MOVIMIENTOS ONDULATORIOS. ONDAS MECÁNICAS.

Desarrollamos la unidad de acuerdo con el siguiente hilo conductor:

1. ¿Qué es un movimiento ondulatorio? ¿Qué es una onda?

2. ¿Cómo clasificar las ondas?

3. ¿Cómo describir el movimiento ondulatorio?
3.1. ¿Qué magnitudes caracterizan una onda armónica unidimensional?
3.2. ¿Cómo es la ecuación de una onda armónica unidimensional?
3.3. ¿Cómo evoluciona la energía transmitida por las ondas armónicas? ¿Por qué se amortiguan las ondas?

4. ¿Qué propiedades presentan las ondas? ¿Cuáles caracterizan un fenómeno ondulatorio?
4.1. ¿Cómo se propaga una onda? Principio de Huygens.
4.1.1. Reflexión y refracción de ondas.
4.1.2. Difracción de ondas.
4.2. ¿Cómo interfieren las ondas? Principio de superposición.
4.2.1. Interferencias entre dos ondas armónicas coherentes.
4.2.2. Ondas estacionarias.

APÉNDICE: La cubeta de ondas.

1. ¿QUÉ ES UN MOVIMIENTO ONDULATORIO? ¿QUÉ ES UNA ONDA?

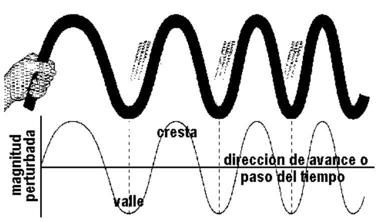
La energía se puede transmitir de unos lugares a otros distantes en forma de energía mecánica, por medio de la interacción de cuerpos: por ejemplo, la bola que golpea a un corcho en reposo. Pero también es posible transferirla mediante ondas que se propagan sin transporte de materia. Este es el caso, por ejemplo, de las olas generadas en la superficie del agua ante el impacto de una bola, olas que, al cabo de un rato, pueden alcanzar un corcho que flota sobre la superficie del agua y provocar en él un movimiento vibratorio vertical en torno a su posición de equilibrio inicial: el corcho oscila arriba y abajo, pero no se desplaza en la dirección de avance de la ola.

Cuando los indios del oeste americano pegaban la oreja al raíl del ferrocarril para adivinar la proximidad del humeante intruso de hierro, lo único que querían era percibir la transmisión de las vibraciones a través del raíl. Distinguimos, pues, dos tipos de movimiento: el movimiento vibratorio del raíl golpeado por el tren, y el movimiento de transmisión de la energía de las vibraciones a larga distancia. Este segundo movimiento, en el que **no se propaga materia**, es el que conocemos como **movimiento ondulatorio**.

Para que haya transferencia de energía mediante un movimiento ondulatorio, tiene que haber una fuente que origine la perturbación (la piedra que golpea el agua, el tren que golpea el raíl,...) que luego se propaga en el espacio que la rodea. Según esto, puede afirmarse que:

Movimiento ondulatorio, representado por una onda, es la propagación de la perturbación de alguna magnitud física de un punto a otro del espacio, sin que exista transporte neto de materia entre ambos; solamente se transmite o propaga energía[1].

Por tanto, el término **onda** se refiere a un modelo gráfico-matemático que sirve para interpretar adecuadamente los fenómenos físicos de naturaleza muy diferente que se engloban dentro del concepto de movimiento ondulatorio. Al hablar de una onda, nos viene a la mente una representación gráfica similar a la de las olas que se propagan por la superficie del agua o a las ondulaciones de una cuerda tensa horizontal al ser agitada (*figura 1*). Aunque en la mayoría de los movimientos ondulatorios comunes (transmisión de sonido y luz) no se percibe visualmente la onda, debemos tener claro que la representación gráfica de los cambios de la magnitud perturbada en función del tiempo nos daría la típica onda (*figura 2*).



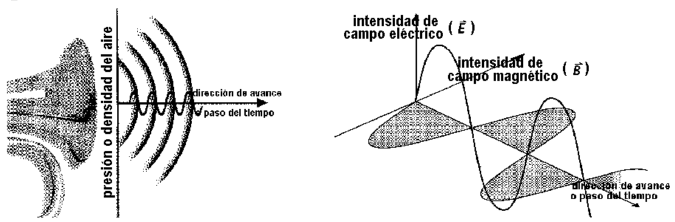


Figura 2

[1] El transporte de energía sin transporte de materia dejará de tener sentido a la luz de la Física moderna, como estudiaremos en el último bloque del curso de Física.

Figura 1

2. ¿CÓMO CLASIFICAR LAS ONDAS?

La gran importancia del estudio del movimiento ondulatorio radica en que nuestro mundo está lleno de ondas. Buena parte de nuestro conocimiento se lo debemos a las ondas (sonoras y luminosas).

Pero, ¿cómo clasificar la diversidad de movimientos ondulatorios? Podemos utilizar diversos criterios:

A) Según necesiten un medio material para su propagación o según el tipo de energía que transporta la onda.

- Las **ondas mecánicas o materiales** <u>precisan</u> de un medio material (sólido, líquido o gaseoso) para transmitir la energía mecánica que transportan. La elasticidad y la rigidez del medio determinan la velocidad de propagación de la onda por el medio, pudiendo expresar su influencia así: $v = \sqrt{\frac{\text{elasticidad}}{\text{rigidez}}}$ .Son ondas mecánicas el sonido, las ondas sísmicas, las olas en la superficie de un líquido, las ondas en una cuerda o en un muelle,...
- Las **ondas electromagnéticas** (**y las gravitacionales**, según la Física moderna) <u>no precisan</u> de medio material para propagarse, es decir, transmiten la energía (electromagnética o gravitacional) que transportan hasta en el vacío. Ejemplos de ondas electromagnéticas son la luz visible, las ondas de radio y TV, las microondas, los rayos X,...; en el vacío todas se propagan a la velocidad límite de 300.000 km/s, pero en cualquier medio material su velocidad de propagación es menor y depende de las características eléctricas y magnéticas del medio.

B) Según la relación existente entre la dirección de vibración de la propiedad perturbada y la dirección de propagación de la onda [2].

- Si ambas direcciones coinciden, las **ondas** son **longitudinales**. El sonido, las ondas sísmicas *P* o las ondas producidas al comprimir y dilatar un muelle son de este tipo. Se propagan por cualquier medio material (sólido, líquido o gaseoso). Cuando se propagan en el seno de un fluido se denominan <u>ondas de presión</u>; es lo que ocurre con el sonido en el aire.
- Si ambas direcciones son perpendiculares, las **ondas** son **transversales**. Las ondas que viajan por una cuerda, las ondas sísmicas *S* o las ondas electromagnéticas son de este tipo.

Las ondas mecánicas transversales requieren para su propagación de medios materiales cuyas partículas ejerzan entre sí fuerzas intermoleculares, medios con cierta rigidez, como en el interior de los sólidos o en las superficies de los líquidos (no en su interior).

C) Según la forma en que se propaga la onda.

Si en un medio provocamos una perturbación en un punto, al cabo de cierto tiempo la perturbación alcanzará simultáneamente una serie de puntos. Si unimos con una línea imaginaria dichos puntos se obtiene una figura denominada <u>frente de ondas</u>. A menudo resulta conveniente, sobre todo en el caso de las ondas electromagnéticas, hablar de <u>rayo</u> en lugar de frente de ondas: el rayo es una línea perpendicular al frente de ondas en todo punto e indica la dirección de propagación del movimiento ondulatorio (*figura 3*).

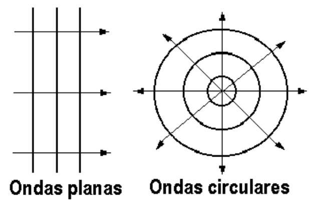


Figura 3

En medios homogéneos e isótropos (medios en los que no varían las propiedades sea cual sea la dirección en que nos movamos) los frentes de ondas responderán a figuras regulares, así: las **ondas unidimensionales**, las que se propagan a lo largo de una línea (como en una cuerda), dan <u>frentes de onda puntuales</u>; las **ondas bidimensionales**, las que se propagan en un plano (como las olas en la superficie de un líquido o las vibraciones de una membrana), dan <u>frentes de onda circulares</u>; y las **ondas tridimensionales**, ondas que se propagan por todo el espacio (como la luz y el sonido), dan <u>frentes de onda esféricos</u>.

No obstante, los frentes de onda circulares o esféricos pueden llegar a considerarse planos en puntos muy alejados del foco perturbador.

D) Según el tiempo que dura la perturbación que origina la onda.

Si la perturbación es instantánea se produce un <u>pulso</u>: un pulso en una cuerda supone que las partículas están en reposo hasta que les llega el pulso y cuando éste pasa vuelven al reposo.

Si la perturbación es continua, se genera un <u>tren de ondas</u> u <u>onda viajera</u>: un tren de ondas en una cuerda supone que todas las partículas de la cuerda se van a poner en movimiento. Cuando nosotros hablamos de ondas y de los parámetros en virtud de los cuales es definida, en realidad nos estamos refiriendo a un tren de ondas.

A.1. Investiga cómo el estudio de las ondas sísmicas nos permite conocer la estructura del interior de la Tierra.

---

[2] Existen ondas mezcla de longitudinales y transversales. Éste es el caso de las ondas que se propagan en la superficie de aguas profundas, en las que se aprecia el perfil característico de crestas y valles. Las moléculas de agua de la superficie describen trayectorias circulares, de manera que cuando se encuentran en la cresta se mueven en el sentido de la onda, mientras que en los valles lo hacen en sentido opuesto. Esto se traduce en que las moléculas de agua no experimentan desplazamiento neto alguno.

3. ¿CÓMO DESCRIBIR EL MOVIMIENTO ONDULATORIO?

En un movimiento ondulatorio se propaga una vibración que se origina en un punto del espacio (fuente o foco emisor) y se transmite a los restantes puntos. Describir el movimiento ondulatorio implica **dar una ecuación que nos proporcione el valor de la magnitud perturbada en cualquier punto del espacio y en cualquier instante**. Esta ecuación puede ser muy complicada en una situación real, por lo que, para simplificar, nos limitamos al caso de **ondas armónicas unidimensionales,** o sea, ondas generadas por un oscilador armónico que se propagan a lo largo de una línea, como en una cuerda tensada horizontalmente y muy larga, que se sacude regular y verticalmente por el extremo libre (*figura 4*). Despreciamos además el amortiguamiento de las ondas a causa de las fuerzas disipativas (de rozamiento externo, de resistencia interna).

Como demostró Fourier en 1822, cualquier otra onda más compleja se puede expresar como una combinación o superposición de ondas armónicas.

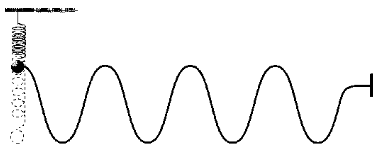


Figura 4

3.1. ¿QUÉ MAGNITUDES CARACTERIZAN UNA ONDA ARMÓNICA UNIDIMENSIONAL?

Dado el carácter periódico que presenta una onda armónica, podemos utilizar para caracterizarla una serie de magnitudes que permanecen constantes durante su propagación, algunas ya tratadas al estudiar el MAS:

- **Elongación** (y). Es la separación de un punto del medio con respecto a la posición central de equilibrio en un instante determinado (unidad SI: metro).
- **Amplitud** (A). Es la máxima elongación de la magnitud perturbada. Se corresponde con la amplitud del oscilador armónico que genera la onda. Solamente depende de la energía que propaga la onda.
- **Período** (T). Es el tiempo que tarda un punto cualquiera en repetir un determinado estado de perturbación u oscilación (unidad SI: segundo). También es el tiempo que tarda una onda en volver a reproducirse (*figura 5.1*).
  Recuerda que la inversa del período es la **frecuencia** ($f = \nu = 1/T$), el número de veces que un determinado punto repite cierto estado de perturbación por unidad de tiempo. O también, el número de veces que la onda se reproduce en la unidad de tiempo.
  Otro parámetro ya conocido es la **frecuencia angular** o **pulsación** ($\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$).
  Período, frecuencia y pulsación son propiedades características del oscilador armónico que hace de foco emisor de ondas y es independiente de la amplitud del movimiento. Esto quiere decir que sus valores permanecen constantes cuando la perturbación se propaga por un medio o cambia de un medio de propagación a otro.

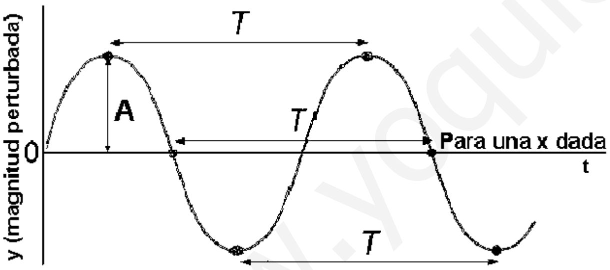


Figura 5.1

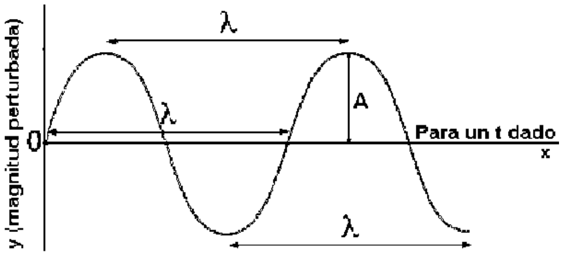


Figura 5.2.

- **Longitud de onda** (λ). Es la distancia entre dos puntos consecutivos que se encuentran en idéntico estado de perturbación (suele decirse entre dos puntos consecutivos en idéntica fase) (unidad SI: metro). Es decir, es la distancia que se ha propagado la perturbación en un período (*figura 5.2*), lo que no depende de los puntos que sirven como referencia para determinarla.
- **Velocidad de propagación (o de fase)** (v). Es el desplazamiento efectuado por la onda en la unidad de tiempo y, como ya hemos comentado, depende de las características del medio (elasticidad y rigidez). Teniendo en cuenta los parámetros que hemos definido hasta el momento, observamos que la onda recorre una distancia λ en un tiempo T, por lo que: $v=\frac{\lambda}{T}$ (unidad SI: m/s). Otras relaciones útiles serían: $v=\lambda\cdot\nu=\frac{\lambda\cdot\omega}{2\pi}$.
  En un medio dado (con una velocidad de propagación determinada), el período o la frecuencia de la onda determinan la longitud de onda correspondiente, y viceversa. Cuando una onda cambia de medio, modifica su velocidad de propagación y, por consiguiente, modifica su longitud de onda, ya que el período o la frecuencia de la onda no cambian.
  No confundir la velocidad de propagación de la onda por el medio con la velocidad de vibración de cada una de las partículas del medio. La velocidad de fase de la onda por un medio homogéneo e isótropo tiene un valor constante. La velocidad de vibración de las partículas del medio sigue una sucesión periódica de valores entre dos valores extremos y se obtiene derivando la elongación en la ecuación de onda respecto al tiempo.

- **Número de ondas** (*k*). Se define como la cantidad de ondas completas contenidas en una distancia 2π metros. Es decir: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ (unidad SI: metro[-1]). Relaciones útiles: $k = \dfrac{2\pi}{v \cdot T} = \dfrac{\omega}{v}$. Resulta, pues, que el número de ondas es la relación entre la pulsación y la velocidad de propagación.
  No debes confundir el número de ondas con la constante recuperadora de un sistema elástico (tienen el mismo símbolo).

A.2. La frecuencia del sonido emitido por un diapasón es 440 Hz. Si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuál es su longitud de onda? Si el sonido pasa a propagarse por el agua, donde la velocidad de fase es de 1.500 m/s, ¿cuál es su frecuencia?, ¿cuál es su longitud de onda?

3.2. ¿CÓMO ES LA ECUACIÓN DE UNA ONDA ARMÓNICA UNIDIMENSIONAL?

Supongamos que por una cuerda se propaga hacia la derecha una onda armónica unidimensional, con velocidad v, a partir del foco o centro emisor de la onda. Como cada uno de los puntos involucrados en la onda vibran con MAS; la elongación de cada punto viene dada por la ecuación: $y\ (t_v) = A \cdot sen\ \omega t_v$, donde t_v es el tiempo que lleva cada punto vibrando y donde suponemos, para simplificar, que el desfase inicial es nulo (o sea, cada punto comienza su vibración partiendo de la posición de equilibrio).

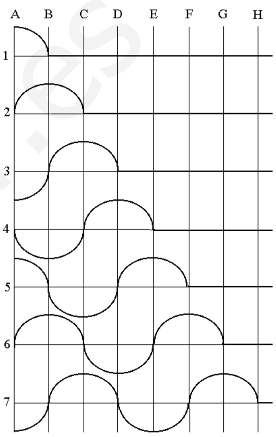


Figura 6

Está claro que el tiempo t_v transcurrido desde el inicio de la vibración es diferente para cada punto: cuanto más alejado esté un punto del foco, más tarde llegará la perturbación, por lo que menor será el tiempo que lleva vibrando en un instante determinado (*figura 6*).

Si llamamos *t* al tiempo transcurrido desde el inicio del movimiento en el origen de la onda, y *t´* al tiempo que tarda la perturbación en llegar al punto en estudio (si este punto se encuentra a una distancia *x* del origen resulta que: $t´ = \dfrac{x}{v}$), tenemos que $t_v = t - t´ = t - \dfrac{x}{v}$. Por tanto, la ecuación de onda tendrá la siguiente expresión en función de *x* y *t*: $y\ (x,t) = A.sen\ \omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$, y haciendo uso de las relaciones entre magnitudes:

$$y\ (x,t) = A \cdot sen\ \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = A \cdot sen\ \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{Tv}\right) = A \cdot sen\ \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A \cdot sen\ (\omega t - kx)$$

La ecuación o función de onda queda definida si conocemos la amplitud del movimiento y dos magnitudes más, una temporal (*T*, *v* o ω) y otra espacial (λ o *k*).

En todo el tratamiento anterior se supone que el desfase inicial es nulo. De no ser así, la ecuación o función de onda que permite conocer el estado de vibración de cada uno de los puntos del medio en cualquier instante, para una onda armónica unidimensional que se desplaza a la derecha es: $\boxed{y\ (x,t) = A \cdot sen\ (\omega t - kx + \varphi_0)}$; conocida como ecuación de D´Alembert. Si la perturbación se desplaza en el sentido negativo del eje X, entonces la ecuación anterior se transforma en: $\boxed{y\ (x,t) = A \cdot sen\ (\omega t + kx + \varphi_0)}$ [3]

Cuando la diferencia de fase entre dos situaciones, separadas en el espacio y/o en el tiempo, es $\Delta\varphi = 2\pi n$ *rad* (con *n* = 0, 1, 2, 3, ...), su estado de vibración es el mismo y decimos que están en fase. Y si la diferencia de fase es $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$ *rad* (con *n* = 0, 1, 2, 3, ...), los estados de vibración están en oposición de fase.

A.3. El movimiento ondulatorio armónico es doblemente periódico. Tiene un período temporal, caracterizado por *T*, y un período espacial, caracterizado por λ. Es decir, los valores de la función de ondas para un punto cualquiera se repiten tras *T* segundos; además, la función de ondas presenta el mismo valor en puntos separados entre sí una distancia de λ m, en cualquier instante. Realiza la comprobación analítica.

[3] Haciendo uso de ciertas relaciones trigonométricas: $cos\ \alpha = sen\ (\alpha+\pi/2) = sen\ (\pi/2-\alpha)$; $sen\ (\alpha+\beta) = sen\ (\beta+\alpha)$; $sen\ (\alpha-\beta) = sen\ (\beta-\alpha \pm \pi)$; $cos\ (\alpha-\beta) = cos\ (\beta-\alpha)$; $cos\ (\alpha+\beta) = cos\ (\beta+\alpha \pm \pi)$; se comprende que la ecuación de onda pueda adoptar diferentes formas:
- Para ondas armónicas unidimensionales o planas que se desplazan a la derecha:
  $y\ (x,t) = A \cdot sen\ (\omega t - kx + \varphi_0)$; $y\ (x,t) = A \cdot sen\ (kx - \omega t + \varphi_0)$; $y\ (x,t) = A \cdot cos\ (\omega t - kx + \varphi_0)$; $y\ (x,t) = A \cdot cos\ (kx - \omega t + \varphi_0)$
- Para ondas armónicas unidimensionales o planas que se desplazan a la izquierda:
  $y\ (x,t) = A \cdot sen\ (\omega t + kx + \varphi_0)$; $y\ (x,t) = A \cdot sen\ (kx + \omega t + \varphi_0)$; $y\ (x,t) = A \cdot cos\ (\omega t + kx + \varphi_0)$; $y\ (x,t) = A \cdot cos\ (kx + \omega t + \varphi_0)$

En las ecuaciones anteriores nos referirnos a una onda que progresa en la dirección del eje X, y donde el valor de la coordenada *Y* varía con *x* y *t*. No obstante, la magnitud perturbada en el espacio y en el tiempo puede ser cualquiera; así, en las ondas sonoras en medios gaseosos varía la presión o la densidad del aire, mientras que en las ondas electromagnéticas lo hacen los valores del campo eléctrico y magnético.

La periodicidad espacial del movimiento ondulatorio nos lleva a una definición precisa del frente de ondas como el lugar geométrico de todos los puntos que en un instante dado están en fase, o sea, en el mismo estado de perturbación.

A.4. Resuelve las siguientes actividades:

A.4.1. El extremo de una cuerda larga y tensa se hace vibrar con un período de 2 s y una amplitud de 4 cm. La velocidad de propagación es de 50 cm/s. Calcula:

a) La elongación, velocidad y aceleración de cualquier punto de la cuerda en cualquier instante.

b) La elongación, velocidad y aceleración de un punto de la cuerda situado a 10 cm del foco. Realiza la representación gráfica de las magnitudes anteriores frente al tiempo, para el citado punto. ¿En qué instantes alcanza ese punto los valores máximos de las magnitudes anteriores?

c) La elongación, velocidad y aceleración de cualquier punto de la cuerda en el instante inicial y transcurridos 5 s del inicio del movimiento. Realiza la representación gráfica de las magnitudes anteriores para cualquier punto de la cuerda, en los instantes dados ¿Qué diferencia de fase existe entre los estados de vibración de un punto cualquiera de la cuerda entre dichos instantes?.

A.4.2. La ecuación de una onda viene dada por la expresión: $y = 6.sen\, \pi\, (0{,}25.t - 3.x)$ (cm, s). Determina:

a) El período, la frecuencia, la pulsación, la amplitud, la longitud de onda, el número de ondas y la corrección de fase.

b) La elongación, velocidad y aceleración de un punto de la cuerda situado a 7 cm del foco. Realiza la representación gráfica de las magnitudes anteriores frente al tiempo, para el citado punto. ¿En qué instantes alcanza ese punto los valores máximos de las magnitudes anteriores?.

c) La elongación, velocidad y aceleración de cualquier punto de la cuerda en el instante inicial y transcurridos 4 s del inicio del movimiento. Realiza la representación gráfica de las magnitudes anteriores para cualquier punto de la cuerda, en los instantes dados ¿Qué diferencia de fase existe entre los estados de vibración de un punto cualquiera de la cuerda entre dichos instantes?.

d) La elongación, velocidad y aceleración de un punto de la cuerda: d1) situado en el foco emisor a 1 s de iniciado el movimiento; d2) situado a 15 cm del foco emisor a 5 s de iniciado el movimiento. ¿Qué diferencia de fase existe entre los estados de vibración de los dos puntos anteriores en los instantes dados?.

A.4.3. El período de un movimiento ondulatorio es de 3 s, la velocidad de fase es de 40 m/s, y la amplitud es de 2 m. El punto inicial presentaba una elongación de 1 m en el instante inicial y con tendencia a aumentarla. Determina:

a) La ecuación de la onda y la de otra onda idéntica a la anterior que se propague en sentido contrario.

b) La elongación, velocidad y aceleración: b1) del origen de la onda a los 2 s de iniciado el movimiento; b2) de un punto distante 10 m del origen, a los 5 s de iniciado el movimiento. ¿Qué diferencia de fase existe entre los estados de vibración de los dos puntos anteriores en los instantes dados?.

c) Los puntos que están en fase y en oposición de fase en un instante determinado, y la distancia que los separa.

d) El desfase en un instante cualquiera entre dos puntos separados 30 m entre sí a lo largo de la dirección de propagación de la onda.

A.4.4. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es: $y = 8.cos\, \pi\, (0{,}05.x - 3.t)$ (cm, s). Determina:

a) El período, la frecuencia, la pulsación, la amplitud, la longitud de onda, el número de ondas, la velocidad de propagación y el desfase inicial.

b) La elongación, velocidad y aceleración de un punto distante 2 cm del origen, a los 3 s de iniciado el movimiento.

c) La separación de dos puntos consecutivos que en el mismo instante vibren con una diferencia de fase de 60º .

d) El intervalo de tiempo que transcurre entre dos estados de vibración consecutivos de un punto con una diferencia de fase de 180º.

A.4.5. Un oscilador vibra con una frecuencia de 500 Hz y una amplitud de de 5 cm y genera ondas que se propagan en el sentido negativo del eje X a una velocidad de 300 m/s. Un punto que distaba 2 cm del origen, presentaba en el instante inicial una elongación de 3 cm. Calcula:

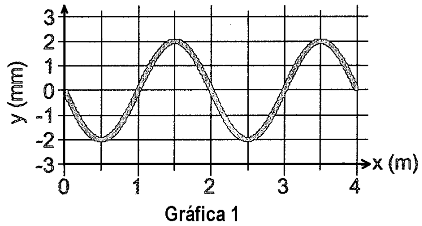
a) La ecuación de propagación de la onda.

b) La elongación, velocidad y aceleración de un punto distante 2 cm del origen, a los 2 s de iniciado el movimiento.

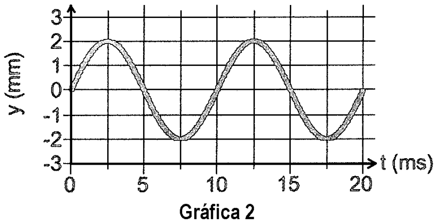
c) ¿Cuál es la separación entre dos puntos consecutivos que en el mismo instante tienen una diferencia de fase de 30º?

d) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos elongaciones de un mismo punto separadas por un intervalo de tiempo de 0,001 s?

A.4.6. Por una cuerda tensa situada a lo largo del eje OX se propaga, en el sentido positivo de dicho eje, una onda transversal armónica. En la *gráfica 1* se muestra el perfil de la onda en t = 0 s, y en la *gráfica 2* se representa, en función del tiempo, el desplazamiento transversal del punto de la cuerda situado en x = 0 m. Determina:



Gráfica 1



Gráfica 2

a) La ecuación de la onda y la de otra onda idéntica a la anterior que se propague en sentido contrario.

b) La elongación, velocidad y aceleración: b1) del origen de la onda a los 2 s de iniciado el movimiento; b2) de un punto distante 10 m del origen, a los 5 s de iniciado el movimiento. ¿Qué diferencia de fase existe entre los estados de vibración de los dos puntos anteriores?.

c) Los puntos que están en fase y en oposición de fase en un instante determinado, y la distancia que los separa.

d) La elongación de una partícula: d1) 1 s después; d2) π s después; de que ésta tuviera un valor de 1 mm.

3.3. ¿CÓMO EVOLUCIONA LA ENERGÍA TRANSMITIDA POR LAS ONDAS ARMÓNICAS? ¿POR QUÉ SE AMORTIGUAN LAS ONDAS?

La **energía transmitida por una onda mecánica armónica unidimensional** (como la que se propaga por una cuerda que vibra) se corresponde con la energía mecánica del oscilador armónico que origina la onda, deducida en el tema anterior (*apartado 2.3*): $E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=2\pi^2mf^2A^2$ *J (utilizamos f para la frecuencia para evitar confusiones entre v y* v*)*

La energía que transporta una onda mecánica armónica es directamente proporcional al cuadrado de la frecuencia, al cuadrado de la amplitud y a la masa de las partículas que vibran.

El foco emisor determina la frecuencia de la onda (magnitud independiente de la amplitud, constante mientras la onda se propaga por el espacio) y también su **potencia** o **energía transmitida por la onda en la unidad de tiempo**; para ondas armónicas unidimensionales: $P=\frac{E}{\Delta t}=\frac{2\pi^2mf^2A^2}{\Delta t}=\frac{2\pi^2\mu\Delta x f^2A^2}{\Delta t}=2\pi^2\mu v f^2A^2$ *W*, donde hacemos uso de los conceptos de densidad lineal ($\mu=m/\Delta x$) y de velocidad de propagación ($v=\Delta x/\Delta t$).

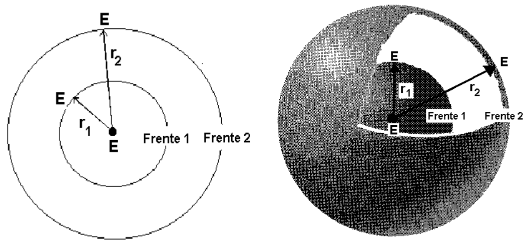
Dicha potencia determina a su vez la **intensidad de la onda** en cualquier punto del medio, esto es, la energía que atraviesa por unidad de tiempo (potencia) una superficie unidad perpendicular a la dirección de propagación de la onda en dicho punto: $I=\frac{E}{\Delta t\cdot S}=\frac{P}{S}$ (unidad SI: *W/m²*). Representa una medida de la rapidez con que se transfiere la energía.

Es de sobra conocido que en las situaciones cotidianas todas las ondas se amortiguan (se debilitan) al propagarse desde el foco emisor; disminuye su amplitud y, por tanto, su intensidad. Los motivos del amortiguamiento son puramente geométricos y/o debidos a la interacción con el medio.

- **Amortiguamiento de ondas por motivos geométricos.** Disminución que experimenta la amplitud y la intensidad de las ondas bi y tridimensionales (mecánicas o no) al aumentar su distancia al foco emisor, con independencia de la interacción o no con el medio de propagación. La conservación de la energía que se transmite desde el foco emisor exige que ésta se reparta en los sucesivos frentes de onda concéntricos, cada vez mayores, con lo que cada punto del área afectada recibe una menor energía.

  De la *figura 7*, de la definición de intensidad ($I=\frac{P}{S}$) y de la relación entre intensidad y amplitud ($I\cong A^2$; $A\cong\sqrt{I}$) se deduce que:

  - En el caso de ondas armónicas **bidimensionales**: $I=\frac{P}{2\pi R}$; la intensidad es inversamente proporcional a la distancia al foco emisor, luego la amplitud es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia a dicho foco ($A\cong\frac{1}{\sqrt{R}}$). Las relaciones entre las intensidades o las amplitudes de dos frentes de ondas sucesivos serían en este caso: $\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1}\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$.



Ondas circulares *Ondas esféricas*

Figura 7

  - En el caso de ondas armónicas **tridimensionales**: $I=\frac{P}{4\pi R^2}$; la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor, luego la amplitud es inversamente proporcional a la distancia a dicho foco ($A\cong\frac{1}{R}$). Las relaciones entre las intensidades o las amplitudes de dos frentes de ondas sucesivos serían en este caso: $\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2^2}{R_1^2}\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{R_2}{R_1}$

- **Amortiguamiento de ondas por la interacción con el medio de propagación** (efecto conocido generalmente como **atenuación de ondas** en el campo de estudio de la propagación de ondas y teoría de la señal). Disminución que experimenta la amplitud y la intensidad de todas las ondas al interaccionar con el medio material en el que se propagan. Debido a esa interacción, las ondas experimentan fenómenos de absorción y dispersión de la energía mecánica que portan; parte de esa energía se intercambia con el medio y se degrada en forma de calor.

  Se comprueba experimentalmente que la intensidad de una onda unidimensional o plana disminuye exponencialmente con la distancia recorrida a través del medio: $\boxed{I=I_o\cdot e^{-\beta x}}$, (ley de Lambert-Beer), donde: I_o e I son, respectivamente, las intensidades al inicio y tras atravesar cierta distancia x por el medio, y β es una constante que depende de las características del medio y del tipo de onda, denominada coeficiente de absorción (unidad SI: m^{-1})

La absorción tiene múltiples aplicaciones prácticas, en la vida cotidiana (sonorización de salas de cine, teatros, salas de conferencias,...) y a nivel científico (análisis químico cualitativo y cuantitativo de disoluciones basado en la espectroscopia de absorción, o sea, en el reconocimiento de sustancias químicas en base al máximo de absorción para frecuencias características de los grupos funcionales y enlaces que las forman).

A.5. Resuelve las siguientes actividades:

A.5.1. La potencia lumínica del Sol es, aproximadamente, $2{,}7.10^{20}$ MW. ¿Qué intensidad luminosa recibimos sobre la superficie terrestre? ¿Y sobre la superficie de Marte? ¿A qué se debe la diferencia? Distancia Tierra-Sol = $1{,}5.10^{11}$ m. Distancia Marte-Sol = $2{,}3.10^{11}$ m.

A.5.2. La intensidad de una onda armónica esférica es 6.10^{-8} W/cm^2 a 20 cm del foco emisor. Si no hay absorción, calcula: a) la energía emitida por el foco emisor en un minuto; b) la amplitud de la onda a los 40 m, si a los 20 m es de 4 mm.

A.5.3. Una partícula transmite al medio elástico, homogéneo, isótropo y no absorbente que le rodea, energía a razón de 10 J durante 5 s de forma continua. La amplitud de la vibración es de 2 cm a una distancia de 10 cm del foco. Calcula: a) la intensidad del movimiento ondulatorio en un punto que dista 50 cm del foco; b) la distancia del foco a la que la intensidad de la onda es la mitad de la obtenida en el apartado anterior.

A.5.4. ¿Cuál es la intensidad de una onda de ecuación $y\,(x,t) = 0{,}02.\text{sen}\ 2\pi(5t - 8x)$ (unidades SI), propagándose por un medio fluido de densidad 15,6 g/cm^3?

A.5.5. Una onda plana penetra en un medio cuyo coeficiente de absorción es de 0,4 cm^{-1}. ¿Qué espesor recorrerá antes de que su intensidad se reduzca a la cuarta parte de su valor original?

A.5.6. La intensidad de una onda plana se reduce en un 25% al atravesar 5 cm de cierto material. ¿Qué distancia necesita recorrer en dicho material para reducir la intensidad inicial a la mitad?

4. ¿QUÉ PROPIEDADES PRESENTAN LAS ONDAS? ¿CUÁLES CARACTERIZAN UN FENÓMENO ONDULATORIO?

El movimiento ondulatorio comparte propiedades con otros movimientos que se dan en nuestro entorno, como son la **reflexión** y la **refracción**. Pero existen otras propiedades específicas o características de las ondas, que no poseen otros fenómenos físicos, como la **difracción**, la **interferencia,** la **polarización** (estudiada en el bloque de Óptica, pues esta propiedad sólo afecta a las ondas transversales y la luz es el ejemplo más común de onda transversal) y el **efecto Doppler** (estudiado al tratar el sonido, en el tema siguiente).

Analizamos las propiedades que presentan las ondas haciendo uso de dos principios, el principio de propagación de Huygens y el principio de superposición.

4.1. ¿CÓMO SE PROPAGA UNA ONDA? PRINCIPIO DE HUYGENS.

La propagación de una onda depende del movimiento de su frente de onda (cada una de las superficies que pasan por los puntos donde una onda oscila con la misma fase). Conforme avanza el frente de onda el movimiento ondulatorio se propaga alcanzando a nuevos puntos del medio.

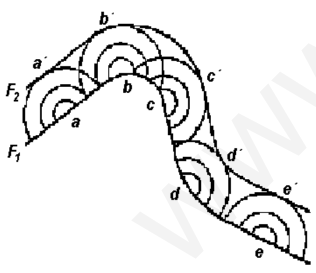


Figura 8. Las ondas secundarias que parten de los puntos *a, b, c, d, e* del frente F_1 habrán alcanzado simultáneamente, al cabo de cierto tiempo, los puntos *a´, b´, c´, d´, e´* que, al unirlos, determinarán el frente F_2. Esta formación sucesiva de frentes de onda constituye el fenómeno de propagación de las ondas.

Christiaan Huygens ideó en 1690 un método geométrico para construir el frente de onda en un instante dado, conocido dicho frente en un instante anterior. El principio dice así:

> Los puntos situados en un frente de ondas se convierten en fuentes de ondas secundarias, cuya envolvente constituye un nuevo frente de ondas primario.

La forma de aplicarlo es la siguiente: se trazan pequeños círculos de igual radio con centros en diferentes puntos de un frente de ondas, y luego se traza la envolvente de los círculos, la cual constituye el nuevo frente de ondas (*figura 8*).

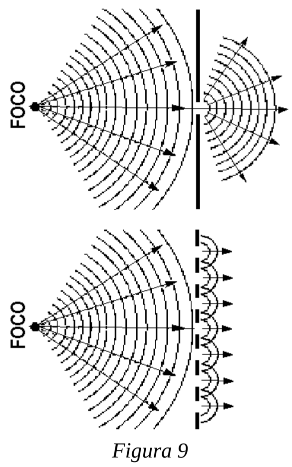


Figura 9

La comprobación experimental del principio se puede realizar en la cubeta de ondas (*figura 9*), siendo válido para todo tipo de ondas, materiales o no.

Una consecuencia del principio de Huygens es que todos los rayos tardan el mismo tiempo entre dos frentes de onda consecutivos.

4.1.1. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS.

Cuando una onda que avanza a cierta velocidad por un medio homogéneo llega a una superficie que separa dicho medio de propagación de otro distinto, ocurren simultáneamente, en mayor o menor medida, dos fenómenos ondulatorios básicos, consistentes en la **desviación de la dirección de propagación de la onda**: la reflexión y la refracción (*figura 10*). En la **reflexión**, la onda continua propagándose en el mismo medio de donde proviene, pero con distinta dirección y sentido; ejemplos: la reflexión de la luz en un espejo; el eco que se produce al reflejarse el sonido en un obstáculo; etc. En la **refracción**, la onda cambia de medio de propagación, produciéndose un cambio de dirección al pasar oblicuamente al nuevo medio, al propagarse en él con diferente velocidad; ejemplos: la refracción de la luz al pasar del agua al aire, que hace que un objeto recto (pajita, lápiz,...) parcialmente sumergido en el agua, se aprecie quebrado; la desviación que experimenta el sonido al pasar por distintas capas atmosféricas, que permite escuchar sonidos lejanos (como la sirena de un barco o de un tren muy lejano); etc. Desde el punto de vista energético, está claro que la energía de la onda incidente se reparte entre la onda reflejada y la refractada.

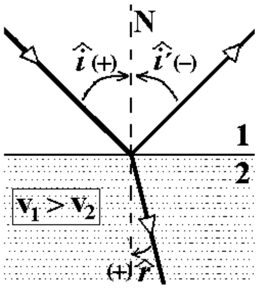


Figura 10.1

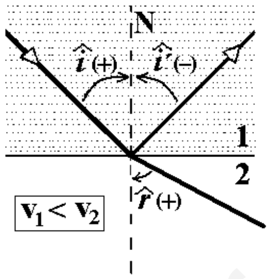


Figura 10.2

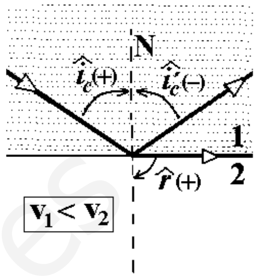


Figura 10.3

Experimentalmente se comprueban las siguientes leyes:

1ª. Las direcciones de incidencia, reflexión y refracción están en el mismo plano, que es perpendicular a la superficie de separación y contiene a la normal (*figura 10*).

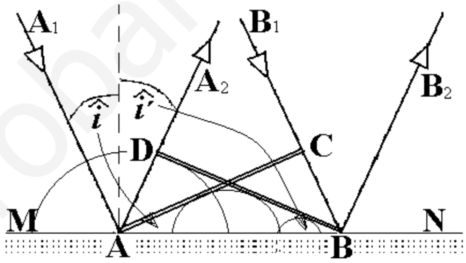


Figura 11

2ª. El ángulo que forma la dirección de incidencia con la normal, ángulo de incidencia ($\hat{\imath}$), es igual y opuesto al ángulo que forma la dirección de reflexión con la normal, ángulo de reflexión ($\hat{\imath}'$): $\hat{\imath} = -\hat{\imath}'$ (*la figura 11 muestra como aplicando el principio de Huygens se llega a esta conclusión*).

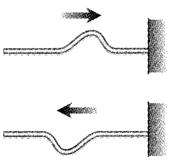


Figura 12.1

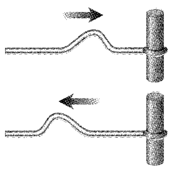


Figura 12.2

Cuando una onda se refleja en una superficie rígida o más densa (por ejemplo, la onda que recorre una cuerda cuyo extremo se encuentra fijo a una pared), se observa una inversión en su sentido de vibración (inversión de fase o cambio de fase de π rad) (*figura 12.1*). Por el contrario, cuando la onda se refleja en una superficie elástica o menos densa (imagina la cuerda anterior unida en el extremo a un anillo que pueda deslizarse verticalmente sobre un poste liso), no se invierte el sentido de vibración (no hay cambio de fase) (*figura 12.2*).

3ª. El cociente entre el seno del ángulo de incidencia ($\hat{\imath}$) y el seno del ángulo de refracción ($\hat{r}$) es constante e igual al cociente entre los respectivos valores de la velocidad de propagación de la onda en ambos medios: $\frac{sen\,\hat{\imath}}{sen\,\hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}$ (ley de Snell) [4]

(*la figura 13 muestra como aplicando el principio de Huygens se llega a esta conclusión*).

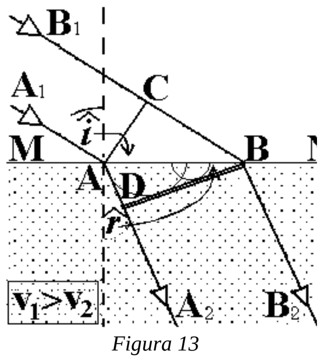


Figura 13

De la ley de Snell se deduce que $v_1 > v_2$ implica $\hat{\imath} > \hat{r}$, o sea, la dirección de propagación de los frentes de onda refractados se acercan a la normal (*figura 10.1*). En caso contrario, $v_1 < v_2$ implica $\hat{\imath} < \hat{r}$, con lo que la dirección de propagación de los frentes de onda refractados se alejan de la normal (*figura 10.2*). En este último caso puede manifestarse a partir de cierto ángulo de incidencia (conocido como ángulo límite o crítico) el fenómeno de **reflexión total** (los frentes de onda refractados se propagan en la línea de separación de los dos medios, con lo que podemos decir que no hay refracción, de aquí el nombre dado al fenómeno) (*figura 10.3*).

A.6. Resuelve las siguientes actividades:

A.6.1. Justifica la 2ª y 3ª ley expuestas anteriormente para la reflexión y la refracción de ondas apoyándote en el principio de Huygens.

A.6.2. ¿Qué ocurrirá si la dirección del frente de onda es paralela (la dirección del rayo es perpendicular) a la superficie de separación de los dos medios? Razona tu respuesta.

[4] Como veremos en el bloque de Óptica, para ondas luminosas es muy frecuente hablar de índice de refracción absoluto de un medio (*n*) como el cociente entre la velocidad de propagación de la luz en el vacío (*c*) y la velocidad a través del medio en cuestión: $n = c/v$. De aquí se deduce: $v = c/n$, y por tanto: $v_1/v_2 = n_2/n_1$, con lo que la ley de Snell puede expresarse como: $\frac{\text{sen}\,\hat{\imath}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, donde la constante n_{21} es el índice de refracción relativo de un medio respecto a otro.

A.6.3. Cualquiera que sea el ángulo de incidencia, ¿se producirá siempre refracción cuando el segundo medio tiene mayor índice de refracción absoluto (menor velocidad de propagación)? ¿Y cuando el segundo medio tiene menor índice de refracción absoluto (mayor velocidad de propagación? Razona tus respuestas.

A.6.4. Una onda, que se propaga por una cuerda, responde a la ecuación: $y\ (x,t) = 3\cdot10^{-3}\cdot sen\ (80t - 6x)$ (unidades SI). Si la cuerda tiene un extremo fijo en una pared, escribe la ecuación de la onda reflejada.

4.1.2. DIFRACCIÓN DE ONDAS.

A toda desviación en la dirección de propagación de una onda por otro mecanismo que no sea reflexión y/o refracción se le llama difracción. La **difracción** es un fenómeno típicamente ondulatorio que se produce cuando una onda modifica su dirección de propagación al encontrarse con aberturas u obstáculos cuyo tamaño es del mismo orden que el de su longitud de onda (*figura 14*). Los puntos del frente de onda que no son tapados por el obstáculo se convierten en centros emisores de nuevos frentes de onda, según el principio de Huygens, logrando la onda atravesar el orificio o bordear el obstáculo y propagarse detrás del mismo. Este hecho permite que la onda llegue a puntos situados tras aberturas u obstáculos, algo inimaginable en el mundo de las partículas. Se utiliza, por ello, para determinar si un fenómeno desconocido es o no de naturaleza ondulatoria[5].

Por la difracción del sonido podemos escuchar detrás de una esquina la conversación de dos personas (las ondas sonoras presentan λ entre unos pocos centímetros y varios metros); sin embargo, no podemos ver a las personas (la luz visible presenta λ muy pequeñas, del orden de 10^{-7} m, por lo que no experimenta difracción en los orificios u obstáculos ordinarios).

La difracción de las ondas tiene una enorme importancia en Física: determinación de redes cristalinas de minerales, medida de longitudes de onda, análisis espectral, etc.

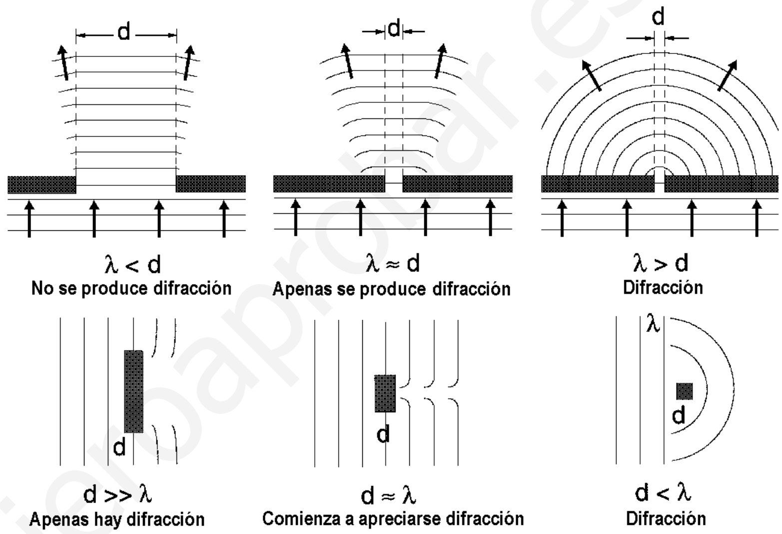


Figura 14

A.7. ¿Podría observarse difracción de la luz visible en una rendija de 10 cm de ancha? ¿Y del sonido?. Datos: v_{sonido} (en el aire)= 340 m/s; v_{luz} (en el aire)= 3.10^8 m/s; ν_{sonido} = 20 - 20.000 Hz; ν_{luz} = 4.10^{14} - 7.10^{14} Hz.

4.2. ¿CÓMO INTERFIEREN LAS ONDAS? PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN.

Cuando dos objetos chocan, intercambian cantidad de movimiento y energía, modificando las características de su movimiento tras el choque. ¿Ocurre lo mismo al encontrarse, en un mismo punto del medio, dos o más ondas generadas en focos distintos (fenómeno conocido como **interferencia de ondas**)?

Nuestra experiencia cotidiana permite dar una respuesta a esta pregunta: cuando hablamos varias personas al mismo tiempo en una habitación nuestras voces se propagan por el mismo medio (el aire) sin estorbarse lo más mínimo; cuando lanzamos a un estanque de aguas tranquilas dos piedras a la vez, las ondas producidas se entrecruzan y siguen cada una su camino. Sin embargo, en ambas situaciones planteadas tiene lugar un interesante fenómeno: el ruido producido cuando varias personas hablan en una misma habitación es mayor que cuando lo hace una sola; igualmente, cuando las ondulaciones del agua se entrecruzan, las olas parecen reforzarse en determinadas zonas mientras que en otras da la impresión de que se anulan. Estos hechos pueden explicarse haciendo uso del **principio de superposición**, enunciado por Bernouilli en el siglo XVIII[6]:

> Cuando un punto del medio es alcanzado simultáneamente por dos o más movimientos ondulatorios, la perturbación resultante en dicho punto es la suma vectorial de las perturbaciones que originaría cada movimiento por separado.

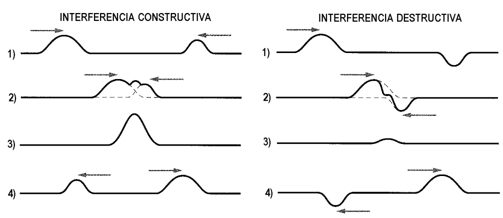


Figura 15

Cuando las perturbaciones tienen la misma dirección, la suma vectorial se convierte en suma algebraica; así, para la interferencia de dos ondas: $y\ (x_1,x_2,t) = y\ (x_1,t) + y\ (x_2,t)$. Cuando las dos ondas (*figura 15*)

[5] Las experiencias de difracción con electrones pusieron de manifiesto su naturaleza dual, ondulatoria y corpuscular.

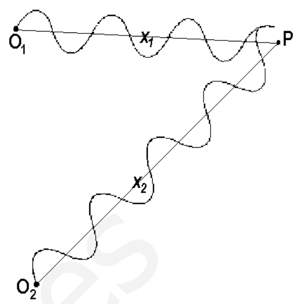
[6] El principio de superposición es aplicable a las ondas electromagnéticas y a las ondas mecánicas de pequeña amplitud, como las sonoras, pero sólo cuando las ondas se propagan en medios en los que la fuerza restauradora se comporta según la ley de Hooke.

poseen elongaciones del mismo sentido (positivo o negativo), la magnitud de la elongación resultante es mayor que la de cada onda por separado (<u>interferencia constructiva</u>). Si las elongaciones tienen sentido opuesto, la magnitud de la elongación resultante es menor que la de cada onda individual (<u>interferencia destructiva</u>).

Tras la posición de interferencia, las ondas continúan independientemente su camino, conservando sus características originales como si no se hubiesen encontrado. Este hecho es una propiedad característica de las ondas y se utiliza, por ello, para determinar si un fenómeno desconocido es o no de naturaleza ondulatoria[7].

4.2.1. INTERFERENCIAS DE DOS ONDAS ARMÓNICAS COHERENTES.

Especialmente interesante es la interferencia de **ondas coherentes**, <u>ondas de la misma frecuencia y cuya diferencia de fase se mantiene constante a lo largo del tiempo</u>.



A.8. Para simplificar, supongamos que los focos O_1 y O_2 emiten ondas armónicas unidimensionales o planas idénticas, o sea, ondas de la misma frecuencia, de la misma amplitud, y que se propagan por el mismo medio con la misma fase (desfase nulo).

Demuestra, haciendo uso del principio de superposición, que cuando estas ondas coherentes interfieren en un punto *P* del medio, distante x_1 m del foco O_1 y x_2 m del foco O_2, la ecuación de onda resultante es: $y(x_1,x_2,t) = 2A.\cos\left(\frac{k(x_2-x_1)}{2}\right)\cdot sen\left(\omega t-\frac{k(x_1+x_2)}{2}\right) = A_r\cdot sen\left(\omega t-\frac{k(x_1+x_2)}{2}\right)$

¿Cuál es la condición que deben cumplir los puntos con interferencia constructiva para obtener un valor máximo de elongación (<u>condición de máximos</u>)? ¿Y qué condición deben cumplir los puntos de interferencia destructiva para obtener un valor mínimo, nulo en nuestro caso (<u>condición de mínimos</u>)?.

¿Qué distancia mínima, en la línea que contiene los focos, separa dos vientres consecutivos? ¿Y dos nodos? ¿Y un vientre de un nodo?.

Se deduce que, en el caso de ondas armónicas planas idénticas:

- La onda resultante es también armónica, de la misma frecuencia que los movimientos ondulatorios que interfieren.

- La amplitud resultante de cada punto del medio A_r ($2A\cdot\cos\left(\frac{k(x_2-x_1)}{2}\right)$) depende de la diferencia de caminos desde el punto considerado a los focos emisores de las ondas, y es independiente del tiempo. Es decir, determinados puntos fijos, llamados <u>nodos</u>, presentan interferencia totalmente destructiva (amplitud nula, no vibran, están en estado estacionario); otros puntos fijos, llamados <u>vientres o antinodos</u>, pueden presentar en ciertos instantes interferencia totalmente constructiva (amplitud máxima). Ello determina las llamadas figuras de interferencia (*figura 16*), donde se distinguen familias de franjas hiperbólicas estacionarias de nodos y vientres.

Cuando la diferencia de caminos desde el punto considerado a los focos emisores es un múltiplo entero impar de la semilongitud de onda, el punto es nodal. Por el contrario, cuando la diferencia de caminos desde el punto considerado a los focos emisores es un múltiplo entero de la longitud de onda, el punto es ventral o antinodal (*figura 17*).

Dos nodos o dos vientres consecutivos, en la línea que une los focos, están separados $\lambda/2$ m, por lo que un nodo de un vientre consecutivos se distancian $\lambda/4$ m (*figura 17*).

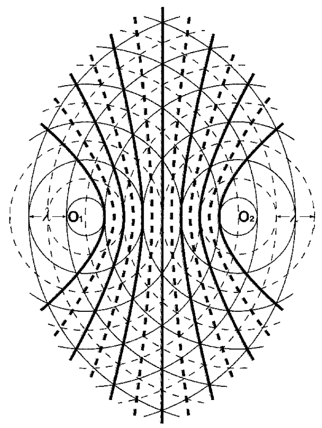
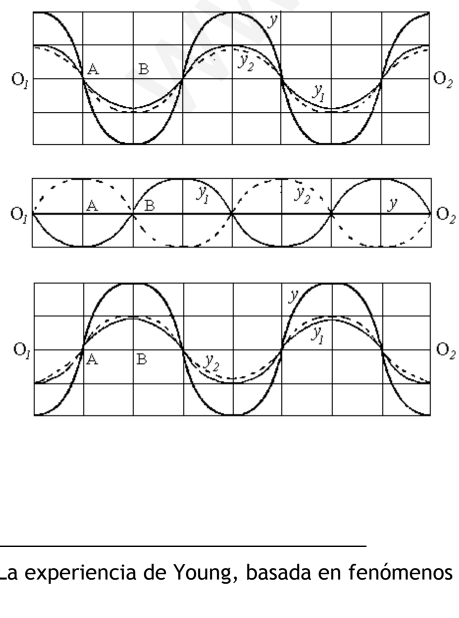


Figura 16



La figura representa tres "fotografías" de algunos puntos situados entre los focos O_1 y O_2 (separados *8 m*), focos que emiten ondas coherentes e idénticas de λ=*4 m*).

La onda y_1 proviene de O_1 y se propaga hacia la derecha. La onda y_2 proviene de O_2 y se propaga hacia la izquierda. La onda *y* corresponde a la suma algebraica de las dos anteriores y representa el estado real de vibración de cada punto en cada uno de los tres instantes.

Observa que el punto A permanece en su posición de equilibrio en todos los instantes (en las tres fotografías). Ello indica que su elongación es nula en cualquier instante (punto nodal). ¿Se corresponde tal observación con la condición de mínimos?. Efectivamente, puedes comprobar que: x_2-x_1 = $6\ m = 3\lambda/2\ m$.

Sin embargo, el movimiento del punto B es diferente. No permanece constante en su posición de equilibrio, vibra: en unos instantes su elongación es cero (segunda fotografía) pero en otros es máxima. Para este punto: x_2-x_1= 4m = λ *m*, totalmente acorde a la condición de máximos.

Figura 17

[7] La experiencia de Young, basada en fenómenos de interferencia, confirmó el carácter ondulatorio de la luz.

A.9. Según lo anterior, los puntos equidistantes de los focos emisores de ondas coherentes idénticas serán siempre puntos ventrales. Pero, ¿qué ocurrirá si las ondas coherentes presentan un desfase constante δ entre ellas? Razona tu respuesta tras determinar la ecuación de la onda resultante en este caso.

Analiza qué ocurre cuando las ondas están en fase (δ =0 rad) o en oposición de fase (δ =π rad).

Para el caso de interferencia de ondas armónicas planas coherentes de la misma amplitud y con un desfase constante entre ellas, puede afirmarse que los puntos del medio a los que llegan las ondas individuales en fase son vientres, mientras que los puntos a los que llegan las ondas individuales en oposición de fase son nodos.

Las ondas transportan energía. ¿Qué ocurre con esa energía cuando las ondas interfieren? **La interferencia supone una redistribución de la energía en el espacio**. La energía no se distribuye uniformemente por todos los puntos del espacio sino que se concentra en los puntos ventrales a costa de que los puntos nodales no reciban ninguna energía.

A.10. Resuelve las siguientes actividades:

A.10.1. Dos ondas coherentes procedentes de focos próximos tienen distinta amplitud. ¿Producirán en algún punto una interferencia destructiva completa? Razona tu respuesta.

A.10.2. Al oscilador de una cubeta de ondas se le acopla un accesorio que consta de dos punzones separados una distancia de 4 cm y se le hace vibrar con una frecuencia de 24 Hz. Al incidir sobre la superficie del agua, los punzones generan ondas coherentes en fase de 1 mm de amplitud, que se propagan con una velocidad de propagación de 12 cm/s. Controlamos lo que sucede en los puntos A, B y C, distantes de los focos, respectivamente, 80,00 y 85,50 mm, 90,00 y 102,50 mm, y 100,00 y 120,00 mm. Calcula:

a) La ecuación de las ondas coherentes individuales que van a interferir.

b) La ecuación de la onda resultante en el punto A en cualquier instante. ¿Cuál es el estado de vibración (elongación, velocidad y aceleración) de una molécula de agua situada en A en el instante inicial y transcurridos 12 s?

c) El tipo de perturbación que existe en los puntos B y C en función del tiempo.

d) Los puntos nodales y ventrales en la línea recta que une los focos. ¿Cuál es la distancia mínima entre dos nodos consecutivos? ¿Y entre dos vientres consecutivos? ¿Y entre un nodo y un vientre consecutivos?

A.10.3. Dos ondas idénticas, de ecuación: $y = 5 \cdot sen\ (100\pi t - \pi x)$ (unidades SI), interfieren en el punto P, distante 50 m y 52 m de los focos. Determina:

a) El estado de vibración del punto P en cualquier instante (elongación, velocidad y aceleración).

b) Los puntos de máxima amplitud y de amplitud nula.

A.10.4. Dos fuentes vibrantes de igual frecuencia (100 Hz), están en fase. Se aplican a dos puntos, A y B, de la superficie del agua, separados entre sí 3 cm, y producen vibraciones de 2 mm de amplitud que se propagan con una velocidad de 60 cm/s. Calcula:

a) El estado vibratorio de un punto P de la superficie del agua que está situado a 3,3 cm de A y 2,4 cm de B. ¿Tiene dicho punto alguna característica destacable?.

b) La frecuencia mínima para que en el punto P exista un vientre.

c) La posición de los puntos inmóviles situados entre A y B. ¿Qué distancia existe entre dos puntos inmóviles consecutivos?.

4.2.2. ONDAS ESTACIONARIAS.

Un caso particularmente interesante de interferencia de ondas, base del funcionamiento de muchos instrumentos musicales (instrumentos de cuerda y tubos sonoros), es el que da lugar a **ondas estacionarias**. Estas ondas surgen de la interferencia de dos ondas de las mismas características (misma frecuencia, amplitud y velocidad de propagación), que se propagan en la misma dirección pero en sentido contrario, en fase o en oposición de fase. Suelen originarse cuando una onda directa se combina con su onda reflejada, dando una onda resultante no viajera o estacionada en el espacio (de ahí su nombre): presenta unos puntos fijos que no vibran (los nodos) y el resto de puntos que vibran como si se tratase de un conjunto de osciladores armónicos, cada uno con su amplitud determinada, por lo que el perfil de la onda no se desplaza, es estacionario (*figura 18*). Hablando con rigor, **una onda estacionaria no es un movimiento ondulatorio, puesto que no hay un transporte neto de energía de unos puntos a otros**.

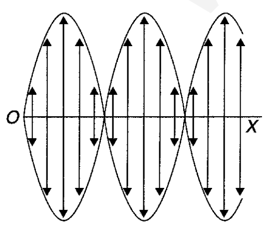
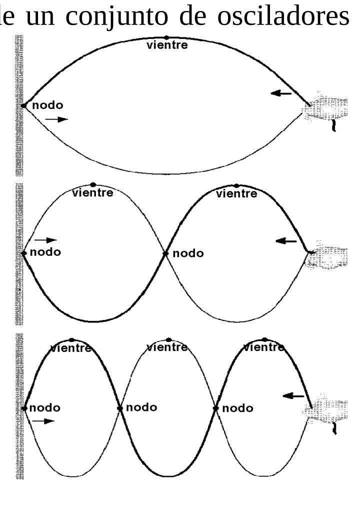


Figura 18



A.11. En una cuerda con un extremo fijo generamos una onda armónica plana haciendo vibrar el extremo opuesto. La onda se propaga hasta el extremo fijo y se refleja con cambio de fase (¿por qué?).

Comprueba que la onda incidente y la onda reflejada dan lugar a una onda estacionaria de ecuación: ***y (x,t) = 2A·sen kx·cos ωt** = A_r**·cos ωt*** .

¿Qué cambia si el extremo de la cuerda donde se produce la reflexión es libre (imagina la cuerda anterior unida en el extremo a un anillo que pueda deslizarse verticalmente sobre un poste liso)? Deduce la ecuación de la nueva onda estacionaria.

¿Qué distancia existe entre dos nodos o dos vientres consecutivos de una onda estacionaria? ¿Qué distancia existe entre un nodo y un antinodo consecutivos de una onda estacionaria?

En los casos planteados de la cuerda, ¿cualquier frecuencia de vibración dará una onda estacionaria? ¿De qué depende el número de vientres (o nodos) que muestre la onda estacionaria generada en la cuerda? Razona tus respuestas.

Las ondas estacionarias se pueden expresar mediante ecuaciones del tipo: $\boldsymbol{y\ (x,t) = 2A \cdot sen\ kx \cdot cos\ \omega t}$; $\boldsymbol{y\ (x,t) = 2A \cdot cos\ kx \cdot sen\ \omega t}$; $\boldsymbol{y\ (x,t) = 2A \cdot cos\ kx \cdot cos\ \omega t}$; $\boldsymbol{y\ (x,t) = 2A \cdot sen\ kx \cdot sen\ \omega t}$. Todo depende de la expresión que adopte la onda incidente en el instante inicial y de si su reflexión se produce sin inversión o con inversión de fase, lo que condicionará el estado de vibración del origen de referencia.

Cualquiera de las ecuaciones de una onda estacionaria nos indica que:

- *Cada punto del medio vibra con un MAS de la misma frecuencia que los movimientos ondulatorios que interfieren.*
- *La amplitud resultante de cada punto del medio es función de la posición x e independiente del tiempo, de modo que determinados puntos fijos no oscilan (nodos) y otros pueden oscilar con amplitud máxima (vientres).*
  * *La distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos es la mitad de la longitud de onda (λ/2 m) de los movimientos ondulatorios que interfieren. La distancia entre un nodo y un vientre es la cuarta parte de dicha longitud de onda (λ/4 m).*

* *El número de vientres y/o nodos que manifiesta la onda estacionaria generada entre dos puntos del espacio depende de la longitud de onda de los movimientos ondulatorios que interfieren y, por tanto, de la frecuencia del oscilador armónico que origina dichos movimientos y de su velocidad de propagación por el medio.*

A.12. ¿Qué condición debe cumplir la longitud de una cuerda fija por sus extremos (por ejemplo, una cuerda de guitarra) para que en ella se observen ondas estacionarias?

Como profundizaremos en el tema siguiente, en una cuerda fijada por sus extremos se producen multitud de frecuencias que dan lugar a ondas estacionarias: $\nu = n\,\frac{v}{2L}$ ($\nu_1 = \frac{v}{2L}$, $2\nu_1 = \frac{v}{L}$, $3\nu_1 = \frac{3v}{2L}$,...). Dichas frecuencias son los llamados **armónicos**. El sonido que produce una cuerda de violín, guitarra,..., es una mezcla de armónicos, es decir, de sonidos cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia de sonido fundamental ν_1.

Las ondas estacionarias son de gran importancia no sólo en música, sino también en la técnica, siendo necesario tenerlas en cuenta en el diseño de puentes, aviones, rascacielos, etc., pues todo objeto que vibre y tenga fijos sus extremos puede soportar una onda estacionaria.

Si a un oscilador se le somete desde el exterior a vibraciones de frecuencias diferentes a sus frecuencias naturales no da ondas estacionarias y la amplitud de la onda resultante no aumentará. Pero si la frecuencia de la perturbación exterior coincide con alguna de sus frecuencias naturales y tal perturbación no es instantánea sino duradera, sus efectos serán acumulativos y la amplitud de vibración de la onda estacionaria resultante irá en aumento. A tal fenómeno se le conoce con el nombre de resonancia, y es el causante de efectos catastróficos (ruptura de copas o vasos ante determinados sonidos, derrumbamiento de puentes sometidos a perturbaciones periódicas del viento o de otro tipo, derramamiento del agua de un cubo cuando se le proporciona el vaivén adecuado, etc.), y de efectos beneficiosos (la amplificación de ondas estacionarias dentro de los bafles de un tocadiscos aumentan la calidad del sonido).

A.13. Resuelve las siguientes actividades:

A.13.1. Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación: $y = 5 \cdot sen\ \pi(10t + 4x)$ (unidades SI). Determina:

a) La amplitud, frecuencia, longitud de onda, velocidad, dirección y sentido de propagación de la onda.

b) La ecuación de la onda estacionaria formada al reflejarse la onda anterior en el extremo de la cuerda, sin inversión de fase y sin atenuación.

c) La elongación, velocidad de vibración y aceleración de un punto de la cuerda situado a 0,5 m del punto de reflexión: c1) para la onda individual; c2) para la onda estacionaria.

d) La posición de los nodos y los vientres, tomando como referencia el extremo de la cuerda donde se refleja la onda individual. ¿Cuál es la distancia entre dos nodos consecutivos? ¿Y entre dos vientres consecutivos? ¿Y entre un nodo y un vientre?.

A.13.2. La ecuación de una onda estacionaria es: $y = 8 \cdot sen\ \pi x/12\ .cos\ 4\pi t\ (m,\ s)$, siendo x= 0 y x= 18 m los límites del medio. Determina:

a) La amplitud máxima de vibración de las ondas que se han combinado para dar la onda estacionaria.

b) La longitud de onda, el período y la velocidad de propagación de la onda estacionaria y de las ondas que interfieren.

c) La velocidad y aceleración instantánea de una partícula afectada por la onda estacionaria, situada en x= 4 m.

d) En los extremos, ¿hay nodos o vientres? Determina la posición de todos los nodos y vientres y la distancia entre nodos consecutivos y entre nodo y vientre consecutivos.

A.13.3. En una cuerda de 2 m de longitud sujeta por sus dos extremos se producen ondas estacionarias correspondientes al modo fundamental. La amplitud de dichas ondas en el punto medio de la cuerda es 0,1 m, y la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es 4 m/s. Determina:
a) La longitud de onda y la frecuencia de la onda estacionaria.
b) La ecuación de ondas que la describe (supón la cuerda en el eje X y la vibración de la onda en el eje Y).
c) La velocidad y aceleración instantánea de una partícula afectada por una onda situada en x= 0,5 m.
d) La posición de los nodos y los vientres y la distancia entre nodos, entre vientres o entre un nodo y un vientre consecutivos.

A.13.4. Se hace vibrar una cuerda de guitarra de 1 m de longitud, sujeta por los dos extremos, observando que presenta 7 nodos. Si la amplitud máxima es de 1 cm y la velocidad de propagación de las ondas por la cuerda es de 6 m/s, calcula:
a) La ecuación de la onda estacionaria en la cuerda.
b) La posición de nodos y vientres y la distancia entre nodos, entre vientres o entre un nodo y un vientre consecutivos.
c) La frecuencia fundamental de vibración y la longitud de onda asociada.

A.13.5. Una cuerda, sujeta por ambos extremos, vibra de acuerdo con la ecuación: $y = 3 \cdot sen\ \pi x/3 \cdot cos\ 50\pi t$ *(cm, s)*. Determina:
a) La amplitud y la velocidad de las ondas cuya interferencia da lugar a la vibración anterior.
b) La distancia que existe entre dos nodos sucesivos.
c) La velocidad y aceleración con que se mueve una partícula de la cuerda situada en x = 6 cm, en el instante t = 2,5 s.

A.13.6. Si tenemos una cuerda de longitud L = 1 m sujeta por sus extremos, calcula el número de ondas (vientres) que pueden observarse para una frecuencia de 200 Hz, cuando la velocidad de propagación de las perturbaciones a lo largo de la cuerda es de 100 m/s.

A. Final. Realiza un resumen de las ideas más importantes aprendidas en esta unidad, así como un cuadro con las ecuaciones y fórmulas que has manejado a lo largo de la misma.

APÉNDICE: LA CUBETA DE ONDAS.

Una cubeta de ondas es un aparato que permite reproducir diversos fenómenos relacionados con el movimiento ondulatorio.

El dispositivo está formado por un recipiente de fondo plano y transparente, en donde se deposita agua y en cuya superficie se generan ondas mediante un punzón o estilete vibrante, en contacto con la superficie del líquido.

El estilete vibra por la acción de un pequeño motor accionado por una fuente de alimentación de corriente alterna de diferencia de potencial variable, lo que permite modificar su frecuencia de vibración.

Sobre la cubeta se sitúa un foco luminoso y bajo ella se sitúa un espejo inclinado que proyecta la imagen de lo que sucede en la cubeta sobre una pantalla translúcida.

La imagen proyectada es una serie de franjas alternativas claras y oscuras. Las crestas producen una imagen luminosa, concentran la luz al actuar como lentes convergentes, y los valles corresponden a franjas oscuras. Por tanto, la distancia entre los centros de dos franjas claras o dos franjas oscuras consecutivas es igual a la longitud de onda de la perturbación.

Como el fenómeno se reproduce con gran rapidez su observación es molesta para el ojo. Para eliminar este inconveniente se recurre a la iluminación con luz estroboscópica. El efecto estroboscópico se presenta al iluminar con luz intensa e intermitente un fenómeno periódico: sincronizando la frecuencia del oscilador, que actúa sobre el estilete, con los intervalos de iluminación, se crea la ilusión óptica de parecer el fenómeno como si fuera estacionario, es decir, como si las zonas claras y oscuras no se desplazaran.

Utilizando el accesorio adecuado se pueden generar ondas circulares y ondas planas y se pueden estudiar distintas propiedades ondulatorias: reflexión, refracción, difracción e interferencias, fenómenos descritos a lo largo de este tema.

¡APROVECHA LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS!

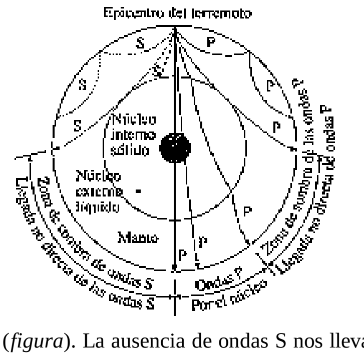
Aprovecha los recursos informáticos recogidos en soporte digital, en la Web del Departamento y en la Web personal de los autores. Te facilitarán el estudio y la comprensión de los conocimientos tratados en esta unidad.

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PLANTEADAS EN LA UNIDAD.

A.1: Las ondas sísmicas que se presentan en los terremotos son la propagación de la vibración producida en un punto del interior de la Tierra. Se distinguen tres tipos de ondas sísmicas:

- Ondas internas longitudinales, llamadas ondas P porque son las primeras que llegan a un lugar alejado (velocidad de propagación comprendida entre 7,5 y 14 km/s). Al ser longitudinales pueden propagarse por cualquier medio (sólido, líquido o gaseoso).
- Ondas internas transversales, llamadas ondas S porque llegan en segundo lugar (velocidad comprendida entre 4 y 7,5 km/s).
- Ondas superficiales transversales, llamadas ondas L porque son más lentas que las ondas precedentes (velocidad de propagación constante del orden de 4 km/s). Son las causantes principales de los efectos catastróficos de los terremotos: corrimientos del suelo, destrucción de construcciones, inundaciones por ruptura de presas, etc.

Las ondas transversales (S y L) no se propagan a través de medios fluidos (líquidos y gases).

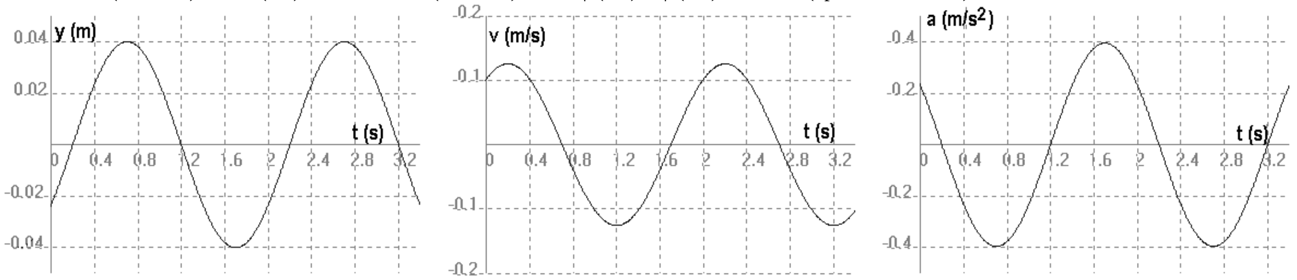


En los grandes terremotos, las ondas sísmicas pueden ser registradas por sismógrafos que se encuentran muy lejos del lugar en el que se originaron. El análisis de las ondas sísmicas internas (P y S) al llegar a la superficie ha permitido conocer la constitución del interior de la Tierra: Cuando se produce un terremoto en un lugar de la Tierra las ondas P se detectan en el punto opuesto no así las ondas S (*figura*). La ausencia de ondas S nos lleva a la conclusión de que la Tierra ha de ser líquida cerca del centro. Cuando las ondas P entran en esa región y salen de ella, se observa una refracción; esto da origen a una zona de sombra de las ondas P, lo que indica que sólo la parte externa del núcleo es líquida.

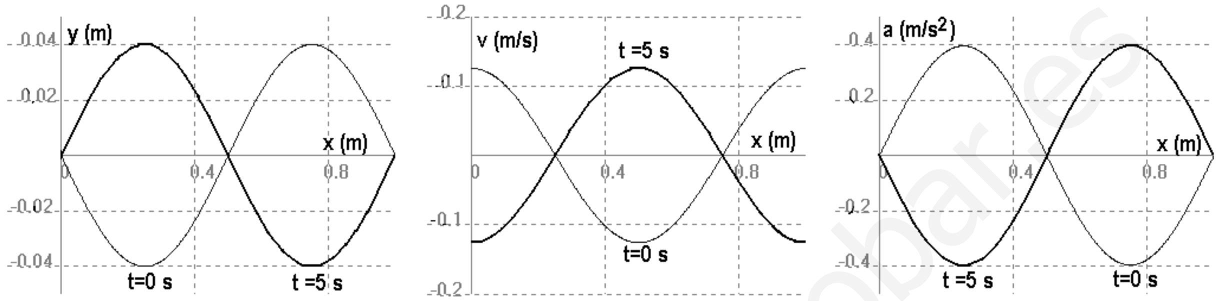
A.2: λ(en el aire)= 0,77 m; v no cambia; λ(en el agua)= 3,41 m.

A.3: Debemos comprobar que: $y(x,t+T) - y(x,t) = 0$ (periodicidad temporal); y que: $y(x+\lambda,t) - y(x,t) = 0$ (periodicidad espacial), haciendo uso de relaciones trigonométricas adecuadas ($\text{sen } A - \text{sen } B = 2.\text{sen } (A-B)/2.\cos (A+B)/2$).

A.4.1: a) $y(x,t) = 0{,}04.\text{sen } (\pi t - 2\pi x)$ m; $v(x,t) = 0{,}04\pi.\cos (\pi t - 2\pi x)$ m/s; $a(x,t) = -0{,}04\pi^2.\text{sen } (\pi t - 2\pi x)$ m/s^2 ; b) $y(0{,}1\ ,t) = 0{,}04.\text{sen } (\pi t - 0{,}2\pi)$ m; $v(0{,}1\ ,t) = 0{,}04\pi.\cos (\pi t - 0{,}2\pi)$ m/s; $a(0{,}1\ ,t) = -0{,}04\pi^2.\text{sen } (\pi t - 0{,}2\pi)$ m/s^2 ; Valores máximos de y y a, aunque opuestos: (0,7 + n) s, valores máximos de v: (0,2 + n) s, con n= 0,1,2,...; c) $y(x,0) = 0{,}04.\text{sen } (-2\pi x)$ m; $v(x,0) = 0{,}04\pi.\cos (-2\pi x)$ m/s; $a(x,0) = -0{,}04\pi^2.\text{sen } (-2\pi x)$ m/s^2 ; $y(x,5) = 0{,}04.\text{sen } (5\pi - 2\pi x)$ m; $v(x,5) = 0{,}04\pi.\cos (5\pi - 2\pi x)$ m/s; $a(x,5) = -0{,}04\pi^2.\text{sen } (5\pi - 2\pi x)$ m/s^2 ; $\varphi(x,5) - \varphi(x,0) = 5\pi$ rad. (oposición de fase).

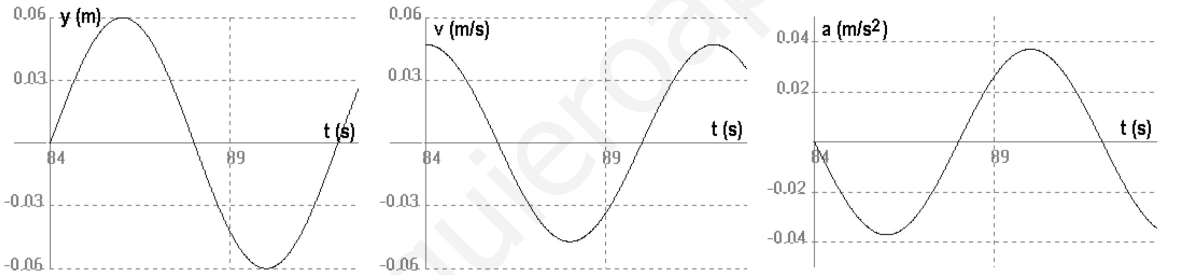


b)

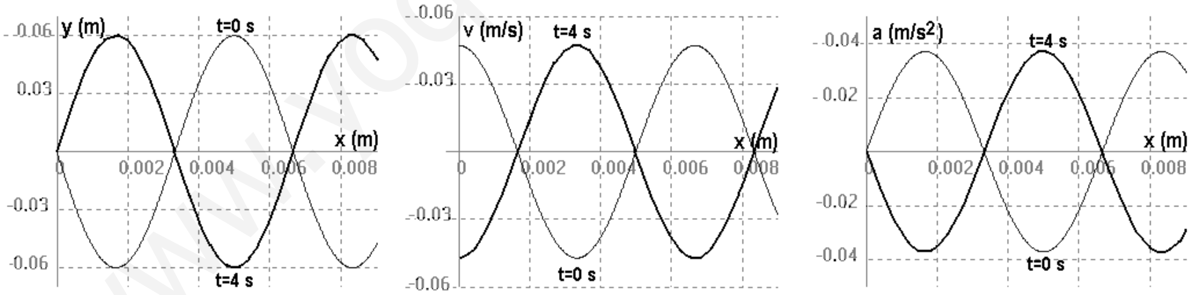


c)

A.4.2: a) $T = 8$ s; $\nu = 1/8$ Hz; $\omega = \pi/4$ s^{-1}; $A = 0{,}06$ m; $\lambda = 1/150$ m; $k = 300\pi$ m^{-1}; $\varphi_o = 0$ rad; b) $y(0{,}07,\ t) = 0{,}06.\text{sen } (\pi t/4 - 21\pi)$ m; $v(x,t) = 1{,}5.10^{-2}\pi.\cos (\pi t/4 - 21\pi)$ m/s; $a(x,t) = -3{,}75.10^{-3}\pi^2.\text{sen } (\pi t/4 - 21\pi)$ m/s^2 ; Valores máximos de y y a, aunque opuestos: (86 + 4n) s, valores máximos de v: (84 + 4n) s, con n= 0,1,2,...; c) $y(x,0) = 0{,}06.\text{sen } (-300\pi x)$ m; $v(x,0) = 1{,}5.10^{-2}\pi.\cos (-300\pi x)$ m/s; $a(x,0) = -3{,}75.10^{-3}\pi^2.\text{sen } (-300\pi x)$ m/s^2 ; $y(x,4) = 0{,}06.\text{sen } (\pi - 300\pi x)$ m; $v(x,4) = 1{,}5.10^{-2}\pi.\cos (\pi - 300\pi x)$ m/s; $a(x,4) = -0{,}04\pi^2.\text{sen } (\pi - 300\pi x)$ m/s^2 ; $\varphi(x,4) - \varphi(x,0) = \pi$ rad. (oposición de fase).



b)



c)

d) $y(0{,}1) = 0{,}03\sqrt{2}$ m; $v(0{,}1) = 7{,}5.10^{-3}\sqrt{2}\ \pi$ m/s; $a(0{,}1) = -1{,}875.10^{-3}\sqrt{2}\ \pi^2$ m/s^2 ; $y(0{,}15,\ 5) = -0{,}03\sqrt{2}$ m; $v(0{,}15,\ 5) = -7{,}5.10^{-3}\sqrt{2}\ \pi$ m/s; $a(0{,}15,\ 5) = 1{,}875.10^{-3}\sqrt{2}\ \pi^2$ m/s^2 ; $\varphi(0{,}15,\ 5) - \varphi(0{,}1) = -45\pi$ rad. (oposición de fase).

A.4.3: a) $y(x,\ t)_{\blacktriangleright} = 2.\text{sen } (2\pi t/3 - \pi x/60 + \pi/6)$ m; $y(x,\ t)_{\blacktriangleleft} = 2.\text{sen } (2\pi t/3 + \pi x/60 + \pi/6)$ m; b) $y(0{,}2) = -2$ m; $v(0{,}2) = 0$ m/s; $a(0{,}2) = 8\pi^2/9$ m/s^2 ; $y(10{,}5) = -\sqrt{3}$ m; $v(10{,}5) = -2\pi/3$ m/s; $a(10{,}5) = 4\sqrt{3}\ \pi^2/9$ m/s^2 ; $\varphi(10{,}5) - \varphi(0{,}2) = 11\pi/6$ rad; c) Puntos en fase: $x_2 - x_1 = 120n$ m; puntos en oposición de fase: $x_2 - x_1 = 60.(2n+1)$ m ($n \in Z$); dos puntos en fase consecutivos están separados 120 m (*λ m*); dos puntos en oposición de fase consecutivos están separados 60 m (*λ/2 m*); d) $\Delta\varphi = \pi/2$ rad.

A.4.4: a) $T = 2/3$ s; $\nu = 3/2$ Hz; $\omega = 3\pi$ s^{-1}; $A = 0{,}08$ m; $\lambda = 2/5$ m; $k = 5\pi$ m^{-1}; $v = 3/5$ m/s; $\varphi_o = \pi/2$ rad; b) $y(0{,}02,\ 3) = -0{,}076$ m; $v(0{,}02,\ 3) = -0{,}233$ m/s; $a(0{,}02,\ 3) = 6{,}758$ m/s^2 ; c) $x_2 - x_1 = 1/15$ m; d) $t_2 - t_1 = 1/3$ s.

A.4.5: a) $y(x,\ t)_{\blacktriangleleft} = 0{,}05.\text{sen } (1000\pi t + 10\pi x/3 + 0{,}434)$ m; b) $y(0{,}02,\ 2) = 0{,}03$ m; $v(0{,}02,\ 2) = 125{,}664$ m/s; $a(0{,}02,\ 2) = -296088{,}129$ m/s^2 ; c) $x_2 - x_1 = 0{,}05$ m; d) $|\varphi_2 - \varphi_1| = \pi$ rad. (oposición de fase).

A.4.6: a) $y(x,\ t)_{\blacktriangleright} = 2.10^{-3}.\text{sen } (200\pi t - \pi x)$ m; $y(x,\ t)_{\blacktriangleleft} = 2.10^{-3}.\text{sen } (200\pi t + \pi x)$ m; b) $y(0{,}2) = 0$ m; $v(0{,}2) = 0{,}4\pi$ m/s; $a(0{,}2) = 0$ m/s^2 ; $y(10{,}5) = 0$ m; $v(10{,}5) = 0{,}4\pi$ m/s; $a(10{,}5) = 0$ m/s^2 ; $\varphi(10{,}5) - \varphi(0{,}2) = 590\pi$ rad (puntos en fase); c) Puntos en fase: $x_2 - x_1 = 2n$ m; puntos en oposición de fase: $x_2 - x_1 = (2n+1)$ m ($n \in Z$); dos puntos en fase consecutivos están separados 2 m (*λ m*); dos puntos en oposición de fase consecutivos están separados 1 m (*λ/2 m*); d) $y(x,t+1) = 0{,}001$ m (misma elongación, puntos en fase; $y(x,t + \pi) = 1{,}7.10^{-3}$ m.

A.5.1: $I_{\text{sup. Tierra}} = 955$ W/m^2; $I_{\text{sup. Marte}} = 406$ W/m^2; diferencia de distancias.

A.5.2: a) $E = 1{,}8.10^{-2}$ J; b) A (a 40 m) $= 2.10^{-3}$ m.

A.5.3: I (a 0,5 m) $= 2/\pi$ W/m^2; $R_2 = \sqrt{2}\ /2$ m.

A.5.4: $I = 1{,}92.10^{-3}$ W/m^2.
A.5.5: x = 3,5 cm.
A.5.6: x = 12 cm.

A.6.1: Explicar apoyándote en las figuras 11 y 12.
A.6.2: Se producirán los dos fenómenos, pero sin cambio de dirección. La onda reflejada se propaga en sentido contrario y será débil. La onda refractada se propaga en el mismo tendio que la incidente y será intensa, aunque circule por el segundo medio a distinta velocidad.
A.6.3: Si $v_2 < v_1 \Rightarrow$ sen $\hat{i}$ /sen $\hat{r}$ = $v_1 / v_2 > 1 \Rightarrow \hat{i} > \hat{r}$ $\Rightarrow$ El rayo refractado se acerca a la normal, siempre refracción. Si $v_2 > v_1 \Rightarrow$ sen $\hat{i}$ /sen $\hat{r}$ = $v_1 / v_2 < 1$ $\Rightarrow \hat{i} < \hat{r}$ $\Rightarrow$ El rayo refractado se aleja de la normal; a partir de un ángulo límite o crítico puede no darse refracción (fenómeno de reflexión total).
A.6.4: $y_{\leftarrow}(x, t) = 3.10^{-3}.\text{sen}\,(80t + 6x + \pi)$ m.

A.7: No se observa difracción de la luz en una rendija de 10 cm, al requerirse frecuencias bastante más pequeñas que las de la luz, pero si se observa difracción de algunos sonidos de frecuencias adecuadas.

A.8: Se llega a la ecuación de la onda prevista haciendo uso de la relación trigonométrica: *sen* A + *sen* B = 2.*sen* (A+B)/2 .*cos* (A-B)/2. Respuesta a las cuestiones en los apuntes.

A.9: Se llega a la ecuación: $y\,(x_1,x_2,t) = 2A\cdot\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\omega t - kx + \frac{\delta}{2}\right)$ haciendo uso de la relación trigonométrica: *sen* A + *sen* B = 2.*sen* (A+B)/2 .*cos* (A-B)/2. Respuesta a las cuestiones en los apuntes.

A.10.1: Si las ondas coherentes están en fase, existirán nodos en los puntos que cumplan la condición: $x_2–x_1 = (2n+1)\lambda/2$ m, y vientres en los que cumplan la condición: $x_2–x_1 = n\lambda$ m. Si existe un desfase constante entre las ondas coherentes, la existencia de puntos nodales dependerá del desfase y de la diferencia de caminos a los focos de forma simultánea.
A.10.2: a) y (x, t) = 10^{-3}.sen ($48\pi t \pm 400\pi x$) m; b) y_A (0,0800, 0,0855, t) = 2.10^{-3}.cos ($1{,}1\pi$).sen ($48\pi t – 33{,}1\pi$) m; y_A (0,0800, 0,0855, 0) = y_A (0,0800, 0,0855, 12) = $-5{,}88.10^{-4}$ m; v_A (0,0800, 0,0855, 0) = v_A (0,0800, 0,0855, 12) = 0,273 m/s; a_A (0,0800, 0,0855, 0) = a_A (0,0800, 0,0855, 12) = 13,366 m/s^2; c) y_B (0,0900, 0,1025, t) = 0 m (Nodo) ; y_C (0,1000, 0,1200, t) = 2.10^{-3}.sen ($48\pi t – 44\pi$) m (Vientre); d) Condición de punto nodal: x = 2,125-0,25n cm ($n \in Z$) (16 puntos nodales entre los focos); Condición de punto ventral: x = 2-0,25n cm ($n \in Z$) (17 puntos nodales entre los focos, incluidos éstos. La distancia mínima entre nodos o vientres consecutivos es 0,25 cm (($\lambda/2$ *m*) y entre un nodo y un vientre consecutivos 0,125 cm ($\lambda/4$ *m*).
A.10.3: a) y_P (50,52,t) = - 10.sen ($100\pi t – 51\pi$) m (Vientre); v_P (50,52,t) = - 1000π.cos ($100\pi t – 51\pi$) m/s; a_P (50,52,t) = $10^5\pi^2$.sen ($100\pi t – 51\pi$) m/s^2; b) $A_{máx}$: $x_2–x_1 = 2n$ m;) $A_{mín}$: $x_2–x_1 = 2n+1$ m ($n \in Z$).
A.10.4: a) y_P (0,024, 0,033, t) = 0 m (Nodo); b) $\nu_{mín}$ = 200/3 Hz; c) Condición de punto nodal: x = 0,0135 – 0,003n m ($n \in Z$) (10 puntos nodales entre los focos). La distancia mínima entre nodos consecutivos es 0,003 m (($\lambda/2$ *m*).

A.11: La onda se refleja con cambio de fase al estar sujeta la cuerda en el extremo (medio de separación más rígido y/o más denso).
Se llega a la ecuación de la onda estacionaria prevista haciendo uso de las relaciones trigonométricas: *sen* ($\alpha + \pi$) = - *sen* α ; *sen* A - *sen* B = 2.*sen* (A-B)/2 .*cos* (A+B)/2.
La onda se refleja sin cambio de fase al estar libre la cuerda en el extremo (medio de separación menos rígido y/o menos denso). Se llega a la nueva ecuación de la onda estacionaria (***y (x,t)= 2A·cos kx ·sen ωt***) haciendo uso de la relación trigonométrica: *sen* A + *sen* B = 2·*sen* (A+B)/2 ·*cos* (A-B)/2.
No todas las frecuencias originan ondas estacionarias entre dos puntos del medio. Para el caso de cuerdas sujetas por los extremos o con los dos extremos libres, las frecuencias que originan ondas estacionarias responden a la expresión: $\nu = nv/2L$. Para el caso de cuerdas con un extremo fijo y el otro libre, las frecuencias que originan ondas estacionarias responden a la expresión: $\nu = (2n+1)v/4L$.
Respuesta a algunas de las cuestiones planteadas en los apuntes.

A.12: $L = n\lambda/2$.

A.13.1: a) A = 5 m; ν = 5 Hz; λ = 0,5 m; v = 2,5 m/s; dirección eje X, sentido negativo; b) y (x, t) = 10.cos $4\pi x$.sen $10\pi t$ m; c) y_i (0,5, t) = 5.sen $10\pi t$ m; v_i (0,5, t) = 50π.cos $10\pi t$ m/s; a_i (0,5, t) = - $500\pi^2$.sen $10\pi t$ m/s^2 ; y (0,5, t) = 10.sen $10\pi t$ m; v (0,5, t) = 100π.cos $10\pi t$ m/s; a (0,5, t) = - $1000\pi^2$.sen $10\pi t$ m/s^2 (punto ventral); en la onda estacionaria, el punto considerado es ventral; d) Nodos: x = $(2n+1)/8$ m; vientres: x = $n/4$ m; distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos: $\lambda/2$ = 0,25 m; distancia entre un nodo y un vientre consecutivo: $\lambda/4$ = 0,125 m.

A.13.2: a) A_i = 4 m; b) λ = 24 m; T = 0,5 s; v = 48 m/s; dirección eje X, sentido negativo; c) ; v (4, t) = $-16\sqrt{3}\,\pi$.sen $4\pi t$ m/s; a (4, t) = $-64\sqrt{3}\,\pi^2$.cos $4\pi t$ m/s^2 ; d) Nodos: x = $12n$ m (0 m, 12 m); vientres: x = $(2n+1)$.6 m (6 m, 18 m); distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos: $\lambda/2$ = 12 m; distancia entre un nodo y un vientre consecutivo: $\lambda/4$ = 6 m.

A.13.3: a) λ = 4 m; ν = 1 Hz; b) y (x, t) = 0,1.sen $\pi x/2$.cos $2\pi t$ m; c) ; v (0,5, t) = $0{,}1\pi\sqrt{2}$ sen $2\pi t$ m/s; a (0,5, t) = $-0{,}4\pi^2\sqrt{2}$ cos $2\pi t$ m/s^2 ; d) Nodos: x = $2n$ m (0 m, 2 m); vientres: x = $(2n+1)$ m (1 m); distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos: $\lambda/2$ = 2 m; distancia entre un nodo y un vientre consecutivo: $\lambda/4$ = 1 m.
A.13.4: a) y (x, t) = 0,01.sen $6\pi x$.cos $36\pi t$ m; b) Nodos: x = $n/6$ m (0 m, 1/6 m, 1/3 m, 1/2 m, 2/3 m, 5/6 m, 1m); vientres: x = $(2n+1)/12$ m (1/12 m, 1/4 m, 5/12 m, 7/12 m, 3/4 m, 11/12 m); distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos: $\lambda/2$ = 1/6 m; distancia entre un nodo y un vientre consecutivo: $\lambda/4$ = 2 m; c) λ_1 = 0,03 m; ν_1 = 3 Hz.
A.13.5: a) A_i = 1,5 m; v= 1,5 m/s; b) Distancia entre dos nodos sucesivos: $\lambda/2$ = 0,03 m; c) v (0,06, 2,5) = 0 m/s; a (0,06, 2,5) = 0 m/s^2 (punto nodal).
A.13.6: a) k = 4π m^{-1}; n= 4.