8 Óptica física

EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1 Calcula la energía de los fotones que puede intercambiar la luz que procede del Sol, cuya longitud de onda es $\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ m. ¿Cuánto aumenta la energía de los fotones si se duplica la intensidad de la luz que llega?

A partir de la fórmula que para la energía de los fotones proporciona el efecto fotoeléctrico, tenemos:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\frac{3{,}00 \cdot 10^{8}}{1{,}5 \cdot 10^{-7}} = 1{,}3 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

Como se puede observar, la energía de los fotones no depende de la intensidad de la luz, sino de su frecuencia. Por lo tanto, no varía la energía de los fotones si se duplica la intensidad de la luz.

8.2 Calcula el número de vueltas que da un rayo de luz alrededor de la Tierra en un segundo si el radio de la Tierra mide 6370 km.

Calculamos la longitud de la Tierra:

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6} = 4{,}0 \cdot 10^{7}\,\text{m}$$

Dividiendo entre esa distancia la que recorre la luz en un segundo, se obtendrá el número de vueltas que da alrededor de la Tierra en un segundo.

$$n = \frac{e}{L} = \frac{3{,}00 \cdot 10^{8}}{4{,}0 \cdot 10^{7}} = 7{,}5\,\text{vueltas}$$

8.3 Lo curioso del experimento de Fizeau es la forma de medir el tiempo. Calcula el valor de dicho tiempo y explica por qué en 1850 este método se podía considerar ingenioso.

A. Fizeau calcula el tiempo dividiendo el ángulo que gira la rueda dentada entre la velocidad angular que lleva.

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{0{,}5\pi / 180}{2\pi \cdot 25{,}2} = \frac{8{,}7 \cdot 10^{-3}}{158{,}3} = 5{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$$

Lo ingenioso del método es la forma de calcular el tiempo y la medida que de este se obtiene, que no se puede obtener con ningún aparato de medida de la época.

8.4 Las medidas obtenidas para los índices de refracción de dos medios diferentes son $n_1 = 1{,}25$ y $n_2 = 0{,}97$. Calcula la velocidad de la luz en cada medio y, a la vista de los resultados, analiza la veracidad de los datos obtenidos.

Aplicando la definición de índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v};\quad v = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{c}{n_1} = \dfrac{3{,}00 \cdot 10^{8}}{1{,}25} = 2{,}40 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1} \\ v_2 = \dfrac{c}{n_2} = \dfrac{3{,}00 \cdot 10^{8}}{0{,}97} = 3{,}09 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1} \end{cases}$$

El segundo resultado es falso, ya que se obtiene una velocidad superior a la de la luz. De modo que el segundo índice de refracción no puede tener ese valor. De hecho, los índices de refracción tienen siempre un valor igual o superior a la unidad.

8.5 El brillo de las piedras preciosas se debe a las múltiples reflexiones que se producen en su interior. Calcula a partir de qué ángulo se produce la reflexión total entre el diamante y el aire si sus índices de refracción son: n_D = 2,42 y n_A = 1.

La reflexión total se produce cuando en el segundo medio el ángulo que forma el rayo con la normal es de 90º. Aplicando la ley de Snell a estos datos:

$$n_D \text{ sen } \alpha_L = n_A \Rightarrow \text{ sen } \alpha_L = \frac{n_A}{n_D} = \frac{1}{2{,}42}; \qquad \alpha_L = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2{,}42}\right) = 24{,}4^\circ$$

8.6 Si un rayo incide desde el aire (n_a = 1) con un ángulo de 60º con respecto a la normal, calcula el índice de refracción del segundo medio para que el ángulo refractado sea la mitad.

Aplicamos los datos del problema a la ley de Snell de la refracción:

$$n_a \text{sen } 60^\circ = n \text{ sen } 30^\circ; \qquad n = \frac{\text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = 1{,}73$$

8.7 Calcula el espesor de la lámina del ejercicio anterior para que el desplazamiento sea de 1 cm cuando el rayo incide con el mismo ángulo.

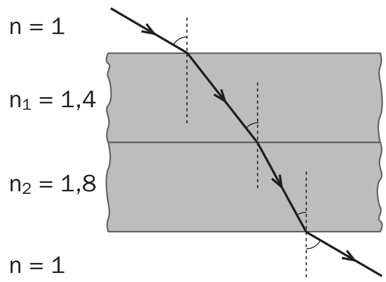
Aprovechando los resultados obtenidos en el ejercicio resuelto (ya que las condiciones del problema son las mismas) calculamos la longitud que debe recorrer el rayo por el interior de la lámina.

$$d = AB \text{ sen } 17^\circ; \qquad AB = \frac{1}{\text{sen } 17^\circ} = 3{,}42 \text{ cm}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión del espesor de la lámina:

$$h = AB \cos 28^\circ = 3{,}42 \cdot \cos 28^\circ = 3{,}02 \text{ cm}$$

8.8 Considera dos láminas de caras plano paralelas de espesor 1,5 cm cada una, unidas por una de sus caras. El índice de refracción de la primera es 1,4 y el de la segunda, 1,8. Calcula la desviación que sufre un rayo que incide en la primera de las caras con un ángulo de 60º, desde el aire.



Se aplica la ley de Snell a la primera refracción:

$$1 \cdot \text{sen } 60^\circ = 1{,}4 \cdot \text{sen } \alpha_{r1} \Rightarrow \alpha_{r1} = \text{arc sen}\left(\frac{\text{sen } 60^\circ}{1{,}4}\right) = 38{,}2^\circ$$

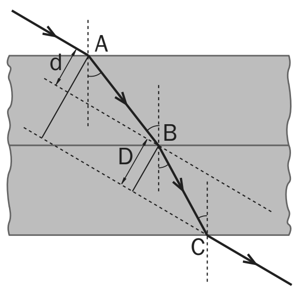
Se aplica de nuevo la ley de Snell a la segunda refracción:

$$1{,}4 \cdot \text{sen } 38{,}2^\circ = 1{,}8 \cdot \text{sen } \alpha_{r2} \Rightarrow \alpha_{r2} = \text{arc sen}\left(\frac{1{,}4 \cdot \text{sen } 38{,}2^\circ}{1{,}8}\right) = 28{,}8^\circ$$

Calculamos el ángulo del rayo emergente de la tercera refracción:

$$1{,}8 \cdot \text{sen } 28{,}8^\circ = 1 \cdot \text{sen } \alpha_e \Rightarrow \alpha_e = \text{arc sen}(1{,}8 \cdot \text{sen } 28{,}8^\circ) = 60^\circ$$

El rayo que sale tiene la misma dirección que el incidente.



Como se puede apreciar en la imagen, la desviación total es la suma de las desviaciones:

$$AB = \frac{1{,}5}{\cos 38{,}2^\circ} = 1{,}9 \text{ cm} \Rightarrow d = AB \text{ sen } (60^\circ - 38{,}2^\circ) = 0{,}71 \text{ cm}$$

$$BC = \frac{1{,}5}{\cos 28{,}8^\circ} = 1{,}7 \text{ cm} \Rightarrow D = BC \text{ sen } (60^\circ - 28{,}8^\circ) = 0{,}88 \text{ cm}$$

La desviación total es:

D + d = 1,59 cm

8.9 Sobre un prisma de 45º e índice de refracción 1,6 incide un rayo que forma un ángulo de 40º con la normal de la primera cara del prisma. Calcula el ángulo de salida del rayo emergente y el ángulo de desviación.

Aplicando la ley de la refracción a la primera cara:

$$n_a \cdot \text{sen}\,\alpha_i = n_p\,\text{sen}\,\alpha_{r1} \Rightarrow \alpha_{r1} = \text{arc sen}\left(\frac{n_a \cdot \text{sen}\,\alpha_i}{n_p}\right) = \left(\frac{\text{sen}\,40º}{1{,}6}\right) = 23{,}7º$$

Del triángulo formado por las normales y el rayo, se tiene:

$$\alpha_{r1} + \alpha_{i2} + 135º = 180º \Rightarrow \alpha_{i2} = 180º - 135º - 23{,}7º = 21{,}3º$$

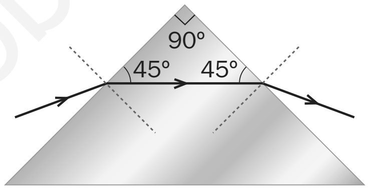
Aplicando de nuevo la ley de la refracción de Snell:

$$n_p \cdot \text{sen}\,\alpha_{i2} = n_a\,\text{sen}\,\alpha_{r2} \Rightarrow \alpha_{r2} = \text{arc sen}\left(\frac{n_p \cdot \text{sen}\,\alpha_{i2}}{n_a}\right) = \text{arcsen}\,(1{,}6 \cdot \text{sen}\,21{,}3º) = 35{,}5º$$

El ángulo de desviación será: $\delta = \alpha_{i1} + \alpha_{r2} - \varphi = 40º + 35{,}5º - 45º = 30{,}5º$

8.10 Cuando en un prisma el rayo refractado viaja paralelo a la base se produce la desviación mínima. En este caso, el rayo incidente y el emergente forman el mismo ángulo con sus normales. Calcula el ángulo de desviación mínima para un prisma de 90º con un índice de refracción de n = 1,3.

Como el rayo refractado es paralelo a la base del prisma, y este es de 90º, los ángulos interiores $\alpha_{r1} = \alpha_{i2} = 45º$.



Aplicando la ley de Snell de la refracción, calculamos el ángulo que el rayo emergente forma con la normal, que será el mismo que el formado por el incidente y su normal.

$$n_p\,\text{sen}\,45º = n_a\,\text{sen}\,\alpha_{r2};\ \alpha_{r2} = \text{arc sen}\left(\frac{n_p\,\text{sen}\,45º}{n_a}\right) = \text{arc sen}\left(\frac{1{,}3 \cdot \text{sen}\,45º}{1}\right) = 66{,}8º$$

La desviación será: $\delta = 66{,}8º + 66{,}8º - 90º = 43{,}6º$

8.11 Calcula el ángulo que forman entre si, los rayos rojo y violeta después de atravesar una lámina de caras plano paralelas de 3 cm de longitud si el índice de refracción para cada color es: n_r = 1,32; n_v = 1,35 y el ángulo de incidencia es de 30º.

Al salir de la lámina, los rayos de los dos colores son paralelos. Aplicamos la ley de Snell a cada rayo para comprobarlo.

$$n_a\,\text{sen}30º = n_r\ \text{sen}\,\alpha_r$$

$$\alpha_r = \text{arc sen}\left(\frac{\text{sen}\,30º}{1{,}32}\right) = 22{,}26º$$

$$n_a\,\text{sen}30º = n_v\,\text{sen}\,\alpha_v$$

$$\alpha_v = \text{arc sen}\left(\frac{\text{sen}\,30º}{1{,}35}\right) = 21{,}74º$$

A la salida de los rayos, se aplica de nuevo la ley de la refracción de Snell.

$$n_r\ \text{sen}\,\alpha_r = n_a\,\text{sen}\,\beta_r$$

$$\beta_r = \text{arc sen}\left(\frac{n_r\ \text{sen}\,\alpha_r}{n_a}\right) = \text{arc sen}\left(\frac{1{,}32\,\text{sen}\,22{,}26º}{1}\right) = 30º$$

$$n_v\ \text{sen}\,\alpha_v = n_a\,\text{sen}\,\beta_v$$

$$\beta_v = \text{arc sen}\left(\frac{n_v\ \text{sen}\,\alpha_v}{n_a}\right) = \text{arc sen}\left(\frac{1{,}35 \cdot \text{sen}\,21{,}74º}{1}\right) = 30º$$

Entre si formarían 0º

8.12 Calcula el ángulo que forman los rayos rojo y violeta después de atravesar un prisma cuyo ángulo es 90º si los índices de refracción para cada color son: n_r = 1,32; n_v = 1,35 y el ángulo de incidencia es de 60º.

Comenzamos calculando el ángulo con el que sale del prisma el color rojo.

$$n_a \text{ sen } 60^\circ = n_r \text{ sen } \alpha_{r1}; \qquad \alpha_{r1} = \text{arc sen}\left(\frac{\text{sen } 60^\circ}{1{,}32}\right) = 41^\circ$$

Esto supone que el ángulo de incidencia en la segunda cara sea:

$$\alpha_{r1} + \alpha_{i2} + 180^\circ - \varphi = 180; \qquad \alpha_{i2} = 90 - \alpha_{r1} = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

Aplicando de nuevo la ley de la refracción:

$$n_r \text{ sen } \alpha_{i2} = n_a \text{ sen } \alpha_{r2} \Rightarrow \alpha_{r2} = \text{arc sen}\left(\frac{n_r \text{ sen } \alpha_{i2}}{n_a}\right) = \text{arc sen}\left(\frac{1{,}32 \cdot \text{sen } 49^\circ}{1}\right) = 85^\circ$$

Procedemos de igual forma para el color violeta:

$$n_a \text{ sen } 60^\circ = n_v \text{ sen } \alpha_{r1}; \qquad \alpha_{r1} = \text{arc sen}\left(\frac{\text{sen } 60^\circ}{n_v}\right) = 39{,}9^\circ$$

El ángulo de incidencia en la segunda cara es:

$$\alpha_{r1} + \alpha_{i2} + 180^\circ - \varphi = 180^\circ; \qquad \alpha_{i2} = 90 - \alpha_{r1} = 90^\circ - 39{,}9^\circ = 50{,}1^\circ$$

El ángulo de salida es:

$$n_v \text{ sen } \alpha_{i2} = n_a \text{ sen } \alpha_{r2} \Rightarrow \alpha_{r2} = \text{arc sen}\left(\frac{n_r \text{ sen}\alpha_{i2}}{n_a}\right) = \text{arc sen}\left(\frac{1{,}35 \cdot \text{sen } 50{,}1^\circ}{1}\right) = \text{arc sen } 1{,}03$$

No hay ningún ángulo cuyo seno sea 1,03. La explicación de este resultado es que se ha sobrepasado el ángulo límite y se produce una reflexión total para este color. Se puede considerar que la desviación es:

$$90^\circ - 85^\circ = 5^\circ$$

8.13 Se realiza un experimento de doble rendija con d = 1 mm; la distancia del foco de luz a la pantalla es de 1 m y tiene una longitud de onda de 640 nm. Calcula la posición de la primera franja oscura.

Aplicando directamente la expresión:

$$d\frac{y}{D} = \frac{(2n+1)}{2}\lambda \quad \Rightarrow \quad y_{oscura} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{D\lambda}{d} = \left(0 + \frac{1}{2}\right)\frac{1 \cdot 640 \cdot 10^{-9}}{10^{-3}} = 3{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

8.14 En el experimento del ejercicio anterior, un punto está situado a una altura de 0,48 m. Indica si se encuentra en una posición de mínimo o de máximo.

Comprobamos si el producto $d\frac{y}{D}$ es un múltiplo entero de longitudes de onda o es un múltiplo impar de semilongitudes de onda.

$$d\frac{y}{D} = 10^{-3}\,\frac{0{,}48}{1} = 4{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Dividimos esta cantidad entre la longitud de la onda y entre la semilongitud de onda:

$$\frac{4{,}8 \cdot 10^{-4}}{6{,}4 \cdot 10^{-7}} = 750; \qquad \frac{4{,}8 \cdot 10^{-4}}{3{,}2 \cdot 10^{-7}} = 1500$$

Podemos comprobar que es múltiplo par de longitudes de onda y no es múltiplo impar de semilongitudes de onda; por tanto, se encuentra en un máximo.

8.15 ¿Se puede producir luz polarizada por reflexión tanto si la luz viaja de un medio a otro con índice de refracción mayor como si lo hace a uno con índice de refracción menor? Justifica la respuesta.

Sí. Para que se produzca la polarización por reflexión es necesario que el ángulo refractado y el reflejado formen un ángulo de 90º. No existe ningún impedimento físico para que esto suceda tanto cuando la luz incide desde un medio con un índice de refracción mayor que el primero como cuando este es menor.

Matemáticamente, podemos decir que como la tangente puede tomar cualquier valor entre 0 e ∞, cualquier valor posible de la relación $\frac{n_2}{n_1}$ tendrá solución.

8.16 Calcula el ángulo de Brewster cuando la luz viaja entre el agua, cuyo índice de refracción es n_A = 1,33, y el diamante, cuyo índice de refracción es n_D = 2,4.

$$\text{tg}\,\varphi_B = \frac{n_D}{n_A} = \frac{2{,}4}{1{,}33} = 1{,}8 \Rightarrow \varphi_B = \text{arc tg}\,1{,}8 = 61º$$

8.17 ¿Por qué se ve el cielo negro cuando se observa desde el espacio?

Porque no hay atmósfera que cause la dispersión de la luz que hace que se vea el cielo azul desde la Tierra.

8.18 ¿Cuál es el motivo por el que el arco iris secundario es más tenue que el primario?

Para que se produzca el arco iris secundario, en cada gota se deben producir dos reflexiones internas. En cada una de estas reflexiones, se produce también una pequeña refracción, de modo que se pierde parte de la intensidad de la luz. La consecuencia de este hecho es que el arco iris secundario se ve mucho más tenue.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ

8.19 A pesar de los muchos seguidores de la teoría corpuscular, parecía evidente que la luz debía ser una onda. ¿En qué se basaban fundamentalmente los seguidores de Newton para desechar el modelo ondulatorio y defender el corpuscular?

En que el único tipo de ondas conocidas hasta la época, que eran las del sonido, presentaban unas propiedades, por ser longitudinales y por su longitud de onda, que no se daban en las ondas luminosas.

Por ejemplo, las ondas sonoras se propagan en todas las direcciones y bordean obstáculos, y las luminosas no parecía que presentaran estas características.

8.20 ¿Cuál fue el fenómeno que determinó definitivamente que la luz se trataba de un movimiento ondulatorio y no de uno corpuscular?

Fueron los fenómenos de interferencia y difracción observados por Young y Grimaldi.

8.21 Con el descubrimiento del efecto fotoeléctrico se comprueba que la energía de los fotones que forman la luz depende de la frecuencia de estos. Ordena de mayor a menor la frecuencia de los colores del arco iris.

El color de mayor frecuencia y por tanto de mayor energía es el violeta; a partir de él decrecen ambas magnitudes.

Violeta, azul, verde, amarillo, naranja y rojo.

8.22 Una onda electromagnética que se propaga en el vacío tiene una longitud de onda de 5 · 10^{-7} m. Calcula su longitud de onda cuando penetra en un medio de índice de refracción 1,5.

La única magnitud que no varía es la frecuencia; apoyándonos en este dato:

$$\lambda\nu = v; \qquad \nu = \frac{v}{\lambda}$$

$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}$$

$$v_2 = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}5} = 2 \cdot 10^8$$

$$\frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = \frac{2 \cdot 10^8}{\lambda_2}$$

$$\lambda_2 = 3{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

8.23 Una lámpara de sodio emite luz monocromática de longitud de onda en el vacío λ_0 = 5,89 · 10^{-7} m (luz amarilla) que se propaga en el agua, cuyo índice de refracción es 1,34. Halla:

a) La velocidad de propagación de la luz en el agua.

b) La frecuencia y la longitud de onda de dicha luz en el agua.

a) El índice de refracción de un medio permite conocer la velocidad de desplazamiento en dicho medio.

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{1{,}34} = 2{,}24 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}$$

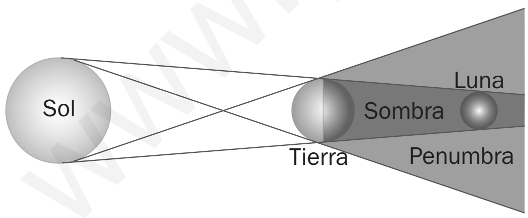
Al cambiar de medio, varía la longitud de onda y la velocidad, pero no la frecuencia. De este modo, en el vacío:

$$\lambda_0 \nu_0 = c \Rightarrow \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 5{,}09 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

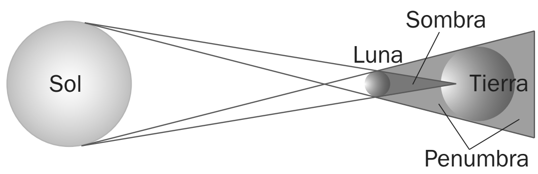
En el medio:

$$\lambda_m \nu_m = v_m \Rightarrow \lambda_m = \frac{v_m}{\nu_m} = \frac{2{,}24 \cdot 10^8}{5{,}09 \cdot 10^{14}} = 4{,}40 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

8.24 Realiza un esquema en el que quede representado un eclipse de Sol y un eclipse de Luna. ¿En cuál de los dos es mayor la zona de penumbra?



Eclipse de Sol.



Eclipse de Luna.

8.25 Calcula la energía de un fotón de luz roja de 7600 Å en el vacío, si su velocidad es c = 3,0 · 10^{8} m s^{-1}.

Dato. h = 6,63 · 10^{-34} J s

Aplicando la fórmula obtenida en el efecto fotoeléctrico: $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{7600 \cdot 10^{-10}} = 2{,}62 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

8.26 Calcula la diferencia de energía que existe ente los fotones que transporta una onda electromagnética del rango de las infrarrojas y una onda de rayos gamma.

Datos. $\lambda_{infrarroja}$ **= 1 mm;** λ_{gamma} **=** 10^{-12} **m**

Calculamos la energía de cada onda:

$$E_{inf} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\frac{3 \cdot 10^{8}}{10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-22}\ \text{J}$$

$$E_{gam} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\frac{3 \cdot 10^{8}}{10^{-12}} = 2 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

$$\Delta E = E_{gam} - E_{inf} = 2 \cdot 10^{-13} - 2 \cdot 10^{-22} = 2 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

8.27 Calcula el valor en el vacío de la longitud de onda asociada a un fotón de energía 3 keV.

Datos. h = 6,63 · 10^{-34} **J · s; 1 eV = 1,60 ·** 10^{-19} **J**

A partir de la energía calculamos el valor de la frecuencia. En primer lugar, pasamos la energía a unidades del sistema internacional.

$$E = 3\,\text{keV} = 3 \cdot 10^{3} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19} = 4{,}8 \cdot 10^{-16}\ \text{J}$$

$$E = h\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{E}{h} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-16}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}} = 7{,}24 \cdot 10^{17}\ \text{Hz}$$

La velocidad del fotón es la de la luz:

$$\lambda\nu = c \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3{,}00 \cdot 10^{8}}{7{,}24 \cdot 10^{17}} = 4{,}14 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

8.28 Si en un medio la luz se propaga con una velocidad de 250 000 km s^{-1}**, ¿cuál es el índice de refracción de este medio en relación con el del vacío?**

A partir de la definición de índice de refracción: $n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{2{,}5 \cdot 10^{8}} = 1{,}2$

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

8.29 Justifica por qué el índice de refracción de una sustancia debe tener un valor mayor que la unidad.

El índice de refracción se define como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad en el medio. Teniendo en cuenta que la velocidad en el vacío es la mayor a la que pueden viajar las ondas, el resultado de dividir por una cantidad igual o menor debe ser la unidad o mayor que la unidad.

8.30 Comprueba que si la longitud de onda de una radiación en el vacío es λ**, el valor de la longitud de onda de esa misma radiación** λ' **en un medio de índice de refracción *n* es:** $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$

A partir de la expresión de una onda electromagnética, se tiene:

$$\lambda\nu = c; \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{y} \quad \lambda' = \frac{v}{\nu}$$

Aplicando a la expresión de la longitud de onda en un medio la definición de índice de refracción:

$$\lambda' = \frac{v}{\nu} = \frac{\frac{c}{n}}{\nu} = \frac{c}{\nu n}$$

Como $\frac{c}{\nu}$ es la longitud de onda en el vacío, queda: $\lambda' = \frac{c}{\nu n} = \frac{\lambda}{n}$

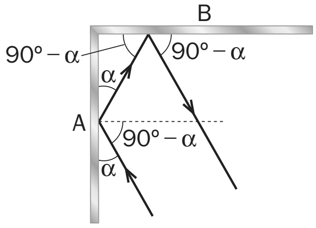
8.31 Calcula el valor de la velocidad de la luz en el diamante y en el agua si sus índices de refracción respectivos son n_{diam} = 2,5 y n_{agua} = 1,33.

A partir de la definición de índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{n}; \begin{cases} v_{diam} = \dfrac{c}{n_{diam}} = \dfrac{3{,}00 \cdot 10^8}{2{,}5} = 1{,}2 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \\ v_{agua} = \dfrac{c}{n_{agua}} = \dfrac{3{,}00 \cdot 10^8}{1{,}33} = 2{,}26 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \end{cases}$$

8.32 Se tienen dos espejos *A* y *B* planos y perpendiculares entre sí. Un rayo luminoso contenido en un plano perpendicular a ambos espejos incide sobre uno de ellos con el ángulo α mostrado en la figura. Calcula la relación entre las direcciones de los rayos incidente en *A* y reflejado en *B*.

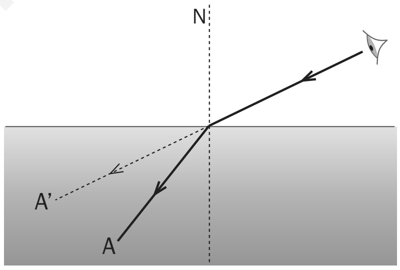
Como se puede comprobar en la construcción gráfica, el ángulo incidente y el reflejado son paralelos.



8.33 Explica por qué al mirar el fondo de un estanque en calma parece menos profundo de lo que en realidad es (n_{agua} > n_{aire}). Para ayudarte, obtén la imagen de un objeto puntual situado en el fondo.

Cuando un rayo pasa de un medio a otro con mayor índice de refracción, los rayos se desvían acercándose a la normal. Este fenómeno unido a que nosotros en nuestro cerebro percibimos que los rayos nos llegan en línea recta hace que veamos que lo que se encuentra en el segundo medio esté en distinta posición de la que realmente ocupa.

En la imagen se ve con claridad. El rayo que penetra en el ojo está desviado al cambiar de medio y el cuerpo situado en el punto *A* esta siendo visto por el ojo como si estuviese situado en *A'*.

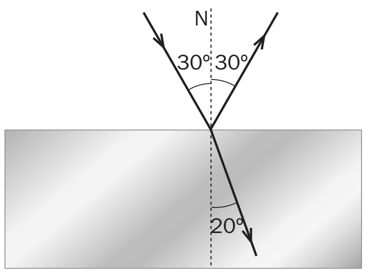


8.34 Un haz de luz que viaja por el aire incide sobre un bloque de vidrio. Los haces reflejado y refractado forman ángulos de 30º y 20º, respectivamente, con la normal a la superficie del bloque.

a) Calcula la velocidad de la luz en el vidrio y el índice de refracción de dicho material.

b) Explica qué es el ángulo límite y determina su valor para al caso descrito.

a) A la vista del esquema de rayos y sabiendo que el índice de refracción del aire es n_a = 1, podemos aplicar la ley de la refracción de Snell.



$$n_a \text{ sen } 30° = n_v \text{ sen } 20°$$

$$n_v = \frac{1 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 20°} = 1{,}46$$

La velocidad de la luz en el vidrio será:

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{1{,}46} = 2{,}05 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

El ángulo límite es el ángulo a partir del cual no se produce rayo refractado. Esto sucede cuando la luz pasa de un medio a otro con menor índice de refracción, porque en ese caso el ángulo que forma el rayo refractado con la normal es mayor que el que forma el incidente. En este caso, la luz debería pasar del vidrio al aire.

$$n_v \text{ sen } \hat{i}_L = n_a \text{ sen } 90°$$

$$\text{sen } \hat{i}_L = \text{arcsen}\left(\frac{1}{1{,}46}\right) = 43{,}23°$$

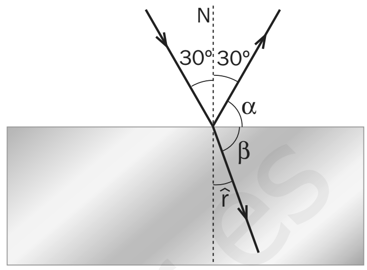
8.35 Un rayo de luz roja que se propaga por el aire incide sobre un vidrio y forma un ángulo de 30° con la dirección normal a la superficie del vidrio. El índice de refracción del vidrio para la luz roja es n_v = 1,5 y el del aire es n_a = 1. Calcula el ángulo que forman entre sí el rayo reflejado y el rayo refractado.

Aplicando la ley de Snell para la refracción, calculamos el valor del ángulo de refracción:

$$n_a \text{ sen } \hat{i} = n_v \text{ sen } \hat{r}$$

$$\hat{r} = \text{arcsen}\left(\frac{n_a \text{ sen } \hat{i}}{n_v}\right)$$

$$\hat{r} = \text{arcsen}\left(\frac{1 \cdot \text{sen } 30^\circ}{1{,}5}\right) = 19{,}47^\circ$$



Para calcular el ángulo que forman los rayos reflejado y refractado, calculamos el valor de α y β:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \\ \beta = 90^\circ - 19{,}47^\circ = 70{,}53^\circ\end{array}\right\} \alpha + \beta = 130{,}53^\circ$$

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

8.36 Un rayo de luz verde pasa de una placa de vidrio de índice de refracción n = 1,5 al aire. La longitud de onda de la luz en la placa es 333 · 10^{-9} m. Calcula:

a) La longitud de onda de la luz verde en el aire.

b) El ángulo crítico a partir del cual se produce la reflexión total.

a) Como la frecuencia es una magnitud que no varía, se producirá una variación de la longitud de onda que será: $\lambda_0 = n\,\lambda = 1{,}5 \cdot 333 \cdot 10^{-9}$ = 500 nm

b) Aplicando la ley de Snell:

$$n_v \text{ sen } \hat{i} = n_a \text{ sen } \hat{r}$$

La reflexión total se produce cuando el ángulo refractado es de 90º.

$$1{,}5 \cdot \text{sen } \hat{i} = 1$$

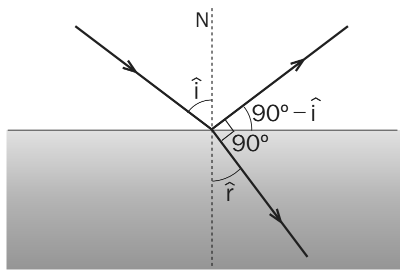
$$\text{sen } \hat{i} = \frac{1}{1{,}5}$$

$$\hat{i} = \text{arcsen}\left(\frac{1}{1{,}5}\right) = 41{,}8^\circ$$

8.37 Un rayo de luz monocromática que se propaga por el aire incide sobre una superficie de agua. Determina el ángulo de incidencia para el que el rayo reflejado es perpendicular al refractado (el índice de refracción del agua vale 1,33).

Sabemos que el ángulo reflejado es igual que el incidente, de modo que hasta la superficie del líquido el ángulo vale $90^\circ - \hat{i}$.

En el agua, el ángulo desde la superficie del líquido hasta el rayo refractado es $90^\circ - \hat{r}$:



$$90^\circ - \hat{i} + 90^\circ - \hat{r} = 90^\circ$$

$$180^\circ - \hat{i} - \hat{r} = 90^\circ$$

$$\hat{i} + \hat{r} = 90^\circ; \hat{r} = 90^\circ - \hat{i}$$

Sustituyendo en la ley de Snell:

$$n_a \text{ sen } \hat{i} = n_{aq} \text{ sen } \hat{r}$$

$$\text{sen } \hat{i} = 1{,}33 \cdot \text{sen}\left(90^\circ - \hat{i}\right) \Rightarrow \text{sen } \hat{i} = 1{,}33 \cdot \cos \hat{i}$$

$$\text{tg } \hat{i} = 1{,}33 \Rightarrow \hat{i} = 53{,}06^\circ$$

8.38 Una superficie plana separa dos medios de índices de refracción distintos n_1 y n_2. Un rayo de luz incide desde el medio de índice n_1. Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes.

a) El ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de reflexión.

b) Los ángulos de incidencia y de refracción son siempre iguales.

c) El rayo incidente, el reflejado y el refractado están en el mismo plano.

d) Si $n_1 > n_2$, se produce reflexión total para cualquier ángulo de incidencia.

a) Según la segunda ley de la reflexión de Snell, el ángulo de incidencia es siempre igual que el de reflexión, luego es falsa la afirmación.

b) Los ángulos de incidencia y refracción solo pueden ser iguales cuando los medios son iguales, $n_1 = n_2$. Si los medios son iguales no estamos frente a un cambio de medio, luego es falsa.

c) Esta afirmación coincide con el enunciado de la primera ley de Snell de la refracción, "El rayo incidente el reflejado y refractado están en el mismo plano", luego es verdadera.

d) La reflexión total se produce cuando la luz viaja de un medio a otro de índice de refracción menor y el ángulo de incidencia es superior a aquel que cumple:

$$n_1 \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \operatorname{sen} 90^\circ; \qquad \operatorname{sen} \hat{i} = \frac{n_2}{n_1}; \qquad \hat{i} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$ Luego la afirmación es falsa.

8.39 Sabiendo que el ángulo límite definido entre un medio material y el aire es 60º, determina la velocidad de la luz en dicho medio.

Analizando la ley de la refracción de la luz, se deduce que un rayo se acerca a la normal cuando pasa de un medio a otro con índice de refracción mayor, y que el rayo se aleja de la normal cuando pasa de un medio de mayor índice de refracción a otro de menor.

En este último caso, debe existir una dirección para la que el rayo refractado forme un ángulo de 90º con la normal y los rayos que inciden con un ángulo superior a él, no pasen al segundo medio. Este ángulo de incidencia para el cual el ángulo de refracción es de 90º se conoce como ángulo límite.

$$n_1 \operatorname{sen} \alpha_L = n_2 \operatorname{sen} 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \alpha_L = \frac{n_2}{n_1}; \qquad \alpha_L = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

El valor del índice de refracción en el medio material a partir de la misma expresión es:

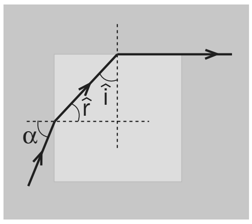
$$n_1 \operatorname{sen} \alpha_L = n_2 \operatorname{sen} 90^\circ$$

$$n_1 \operatorname{sen} 60^\circ = 1; \quad n_1 = \frac{1}{\operatorname{sen} 60^\circ} = 1{,}155$$

La velocidad de la luz en el medio es: $n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{1{,}155} = 2{,}60 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$

8.40 Un rayo monocromático incide en la cara vertical de un cubo de vidrio de índice de refracción n' = 1,5 sumergido en agua.

¿Con qué ángulo debe incidir para que en la cara superior del cubo haya reflexión total?



Según están pintados los ángulos $\hat{r}$ e $\hat{i}$, se pueden relacionar mediante:

$$\hat{r} + \hat{i} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{i} = 90^\circ - \hat{r}$$

Aplicamos la ley de Snell al segundo cambio de medio y calculamos los valores de los ángulos en sentido contrario al recorrido por el rayo: $n_v \operatorname{sen} \hat{i} = n_{aq} \operatorname{sen} 90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{i} = \frac{n_{aq}}{n_v} = \frac{1{,}33}{1{,}5} = 0{,}89$

$$\hat{i} = \operatorname{arc\,sen} 0{,}89 = 62{,}73^\circ \qquad \hat{r} = 90^\circ - 62{,}73^\circ = 27{,}27^\circ$$

$$n_{aq} \operatorname{sen} \alpha = n_v \operatorname{sen} 27{,}27^\circ \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{n_v \operatorname{sen} 27{,}27^\circ}{n_{aq}} = 0{,}52; \qquad \alpha = \operatorname{arc\,sen} 0{,}52 = 31{,}33^\circ$$

8.41 Un rayo de luz roja se propaga por un vidrio e incide en la superficie que separa el vidrio del aire con un ángulo de 30,0º respecto a la dirección normal a la superficie. El índice de refracción del vidrio para la luz roja es 1,60 y el índice de refracción del aire es 1. Calcula:

a) El ángulo que forma el rayo refractado con respecto a la normal.

b) El ángulo de incidencia máximo para que el rayo de luz roja pase al aire.

c) Indica si aumentan o disminuyen las siguientes magnitudes al pasar el rayo del vidrio al aire: velocidad de propagación, energía de los fotones, longitud de onda de los fotones.

a) Aplicando la ley de Snell:

$$1{,}6 \cdot \text{sen} 30^\circ = 1 \cdot \text{sen}\ \alpha;\quad \alpha = \text{arcsen}\ 0{,}8 = 53{,}1^\circ$$

b) Calculamos el ángulo límite:

$$1{,}6 \cdot \text{sen}\ \alpha_L = 1 \cdot \text{sen}\ 90^\circ;\quad \alpha_L = \text{arcsen}\left(\frac{1}{1{,}6}\right) = 38{,}7^\circ$$

c) La velocidad es inversamente proporcional al índice de refracción; al disminuir *n* la velocidad aumenta.

E = h · ν; como la frecuencia no varía la energía tampoco.

La longitud de onda es proporcional a la velocidad, $\lambda = \frac{v}{\nu}$; luego un aumento de velocidad supone un aumento de la longitud de onda.

8.42 a) Un rayo luminoso incide sobre una superficie plana de separación aire-líquido. Cuando el ángulo de incidencia es de 45º el de refracción vale 30º. ¿Qué ángulo de refracción se produciría si el haz incidiera con un ángulo de 60º?

b) Un rayo de luz incide sobre una superficie plana de un vidrio con índice de refracción 1,5. Si el ángulo formado por el rayo reflejado y el refractado es de 90º, calcula los ángulos de incidencia y de refracción.

a) Aplicamos la ley de la refracción para calcular el valor del índice de refracción:

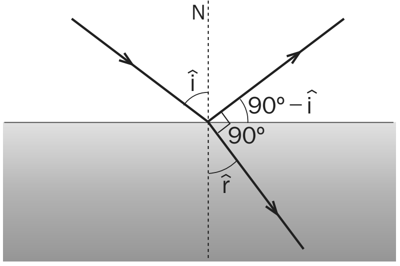
$$n_a \cdot \text{sen}\ 45^\circ = n_l \cdot \text{sen}\ 30^\circ;\qquad n_l = \frac{\text{sen}\ 45^\circ}{\text{sen}\ 30^\circ} = 1{,}41$$

Aplicamos la ley para un ángulo de incidencia de 60º.

$$n_a \cdot \text{sen}\ 60^\circ = 1{,}41 \cdot \text{sen}\,\hat{r};\quad \hat{r} = \text{arcsen}\left(\frac{\text{sen}\ 60^\circ}{1{,}41}\right) = 37{,}9^\circ$$

b) El ángulo reflejado es igual al incidente; hasta la superficie del líquido el ángulo vale $90^\circ - \hat{i}$.

En el agua, el ángulo desde la superficie del líquido hasta el rayo refractado es $90^\circ - \hat{r}$.



$$90^\circ - \hat{i} + 90 - \hat{r} = 90^\circ \quad\Rightarrow\quad 180^\circ - \hat{i} - \hat{r} = 90^\circ$$

$$\hat{i} + \hat{r} = 90^\circ \Rightarrow \hat{r} = 90 - \hat{i}$$

Sustituyendo en la ley de Snell:

$$n_a\, \text{sen}\,\hat{i} = n_v\, \text{sen}\,\hat{r}$$
$$\text{sen}\,\hat{i} = 1{,}5\, \text{sen}\,(90^\circ - \hat{i});\quad \text{sen}\,\hat{i} = 1{,}5 \cos \hat{i}$$
$$\text{tg}\,\hat{i} = 1{,}5 \quad\Rightarrow\quad \hat{i} = 56{,}3^\circ \quad\Rightarrow\quad \hat{r} = 90 - \hat{i} = 33{,}7^\circ$$

8.43 Una onda que viaja por un medio con velocidad v_1 = 10 m s^{-1} incide sobre la frontera con otro medio diferente con ángulo de incidencia α_i = 30º. La velocidad de propagación de la onda en el segundo medio es v_2 = 17 m s^{-1}. Calcula el ángulo de transmisión, α_t. Si la frecuencia de la onda es ν = 10 Hz, calcula su longitud de onda en cada medio.

Aplicando las leyes de la refracción:

$$n_1 \text{ sen } \alpha_i = n_2 \text{ sen } \alpha_t; \qquad \frac{c}{v_1} \text{ sen } \alpha_i = \frac{c}{v_2} \text{ sen } \alpha_t$$

$$\text{sen } \alpha_t = \frac{v_2}{v_1} \text{ sen } \alpha_i$$

$$\alpha_t = \text{arcsen}\left(\frac{v_2}{v_1} \text{ sen } \alpha_i\right) = \text{arcsen}\left(\frac{17}{10} \text{ sen } 30^\circ\right) = 58{,}21^\circ$$

Para calcular la longitud de onda, aplicamos:

$$\lambda \cdot \nu = v; \qquad \lambda = \frac{v}{\nu}$$

$$\begin{cases} \text{medio 1: } \lambda_1 = \dfrac{v_1}{\nu} = \dfrac{10}{10} = 1 \text{ m} \\ \text{medio 2: } \lambda_2 = \dfrac{v_2}{\nu} = \dfrac{17}{10} = 1{,}7 \text{ m} \end{cases}$$

8.44 Un haz luminoso de longitud de onda 550 · 10^{-9} m, que viaja a través del vacío, incide sobre un material transparente. El haz incidente forma un ángulo de 40º con la normal a la superficie, mientras que el refractado forma un ángulo de 26º. Calcula el índice de refracción del material y la longitud de onda del haz que se propaga en su interior.

Calculamos en primer lugar la frecuencia del haz luminoso, ya que es invariante ante el cambio de medio:

$$c = \lambda \cdot \nu$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{550 \cdot 10^{-9}} = 5{,}45 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Ahora calculamos el índice de refracción del material a partir de la ley de la refracción de Snell:

$$n_a \text{ sen } \hat{i} = n_m \text{ sen } \hat{r}$$

$$n_m = \frac{1 \cdot \text{sen } 40^\circ}{\text{sen } 26^\circ} = 1{,}466$$

Podemos calcular la velocidad en el medio:

$$v_m = \frac{c}{n_m} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{1{,}466} = 2{,}05 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Ya conocemos todos los datos necesarios para calcular la longitud de onda en el medio:

$$v_m = \lambda_m \cdot \nu$$

$$\lambda_m = \frac{v_m}{\nu} = \frac{2{,}05 \cdot 10^8}{5{,}45 \cdot 10^{14}} = 3{,}76 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$\lambda_m = 376 \text{ nm}$$

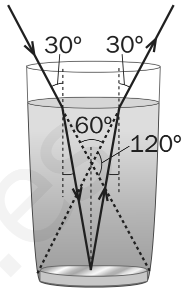
8.45 Se considera un vaso cilíndrico lleno de agua hasta el borde. En el fondo hay un espejo plano. Un rayo de luz monocromática incide con un ángulo de 30º sobre la superficie. El rayo llega al espejo del fondo, se refleja y vuelve a salir a la superficie.

a) Completa el esquema adjunto de la marcha del rayo.

b) Calcular el ángulo que se ha desviado en total el rayo incidente.

c) Para algún ángulo de incidencia, ¿puede ocurrir una reflexión total del rayo al pasar del agua al aire? Justifícalo.

a) El rayo incidente se refracta en el agua, sufre una reflexión especular y después se vuelve a refractar al pasar del agua al aire.



Como el ángulo de incidencia del segundo cambio de medio (agua-aire) es igual que el de refracción del primer cambio (aire-agua), el ángulo de refracción que se observa cuando el rayo pasa al aire es igual que el ángulo con que incidió, pero medido hacia el otro lado de la normal.

El resultado final es el mismo que si hubiera sufrido una reflexión especular.

b) Analíticamente se puede ver sin necesidad de resolver la ecuación de Snell.

Aire – agua $\rightarrow$ n_a sen 30º = n_{aq} sen $\hat{r}$

Reflexión: $\rightarrow$ $\hat{r} = \hat{r}'$

Agua – aire $\rightarrow$ n_{aq} sen $\hat{r}'$ = n_a sen α

Como: $\hat{r} = \hat{r}'$ $\Rightarrow$ n_{aq} sen $\hat{r}'$ = n_a sen 30º $\Rightarrow$ α = 30º; δ= 120º

c) La reflexión especular se produce para todos los ángulos de incidencia superiores al ángulo límite, que es el ángulo para el que el ángulo de refracción es 90º.

$$n_{aq} \text{ sen } \hat{i} = n_a \text{ sen } 90º \Rightarrow \text{ sen } \hat{i} = \frac{n_a}{n_{aq}}$$

Como $n_a < n_{aq}$, habrá un ángulo $\hat{i}$ cuyo seno tome ese valor.

Solamente se puede observar el fenómeno de la reflexión total cuando pasamos de un medio a otro con menor índice de refracción.

Si lo que queremos es que el rayo incida desde el aire al agua, se refleje en el fondo del vaso y a la salida se produzca la reflexión total, el proceso no se puede producir, ya que, como hemos visto en el apartado b), el proceso de entrada y salida del rayo es geométricamente simétrico. De este modo, para que no salga al aire, no debería haber entrado desde el aire.

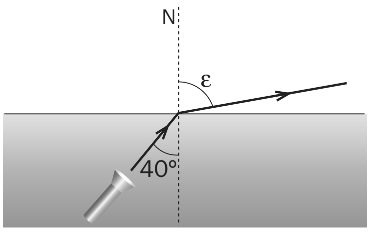
8.46 Un buceador enciende una linterna debajo del agua (índice de refracción 1,33) y dirige el haz luminoso hacia arriba formando un ángulo de 40º con la vertical.

a) ¿Con qué ángulo emergerá la luz del agua?

b) ¿Cuál es el ángulo de incidencia a partir del cual la luz no saldrá del agua?

Realiza esquemas gráficos en la explicación de ambos apartados.

a) Aplicamos la ley de Snell con los datos del problema.

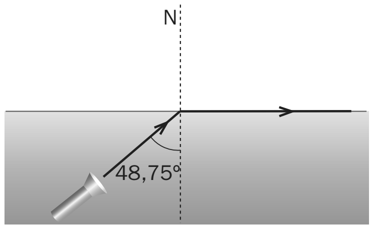


$$n_{aq} \text{ sen } 40º = n_a \text{sen } \varepsilon$$

$$1{,}33 \cdot \text{sen } 40º = \text{sen } \varepsilon$$

$$\varepsilon = \text{arcsen}\left(1{,}33 \cdot \text{sen } 40º\right) = 58{,}75º$$

b) Para conocer con qué ángulo incidente se produce la reflexión total haremos que el ángulo emergente valga 90º.



$$1{,}33 \cdot \text{sen } \hat{i} = 1 \cdot \text{sen } 90º \Rightarrow \hat{i} = \text{arcsen}\left(\frac{1}{1{,}33}\right) = 48{,}75º$$

LÁMINAS Y PRISMAS

8.47 Una lámina de vidrio (índice de refracción n = 1,52) de caras planas y paralelas y espesor *d* se encuentra entre el aire y el agua. Un rayo de luz monocromática de frecuencia $5 \cdot 10^{14}$ Hz incide desde el agua en la lámina. Determina:

a) Las longitudes de onda del rayo en el agua y en el vidrio.

b) El ángulo de incidencia a partir del cual se produce reflexión total interna en la segunda cara.

Datos. $n_{agua} = 1,33$; $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}

a) Buscamos una expresión de la longitud de onda en función del índice de refracción:

$$\left.\begin{array}{l} n = \dfrac{c}{v} \\ \lambda\nu = v \end{array}\right\} \lambda\nu = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu n}$$

$$\lambda_{agua} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14} \cdot 1{,}33} = 4{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}; \qquad \lambda_{vidrio} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14} \cdot 1{,}52} = 3{,}95 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$$

b) Calculamos para qué ángulo de incidencia en la segunda cara se produce reflexión total.

$$n_{vidrio} \cdot \text{sen}\,\hat{i}_2 = n_{aire} \cdot \text{sen}\,90^\circ; \qquad \hat{i}_2 = \text{arcsen}\left(\frac{1}{1{,}52}\right) = 41{,}1^\circ$$

Este es el mismo ángulo que se refracta en la primera cara, luego el ángulo de incidencia es:

$$n_{agua} \cdot \text{sen}\,\hat{i}_1 = n_{vidrio} \cdot \text{sen}\,41{,}1^\circ; \quad \hat{i}_1 = \text{arcsen}\left(\frac{1{,}52 \cdot \text{sen}\,41{,}1^\circ}{1{,}33}\right) = \text{arc sen}\,0{,}75 = 48{,}6^\circ$$

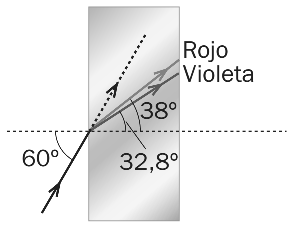
8.48 Un haz de luz blanca incide sobre una lámina de vidrio de grosor *d* con un ángulo $\theta_i = 60^\circ$.

a) Dibuja esquemáticamente las trayectorias de los rayos rojo y violeta.

b) Determina la altura, respecto al punto de incidencia, del punto por el que la luz roja emerge de la lámina si d = 1 cm.

c) Calcula el grosor *d* que debe tener la lámina para que los puntos de salida de la luz roja y de la luz violeta estén separados 1 cm.

Datos. $n_R = 1,4$ y $n_V = 1,6$

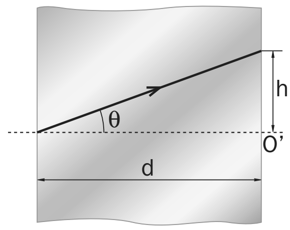


a) Como el índice de refracción del color rojo es menor que el del violeta, se acercará menos a la normal, es decir, sufrirá menos desviación.

b) Aplicamos la ley de Snell de la refracción para encontrar el ángulo con que penetran en el vidrio cada uno de los rayos.

$$n_a \cdot \text{sen}\,60^\circ = n_r \cdot \text{sen}\theta_r; \qquad \theta_r = \text{arcsen}\left(\frac{\text{sen}\,60^\circ}{1{,}4}\right) = 38{,}2^\circ$$

$$n_a \cdot \text{sen}\,60^\circ = n_v \cdot \text{sen}\theta_v; \qquad \theta_v = \text{arcsen}\left(\frac{\text{sen}\,60^\circ}{1{,}6}\right) = 32{,}8^\circ$$



Del triángulo que forman la normal, el rayo y la cara posterior del prisma conocemos el ángulo *θ* y la anchura del vidrio, de modo que calculamos la tangente de dicho ángulo y encontramos el valor de la altura sobre *O'*.

$$h_r = d\,\text{tg}\,\theta_r = 0{,}01 \cdot \text{tg}\,38{,}2^\circ = 7{,}87 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$
$$h_v = d\,\text{tg}\,\theta_v = 0{,}01 \cdot \text{tg}\,32{,}8^\circ = 6{,}44 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

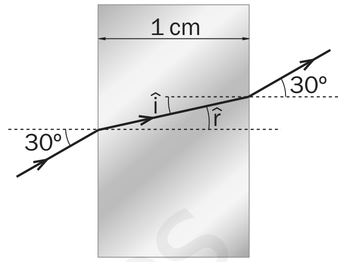
c) Escribimos la diferencia entre h_r y h_v en función de la distancia *d* y hacemos que la diferencia de las alturas sea de 1 cm.

$$\left.\begin{array}{l} h_r = d\,\text{tg}\,\theta_r \\ h_v = d\,\text{tg}\,\theta_v \end{array}\right\} \Rightarrow h_r - h_v = d\,(\text{tg}\,\theta_r - \text{tg}\,\theta_v) \Rightarrow d = \frac{h_r - h_v}{\text{tg}\,\theta_r - \text{tg}\,\theta_v} = \frac{0{,}01}{\text{tg}\,38{,}2^\circ - \text{tg}\,32{,}8^\circ} = 0{,}07\ \text{m}$$

8.49 Sobre una lámina transparente de índice de refracción 1,5 y 1 cm de espesor, situada en el vacío, incide un rayo luminoso formando un ángulo de 30º con la normal a la cara. Calcula:

a) El ángulo que forma con la normal el rayo que emerge de la lámina. Efectúa la construcción geométrica.

b) La distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina.



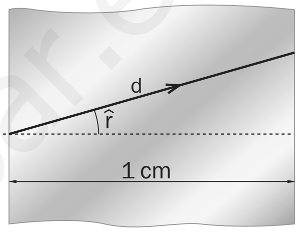
a) Al aplicar dos veces la ley de Snell, una para entrar en la lámina y otra para salir de la misma, se obtiene el mismo resultado para el ángulo de salida que para el de entrada.

Aplicando la ley de Snell para la refracción: $n_1 \operatorname{sen} \hat{i}_1 = n_2 \operatorname{sen} \hat{r}$

Entrada a la lámina: $1 \cdot \operatorname{sen} 30º = 1{,}5 \cdot \operatorname{sen} \hat{r}$

Salida de la lámina con un ángulo de 30º: $1{,}5 \cdot \operatorname{sen} \hat{r} = 1 \cdot \operatorname{sen} 30º$

b) Calculamos el valor del ángulo $\hat{r}$:

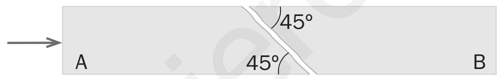


$$\hat{r} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen} 30º}{1{,}5}\right) = 19{,}47º$$

Observando el triángulo formado, se tiene:

$$\cos \hat{r} = \frac{0{,}01}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{0{,}01}{\cos 19{,}47º}; \qquad d = 0{,}0106 \text{ m}$$

8.50 Sea el dispositivo óptico esquematizado en la figura, que está formado por dos prismas idénticos de índice de refracción 1,65, con bases biseladas a 45º y ligeramente separados. Se hace incidir un rayo láser perpendicularmente a la cara *A* del dispositivo. Discute si es de esperar que exista luz emergente por la cara *B*, en los casos:



a) El espacio separador entre los prismas es aire de índice de refracción 1.

b) El espacio separador es agua de índice 1,33.

a) Para que exista luz emergente, el rayo de luz debe salir refractado por la primera cara biselada, por lo que el ángulo de incidencia debe ser menor al ángulo límite, pues de lo contrario se reflejaría.

$$n_i \operatorname{sen} \hat{i} = n_r \operatorname{sen} \hat{r}; \qquad n_i \cdot \operatorname{sen} L = n_r \operatorname{sen} 90º \Rightarrow L = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_r}{n_i}\right)$$

Al incidir el rayo de luz perpendicularmente a la cara *A*, ángulo de incidencia 0º, el rayo no se desvía, por lo que incide en la cara biselada con un ángulo de incidencia de 45º.

En el primer caso, medio separador aire $n_r = 1$, el ángulo límite es: $L = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1{,}65}\right) = 37{,}3º$

Al ser el ángulo de incidencia, 45º, superior al ángulo límite, toda la luz se refleja en la cara biselada: no habrá luz emergente por la cara *B*.

b) En el segundo caso, el índice del medio separador es 1,33, por lo que el ángulo límite sería:

$$L = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1{,}33}{1{,}65}\right) = 53{,}7º$$

Al ser el ángulo de incidencia menor del ángulo límite, sí existe rayo refractado, que saldría de la primera cara biselada con un ángulo de refracción de:

$$1{,}65 \cdot \operatorname{sen} 45º = 1{,}33 \cdot \operatorname{sen} \hat{r} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{r} = \left(\frac{1{,}65 \cdot \operatorname{sen} 45º}{1{,}33}\right) = 0{,}877 \Rightarrow \hat{r} = 61{,}3º$$

Este rayo de luz incidiría en la cara biselada del otro prisma con un ángulo de incidencia de 61,3º, sufriendo una refracción con un ángulo de salida de 45º, es decir, paralelo al rayo inicial.

8.51 Sobre un prisma de ángulo 80° situado en el vacío, incide un rayo luminoso monocromático que forma un ángulo de 74,61° con la normal a la cara lateral izquierda. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo es paralelo a la base:

a) Calcula el índice de refracción del prisma.

b) Realiza el esquema gráfico de la trayectoria seguida por el rayo a través del prisma.

c) Determina el ángulo de desviación del rayo al atravesar el prisma.

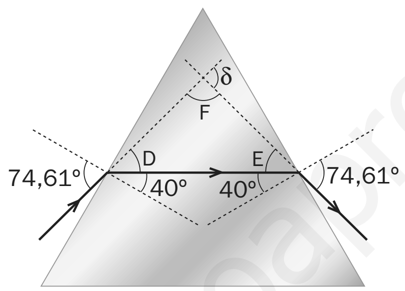
a) El triángulo formado por las caras del prisma y el rayo tiene un ángulo de 80º y dos de 50º. El ángulo que forma el rayo refractado con la normal es: $\hat{r} = 90º - 50º = 40º$

Aplicando la ley de Snell de la refracción, calculamos el valor del índice de refracción del prisma:

$$n_1 \text{sen}\ \hat{i} = n_2 \text{sen}\ \hat{r}; \qquad n_2 = n_1 \frac{\text{sen}\ \hat{i}}{\text{sen}\ \hat{r}}$$

$$n_2 = 1 \cdot \frac{\text{sen}\ 74{,}61º}{\text{sen}\ 40º} = 1{,}5$$

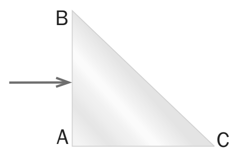
b)



c) $D = 74{,}61º - 40º = 34{,}61º$; $E = 74{,}61º - 40º = 34{,}61º$; $F = 180º - 2 \cdot 34{,}61º = 110{,}78º$

$$\delta = 180º - 110{,}78 = 69{,}22º$$

8.52 Se tiene un prisma óptico de índice de refracción 1,5 inmerso en el aire. La sección del prisma es un triángulo rectángulo isósceles, como muestra la figura.



a) Explica si se produce o no reflexión total en la cara *BC* del prisma cuando incide un rayo perpendicularmente en *AB*.

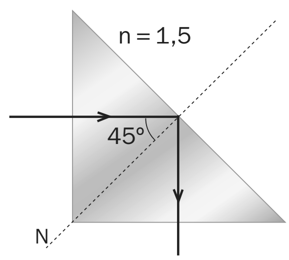
b) Haz el esquema gráfico de la trayectoria del rayo. ¿Cuál es la dirección del rayo emergente?

a) Al incidir perpendicularmente en la primera cara, no sufre refracción, de modo que llega a la segunda cara formando un ángulo de 45º con la normal. Aplicamos la ley de Snell para la refracción de salida.

$$n_v\ \text{sen}\ \hat{i} = n_a\ \text{sen}\ \hat{r}$$
$$1{,}5 \cdot \text{sen}\ 45º = 1 \cdot \text{sen}\ \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \hat{r} = 1{,}06$$

No se puede calcular, porque no hay ningún ángulo cuyo seno sea mayor que la unidad. Calculamos cuál será el ángulo límite:

$$1{,}5 \cdot \text{sen}\ \hat{i}_L = 1 \cdot \text{sen}\ 90º \quad \Rightarrow \quad \hat{i}_L = \text{arcsen}\left(\frac{1}{1{,}5}\right) = 41{,}8º$$



Al incidir con un ángulo superior al ángulo límite, se produce la reflexión total.

b) No emergerá ningún rayo por la base del prisma, dado que sufre reflexión total. Se reflejará en la base del prisma con un ángulo de reflexión de 45º y emergerá al exterior perpendicularmente a la siguiente cara sin sufrir desviación en esta refracción.

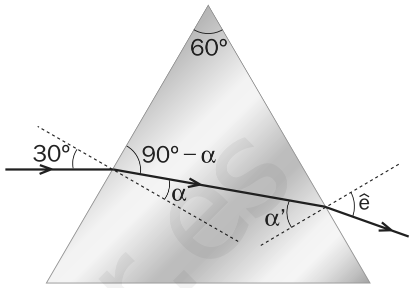
8.53 Un rayo de luz monocromática incide sobre una cara lateral de un prisma de vidrio, de índice de refracción $n = \sqrt{2}$. El ángulo del prisma es 60º. Determina:

a) El ángulo de emergencia a través de la segunda cara lateral si el ángulo de incidencia es de 30º. Efectúa un esquema grafico de la marcha del rayo.

b) El ángulo de incidencia para que el ángulo de emergencia del rayo sea 90º.

a) Se aplica la ley de Snell a la primera refracción:

$$1 \cdot \text{sen } 30º = \sqrt{2} \cdot \text{sen } \alpha \Rightarrow \alpha = \text{arc sen}\left(\frac{\text{sen } 30º}{\sqrt{2}}\right) = 20{,}7º$$



De la suma de los ángulos del triángulo formado por el rayo refractado y las dos caras del prisma, se obtiene α'.

$$90º – \alpha + 60º + 90º – \alpha' = 180º;\ \alpha' = 39{,}3º$$

Aplicando de nuevo la ley de Snell:

$$\sqrt{2} \cdot \text{sen } 39{,}3º = \text{sen } \hat{e};\qquad \hat{e} = \text{arc sen}\left(\sqrt{2} \cdot \text{sen } 39{,}3º\right) = 63{,}6º$$

b) El rayo emergerá con un ángulo de 90º si α' es: $\sqrt{2} \cdot \text{sen } \alpha' = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha' = \text{arc sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45º$

El ángulo refractado en la primea cara α del prisma valdrá: $90º – \alpha + 60º + 90º – 45º = 180º;\ \alpha = 15º$

Ahora se calcula el ángulo de incidencia en la primera cara del prisma:

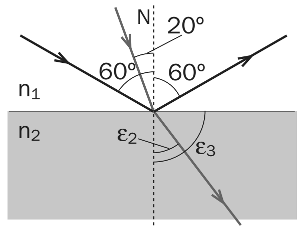
$$1 \cdot \text{sen } \hat{i} = \sqrt{2} \cdot \text{sen } 15º;\qquad \hat{i} = \text{arc sen}\left(\sqrt{2} \cdot \text{sen } 15º\right) = 21{,}47º$$

8.54 Un rayo luminoso se propaga por un medio de índice de refracción n = 1,5 e incide sobre la frontera de separación con otro medio de índice de refracción n' = 1. Calcula los ángulos de reflexión y refracción del rayo en los casos:

a) El ángulo de incidencia del rayo es 20º.

b) El ángulo de incidencia es 60º. Justifica, desde un punto de vista físico, este resultado.

a) Aplicamos en cada caso la ley de Snell para la refracción.



$$n_1 \text{ sen } \varepsilon_1 = n_2 \text{ sen } \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_2 = \text{arcsen}\left(n_1 \cdot \text{sen } \varepsilon_1\right) = \text{arcsen}\left(1{,}5 \cdot \text{sen } 20º\right) = 30{,}9º$$

b) Aplicamos las mismas ecuaciones con 60º como ángulo de incidencia.

$$\varepsilon_3 = \text{arcsen}\left(1{,}5 \cdot \text{sen } 60º\right) = \text{arcsen } 1{,}3$$

No puede existir ningún ángulo cuyo seno sea este valor, ya que el seno de cualquier ángulo debe estar comprendido entre –1 y 1. Físicamente significa que no se produce refracción: el rayo se queda en el primer medio, produciéndose el fenómeno que se conoce como reflexión total.

FENÓMENOS ONDULATORIOS

8.55 Calcula el ángulo con que debe incidir un rayo de luz en la superficie del diamante para que en la reflexión se obtenga luz polarizada (n_{diam} = 2,4).

Para que esto ocurra se debe incidir con el ángulo de Brewster, que es aquel que cumple que la suma de los ángulos formados por el rayo incidente y el refractado es 90º: $\varphi_B + \alpha_r = 90º \Rightarrow \text{sen } \alpha_r = \cos \varphi_B$

$$n_1 \text{ sen } \varphi_B = n_2 \text{ sen } \alpha_r;\ n_1 \text{ sen } \varphi_B = n_2 \cos \varphi_B \Rightarrow \text{tg } \varphi_B = \frac{n_2}{n_1}$$

Para el caso del diamante y el aire: $\varphi_B = \text{arc tg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \text{arc tg } 2{,}4 = 67{,}38º$

8.56 ¿Es posible aprovechar el fenómeno de la refracción de la luz para generar un arco iris iluminando las gotas de lluvia con un haz láser de luz roja?

No, ya que la luz roja es monocromática y no puede dividirse en haces de luz de otros colores. Para observar el fenómeno del arco iris se debe realizar la refracción con luz blanca.

8.57 Una fuente de luz coherente se encuentra con dos rendijas a una distancia de 0,08 mm. La luz que atraviesa las rendijas se encuentra con una lámina a 4 m de las mismas. La primera franja iluminada (n = 1) esta a 3 cm de la línea central.

a) Calcula la longitud de onda de la luz.

b) Calcula la distancia entre dos franjas iluminadas consecutivas.

a) A partir de la expresión de la posición de un franja iluminada, despejamos el valor de λ cuando n = 1.

$$d\,\frac{y_{\text{iluminada}}}{D} = n\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = d\,\frac{y_{\text{iluminada}}}{nD} = 8\cdot10^{-5}\,\frac{3\cdot10^{-2}}{4} = 6\cdot10^{-7}\ \text{m}$$

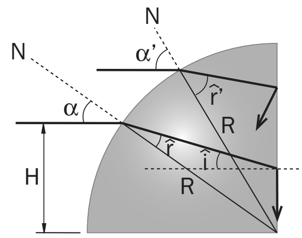
b) La distancia entre dos franjas iluminadas la podemos expresar como:

$$\left.\begin{aligned} y_n &= \frac{\lambda D}{d}n \\ y_{n+1} &= \frac{\lambda D}{d}(n+1) \end{aligned}\right\}\; y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda D}{d}(n+1-n) = \frac{\lambda D}{d} = \frac{6\cdot10^{-7}\cdot 4}{8\cdot10^{-5}} = 0{,}03\ \text{m}$$

. Se sitúan a distancias de 3 cm.

PROBLEMA DE SÍNTESIS

8.58 Se quiere construir un dispositivo que permita que un rayo de luz monocromática que incida horizontalmente sobre el mismo salga desviado 90º. Para ello se cuenta con un vidrio con forma de un cuarto de círculo, como el de la imagen. El vidrio tiene un radio de 1 m y un índice de refracción para la luz utilizada de n = 1,6.

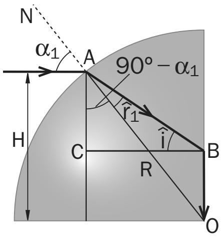


Sabemos que cuando la luz incide horizontalmente sobre la pieza de vidrio, el ángulo que forma el rayo incidente con la normal (que es en todo momento el radio de la pieza) depende de la altura a la que se realice el contacto con el vidrio.

Debemos calcular cuál será la altura a la que debe lanzarse el rayo sobre la pieza para que el rayo salga en la dirección perpendicular.

Para que se produzca reflexión total: $n\cdot \operatorname{sen}\hat{i} = 1$; $\quad \hat{i} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{1{,}6}\right) = 38{,}68º$

Del triángulo *ACB*, obtenemos una relación ente α_1 y $\hat{r}_1$.



$$\left[(90º-\alpha_1) + \hat{r}_1\right] + \hat{i} + 90º = 180º \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = \hat{i} + \hat{r}_1$$

La refracción que se produce en el punto *A* es:

$$\operatorname{sen}\ \alpha_1 = n\ \operatorname{sen}\hat{r}_1 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\hat{i} + \hat{r}_1\right) = n\ \operatorname{sen}\hat{r}_1$$

Desarrollando esta expresión:

$$\operatorname{sen}\hat{i}\cdot\cos\hat{r}_1 + \cos\hat{i}\cdot\operatorname{sen}\hat{r}_1 = n\operatorname{sen}\hat{r}_1; \qquad \frac{\operatorname{sen}\hat{i}\cdot\cos\hat{r}_1}{\operatorname{sen}\hat{r}_1} + \frac{\cos\hat{i}\cdot\operatorname{sen}\hat{r}_1}{\operatorname{sen}\hat{r}_1} = \frac{n\operatorname{sen}\hat{r}_1}{\operatorname{sen}\hat{r}_1}; \qquad \operatorname{sen}\hat{i}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\hat{r}_1} + \cos\hat{i} = n$$

Dividiendo por $\operatorname{sen}\hat{i}$: $\frac{1}{\operatorname{tg}\hat{r}_1} + \frac{1}{\operatorname{tg}\hat{i}} = \frac{n}{\operatorname{sen}\hat{i}}$; $\operatorname{tg}\hat{r}_1 = \dfrac{1}{\left(\dfrac{n}{\operatorname{sen}\hat{i}} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}\hat{i}}\right)} = \dfrac{1}{2{,}56 - 1{,}25} = 0{,}76 \Rightarrow \hat{r}_1 = \operatorname{arctg}(0{,}76) = 37{,}23º$

Aplicando de nuevo la ley de Snell: $\operatorname{sen}\alpha_1 = n\ \operatorname{sen}\hat{r}_1 \Rightarrow \alpha_1 = \operatorname{arc\,sen}(1{,}6\cdot\operatorname{sen}37{,}23º) = 75{,}50º$

El ángulo formado por el rayo y la normal es el mismo que el formado por el radio y la horizontal. Resolviendo este triángulo, se calcula la altura *H*: $\operatorname{sen}\ \alpha_1 = \frac{H}{R} \Rightarrow H = R\operatorname{sen}\alpha_1 = 0{,}968\ \text{m}$