MOVIMIENTOS VIBRATORIOS. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE.

Desarrollamos la unidad de acuerdo con el siguiente hilo conductor:

1. ¿Por qué se producen los movimientos periódicos vibratorios?

2. ¿Cómo describir el movimiento vibratorio armónico simple (MAS)?

2.1. ¿Cómo es la ecuación de un oscilador armónico? Descripción cinemática.

2.2. ¿De qué depende el período de un oscilador armónico? Descripción dinámica.

2.3. ¿Cómo evoluciona la energía en un oscilador armónico? Descripción energética.

APÉNDICE: ¿Cómo son los movimientos vibratorios reales? Oscilaciones amortiguadas, oscilaciones forzadas y fenómenos de resonancia.

1. ¿POR QUÉ SE PRODUCEN LOS MOVIMIENTOS PERIÓDICOS VIBRATORIOS?

El curso pasado estudiamos un tipo de movimiento que era denominado **periódico** por repetirse en él cada cierto tiempo la misma posición del móvil. Se trata del movimiento circular uniforme (MCU), producido por una fuerza central constante, la denominada fuerza centrípeta o normal. En una primera aproximación, podemos considerar que el movimiento periódico de la Luna alrededor de la Tierra, de la Tierra alrededor de sí misma y en torno al Sol son MCU.

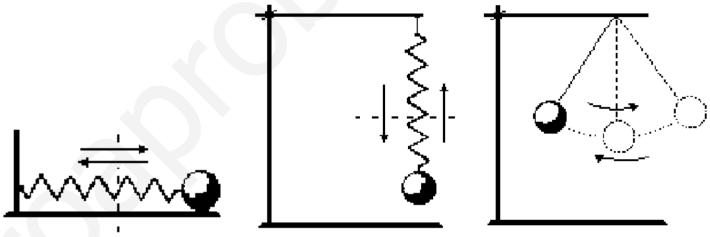


Figura 1

Sin embargo, existen muchos otros **movimientos periódicos** comunes que no son producidos por fuerzas constantes; son **producidos por fuerzas variables**. Por ejemplo, el movimiento de vaivén de un cuerpo unido a un muelle o pendiente de un hilo (*figura 1*). En estos **movimientos oscilatorios** o **vibratorios** [1] la posición del móvil recorre siempre la misma trayectoria y pasa alternativamente por posiciones extremas alrededor de una posición de equilibrio estable, por acción de una fuerza central variable, llamada **fuerza restauradora** o **recuperadora** porque siempre tiende a devolver al móvil a la citada posición de equilibrio estable. Si las **oscilaciones** son **libres** (no actúan simultáneamente fuerzas disipativas o de rozamiento), el movimiento oscilatorio se mantendrá indefinidamente (situación ideal); si las **oscilaciones** son **amortiguadas** (actúan al mismo tiempo fuerzas disipativas o de fricción), el móvil acabará retornando al reposo en su posición de equilibrio estable.

Los movimientos vibratorios de partículas materiales están muy presentes en nuestro entorno (la carrocería de un coche al pasar por una carretera con baches, la lenteja del péndulo de un reloj de pared, las copas de los árboles y los puentes colgantes cuando les azota el viento, los latidos del corazón, nuestras cuerdas vocales al hablar, ...) y en el mundo atómico (las vibraciones de los átomos dentro de una molécula o dentro de una red cristalina), de aquí la importancia de su estudio y descripción.

2. ¿CÓMO DESCRIBIR EL MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)?

El **movimiento vibratorio armónico simple** (MAS) es un caso particular dentro de los movimientos periódicos vibratorios.

Decimos que una partícula describe un MAS cuando recorre indefinidamente, en un movimiento de vaivén, un segmento de recta, por la acción de una fuerza restauradora directamente proporcional a la distancia que separa la partícula de la posición de equilibrio estable y siempre dirigida hacia dicha posición central.

Podemos considerar MAS los movimientos vibratorios de un muelle o de un péndulo simple que oscila bajo ángulos pequeños de forma libre.

Se llama ***oscilador armónico*** *a cualquier dispositivo o sistema que describe un MAS.*

[1] Oscilación y vibración son conceptos que pueden emplearse indistintamente. Sin embargo, el término vibración suele emplearse para designar una oscilación muy rápida o de alta frecuencia, mientras que en los demás casos se prefiere hablar de oscilación.

Cualquier otro movimiento periódico vibratorio más complicado se puede expresar como una sucesión de MAS (ley de Fourier).

El uso del término "armónico" en la denominación del movimiento se debe a que para su descripción matemática son adecuadas las funciones trigonométricas seno o coseno, porque repiten una secuencia de valores entre dos extremos, funciones conocidas tradicionalmente como armónicas.

2.1. ¿CÓMO ES LA ECUACIÓN DEL OSCILADOR ARMÓNICO? DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA.

Para describir los movimientos vibratorios, por ser periódicos, se utilizan magnitudes que ya vimos en el MCU, tales como:

- El **período** (T). Representa el tiempo que tarda en repetirse una posición dada, es decir, el tiempo que corresponde a una oscilación completa o ciclo. Su unidad en el SI es el segundo (s).
- La **frecuencia** (ν, f). Representa el número de oscilaciones por unidad de tiempo. Su unidad en el SI es el s^{-1} o Hz (hertzio).

  ν y T guardan entre sí una relación inversa: $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$.

Para deducir la ecuación del MAS debemos relacionar este movimiento con el MCU. Observa en la *figura 2* que **el MAS es la proyección sobre un diámetro de un MCU**. Al proyectar sobre el diámetro vertical el MCU de una partícula que parte de 0 en sentido contrario a las agujas del reloj con una velocidad angular ω constante, obtenemos un MAS que parte de 0´ hacia la dirección positiva del eje Y (*figura 2.a*).

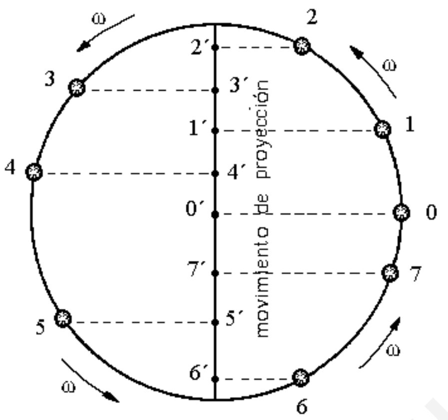


Figura 2.a

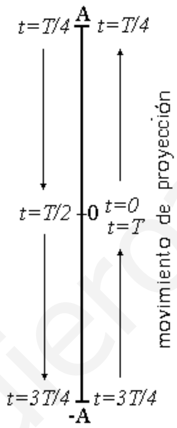


Figura 2.b

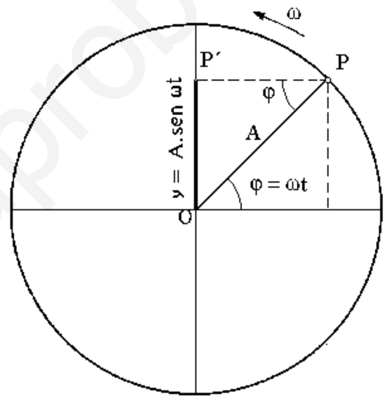


Figura 2.c

Cuando hemos recorrido un cuarto de vuelta, el tiempo transcurrido ha sido un cuarto de período ($T/4$), y el movimiento vibratorio ha recorrido un radio ($r = A$), que es el valor máximo del desplazamiento (*figura 2.b*). Cuando hemos recorrido la circunferencia completa, el tiempo transcurrido es de un período (T) y en el diámetro se ha realizado una vibración completa o ciclo. A partir de este instante, los dos movimientos se repiten.

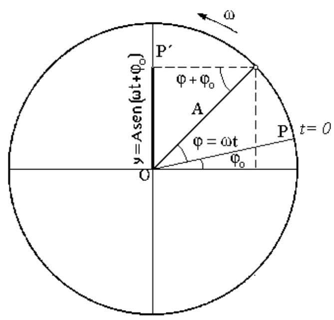


Figura 3

En la *figura 2.c* vemos que a un desplazamiento angular $\varphi = \omega t$ realizado en el movimiento circular en el tiempo t, corresponde un desplazamiento o elongación y en el diámetro, tal que: $y(t) = A\cdot sen\ \omega t$

En el caso de empezar a medir el tiempo cuando se ha recorrido previamente un ángulo φ_o, (*figura 3*), el valor de y será: $y\ (t) = A\cdot sen\ (\omega t + \varphi_o)$, ecuación del MAS., donde A, ω y φ_o son constantes del movimiento.

Aclaramos el significado físico de las magnitudes que intervienen en la ecuación anterior (*figura 4*):

- y : Elongación. Representa el estado de vibración de la partícula en cualquier instante; mide la distancia entre el punto de equilibrio estable y la posición de la partícula vibrante en cada instante (unidad SI: metro). Si φ_o = 0, y representa el desplazamiento que ha experimentado la partícula en el tiempo t.

  Si el movimiento armónico es vertical, las elongaciones por encima de la posición de equilibrio se consideran positivas y negativas las de abajo, mientras que si el movimiento armónico tiene lugar horizontalmente, son positivas las elongaciones a la derecha de la posición de equilibrio y negativas a la izquierda.
- A : Amplitud. Valor máximo que puede tomar la elongación. Por tanto, la distancia entre las dos posiciones extremas de la partícula vibrante es $2A$ m.

- $\omega t + \varphi_o$: <u>Fase</u> del movimiento vibratorio en cualquier instante. Su valor determina el estado de vibración, o sea, el valor de la elongación en un instante dado. Consta de:
  - φ_o : <u>Fase inicial</u>, <u>corrección de fase</u>, <u>desfase</u> o <u>constante de fase</u>. Su valor determina la elongación para $t = 0\ s$ y debe concretarse en cada caso: $y(0)=A\cdot sen\varphi_o \Rightarrow \varphi_o = arcsen\ \frac{y(0)}{A}$.
    Así, si empezamos a contar el tiempo cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio ($y(0) = 0\ m$) resulta que $\varphi_o = 0\ rad$.
  - ω : <u>Pulsación</u> o <u>frecuencia angular</u> del movimiento vibratorio. Es el equivalente a la velocidad angular constante del MCU hipotético que hemos proyectado; mide la variación de fase del movimiento vibratorio en la unidad de tiempo: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{t} = \frac{\varphi_t - \varphi_0}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$. Su unidad en el SI es la misma que la de la frecuencia, el s^{-1} o Hz (hertzio), ya que, por definición de radián, esta magnitud complementaria es adimensional y, por tanto, sin unidades; no obstante, está admitido escribir *rad/s*.

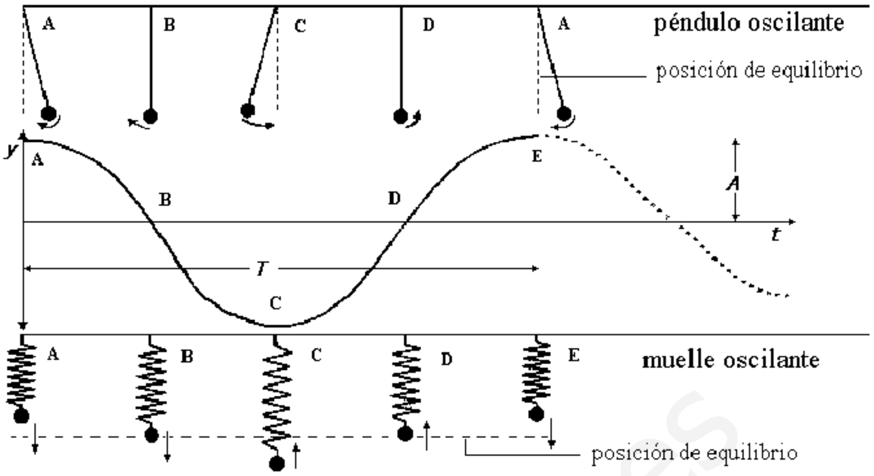


Figura 4

Se dice que dos posiciones de la partícula vibrante están <u>en fase</u> o <u>concordancia de fase</u> cuando coinciden sus estados de vibración (coincide el valor de la elongación). Esto ocurre cuando el tiempo que transcurre entre las posiciones es igual a un número entero de períodos de vibración: $\Delta t = nT$ (con n = 0, 1, 2, 3, ...). La diferencia de fase entre dos estados de vibración en fase es de: $\Delta\varphi = 2\pi n\ rad$.

Se dice que dos posiciones de la partícula vibrante están <u>en oposición de fase</u> cuando sus estados de vibración son opuestos. Esto ocurre cuando el tiempo que transcurre entre las posiciones es igual a un número impar de semiperíodos de vibración: $\Delta t = (2n+1)\frac{T}{2}$ (con n = 0, 1, 2, 3, ...). La diferencia de fase entre dos estados de vibración en oposición de fase es de: $\Delta\varphi = (2n+1)\pi\ rad$.

Teniendo en cuenta las relaciones planteadas anteriormente entre el período, la frecuencia y la pulsación, la ecuación del movimiento de un objeto que describe un MAS de período T y amplitud A, puede expresarse en las siguientes formas análogas:

$$\boxed{y(t) = A\cdot sen\,(\omega t + \varphi_o) = A\cdot sen\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t + \varphi_0\right) = A\cdot sen\,(2\pi\nu t + \varphi_o)} \quad ^{(2)}$$

A.1. Resuelve las siguientes actividades:

A.1.1. Escribe, tanto en función del seno como en función del coseno, la ecuación del MAS de una partícula con pulsación ω y amplitud A en los siguientes casos referidos a su posición inicial: a) En el centro de la vibración y se dirige hacia elongaciones positivas. b) En el centro del recorrido y se dirige hacia elongaciones negativas. c) En el extremo positivo de la elongación. d) En el extremo negativo de la elongación. e) En el punto medio de la amplitud, dentro de las elongaciones negativas y dirigiéndose hacia elongaciones positivas.

A.1.2. Una partícula inicia un MAS en el extremo de su trayectoria y tarda 0,1 s en ir al centro de la misma. Si la distancia entre ambas posiciones es de 20 cm, calcula: a) Las magnitudes que definen el movimiento (A, T, ν, ω, φ_o). b) La ecuación que describe el movimiento de la partícula. c) La posición de la partícula 1 s después de iniciar el movimiento.

A.1.3. La ecuación de movimiento de un objeto viene dada por: $x = 2.sen\,(6\pi t + \pi)$, donde x viene en metros, si t en segundos. Determina: a) Las magnitudes que definen el movimiento (A, T, ν, ω, φ_o). b) La posición de la partícula en los instantes $t = 0$ s, $t = 0,25$ s, y $t = 0,5$ s. c) El número de oscilaciones dado por la partícula en una hora.

A partir de la ecuación del movimiento, podemos obtener la **ecuación de la velocidad** y la **ecuación de la aceleración** sin más que aplicar sus respectivas definiciones:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\cdot\omega\cdot cos\,(\omega t + \varphi_o) = \pm A\cdot\omega\cdot\sqrt{1 - sen^2(\omega t + \varphi_o)} = \pm\,\omega\cdot\sqrt{A^2 - A^2 sen^2(\omega t + \varphi_o)} = \pm\,\omega\cdot\sqrt{A^2 - y^2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\,A\cdot\omega^2\cdot sen\,(\omega t + \varphi_o) = -\,\omega^2\cdot y$$

---

[2] Si en vez de realizar la proyección del MCU sobre el eje vertical lo hacemos sobre el horizontal, obtendríamos una ecuación semejante, pero en función del coseno: $x(t) = A\cdot cos(\omega t+\varphi_o)$. Haciendo uso de relaciones trigonométricas: $cos\ \alpha = sen\ (\alpha + \pi/2) = sen\ (\pi/2 - \alpha)$, podemos poner la ecuación del movimiento en función del seno introduciendo un ángulo de desfase de $\pi/2$: $x(t) = A\cdot sen\ (\omega t + \varphi_o + \pi/2) = A\cdot sen\ (\omega t + \varphi_o')$.

Observa que (*figura 5*):

- *La velocidad y la aceleración son función periódica del tiempo.*
- *Su valor depende de la posición de la partícula, oscilando entre dos valores extremos:*

• *La velocidad tiene el valor máximo en el centro de la trayectoria, anulándose en los extremos.*

• *La aceleración es proporcional a la elongación, pero de sentido contrario a ella, siempre dirigida hacia el centro de vibración; se anula en el centro y tiene valor máximo en los extremos.*

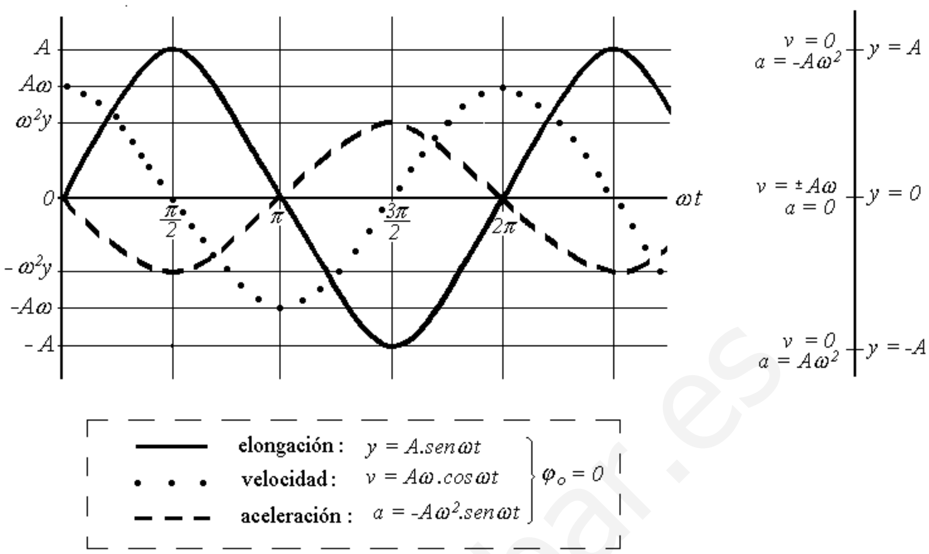


Figura 5. Gráficas y-t, v-t y a-t para el MAS

A.2. Resuelve las siguientes actividades:

A.2.1. Un objeto cuelga de un muelle y describe un MAS de amplitud 10 cm y período 0,1 s. En el instante inicial, el muelle está estirado, ocupando el objeto la posición más baja de su oscilación. Determina: a) La ecuación del movimiento, la velocidad y la aceleración en cualquier instante. b) La posición, velocidad y aceleración del objeto a los 10 s de iniciado el movimiento. c) Los puntos en que la velocidad y la aceleración tienen un valor máximo y un valor mínimo. d) La diferencia de fase entre el instante inicial y los 10 s.

A.2.2. Una partícula vibra con una velocidad máxima de 20 m/s y una amplitud de 10 cm. Calcula: a) La frecuencia del movimiento. b) La aceleración máxima. c) La velocidad de la partícula cuando se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio.

A.2.3. Un muelle elástico se encuentra colgado verticalmente de modo que en esta posición su longitud es de 1 m. Tirando del extremo de dicho muelle se logra aumentar su longitud hasta 1,2 m, de modo que, al soltar dicho muelle, su extremo comienza a oscilar con un período de 0,5 s. Determina la posición, velocidad y aceleración del punto extremo del muelle 3,25 s más tarde del momento en que se soltó. ¿Qué diferencia de fase existe entre este instante y el instante inicial?.

A.2.4. Una partícula tiene un desplazamiento x dado por: $x = 0{,}3\cdot\cos(2t + \pi/6)$, en donde x se mide en m y t en s. Halla: a) las magnitudes que definen el movimiento (A, T, v, ω, φ_o).; b) la velocidad y la aceleración para un instante cualquiera t; c) la posición, velocidad y aceleración iniciales de la partícula y al cabo de t =1 s.

A.2.5. La elongación de una partícula con MAS es: $x = 0{,}8\cdot\cos(2t + \pi/3)$ (SI). Calcula: a) la velocidad y la aceleración para $t=\pi/2$ s; b) la velocidad máxima y el primer instante de velocidad máxima; c) la aceleración máxima y el primer instante de aceleración máxima.

2.2. ¿DE QUÉ DEPENDE EL PERÍODO DE UN OSCILADOR ARMÓNICO? DESCRIPCIÓN DINÁMICA.

Para dar respuesta a la cuestión que da título a este apartado debemos recurrir al estudio dinámico del oscilador armónico. Dos osciladores armónicos típicos son el muelle y el péndulo simple.

DINÁMICA DEL MAS EN UN MUELLE O SISTEMA ELÁSTICO.

Un sistema elástico (muelle, resorte, goma, etc.) se convierte en un oscilador armónico por acción de una **fuerza central recuperadora o restauradora** que se manifiesta cuando se rompe la situación de equilibrio estable por acción de alguna fuerza deformadora, siempre en contra de dicha fuerza deformadora y hacia la posición de equilibrio. Dicha fuerza recuperadora es **variable** y **cumple la ley de Hooke** ($\boxed{\vec{F}_{restauradora} = -\ k\cdot\Delta\vec{r}}$), es decir, es directamente proporcional en todo instante al desplazamiento experimentado por el sistema elástico[3].

Al colgar un cuerpo de masa m de un muelle de masa despreciable y longitud L_0, se observa que se estira quedando en equilibrio con una longitud final L (*figura 6*). Dado que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, su

[3] Recuerda que k es la constante recuperadora, característica del sistema elástico; mide su grado de elasticidad o rigidez (la fuerza elástica por unidad de elongación). El signo menos en la expresión vectorial de la ley de Hooke indica que la fuerza restauradora $\vec{F}_{res.}$ siempre va dirigida en contra del desplazamiento $\Delta\vec{r}$, o sea, se trata de una fuerza central, dirigida siempre hacia la posición de equilibrio estable.

peso y la fuerza recuperadora, están equilibradas, podemos afirmar: $\sum \vec{F} = 0;\ P = F_{\text{recuperadora}}\ ;\ P = k\cdot(L-L_0)\ ;$ lo que nos permite calcular la constante elástica del sistema: $k = \dfrac{mg}{L - L_0}$.

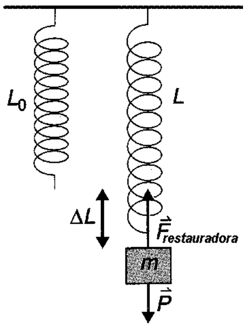


Figura 6

Si se aplica al sistema una fuerza deformadora vertical y se deja libre, obtenemos un oscilador armónico (*figura 7*). La fuerza resultante es proporcional y de sentido contrario a la separación del cuerpo de la posición de equilibrio, por lo que el objeto sigue un MAS. Aplicando la ley de Hooke ($\vec{F} = -k\cdot\vec{y}$) y la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\cdot\vec{a}$) y teniendo en cuenta que la aceleración del movimiento es del tipo: $\vec{a} = -\ \omega^2\vec{y}$ (ver descripción cinemática), se tiene: $k = m\cdot\omega^2 = m\cdot\dfrac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$

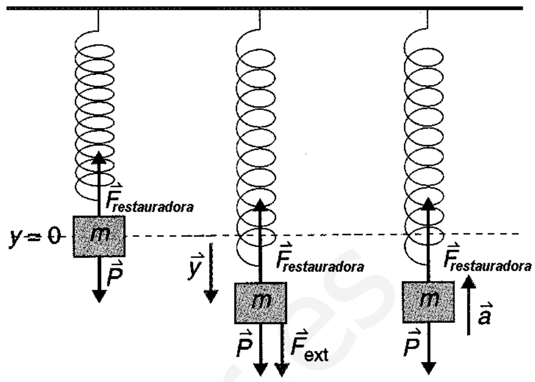


Figura 7

A partir de este resultado puede verse que <u>el período y la frecuencia de un oscilador armónico elástico son independientes de la amplitud del movimiento</u>. <u>Dependen de la masa del sistema oscilante y de la constante recuperadora</u>, o sea, de su naturaleza. La frecuencia del oscilador es tanto mayor cuanto mayor es la rigidez del muelle y menor es su masa. Esto es lo natural: el muelle rígido comunica al cuerpo una aceleración mayor y la velocidad de éste varía con más rapidez.

A.3. Resuelve las siguientes actividades:

A.3.1. Un cuerpo de 2 kg de masa estira un muelle en 10 cm cuando cuelga verticalmente en equilibrio. Determina la amplitud, la frecuencia angular y la frecuencia con la que oscilaría el sistema vibrante en los siguientes casos:

a) Se separa el cuerpo de la posición de equilibrio una distancia de 5 cm y se deja en libertad cuando t=0 s.
b) Se separa el cuerpo de la posición de equilibrio una distancia de 10 cm y se deja en libertad cuando t=0 s.
c) Se sustituye la masa de 2 kg por otra masa de 200 g. Se separa el cuerpo de la posición de equilibrio una distancia de 5 cm y se deja en libertad cuando t=0 s.
d) Se sustituye el muelle por otro que estira 5 cm cuando cuelga verticalmente en equilibrio la masa de 2 kg. Se separa el cuerpo de la posición de equilibrio una distancia de 5 cm y se deja en libertad cuando t=0 s.

A.3.2. Un resorte se estira 4 cm cuando se cuelga de él un objeto de 20 kg de masa. A continuación, se estira el resorte 3 cm más y se le deja que oscile libremente. Determina el período y la pulsación del movimiento. Calcula los valores de la elongación, velocidad, aceleración y fuerza elástica a los 2,1 s de iniciado el movimiento. ¿Cuál es la diferencia de fase entre este instante y el instante inicial?.

DINÁMICA DEL MAS EN UN PÉNDULO SIMPLE CON ÁNGULOS DE DESVIACIÓN PEQUEÑOS.

Un <u>péndulo simple</u> consta de un cuerpo suspendido de un hilo inextensible y de masa despreciable.

Al separar el péndulo de la vertical un ángulo α, el cuerpo oscila en torno a la posición central. ¿Cuál es la fuerza restauradora que actúa en este caso?. Como se deduce de la *figura 8*, <u>en un péndulo simple, la componente tangencial del peso actúa en calidad de fuerza restauradora</u> ($F_\alpha = -\ mg.sen\ \alpha$)[4], ya que la componente normal del peso ($mg.cos\ \alpha$), en la dirección del hilo, es compensada por la tensión de dicho hilo.

Esta fuerza tangencial, causa del movimiento, no es proporcional al desplazamiento del cuerpo, por lo que el movimiento no es armónico simple. No obstante, si el ángulo de desviación respecto a la posición central es pequeño (no más de 15-20º) el valor de $sen\ \alpha$ equivale a α (en *rad*) ($sen\ \alpha \approx \alpha = \dfrac{s}{l}$, con s mucho menor que l), con lo que podemos escribir la fuerza tangencial así: $F_s = -\ mg.\dfrac{s}{l}$, donde s es el arco de circunferencia descrita, asimilable a una recta, y l es la longitud del péndulo. Combinando la ecuación anterior con la segunda ley de Newton ($F = m.a$) y teniendo en cuenta que la aceleración del movimiento es del tipo: $a = -\ \omega^2 s$ (ver descripción cinemática), se tiene: $\dfrac{g}{l} = \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$; o

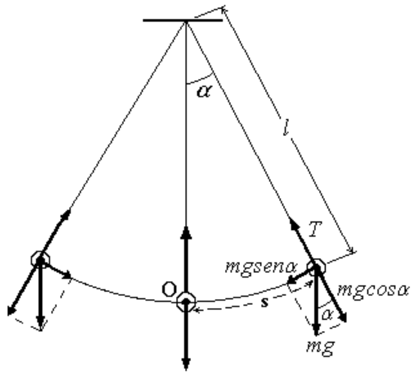


Figura 8

[4] Consideramos que el ángulo de oscilación α es positivo si el péndulo está desplazado hacia la derecha y negativo si lo está hacia la izquierda.

también: $\boxed{T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

A partir de esta ecuación puede verse de nuevo que el período y la frecuencia de un MAS son independientes de la amplitud del movimiento. Además, para un péndulo que oscila bajo pequeños ángulos de separación, el período y la frecuencia son independientes de la masa, algo que no sucedía para el muelle oscilante. Sólo dependen de la longitud del péndulo y de la aceleración de la gravedad. La frecuencia del M.A.S de un péndulo es tanto mayor cuanto mayor es la gravedad en el lugar y menor es la longitud del hilo. Concluimos que todos los péndulos simples de igual longitud en el mismo lugar, oscilarán con el mismo período.

La dependencia entre el período de las oscilaciones de un péndulo y el valor de la gravedad se aprovecha en la práctica para determinar dicho valor con bastante exactitud. Tales mediciones locales de la intensidad de campo gravitatorio son importantes, pues dan información sobre la localización de petróleo y otros recursos minerales.

A.4. Resuelve las siguientes actividades:

A.4.1. ¿Cómo varía el período de un péndulo al duplicar su longitud? ¿Y al disminuirla 1/3 de su longitud original?

A.4.2. ¿Cuántas oscilaciones realiza un péndulo simple de longitud 4,9 m en 5 minutos?

A.4.3. Un reloj de péndulo compensado que bate segundos en el Ecuador (T = 2 s), se traslada al Polo. Calcula el retraso o adelanto del reloj en un día. (En los péndulos compensados la temperatura no ejerce influencia sobre la longitud del péndulo). Datos: $g_{Polo} = 1{,}003 \cdot g_{Ecuador}$.

A.4.4. La bolita de un péndulo simple realiza una oscilación aproximadamente horizontal y armónica, en presencia del campo gravitatorio terrestre, con un período de 2 s y una amplitud de 2 cm. a) Obtén la ecuación de la velocidad de la bolita en función del tiempo, y represéntala gráficamente. Toma origen de tiempo en el centro de la oscilación. b) ¿Cuál sería el período de oscilación de este péndulo en la superficie de la Luna, donde la gravedad es la sexta parte de la terrestre?

2.3. ¿CÓMO EVOLUCIONA LA ENERGÍA EN UN OSCILADOR ARMÓNICO? DESCRIPCIÓN ENERGÉTICA.

La energía total o mecánica de un cuerpo que describe un movimiento armónico simple (MAS) es el resultado de dos contribuciones: la energía potencial E_p, asociada al desplazamiento del cuerpo de la posición de equilibrio, y la energía cinética E_c, asociada a la velocidad del cuerpo.

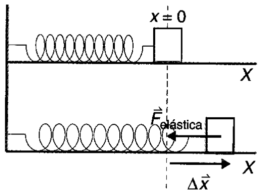


Figura 9

Para demostrarlo consideramos un oscilador armónico constituido por un cuerpo unido a un muelle horizontal. Si despreciamos los rozamientos, la fuerza resultante causante del MAS es la fuerza elástica del muelle (*figura 9*), una fuerza recuperadora, central (siempre dirigida hacia la posición de equilibrio) y variable, pues cumple la ley de Hooke: $\vec{F}_{resultante} = \vec{F}_{elástica\ restauradora} = -k \cdot \vec{x}$.

El trabajo realizado por dicha fuerza restauradora para desplazar el cuerpo desde una posición x hasta la posición de equilibrio es: $W_{Frestauradora} = \int_x^0 \vec{F}_x . d\vec{x} = \int_x^o (-kx)dx = -\int_x^o kxdx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_x^0 = \frac{1}{2}kx^2 - 0$, de donde se deduce que dicho trabajo depende solamente de la posición relativa del cuerpo oscilante y no del camino recorrido; por tanto, la fuerza elástica recuperadora es, además de central y variable, conservativa, luego el trabajo que realiza se relaciona con la variación de una magnitud escalar llamada **energía potencial elástica** de forma tal que se cumpla la ley de la energía potencial: $W_{F\ restauradora} = -\Delta E_p$. En nuestro caso: $W_{F\ restauradora} = -\Delta E_p = E_p(x) - E_p(0) = \frac{1}{2}kx^2 - 0$. Se deduce que la energía potencial elástica de un oscilador armónico en cualquier punto viene dada por la expresión: $\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 sen^2\,(\omega t + \varphi_o)}$. *Observa que la energía potencial elástica varía periódicamente con la posición (valor máximo en los extremos, $E_{p\ max} = \frac{1}{2}kA^2$ J, y mínimo en el centro de la trayectoria, $E_p = 0$ J), siendo directamente proporcional al cuadrado de la amplitud.*

Ahora bien, como en la situación planteada la fuerza recuperadora es a la vez la fuerza resultante, aplicando la ley de la energía cinética: $W_{F\ restauradora} = \frac{1}{2}kx^2 - 0 = W_{F\ resultante} = \Delta E_c = E_c(0) - E_c(x)$. Se deduce que la energía cinética en la posición de equilibrio es máxima, haciéndose nula en los extremos, luego puede expresarse

así: $\boxed{E_c(x) = \frac{1}{2}k(A^2-x^2) = \frac{1}{2}k\ A^2cos^2\ (\omega t+\varphi_o)} = \frac{1}{2}\ mA^2\omega^2cos^2\ (\omega t+\varphi_o) = \frac{1}{2}mv^2$. Observa que *la energía cinética también*
varía periódicamente con la posición (valor máximo en el centro, $E_{c\ max} = \frac{1}{2}kA^2\ J$, *y mínimo en los extremos de la trayectoria*, $E_c=0\ J$, *siendo directamente proporcional al cuadrado de la amplitud*.

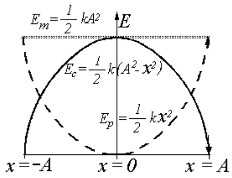


Figura 10

Por tanto, la energía mecánica total de un cuerpo describe un MAS resulta:

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}k(A^2-x^2) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\ A^2\omega^2 = 2\pi^2mv^2A^2\ J}$$

Se concluye:

La energía mecánica del MAS permanece constante, siempre y cuando no existan fuerzas disipativas (rozamientos o resistencias). La energía mecánica es igual al valor máximo de la energía potencial, e igual al valor máximo de la energía cinética, siendo directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y de la frecuencia del MAS. Durante el MAS, hay una transformación continua de energía potencial en cinética, y viceversa (figura 10).

La conservación de la energía mecánica se cumple para cualquier oscilador armónico. Así, en el caso del péndulo, si no se tiene en cuenta la fricción con el aire, tiene lugar una constante conversión de energía cinética en potencial gravitatoria, y viceversa, pero la suma de ambas, la energía mecánica, siempre tiene un valor constante.

A.5. Resuelve las siguientes actividades:

A.5.1. Un cuerpo de 3 kg de masa sujeto a un muelle oscila con una amplitud de 4 cm y con un período de 2 s. Calcula: a) Su energía total. b) Su velocidad máxima. c) La elongación a la que se mueve con una rapidez de 8.10^{-2} m/s. d) La elongación a la cual coinciden los valores de energía cinética y potencial.

A.5.2. Una bola de 0,5 kg de masa describe un MAS de 10 cm de amplitud, realizando 2 ciclos cada segundo. Determina: a) La elongación de dicha bola 0,5 s después de alcanzar la elongación máxima. b) La constante recuperadora del movimiento. c) La energía cinética y la energía mecánica de la bola al pasar por la posición de equilibrio, al pasar por el punto medio de la amplitud y al pasar por uno de los extremos de la oscilación.

A.5.3. Una masa de 2 kg cuelga de un muelle de constante recuperadora 5.10^3 Nm^{-1}. Se obliga a la masa a estirar el muelle, separándose 10 cm de su posición de equilibrio, y se deja en libertad. Calcula: a) La pulsación, frecuencia y amplitud de la oscilación. b) El valor de la elongación al cabo de 1 s. c) La energía cinética, potencial y mecánica del oscilador en función del tiempo.

A.5.4. Una pesa de 10 g está sujeta a un muelle. Al inicio de computar el tiempo está en posición de equilibrio y lleva una velocidad de 5 cm/s en sentido negativo. Si la frecuencia de las oscilaciones es 3 Hz, determina: a) El tiempo que debe pasar hasta que esté nuevamente en reposo. b) La aceleración en ese instante. c) La energía cinética, potencial y mecánica del oscilador en función del tiempo.

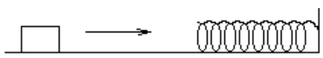
A.5.5. Dos partículas describen sendos MAS de frecuencias 1 kHz y 2 kHz y de la misma amplitud, 1 cm. a) ¿En qué instante de tiempo la segunda partícula tendrá la misma velocidad que tiene la primera en t = 1 s?. b) ¿Cuál de los dos MAS tendrá mayor energía mecánica, sabiendo que la masa de ambas partículas son iguales? ¿Qué relación existe entre dichas energías mecánicas?.

A.5.6. La energía total de un cuerpo que realiza un MAS es 3.10^{-5} J y la fuerza máxima que actúa sobre él es $1,5.10^{-3}$ N. Expresa la posición del cuerpo en función del tiempo si el período de las vibraciones es igual a 2 s y la elongación en el instante inicial es nula.

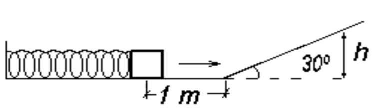
A.5.7. Un oscilador armónico, constituido por un muelle de masa despreciable y una masa en el extremo de 40 g, tiene un período de oscilación de 2 s. a) ¿Cuál debe ser la masa de un segundo oscilador, construido con un muelle idéntico al primero, para que la frecuencia de oscilación se duplique?. b) Si la amplitud de las oscilaciones en ambos osciladores es 10 cm, ¿cuánto vale, en cada caso, la máxima energía potencial del oscilador y la máxima velocidad alcanzada por su masa?.

A.5.8. Supón que realizas una práctica con un muelle de masa despreciable colgado verticalmente de un soporte fijo. a) Al colgar una pesa de masa m = 100 g de su extremo inferior, observas que el alargamiento del muelle en equilibrio es ΔL = 10,4 cm. Si sustituyes la masa por otra m´= 250 g, ¿cuál será el nuevo alargamiento en equilibrio? b) Suspendes ahora del muelle una tercera masa desconocida. Tras un pequeño empujón vertical a la masa, cronometras el tiempo que tarda en realizar 10 oscilaciones completas y obtienes 7,9 s. ¿Cuál es el valor de la masa desconocida?.

A.5.9. En una superficie horizontal se prepara un resorte, también horizontal, cuya constante elástica es de 100 N/m. Desde un punto que dista 3 m del resorte, se lanza hacia él un cuerpo de 1 kg de masa con una rapidez de 10 m/s. Determina la máxima compresión del resorte: a) suponiendo nulo el rozamiento con el suelo; b) suponiendo que el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el suelo es de 0,1.



A.5.10. Un cuerpo de 2 kg de masa comprime unos 30 cm un muelle de constante elástica 1000 N/m. Dicho cuerpo se suelta y sale disparado. Determina la altura que alcanzará sobre la rampa si: a) no se tiene en cuenta la fricción con el suelo; b) si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el suelo es de 0,1.



A. Final. Realiza un resumen de las ideas más importantes aprendidas en esta unidad, así como un cuadro con las ecuaciones y fórmulas que has manejado a lo largo de la misma.

APÉNDICE: ¿CÓMO SON LOS MOVIMIENTOS VIBRATORIOS REALES? OSCILACIONES AMORTIGUADAS, OSCILACIONES FORZADAS Y FENÓMENOS DE RESONANCIA.

Dejado libremente, un muelle o péndulo finalmente deja de oscilar. Los **movimientos oscilatorios reales** son **amortiguados** (*figura A.1*). En los sistemas reales, están presentes fuerzas disipativas (de rozamiento externo, de resistencia interna) que se oponen a la fuerza restauradora y que ocasionan una disminución de la energía mecánica del sistema oscilante (disipada al ambiente en forma de calor) y, por consiguiente, una disminución de la amplitud del movimiento o de la frecuencia de la oscilación.

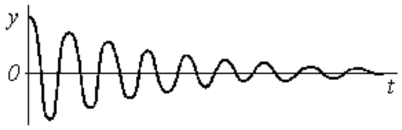


Figura A.1

Si el amortiguamiento es pequeño, la amplitud de las vibraciones se va haciendo cada vez menor (decrecimiento exponencial), hasta llegar a anularse por completo, sin que se modifique prácticamente la frecuencia. En cambio, si el amortiguamiento es grande (caso de los amortiguadores de un vehículo), la frecuencia de las oscilaciones también disminuye rápidamente (de esta forma se evita que los vehículos, después de pasar un bache de la carretera, sigan oscilando repetidamente).

Si se desea que un oscilador amortiguado prosiga su movimiento con la misma amplitud, es necesario comunicarle la energía disipada aplicándole fuerzas externas en la dirección del movimiento oscilante que compense las fuerzas disipativas. Se habla entonces de **movimiento oscilatorio forzado**. Un ejemplo bien conocido es el de columpiar a un niño empujándole de forma acompasada a su movimiento oscilatorio. Una manera de introducir energía a un muelle oscilante verticalmente es mover el punto de soporte hacia arriba y hacia abajo. De igual modo, es posible suministrar energía a un péndulo oscilante moviendo el punto de soporte hacia delante y atrás.

Si se introduce energía en un sistema oscilante al mismo ritmo que se disipa, la amplitud permanece constante con el tiempo; decimos que el sistema oscilante forzado ha alcanzado un <u>estado estacionario</u>. Pero si se introduce más energía que se disipa la amplitud aumenta, a veces de forma considerable, dando lugar a **fenómenos de resonancia** de los que seguro has oído hablar o has experimentado personalmente[5]. Por ejemplo, cuando haces oscilar un muelle moviendo periódicamente tu mano de arriba hacia abajo, consigues que el muelle oscile con gran amplitud. Igualmente, el paso de un camión puede provocar fenómenos de resonancia en los cristales de las ventanas, y el vuelo de los aviones supersónicos es capaz de producir daños en la estructura de las viviendas por el mismo motivo. El simple hecho de empujar a un columpio cada vez que llega al extremo de la oscilación es un fenómeno de resonancia.

Desastres ocasionados por fenómenos de resonancia son: el desplome de un puente en Manchester (Inglaterra), en 1831, ante el paso tropas de caballería en perfecta formación y marcando el paso (a partir de entonces se rompe el paso al cruzar puentes), la destrucción de un puente recién inaugurado en Tacoma (Washington, EUA), en 1940, por un suave viento, y, con menor gravedad, la rotura de una copa por la voz de un cantante de ópera. No obstante, no todos los fenómenos de resonancia son desastrosos; algunos, de hecho, son maravillosos: los bellos sonidos que emiten las cajas acústicas de los instrumentos de cuerda o la sintonización de una emisora de radio o televisión son ejemplos de ello.

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PLANTEADAS EN LA UNIDAD.

A.1.1: a) $y(t) = A\cdot\text{sen}\,\omega t = A\cdot\cos(\omega t + 3\pi/2)$; b) $y(t) = A\cdot\text{sen}(\omega t + \pi) = A\cdot\cos(\omega t + \pi/2)$; c) $y(t) = A\cdot\text{sen}(\omega t + \pi/2) = A\cdot\cos\omega t$; d) $y(t) = A\cdot\text{sen}(\omega t + 3\pi/2) = A\cdot\cos(\omega t + \pi)$; e) $y(t) = A\cdot\text{sen}(\omega t + 11\pi/6) = A\cdot\cos(\omega t + 4\pi/3)$ En general se pueden intercambiar las funciones seno y coseno entre sí, teniendo en cuenta las relaciones entre los ángulos opuestos y complementarios: $\text{sen}\,\varphi = \cos(\pi/2 - \varphi) = \cos(\varphi - \pi/2)$ $\cos\varphi = \cos(-\varphi) = \text{sen}(\varphi + \pi/2)$
A.1.2: a) A= 0,2 m; T= 0,4 s; ν= 2,5 Hz; ω= 5π s^{-1}; φ_0= $\pi/2$ rad. ; b) y (t)= $0,2\cdot\text{sen}(5\pi t + \pi/2)$ m; c) y (1 s) = - 0,2 m.
A.1.3: a) A= 2 m; T= 1/3 s; ν= 3 Hz; ω= 6π s^{-1}; φ_0= π rad. ; b) y (0 s) = 0 m; y (0,25 s) = 2 m; y (0,5 s) = 0 m; c) 10.800 oscilaciones.

A.2.1: a) y (t)= $0,1\cdot\text{sen}(20\pi t + 3\pi/2)$ m; v (t)= $2\pi\cdot\cos(20\pi t + 3\pi/2)$ m/s; a (t)= $-40\pi^2\cdot\text{sen}(20\pi t + 3\pi/2)$ m/s^2; b) y (10) = - 0,1 m; v (10)= 0 m/s; a (10)= $40\pi^2$ m/s^2; c) v_{max} y a_{min}, cuando pasa la partícula por la posición de equilibrio; v_{min} y a_{max}, cuando la partícula alcanza los extremos de la oscilación; d) $\varphi(10) - \varphi(0) = 200\pi$ rad. (los dos instantes están en fase)
A.2.2: a) ν= $100/\pi$ Hz; b) a_{max}= ± 4 000 m/s^2; c) v (y=2.10^{-2} m) = 19,6 m/s.
A.2.3: a) y (3,25) = 0,2 m; v (3,25)= 0 m/s; a (3,25)= $-3,2\pi^2$ m/s^2; b) $\varphi(3,25) - \varphi(0) = 13\pi$ rad. (los dos instantes están desfasados π rad.)
A.2.4: a) A= 0,3 m; T= π s; ν= $1/\pi$ Hz; ω= 2 s^{-1}; φ_0= $\pi/6$ rad. ; b) v (t)= $-0,6\cdot\text{sen}(2t + \pi/6)$ m/s; a (t)= $-1,2.\cos(2t + \pi/6)$ m/s^2; c) x (0)= 0,26 m; v (0)= - 0,30 m/s; a (0)= - 1,04 m/s^2; x (1)= - 0,24 m; v (0)= - 0,35 m/s; a (0)= 0,98 m/s^2.
A.2.5: a) v ($\pi/2$)= 1,39 m/s; a ($\pi/2$)= 1,60 m/s^2; b) v_{max} ($\pi/12$)= -1,6 m/s; c) a_{max} ($\pi/3$)= 3,2 m/s^2.

A.3.1: a) A= 5.10^{-2} m; ω= 9,90 s^{-1}; ν= 1,58 Hz; b) A= 10^{-1} m; ω= 9,90 s^{-1}; ν= 1,58 Hz; c) A= $5\cdot10^{-2}$ m; ω= 31,30 s^{-1}; ν= 4,98 Hz; c) A= 5.10^{-2} m; ω= 14 s^{-1}; ν= 2,23 Hz.
A.3.2: a) T= 0,4 s; ω= 5π s^{-1}; b) y (2,1) = 0 m; v (2,1)= $0,15\pi$ m/s; a (2,1)= 0 m/s^2 ; F_{rest} (2,1)= 0 N; b) $\varphi(2,1) - \varphi(0) = 10,5\pi$ rad. (los dos instantes están desfasados $\pi/2$ rad.)

---

[5] En los osciladores forzados hay que distinguir entre la <u>frecuencia natural</u> del sistema oscilante y la <u>frecuencia de la fuerza externa impulsora</u>. <u>Si estas frecuencias se igualan se dan fenómenos de resonancia</u>, lo que se traduce en un aumento, a veces notable, de la amplitud de la oscilación forzada, por la consiguiente introducción de energía al sistema.

A.4.1: $T_{2l} = \sqrt{2}\ T_l$; $T_{l/3} = \frac{1}{\sqrt{3}} T_l$. A.4.2: 67,56 osc. A.4.3: Adelanta 2 min. 9,6 s. A.4.4: a) $v(t) = 2.10^{-2}\pi \cos \pi t$ m/s; $T_{Luna} = 4{,}90$ s.

A.5.1: a) $E = 2{,}37 \cdot 10^{-2}$ J; b) $v_{max} = \pm 0{,}126$ m/s; c)) $y = \pm 3 \cdot 10^{-2}$ m; d) $y = \pm 0{,}02\sqrt{2}$ m.
A.5.2: a) $y(0{,}5) = 0{,}1$ m; b) $k = 8\pi^2$ N/m; c) $E_m = 0{,}04\pi^2$ J (en cualquier punto); $E_c(0) = E_{c\ max} = 0{,}04\pi^2$ J; $E_c(0{,}05) = 0{,}03\pi^2$ J; $E_c(0{,}1) = E_{c\ min} = 0$ J
A.5.3: a) $\omega = 50\ s^{-1}$; $\nu = 25/\pi$ Hz; $A = 0{,}1$ m; b) $y(1) = + 8 \cdot 10^{-2}$ m; c) $E_c(t) = 25 \cdot \cos^2(50t - \pi/2)$ J; $E_p(t) = 25 \cdot \text{sen}^2(50t - \pi/2)$ J; $E_m(t) = 25$ J.
A.5.4: a) $t = 1/12$ s; b) $a_{max} = 0{,}3\pi$ m/s^2; c) $E_c(t) = 1{,}25 \cdot 10^{-5} . \cos^2(6\pi t)$ J; $E_p(t) = 1{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot \text{sen}^2(6\pi t)$ J; $E_m(t) = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ J.
A.5.5: a) $t = 1/12.000$ s; b) $E_2 = 4E_1$. A.5.6: $y(t) = 0{,}04 . \text{sen}\ \pi t$ m.
A.5.7: a) $m_2 = 10$ g ; b) $E_{p1\ max} = E_{p2\ max} = 1{,}97 \cdot 10^{-5}$ J $= E_{c1\ max} = E_{c2\ max}$; $v_{1max} = 0{,}1\pi$ m/s; $v_{2max} = 0{,}2\pi$ m/s.
A.5.8: a) $\Delta L' = 26$ cm; b) $m' = 149$ g. A.5.9: a) $x_{max} = 1$ m; b) $x'_{max} = 0{,}96$ m. A.5.10: : a) $h_{max} = 2{,}29$ m; b) $h'_{max} = 1{,}87$ m.