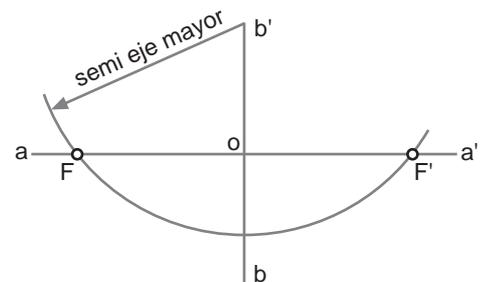
- Plano secante a todas las generatrices del cono o no paralelo a ninguna de ellas.
- Elipse: Curva plana y cerrada que el plano secante produce al cortar las generatrices del cono.
- Esferas tangentes al cono de revolución y al plano secante.
- FOCOS: puntos F y F' de tangencia de las esferas con el plano secante.
- Radios vectores de la curva: PF y PF'. Pertenecen al plano secante y son tangentes a una esfera desde P. Son dos segmentos que parten de los focos a un mismo punto de la elipse.
- Planos X e Y: Planos que pasan por (contienen) los puntos (circunferencias m y n) de tangencia de cada esfera con el cono.
- Directrices: rectas intersección de los planos X Y con el plano secante.
- Excentricidad es la razón constante, para todos los puntos de la elipse, de distancias de un punto de una cónica a un foco y a su directriz. "Es el achatamiento de la elipse" y viene marcada por el distanciamiento entre sus dos focos. Cuanto más alejados estén los focos entre sí más excéntrica será la elipse.



Dados los ejes de la elipse hallar los focos:



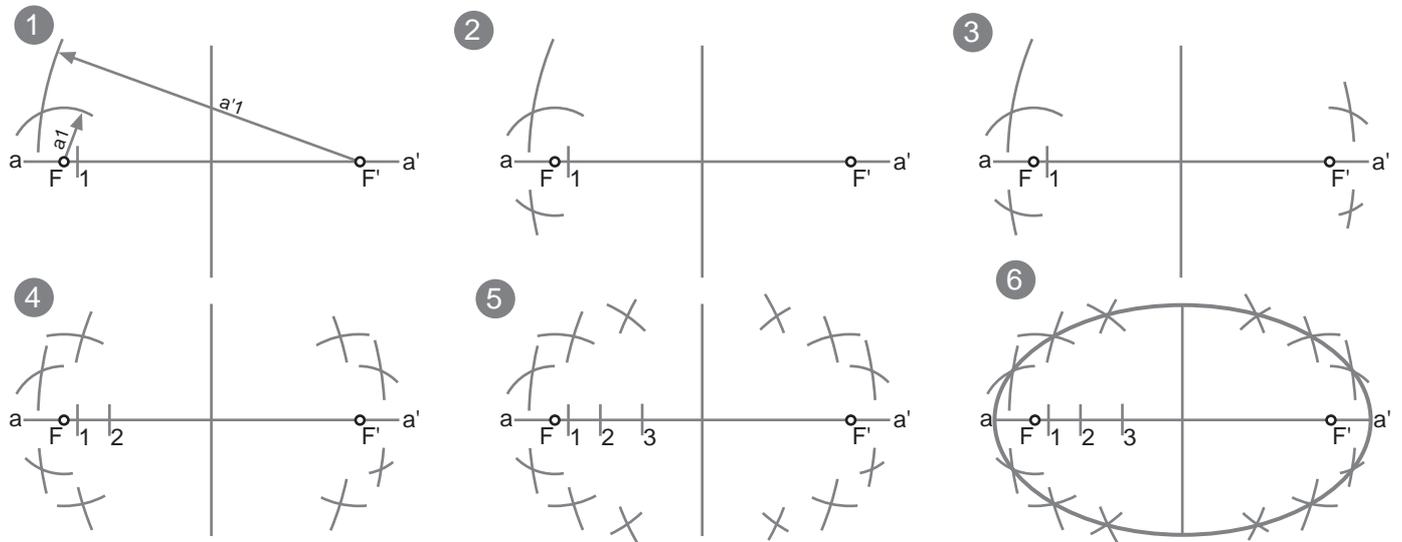
- 1º. Tomamos la distancia oa (semi eje mayor).
- 2º. Desde b o b' (un extremo del eje menor) trazamos un arco de radio oa que corta al eje mayor en dos puntos F y F'.



Circunferencia FOCAL (CF): Es aquella cuyo centro es uno de los focos de la elipse y su radio es igual al eje mayor. Por tanto, a cada una de las elipses le podemos trazar dos CF. La Circunferencia Focal de un foco es el Lugar Geométrico de los puntos simétricos del otro foco, respecto de las rectas tangentes a la elipse.

La circunferencia principal (CP): Es aquella cuyo centro es el centro de la curva y el radio es la mitad del eje mayor AB. Es el Lugar Geométrico de los puntos de intersección de las tangentes a la elipse con las perpendiculares trazadas desde los focos a cada una de esas tangentes. O también, el lugar geométrico de las proyecciones (perpendiculares) de los focos sobre las rectas tangentes a la cónica

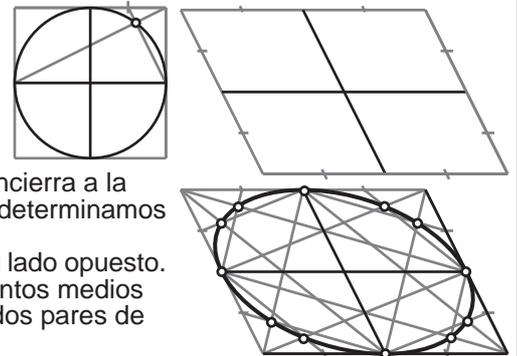
Trazado de la elipse por puntos



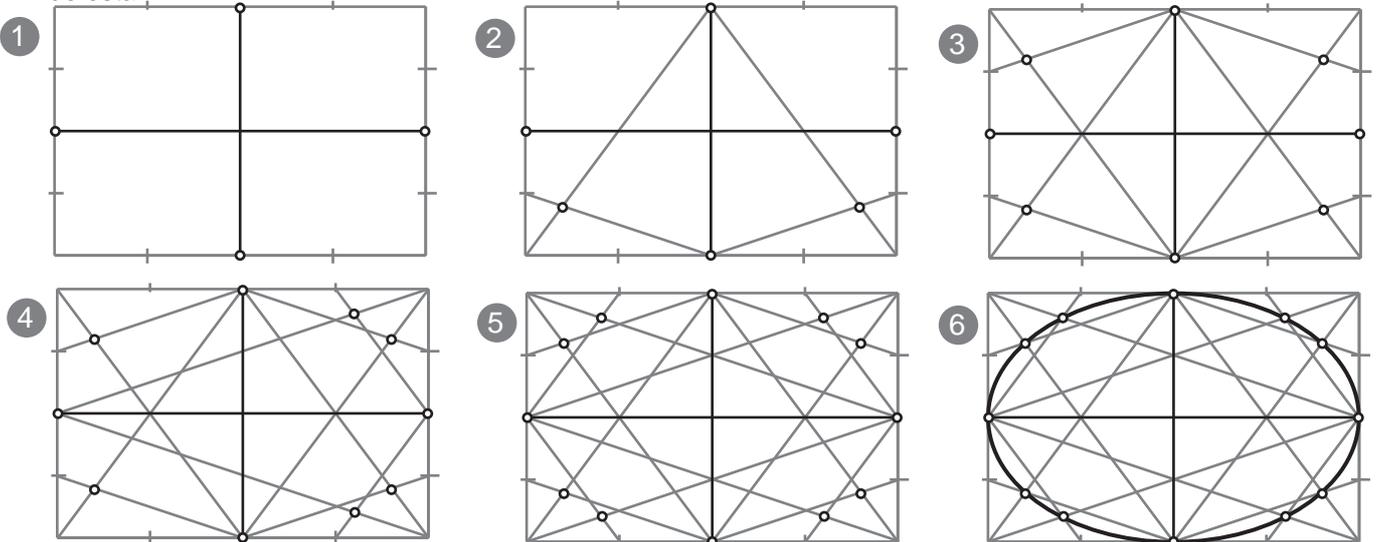
- 1º- Marcamos un punto arbitrario (1) sobre el eje mayor. Con centro en F y radio a_1 trazamos un arco en el primer cuadrante de la elipse y con centro en F' y radio a'_1 trazamos otro arco también en el primer cuadrante. El punto dónde se cortan ambos arcos pertenece a la elipse ya que se cumple $a_1 + a'_1 = a a'$
- 2º- Con los mismos radios y los mismos centros podemos obtener el punto simétrico en el tercer cuadrante.
- 3º- Con los mismos radios pero invirtiendo los centros hallamos los puntos simétricos respecto a eje menor a los otros dos.
- 4º- Marcamos otro punto (2) sobre el eje mayor y repetimos la operación de los pasos 2º y 3º, así obtenemos otros cuatro puntos de la elipse
- 5º- Marcamos un tercer punto y repetimos de nuevo la operación de los pasos 2º y 3º. Con 12 puntos podemos intuir el recorrido de la elipse, aunque podemos repetir la operación para conseguir más puntos.
- 6º- Unimos los puntos a mano alzada.

Trazado de la elipse: "Método de los 12 puntos"

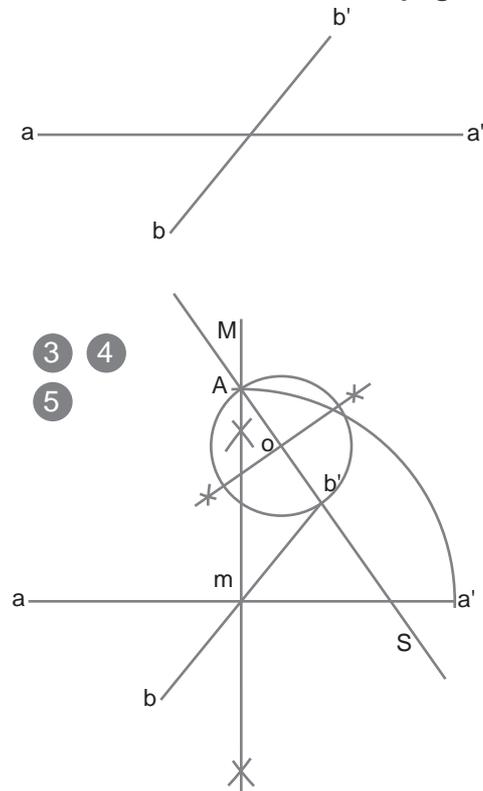
Este método es aplicable a la construcción dados los ejes o dados los diámetros conjugados y se basa en una propiedad de la circunferencia (todo esto se puede observar en las ilustraciones de la derecha). El procedimiento es el mismo para la construcción a partir de los ejes o de los diámetros conjugados.



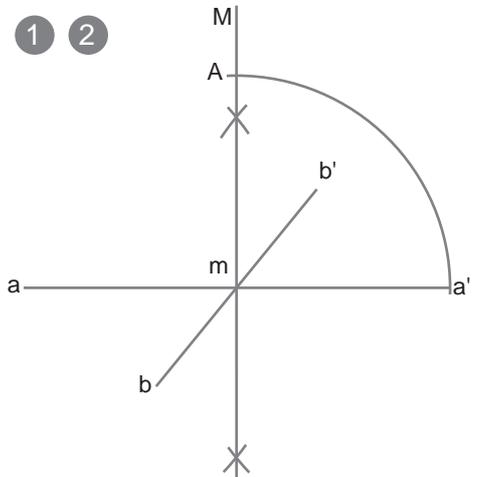
- 1º- A partir de los ejes (o diámetros conjugados) construimos la caja que encierra a la elipse. Cada lado de la caja se divide en dos mitades gracias a los ejes. determinamos el punto medio de cada mitad de cada lado de la caja.
- 2º- Desde el extremo de un eje trazamos segmentos hasta los extremos del lado opuesto. Desde el extremo opuesto trazamos segmentos que terminan en los puntos medios de las mitades de los lados contiguos. las dos intersecciones de estos dos pares de segmentos son puntos de la elipse.
- 3º- Repetimos la operación de forma simétrica.
- 4º y 5º- Repetimos la operación realizada en los pasos 2º y 3º esta vez partiendo de los extremos del otro eje.
- 6º- Trazamos la elipse teniendo en cuenta que los extremos de los ejes también son puntos de esta.



Dados los diámetros conjugados hallar los ejes de la elipse para su posterior trazado:



1º- Trazamos la mediatriz M del diámetro conjugado mayor aa' , cortandolo en m.



2º- Haciendo centro en m situamos sobre M la distancia $ma = mb''$ obteniendo el punto A.

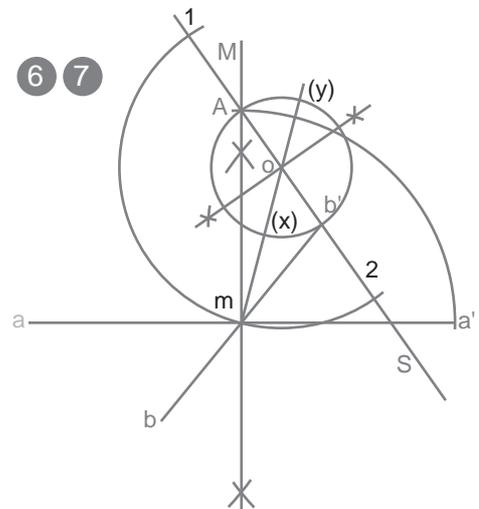
3º- Unimos A con b' y prolongamos el segmentos por ambos extremos, esta recta se llamará S.

4º- Hallamos el punto medio (o) del segmento Ab' .

5º- Haciendo centro en o trazamos la circunferencia de radio $oA = ob'$.

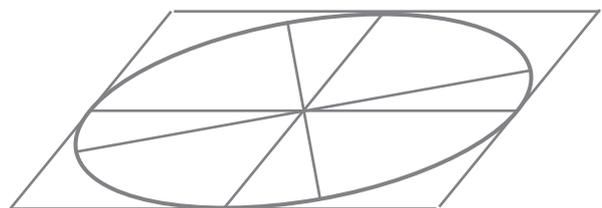
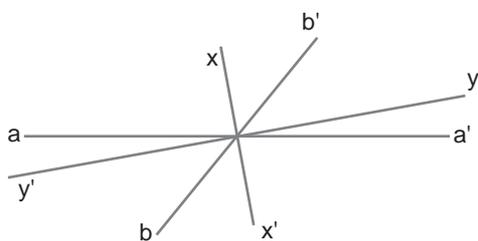
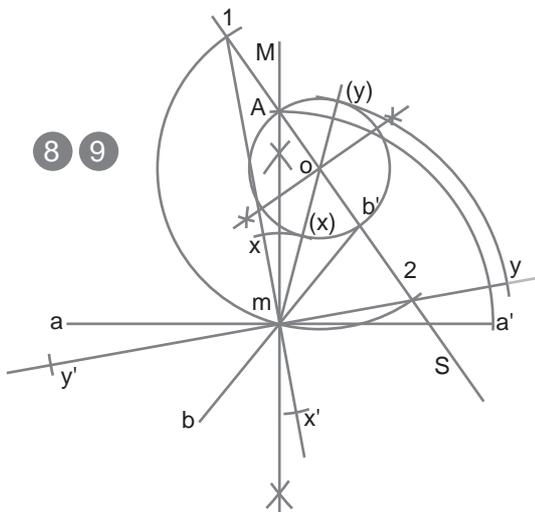
6º- Se une m con o, esta recta corta a la circunferencia de centro o en los puntos (x) e (y).

7º- Con centro en o trazamos un arco de radio om que cortara a la recta S en los puntos 1 y 2.



8º- Desde 1 y 2 trazamos dos rectas que se cortan perpendicularmente en m conteniendo estas a los ejes de la elipse (X e Y).

9º- Tomamos la distancia $o(x)$ o $o(y)$ y las llevamos con el compás sobre las rectas X, Y para determinar los segmentos xx' , yy' que corresponden con los ejes de la elipse

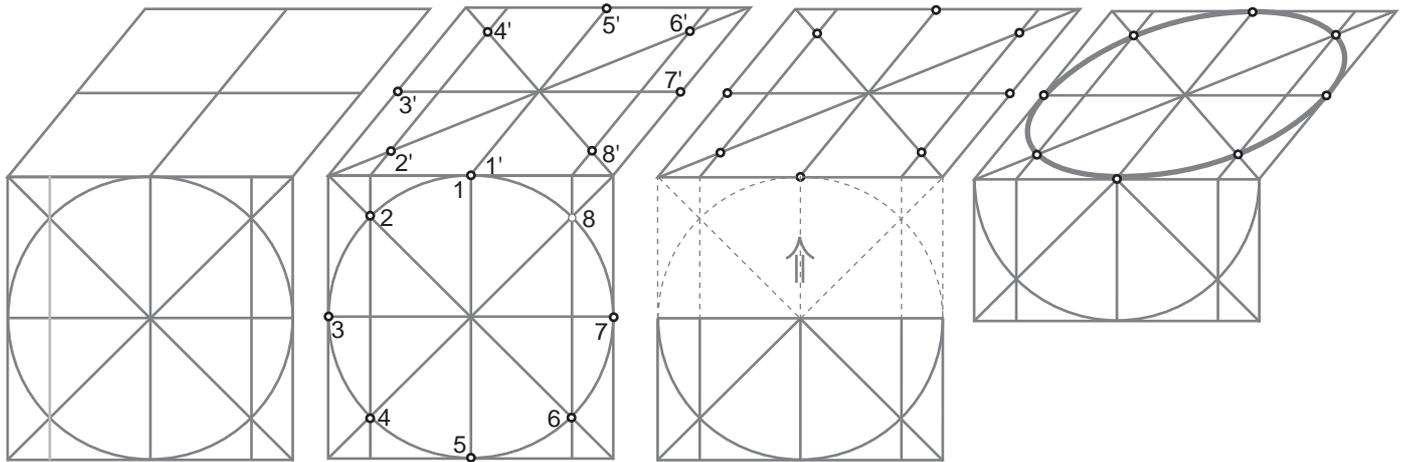


La caja axonométrica o los diámetros conjugados de la elipse.

Los diámetros conjugados son datos suficientes para realizar el trazado de la elipse. Suelen encontrarse como datos en perspectivas axonométricas o en el sistema diédrico para la construcción de conos o cilindros (figuras de revolución). También se pueden encontrar ocultos en un trapecio que representa en perspectiva o en una vista no frontal un cuadrado en el cual hay que inscribir una circunferencia que vista en perspectiva resultará ser una elipse o un óvalo. Es obvio que los diámetros conjugados y la caja axonométrica son datos equivalentes ya que de unos podemos sacar los otros trazando por los puntos medios o por los extremos.

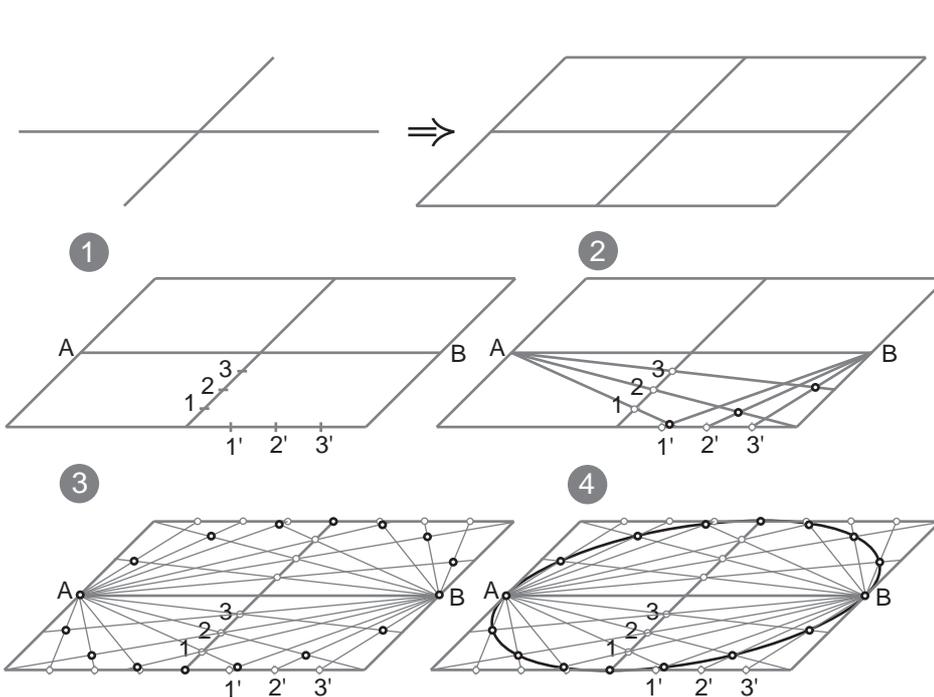


Dada la caja axonométrica trazar la elipse por afinidad con la circunferencia



Trazado de la elipse mediante HAZES PROYECTIVOS.

Este método es práctico ya que puede ser empleado para trazar la elipse partiendo tanto de los diámetros conjugados como de los ejes. Lo primero que deberemos hacer es trazar la "caja" en la cual inscribiremos la elipse.



1º- Los extremos del diámetro mayor serán los centros de proyección A y B. Se elige un cuadrante para trabajar y se divide el semi-diámetro menor en tantas partes como puntos de la elipse se pretendan para ese cuadrante. Se divide en el mismo número de partes la paralela al diámetro mayor correspondiente al cuadrante. Se numeran las divisiones de mayor a menor comenzando por el extremo del diámetro menor.

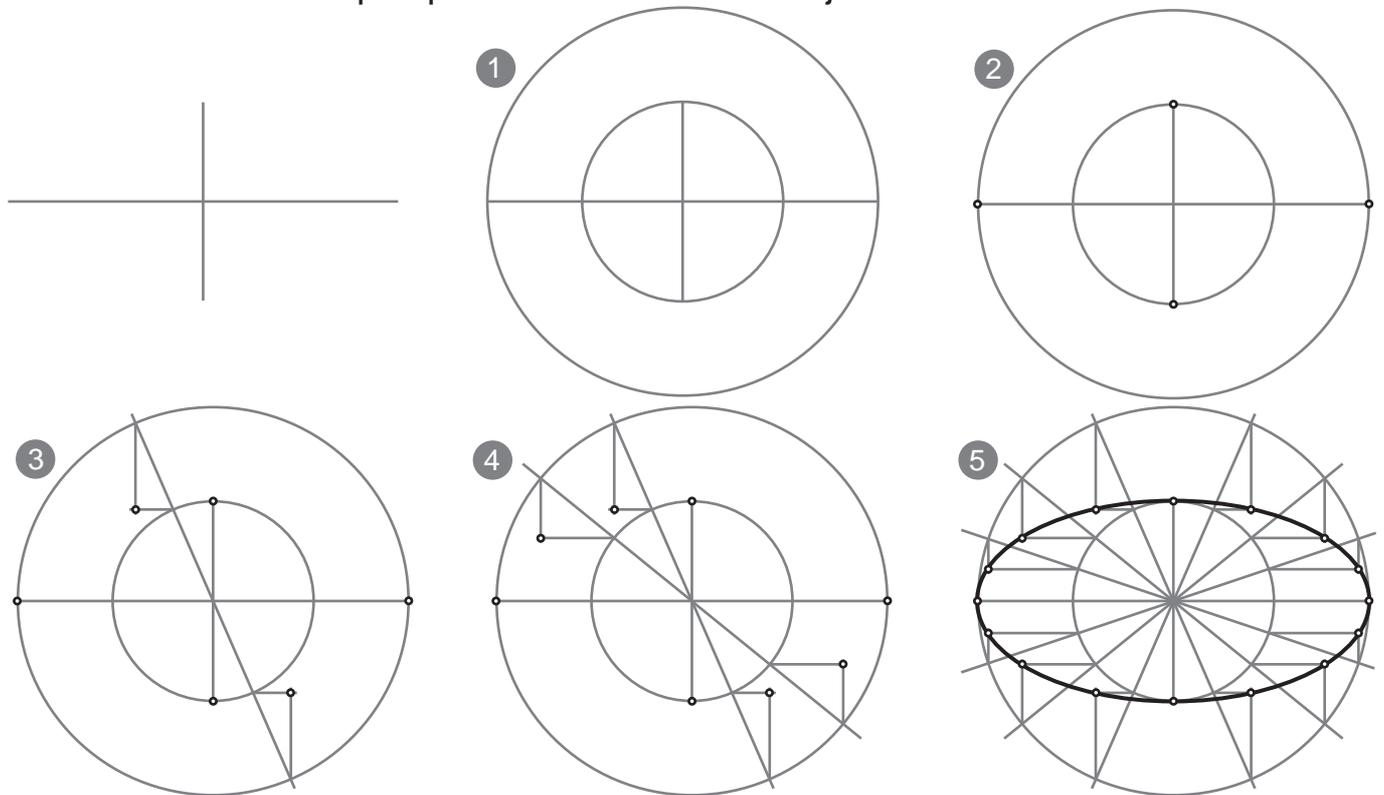
2º- Desde A se lanzan haces a los puntos del diámetro menor y desde B a los de la paralela al diámetro mayor. Los puntos 1-1', 2-2' y 3-3' son puntos de la elipse.

3º- Se repite el método en los otros tres cuadrantes.

4º- Se traza a mano alzada la elipse pasando por los puntos obtenidos.

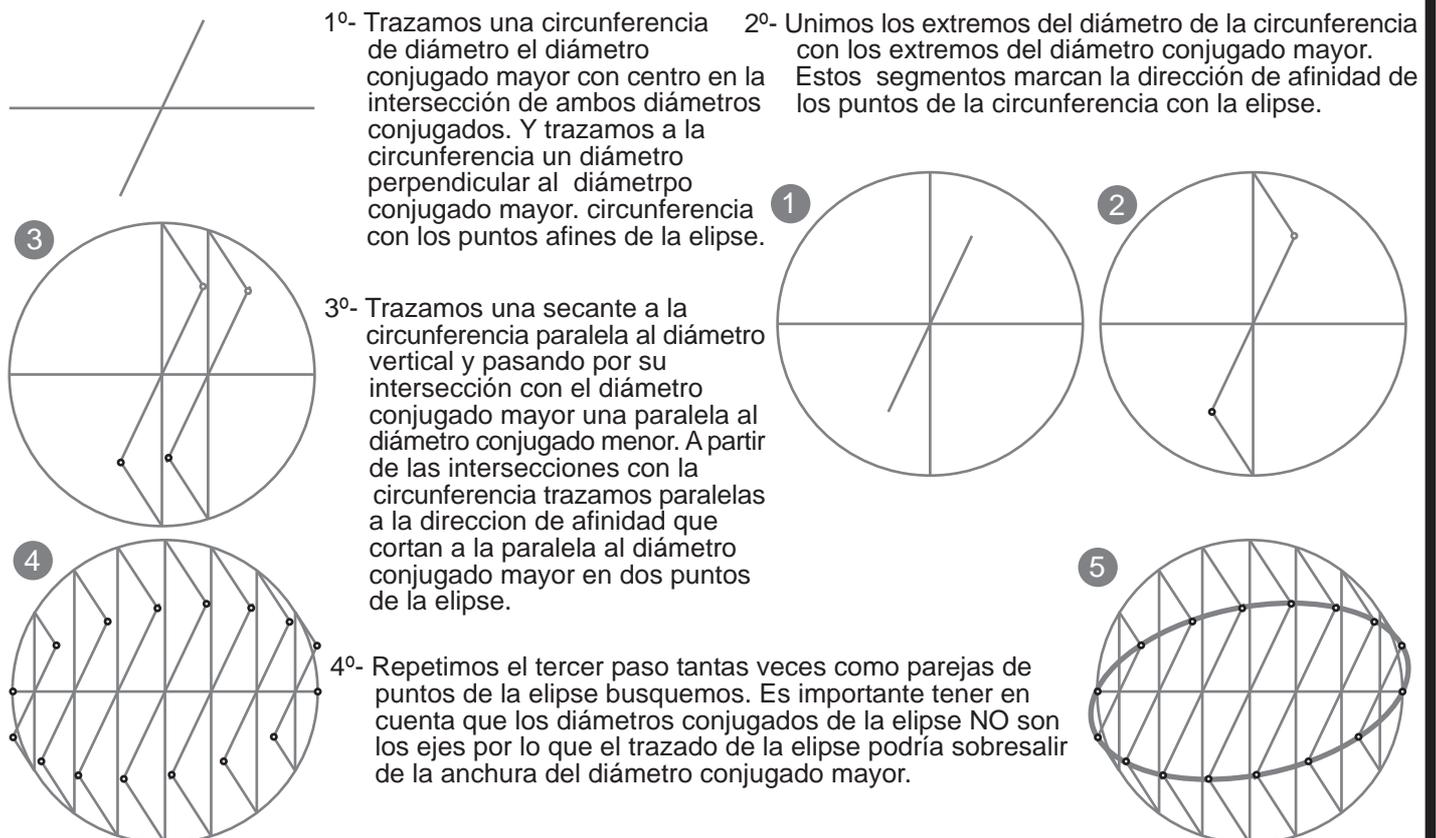
NOTA: El tercer paso se puede conseguir igualmente mediante afinidades para cuadrantes contiguos y simetrías radiales para cuadrantes opuestos

Construcción de la elipse por afinidad dados los ejes:



- 1º- Trazamos dos circunferencias con diámetro el eje mayor y el eje menor.
- 2º- Los extremos de los ejes mayor y menor son puntos pertenecientes a la elipse.
- 3º- Trazamos un diámetro que corta a ambas circunferencias trazadas. A partir del punto de intersección de diámetro con la circunferencia menor trazamos una paralela al eje mayor, a partir de la intersección con la circunferencia mayor trazamos una paralela al eje menor. El punto de intersección de ambas paralelas es un punto de la elipse. Podemos repetir este paso dos veces en cada diámetro.
- 4º- Repetimos la operación tantas veces como pares de puntos de la elipse queramos.
- 3º- Unimos a mano alzada los puntos hallados.

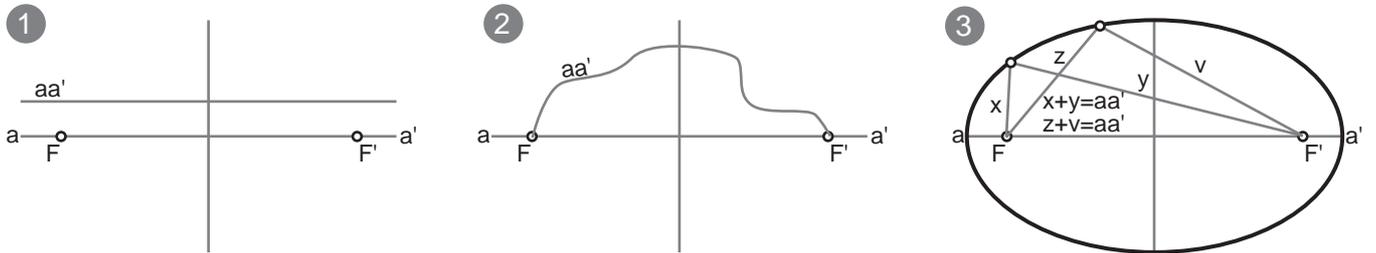
Construcción por afinidad dados los diámetros conjugados



- 1º- Trazamos una circunferencia de diámetro el diámetro conjugado mayor con centro en la intersección de ambos diámetros conjugados. Y trazamos a la circunferencia un diámetro perpendicular al diámetro conjugado mayor.
- 2º- Unimos los extremos del diámetro de la circunferencia con los extremos del diámetro conjugado mayor. Estos segmentos marcan la dirección de afinidad de los puntos de la circunferencia con la elipse.
- 3º- Trazamos una secante a la circunferencia paralela al diámetro vertical y pasando por su intersección con el diámetro conjugado mayor una paralela al diámetro conjugado menor. A partir de las intersecciones con la circunferencia trazamos paralelas a la dirección de afinidad que cortan a la paralela al diámetro conjugado mayor en dos puntos de la elipse.
- 4º- Repetimos el tercer paso tantas veces como parejas de puntos de la elipse busquemos. Es importante tener en cuenta que los diámetros conjugados de la elipse NO son los ejes por lo que el trazado de la elipse podría sobresalir de la anchura del diámetro conjugado mayor.

Trazado de la elipse dados los focos y el eje mayor:

Trazado de la elipse mediante el método del jardinero:



1º-Tomamos la medida aa' (eje mayor completo) con una cuerda.

2º- Fijamos los extremos de la cuerda en los focos.

3º- Tensando la cuerda se producen dos segmentos rectos que forman un ángulo. El vértice del ángulo se corresponde con un punto de la elipse. Podemos deslizar el punto de tensión de la cuerda variando las medidas de los lados del ángulo para obtener más puntos pertenecientes a la elipse.

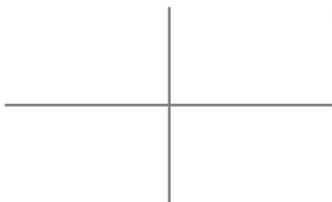
Construcción de la elipse dados los dos ejes:

La elipse Mediante el método de la tarjeta o tira de papel.

No existe ningún utensilio, aparte de las plantillas para trazar la elipse con limpieza y rapidez. Pero existe un método que se aproxima mucho, ofreciendo cantidad de puntos pertenecientes al trazado de la elipse en un espacio de tiempo realmente corto. Es quizás el método más sencillo para el trazado y tiene la característica de no dejar un solo trazado auxiliar (lo cual podría ser una ventaja o un inconveniente según las circunstancias). Para poder trazar la elipse de mediante este procedimiento necesitamos contar con los ejes como dato. Si lo que tenemos son los diámetros conjugados podemos encontrar los ejes correspondientes mediante el método de Ritz.

Procedimiento

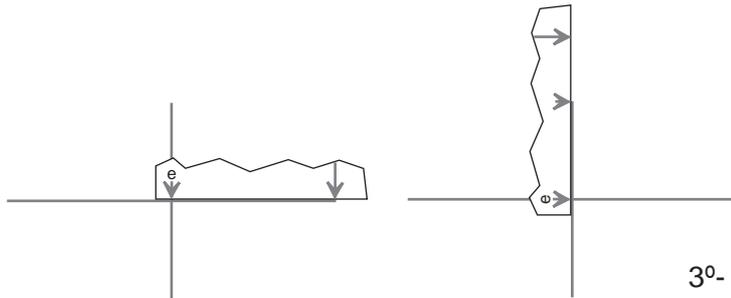
1º- Marcamos una rayita con una e, próxima a un extremo de la tira de papel: esta marca nos indicará dónde tenemos que marcar los puntos con el lápiz.



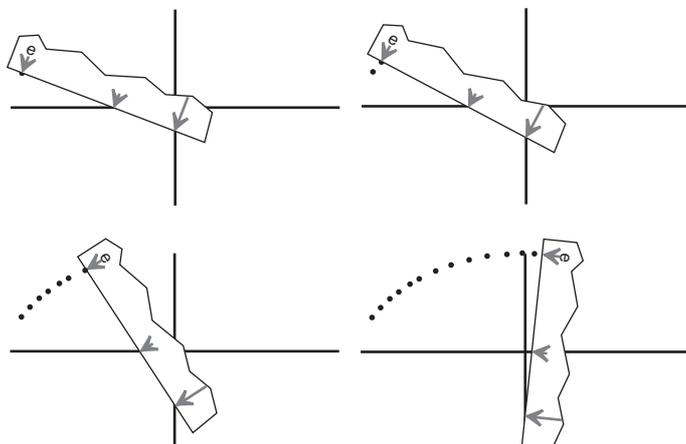
La tira ha de ser algo más larga que el semieje mayor



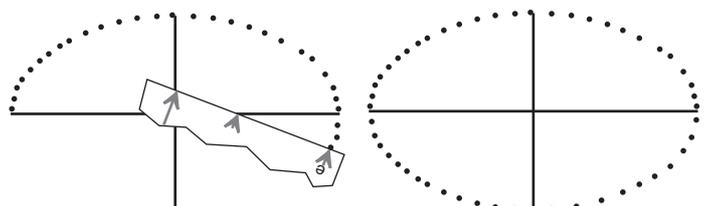
2º- A continuación alinearemos la tira de papel por su borde recto con el eje mayor y el eje menor situando la flecha con la "e" en el punto de corte de los dos ejes. Marcamos dos flechas con las longitudes del SEMeje mayor y menor. Para aclararnos, la flecha que marca la longitud mayor la haremos más larga. **TODAS LAS PUNTAS DE FLECHAS DEBEN DE ESTAR TOCANDO EL LÍMITE DEL PAPEL.**

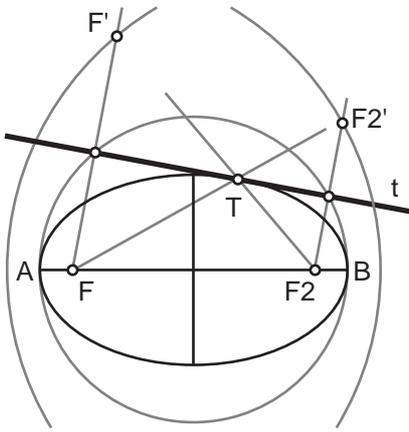


Ya tenemos nuestro "compás" para trazar elipses.



3º- A partir de ahora, sobre los ejes del enunciado colocaremos la tira dispuesta con la flecha larga señalando el eje menor y con la flecha corta señalando el eje mayor. Si en algún momento la flecha larga se sale de la longitud del eje simplemente lo prolongaremos para seguir alineándola con el eje prolongado. Cada vez que recolocamos la tira de papel marcaremos un punto a lápiz justo donde la flecha con la "e" señala.

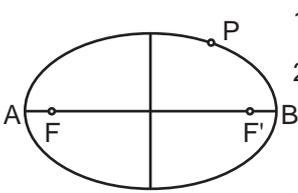




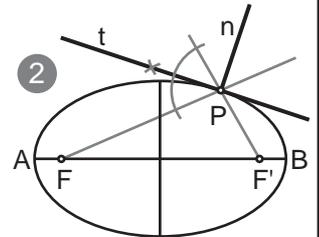
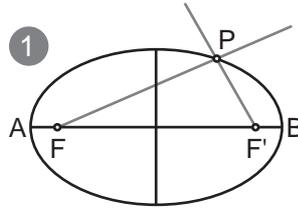
Circunferencia FOCAL (CF): Es aquella cuyo centro es uno de los focos de la elipse y su radio es igual al eje mayor. Por tanto, a cada una de las elipses le podemos trazar dos CF. La Circunferencia Focal de un foco es el Lugar Geométrico de los puntos simétricos del otro foco, respecto de las rectas tangentes a la elipse.

La circunferencia principal (CP): Es aquella cuyo centro es el centro de la curva y el radio es la mitad del eje mayor AB. Es el Lugar Geométrico de los puntos de intersección de las tangentes a la elipse con las perpendiculares trazadas desde los focos a cada una de esas tangentes. O también, el lugar geométrico de las proyecciones (perpendiculares) de los focos sobre las rectas tangentes a la cónica

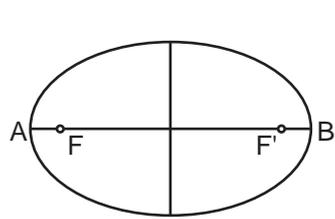
Tangente y normal en un punto de la elipse dados los dos ejes:



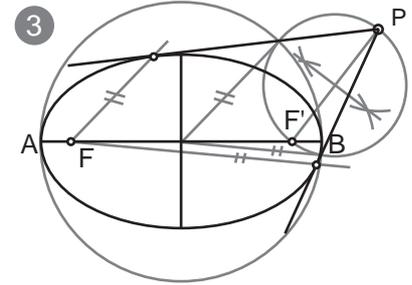
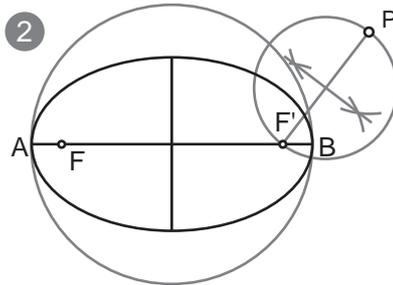
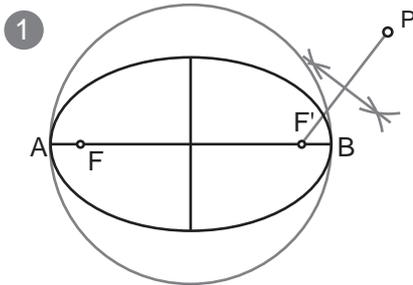
- 1º- Trazamos los radio vectores que pasan por P.
- 2º- Hallamos la bisectriz del ángulo que estos producen. Esta es la tangente a la elipse por el punto P. La normal por dicho punto es la recta perpendicular a la tangente.



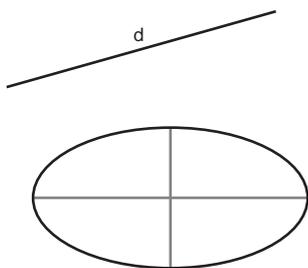
Tangentes a una elipse desde un punto exterior P:



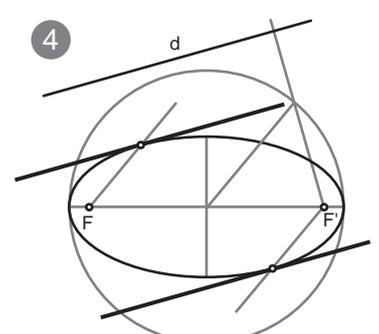
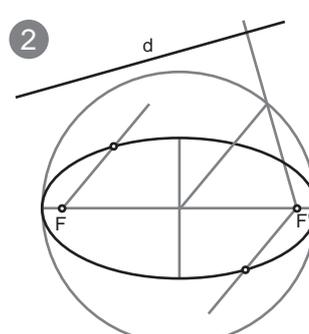
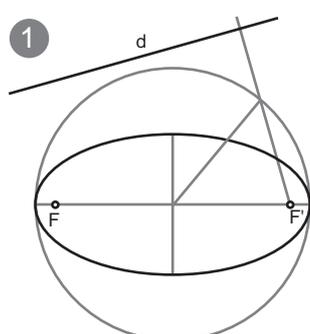
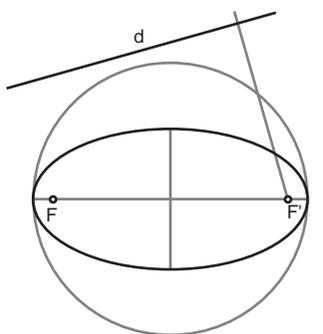
- 1º- Trazamos la circunferencia principal (centro en la intersección de los ejes y diámetro AB). Trazamos el segmento PF' y su mediatriz.
- 2º- Con centro en pto medio de PF' trazamos la cir. con diámetro PF'.
- 3º- Desde la intersección de los ejes trazamos segmentos hasta las intersecciones de ambas circunferencias. Desde F trazamos paralelas a las cuales al cortar la elipse muestran los puntos de tangencia. unimos dichos puntos con P.



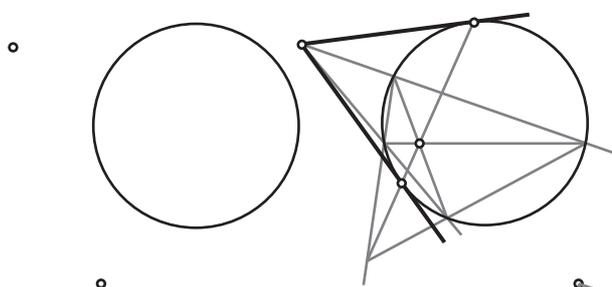
Tangentes a una elipse en una dirección dada:



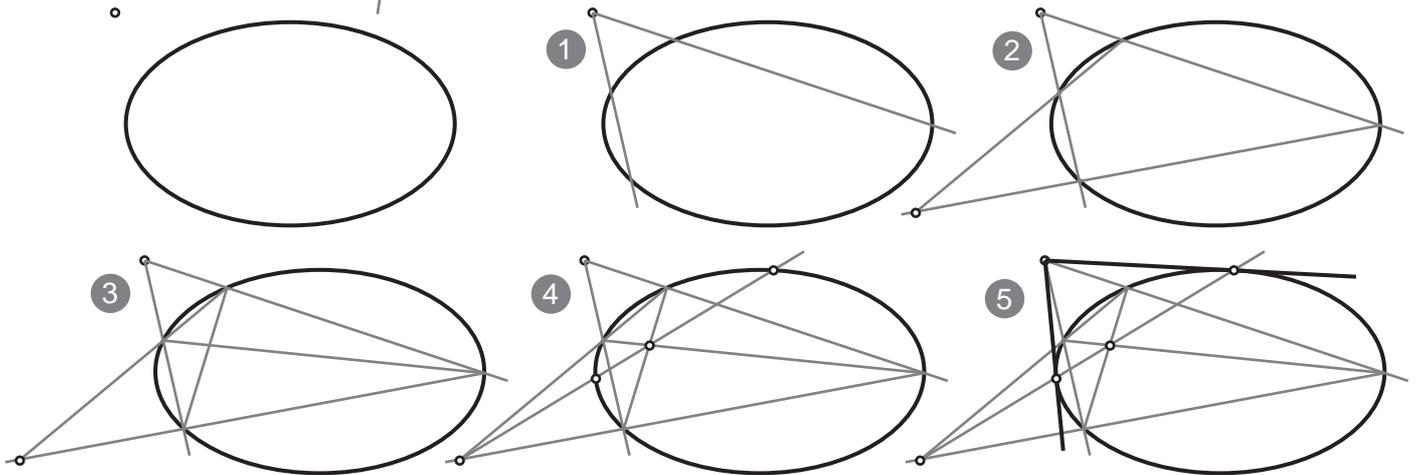
- 1º- Trazamos la elipse, sus focos y la circunferencia principal (ctro. intersección de los ejes y diámetro eje mayor)
- 2º- Desde F' trazamos una perpendicular a la dirección d. Desde la intersección de los ejes trazamos un segmento hasta el punto de intersección de dicha perpendicular con la cir. principal.
- 3º- Desde F y F' trazamos paralelas al segmento anterior que al cortar la elipse nos muestran los puntos de tangencia.
- 4º- Trazamos las tangentes por los puntos hallados.



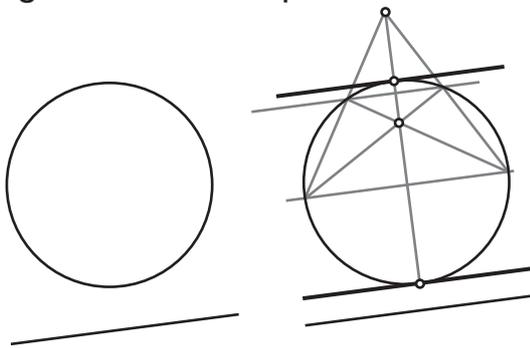
Tangentes a una elipse desde un punto exterior P:



- 1º- Trazamos desde P dos rectas secantes a la elipse. Estas producen cuatro puntos de intersección.
- 2º- Se trazan dos rectas uniendo los cuatro puntos de intersección dos a dos, cortándose estas en otro punto.
- 3º- Trazamos las diagonales del cuadrilátero inscrito en la elipse.
- 4º- Desde el punto de intersección del segundo par de rectas trazamos una recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales. Obtenemos sobre la elipse los dos puntos de tangencia buscados.
- 5º- Trazamos las rectas tangentes.



Tangentes a una elipse en una dirección dada:



- 1º- Trazamos dos paralelas a la dirección dada secantes a la elipse. Estas producen cuatro puntos de intersección.
- 2º- Se trazan dos rectas uniendo los cuatro puntos de intersección dos a dos, cortándose estas en otro punto.
- 3º- Trazamos las diagonales del cuadrilátero inscrito en la elipse.
- 4º- Desde el punto de intersección del segundo par de rectas trazamos una recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales. Obtenemos sobre la elipse los dos puntos de tangencia buscados.
- 5º- Trazamos las rectas tangentes.

