PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE ONDAS

Es un hecho experimental que muchas clases de ondas pueden atravesar el mismo espacio independientemente unas de otras. Esto significa que la elongación de una sola partícula es la suma de las elongaciones que las ondas individuales le producirían. El proceso de adición vectorial de las elongaciones de una partícula se llama superposición. Por ejemplo, a una antena de radio llegan ondas de muchas frecuencias diferentes superpuestas; sin embargo, se puede sintonizar una sola como si todas las demás no existieran. Análogamente, al escuchar una orquesta se pueden distinguir las frecuencias emitidas por los distintos instrumentos.

El **Principio de Superposición** afirma que, si en un medio se propagan dos o más ondas, éstas superpondrán sus efectos en los puntos en que coincidan y continuarán después independientemente la una de la otra como si no se hubieran superpuesto

El principio de superposición es válido siempre que la relación matemática entre la deformación y las fuerzas restauradoras sea de simple proporcionalidad; lo más importante de este principio es que se pueden estudiar movimientos muy complejos descomponiéndolos en una combinación de ondas simples (análisis de Fourier)

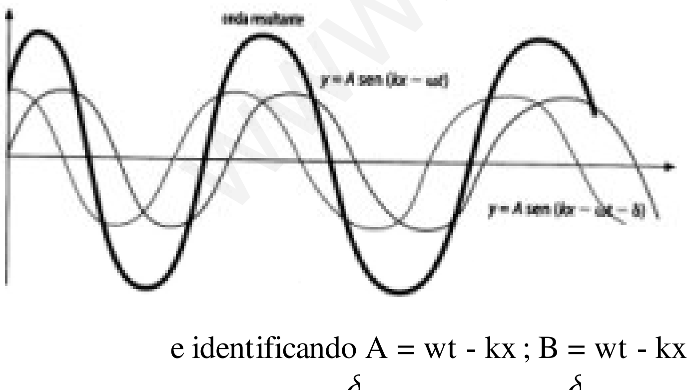
La combinación de ondas, para formar una onda resultante de la superposición de las perturbaciones introducidas por cada una de ellas por separado, es un fenómeno llamado <u>interferencia</u>, característico de los movimientos ondulatorios. La posibilidad de producir interferencias es un buen criterio para determinar si un fenómeno posee características ondulatorias.

A) SUPERPOSICION DE DOS ONDAS ARMONICAS DE LA MISMA AMPLITUD

A.1.-Igual frecuencia

Sean Y_1 e Y_2 las funciones de onda correspondientes a dos movimientos ondulatorios longitudinales (o transversales polarizados) que se propagan en la misma dirección con la misma amplitud y frecuencia, pero distinta fase:

$Y_1 = Yo \cos (wt - kx)$ $\quad Y_2 = Yo \cos (wt - kx + \delta)$



Si se produce el fenómeno de interferencia, la onda resultante será:

$$Y = Y_1 + Y_2 =$$
$$= Yo \cos (wt - kx) + Yo \cos (wt - kx + \delta)$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

e identificando $A = wt - kx$; $B = wt - kx + \delta$, obtenemos

$$Y = 2\ Yo \cos\frac{\delta}{2}\ \cos (wt - kx + \frac{\delta}{2})$$

que representa otra onda armónica de la misma frecuencia y velocidad de propagación que las ondas originales, cuya amplitud es $2\ Yo \cos\frac{\delta}{2}$ y que difiere en fase con ellas $\frac{\delta}{2}$.

La amplitud de la onda resultante depende de Yo y de δ. Si $\delta = 0$, las ondas están en fase y la amplitud resultante es 2Yo. Si $\delta = \pi$, la amplitud resultante es nula. En el primer caso se habla de interferencia constructiva y en el segundo de interferencia destructiva, pudiendo darse todas las situaciones intermedias según la diferencia de fase.

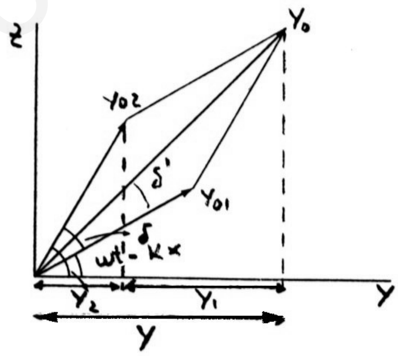
La diferencia de fase entre las dos ondas que interfieren puede deberse a que ambas proceden de una misma fuente habiendo recorrido caminos distintos. Si la diferencia de caminos es Δx, la diferencia de fase entre las dos ondas será:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

ya que, si la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda, las ondas están en fase y, si es un número impar de semilongitudes de onda, las ondas están desfasadas en π.

En el caso de que las ondas no posean la misma amplitud, aunque sí la misma frecuencia, o si existen más de dos ondas, la obtención de la onda interferencial se realiza utilizando el método geométrico del vector rotatorio.

El método se basa en el hecho de que la componente Y de la resultante de la suma de dos vectores es igual a la suma de las componentes Y de dichos vectores.



Sea $Y_1 = Yo_1 \cos(wt - kx)$ e $Y_2 = Y_{02} \cos(wt - kx + \delta)$ para sumarlas consideramos un vector de módulo Yo_1, que forma un ángulo $(wt - kx)$ con el eje Y, y otro vector de módulo Y_{02}, que forma un ángulo $(wt - kx + \delta)$ con el eje Y. Mediante la ley de la suma de vectores obtenemos otro vector de módulo Yo que forma un ángulo $(wt - Kx + \delta')$ con el eje Y, de modo que podemos escribir:

$Y = Y_1 + Y_2 = Y_{01} \cos(wt - kx) + Y_{02} \cos(wt - kx + \delta) = Yo \cos(wt - kx + \delta')$

donde Yo será la amplitud de la onda resultante y δ' el desfase de ésta respecto a Y_1

A.2.-Distinta frecuencia: Pulsaciones

Sean Y_1 e Y_2 las funciones de onda correspondientes a dos movimientos ondulatorios longitudinales (o transversales polarizados) que se propagan en la misma dirección, con la misma amplitud, pero de frecuencia y longitud de onda ligeramente distintas:

$$Y_1 = Yo \cos(w_1 t - k_1 x) \qquad Y_2 = Yo \cos(w_2 t - k_2 x)$$

Como consecuencia de la superposición de ambas se obtendrá una onda resultante:

$$Y = Y_1 + Y_2 = Yo \cos(w_1 t - k_1 x) + Yo \cos(w_2 t - k_2 x) =$$

$= 2Yo \cos[\frac{1}{2}(wi- w_2)t - \frac{1}{2}(k_l- k_2)x] \cos[\frac{1}{2}(w_1+ w_2)t - \frac{1}{2}(k_l+ k_2)x]$ donde hemos utilizado la relación trigonométrica del apart.A.1.

Llamando, respectivamente, frecuencia angular y número de ondas promedios a las expresiones:

$$w_{prom} = \frac{1}{2}(w_1+w_2) \qquad k_{prom} = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

y frecuencia angular y número de ondas de modulación a:

$$w_{mod} = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) \qquad\qquad k_{mod} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

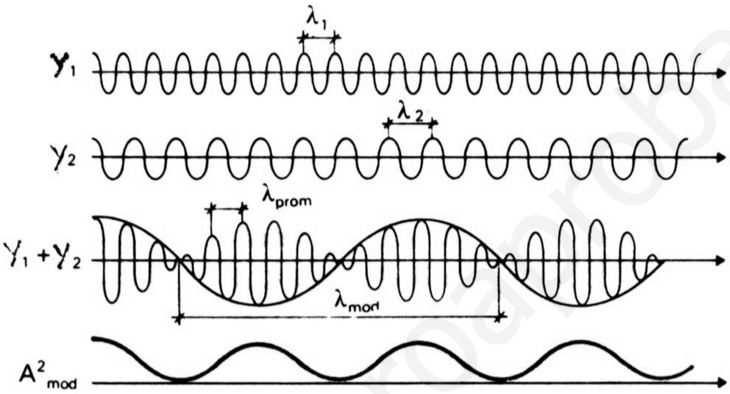
la función Y queda:

$$Y = 2\ Yo \cos\ (w_{mod}\, t - k_{mod}\, x) \cos\ (w_{prom} t - k_{prom}\, x) = A_{mod} \cos\ (w_{prom} t - k_{prom}\, x)$$

Esta expresión representa una onda armónica de frecuencia angular w_{prom} y número de ondas k_{prom}, intermedios entre los correspondientes de las ondas componentes y cuya amplitud viene dada por:

$$A_{mod} = 2\ Yo \cos\ (w_{mod}\, t - k_{mod}\, x)$$

varia periódicamente en el tiempo con la frecuencia angular w_{mod} y en el espacio con número de ondas k_{mod}. Se dice que la amplitud está modulada y la onda resultante se denomina onda pulsante.



Como la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de su amplitud, toma valores comprendidos entre un máximo y un mínimo que, en el caso del sonido, percibimos en forma de batidos o pulsaciones, perfectamente discernibles cuando la diferencia entre las dos frecuencias originales es menor de 10 Hz; si es mayor, el oído distingue entre los dos sonidos y escucha la superposición como un acorde formado por dos notas. Este fenómeno de pulsaciones se utiliza para afinar instrumentos musicales, ya que la percepción de batidos indica la proximidad entre las frecuencias patrón y desconocida.

Una cuestión importante que hay que resaltar es el hecho de que existen dos velocidades: la de la onda promedio, que se denomina velocidad de fase, y la de la onda envolvente modulada, que recibe el nombre de velocidad de grupo.

$$v_{fase} = \frac{w_{prom}}{k_{prom}} \qquad\qquad v_{grupo} = \frac{w_{mod}}{k_{mod}}$$

La velocidad de fase y la de grupo, en general, son distintas; sólo coinciden cuando la primera no depende de la frecuencia, lo que ocurre en los medios no dispersivos.

B)ONDAS ESTACIONARIAS: APLICACION EN CUERDAS Y TUBOS SONOROS

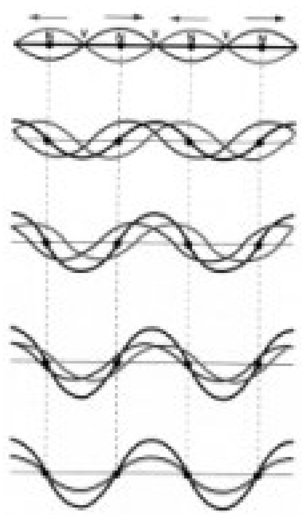
Cuando en un medio material se superponen dos ondas planas monocromáticas de igual amplitud y frecuencia pero de sentidos opuestos, la perturbación resultante parece no propagarse en ese medio; se ha producido una onda estacionaria. Esta es la situación que se produce cuando una onda se propaga por un medio finito y se refleja en los bordes.

Consideremos una onda armónica que se propaga hacia el origen en una cuerda fija en ese punto. Supongamos una cuerda de densidad σ, sometida a una tensión F, que posee el extremo izquierdo fijo. Sea Y_1 = Yo sen (wt + kx) la ecuación de una onda que se propaga de derecha a izquierda en la cuerda. Al llegar la onda al extremo fijo se reflejará, originándose una segunda onda Y_2 = - Yo sen (wt -kx) de la misma frecuencia, amplitud y velocidad, que se propaga en sentido contrario,(el signo menos es debido a que cuando una onda se refleja al llegar al punto fijo se produce en ella un cambio de fase de 180º, la onda se invierte en la reflexión) . Por tanto, en la cuerda se producirá la superposición de las ondas Y_1 e Y_2.

Como la onda se invierte en la reflexión, la función de onda resultante se obtiene sumando las dos funciones de onda componentes y teniendo en cuenta la relación trigonométrica:

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \text{ sen } [\frac{1}{2}(A - B)] \cos [\frac{1}{2}(A + B)]$$ obtenemos

$$Y = Y_1 + Y_2 = 2 \text{ Yo sen } kx \cos wt$$



expresión de la onda superposición de la onda incidente y reflejada en la cuerda.

Esta función no representa un movimiento ondulatorio, sino que corresponde a un movimiento vibratorio armónico, cuya amplitud viene dada por:

$$A = 2 \text{ Yo sen } kx$$

y depende de cada punto de la cuerda.
La onda representada ya no es una onda viajera y recibe el nombre de **onda estacionaria**.
En esta onda la fase no depende de la posición, todos los puntos llevan la misma fase. La vibración tiene lugar con la frecuencia de las ondas individuales.

Podemos observar que si $kx = n\pi$ ($n = n^0$ entero) , el valor de la amplitud es cero, A = 0, al ser sen $n\pi = 0$. Esto se produce para aquellos puntos de la cuerda tales que su distancia al extremo fijo es:

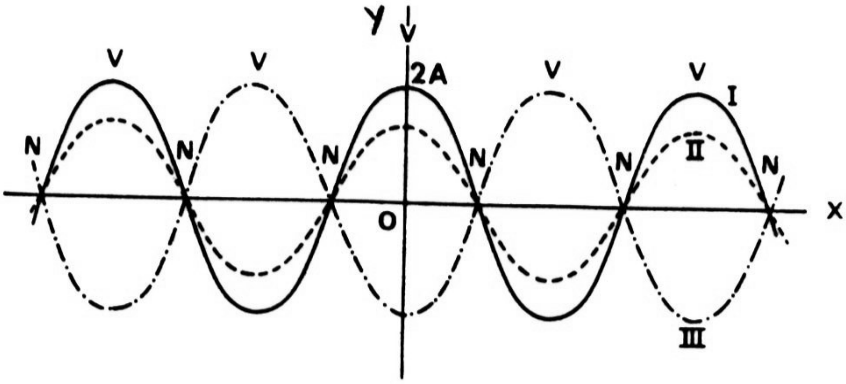
$x = \frac{1}{2} n\lambda$ ya que $\frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi$ Estos puntos reciben el nombre de nodos.

Por el contrario, la amplitud es máxima si $kx = (2n + 1) \pi/2$, es decir, para aquellos puntos de la cuerda cuya distancia al extremo fijo es:

$x = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$ ya que $\frac{2\pi}{\lambda} x = (2n + 1)\ ) \pi/2$ A estos puntos se les denomina vientres o antinodos.

Puede observarse que la distancia entre dos nodos consecutivos, o entre dos antinodos, es $\frac{\lambda}{2}$, mientras que la distancia entre un nodo y el siguiente antinodo es $\frac{\lambda}{4}$.

En resumen, cada punto de la cuerda oscila entre su posición de equilibrio y las posiciones indicadas en la figura.



La existencia de nodos o puntos que no oscilan implica que una onda estacionaria, a diferencia de las viajeras, no transporta energía de un punto a otro, la energía se confina. Los vientres tienen máximos de energía y los nodos energía nula. La energía total es la suma de las energías de las ondas que se superponen.

Si imponemos a la cuerda una segunda condición, a saber, que el otro extremo x = L (L = longitud de la cuerda) sea también fijo, deberá cumplirse la condición:

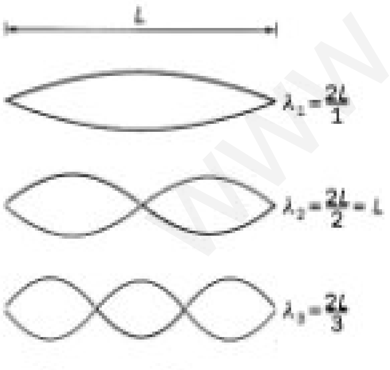
$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{ya que} \quad x = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{y} \quad x = L$$

por lo que sólo podrán propagarse en la cuerda las ondas que cumplan la citada condición.

Cada forma de vibrar la cuerda se denomina <u>modo de vibración</u>. A las frecuencias correspondientes se las llama <u>frecuencias naturales</u> de vibración y toman los valores:

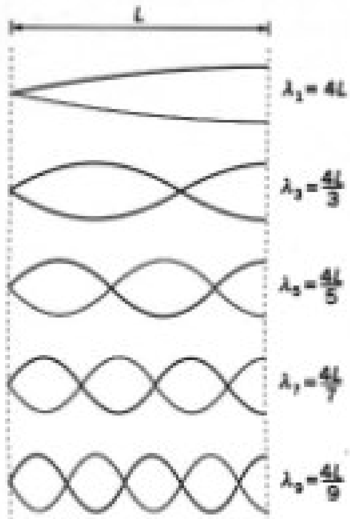
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2L}v = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\sigma}}$$

Para n = 1 , la longitud de onda toma el valor 2L y se obtiene el <u>modo</u> de vibración de mayor longitud de onda, llamado <u>fundamental</u>. A la frecuencia correspondiente se la llama *frecuencia fundamental*; los restantes modos de vibración, correspondientes a longitudes de onda menores, constituyen una <u>serie armónica</u>.



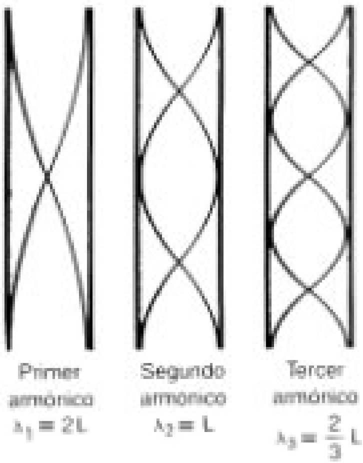
Representación de cuatro modos normales de vibración de una cuerda fija por sus extremos.

Las frecuencias correspondientes, que son múltiplos enteros de la fundamental, reciben el nombre de armónicos (la fundamental es el primer armónico)y constituyen sobretonos en los instrumentos musicales (el primer sobretono es el segundo armónico, el segundo sobretono el tercer armónico, y así sucesivamente). Al pulsar una cuerda se produce la superposición de varios modos naturales de vibración, que difieren de unos instrumentos a otros; el timbre del sonido de cierta nota (frecuencia fundamental) , tocada por un instrumento, queda determinado por el número de sobretonos presentes y por sus respectivas intensidades.



Ondas estacionarias en una cuerda fija por un extremo y libre en el otro

Otra aplicación de las ondas estacionarias son los <u>tubos sonoros</u>. En ellos, una corriente de aire origina en un extremo una vibración que se propaga a lo largo de la columna de gas que hay en su interior, produciéndose ondas longitudinales que se reflejan en el extremo opuesto, en la pared que cierra el tubo (tubo cerrado) , o bien en la propia atmósfera (tubo abierto) dando lugar a ondas estacionarias



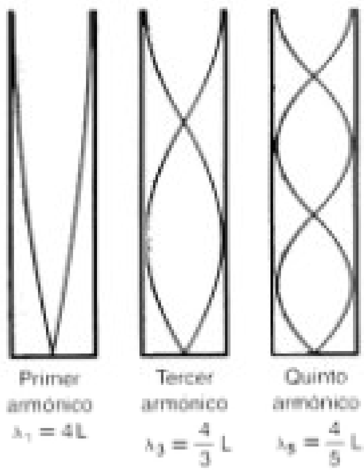
Si el <u>tubo</u> es <u>abierto</u>, se produce un máximo en la amplitud de vibración de las partículas del gas en el extremo abierto y, como en el punto en que se produce la vibración los tubos son abiertos, la onda debe presentar un antinodo en cada extremo. Por tanto, como la distancia entre dos antinodos consecutivos es media longitud de onda, se cumplirá que la longitud de un tubo abierto es:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

Teniendo en cuenta la relación entre la longitud de onda y la frecuencia: $$f = n\frac{v}{2L}$$

En un tubo abierto, la frecuencia fundamental corresponde a un antinodo en cada extremo y a un nodo en el centro. Por tanto, la frecuencia fundamental es v/2L y existen todos los armónicos.

En el caso de un <u>tubo cerrado</u>, el gas vibra teniendo un nodo en el extremo cerrado y las distintas ondas estacionarias que se forman son como las de la figura. Como la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos es un cuarto de la longitud de onda, la longitud de un tubo cerrado debe ser un múltiplo impar de cuartos de longitud de onda de la onda estacionaria: $L = (2n + 1)\,\dfrac{\lambda}{4}$



Y teniendo en cuenta la relación entre la longitud de onda y la frecuencia:

$$f = (2n + 1)\frac{v}{4L}$$

La frecuencia fundamental es v/4L , la cual es la mitad de la de un tubo abierto de la misma longitud, y solamente existen los armónicos impares. El timbre de los sonidos de un tubo abierto es, pues, diferente al de un tubo cerrado.

Las varillas, las placas y las membranas estiradas en vibración, también dan lugar a ondas sonoras, ya que en ellas se establecen ondas estacionarias.

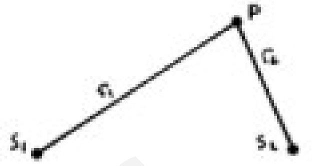
Según hemos dicho, las cuerdas tensas y los tubos sonoros son capaces de vibrar con una serie de frecuencias características, que podemos llamar frecuencias naturales de vibración. Si la frecuencia de una onda que llega a un cuerpo coincide con alguna de las frecuencias naturales de éste, el cuerpo se ve sometido a una sucesión de impulsos concordantes y vibrará con amplitudes crecientes mucho mayores que las que corresponden a la onda original. Este fenómeno se denomina **resonancia** y es de gran importancia en música y desde el punto de vista físico y técnico.

C) INTERFERENCIAS DE ONDAS PRODUCIDAS POR DOS FUENTES SÍNCRONAS

Consideremos dos fuentes puntuales S_1 y S_2 , que producen dos ondas (Φ_1 y Φ_2 síncronas, es decir, que oscilan en fase con la misma frecuencia y longitud de onda:

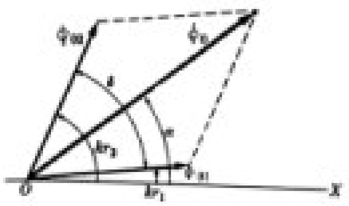
$$\Phi_1 = \Phi_{01} \text{ sen } (wt - kr_1) \qquad \Phi_2 = \Phi_{02} \text{ sen } (wt - kr_2)$$

Las amplitudes Φ_{01} y Φ_{02} de cada onda serán, en general, distintas y dependerán de sus distancias r_1 y r_2 a las fuentes.



El desfase entre las dos ondas en un punto P, donde se superponen, vendrá dado por: $\delta = kr_1 - kr_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$

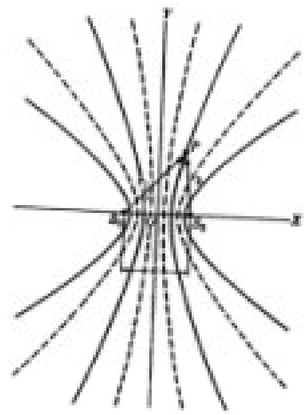
y la amplitud del movimiento ondulatorio resultante, usando el método de los vectores rotatorios, será: $\Phi_o = \sqrt{\Phi_{o1}^2 + \Phi_{02}^2 + 2\Phi_{o1}\Phi_{o2}\cos\delta}$



donde se observa que:

- si $\delta = 2n\pi$, la interferencia es constructiva.
- si $\delta = (2n + 1)\pi$, la interferencia es destructiva.

Por tanto, como $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$ en los distintos puntos del espacio se producirá la superposición de dichas ondas, de modo que habrá máximos de interferencia cuando la diferencia de caminos recorridos por las dos ondas hasta el punto considerado sea un número entero de longitudes de onda $r_1 - r_2 = n\lambda$, y habrá mínimos de interferencia cuando la diferencia de caminos sea un número impar de semilongitudes de onda $r_1 - r_2 = (2n + 1)\ \lambda/2$.



Teniendo en cuenta que una hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos difieren en una cantidad constante, podremos comprender que, en el caso de ondas en una superficie plana, la línea que une los puntos correspondientes a una serie de máximos de interferencia, o a una serie de mínimos, será una hipérbola.

Para visualizar el fenómeno de la interferencia de dos fuentes síncronas suele utilizarse el experimento de Young, mediante el cual se puso de manifiesto la naturaleza ondulatoria de la luz.

El experimento consiste en recoger sobre una pantalla la figura de interferencia producida por dos fuentes puntuales síncronas luminosas. Thomas Young consiguió las dos fuentes haciendo pasar un haz de luz por dos orificios practicados en una pantalla, situados a una distancia d.

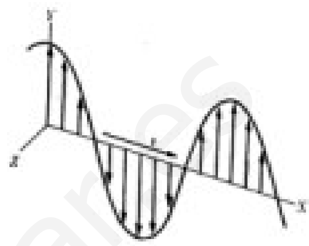
Los dos orificios se comportan, de acuerdo con el principio de Huygens, como dos fuentes puntuales síncronas, es decir, oscilan en fase con la misma longitud de onda y frecuencia; tienen también la misma amplitud.

Siempre que se superponen dos ondas se produce el fenómeno de interferencia, pero, para que sea detectable, es necesario que las ondas sean coherentes, es decir, que la diferencia de fase entre ambas sea una constante para cada punto del espacio. Además, las ondas deben tener frecuencias iguales y amplitudes muy parecidas para que la configuración interferencial sea permanente y haya mucha diferencia entre la intensidad de los máximos y de los mínimos.

D) POLARIZACION

En las ondas transversales se cumple que la dirección de la perturbación es siempre perpendicular a la dirección de propagación de la onda; por consiguiente, para una dirección de propagación dada, por ejemplo el eje X, hay, en principio, infinitas posibilidades para la dirección de la perturbación, ya que la única condición que debe cumplir es que ésta esté contenida en el plano YZ. Además, en general, la dirección de la perturbación no tiene por qué mantenerse constante dentro de este plano, sino que puede variar irregularmente mientras se mantenga en él.

Cuando la dirección de la perturbación sea constante, diremos que la onda está <u>polarizada linealmente</u>. También se dice que tiene polarización plana. A este tipo de polarización se le denomina lineal porque la trayectoria de cada partícula es una línea recta y además la vibración de las partículas del medio se mantiene en un solo plano. Al plano formado por la dirección de propagación y la dirección de vibración se le denomina <u>plano de polarización</u>.



Las ondas transversales producidas por un solo foco, generalmente están polarizadas; la ecuación de la onda , si el plano de polarización es el XY, vendrá dada por:

$$Y = Yo \cos (wt - kx)$$

ya que vibra en la dirección del eje Y, y si lo hace en la dirección del eje Z:

$$Z = Zo \cos (wt - kx + \delta)$$

El principio de superposición se aplica también cuando las ondas no tienen el mismo plano de polarización. Supongamos que se superponen las dos ondas anteriores, en este caso, al ser las direcciones de vibración perpendiculares, para obtener la onda resultante será necesario representarlas en forma vectorial y sumarlas vectorialmente:

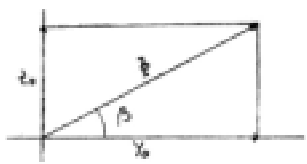
$$\vec{Y} = Yo \cos (wt - kx)\ \vec{j} \qquad\qquad \vec{Z} = Zo \cos (wt - kx + \delta)\ \vec{k}$$

Si la diferencia de fase entre las dos ondas es $\delta = 0$, de la superposición se obtiene:

$$\vec{\Phi} = \vec{Y} + \vec{Z} = (Yo\ \vec{j} + Zo\ \vec{k}) \cos (wt - kx)$$

que representa una onda polarizada linealmente que se propaga a lo largo del eje X, cuyo plano de polarización contiene este eje y forma un ángulo β con el plano XY, de tal forma que:

$$\text{tag}\,\beta = \frac{Z_o}{Y_o} \qquad \text{y cuya amplitud es: } \Phi_o = \sqrt{Y_o^2 + Z_o^2}$$



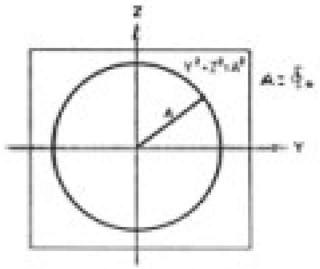
Cuando la diferencia de fase entre las dos ondas es $\delta = \pm \pi/2$, recordando que sen (a + π/2) = cos a , podemos escribir:

$$\Phi = \vec{Y} + \vec{Z} = Yo \cos (wt - kx)\ \vec{j} + Zo\ \text{sen}\ (wt - kx)\ \vec{j}$$

y la amplitud de la onda resultante en cualquier punto x sera:

$$\Phi = \sqrt{Y^2 + Z^2} = \sqrt{Y_o^2 \cos^2 (wt - kx) + Z_o^2 \text{sen}^2 (wt - kx)}$$

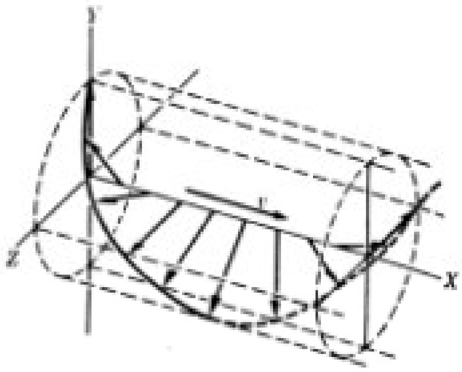
Si suponemos que Yo = Zo = Φ_o obtenemos que:



$$Y^2 + Z^2 = \Phi_o^2$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio Φ_o.

Para un x fijo, al dar valores a t nos encontramos con que el punto describe una circunferencia de radio Φ_o. En este caso se dice que la onda está polarizada circularmente.



Cuando Yo $\neq$ Zo el punto describe una elipse y tenemos la polarización elíptica. Las partículas giran en un sentido o en el otro según el desfase sea positivo o negativo.

Si entre las dos ondas que se superponen no existe una relación de fase constante, la onda resultante no está polarizada.

La polarización es una propiedad de gran importancia en el caso de las ondas luminosas. La polarización de la luz se realiza por diferentes mecanismos. Por ejemplo, por absorción de una parte al interponer una sustancia, llamada polaroide, de la que emerge sólo luz polarizada; o también, por reflexión, ya que, si el ángulo de incidencia es tal que los rayos reflejados y refractados son perpendiculares, la luz reflejada está totalmente polarizada.