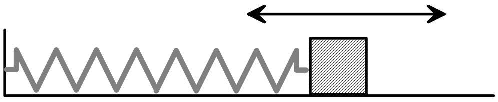
Alumno o alumna: **Puntuación:**

1. El oscilador armónico

Una partícula de 1,4 kg de masa se conecta a un muelle de masa despreciable y constante recuperadora k = 15 N/m, de manera que el sistema se mueve como se indica en la figura. La amplitud del movimiento es de 2,0 cm. Calcula:

[a] la energía total del sistema;
[b] las energías cinética y potencial cuando la partícula se encuentra en la posición x = 1,3 cm;
[c] la rapidez máxima de la partícula;
[d] la aceleración máxima en valor absoluto.



Respuesta

[a] La energía mecánica del oscilador se calcula mediante: $E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}15 \cdot 0,02^2 = 3 \cdot 10^{-3}(J)$.

[b] Antes de calcular la energía cinética hemos de conocer el valor de la velocidad, para lo cual se requiere hallar la frecuencia angular ω. Se cumple que: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15}{1,4}} = 3,3(\frac{rad}{s})$; la velocidad es, entonces, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 3,3\sqrt{0,02^2 - 0,013^2} = 5,0 \cdot 10^{-2}(\frac{m}{s})$.

Energía cinética: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}1,4 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 = 1,75 \cdot 10^{-3}(J)$.

Energía potencial: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}15 \cdot 0,013^2 = 1,27 \cdot 10^{-3}(J)$.

Puede comprobarse que la suma de ambas coincide con la energía mecánica calculada en el apartado anterior.

[c] Sabemos que el valor máximo de la rapidez es: $v_{\max} = A\omega = 0,02(m) \cdot 3,3(\frac{rad}{s}) = 0,066(\frac{m}{s})$.

[d] El valor absoluto de la aceleración máxima es: $|a_{\max}| = A\omega^2 = 0,02(m) \cdot 3,3^2\left(\frac{rad}{s^2}\right) = 0,22\left(\frac{m}{s^2}\right)$.

2. Ahora oigo, ahora no oigo

Dos altavoces están separados entre sí una distancia de 3 m. Un observador se sienta directamente delante de uno de ellos a una distancia de 4 m, de modo que los dos altavoces y el observador forman un ángulo de 90º.

[a] Demuestra que el observador no percibirá ningún sonido si la frecuencia de las ondas sonoras verifica la condición: $f = (2n+1)170(Hz)$.

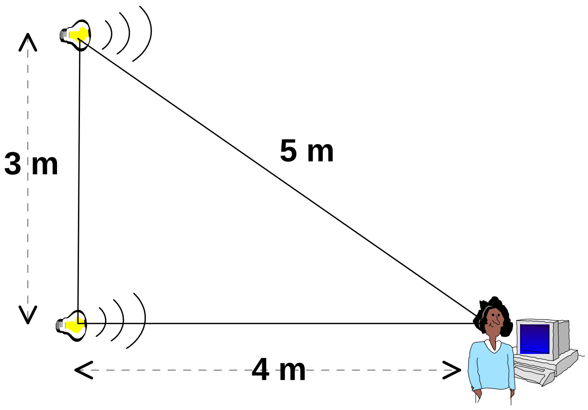
[b] Razona si en la zona entre los altavoces se producirán o no ondas estacionarias.

[c] Si cada altavoz emite con una potencia de 0,10 W, calcula la intensidad del sonido y el nivel de intensidad sonora en la posición del observador. Se supone que no se está cumpliendo ahora la condición del apartado [a].

{DATOS: Velocidad del sonido en el aire = 340 m/s; $\beta = 10 \log \frac{I}{I_o}$, donde I_o = 10^{-12} W/m²}

Respuesta

[a] El observador no oirá ningún sonido cuando se produzca una interferencia destructiva en el punto en el que se encuentra. Esta interferencia se produce cuando la diferencia de los recorridos de las dos ondas sonoras es un múltiplo impar de semilongitudes de onda, esto es, cuando se cumple: $x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$; dado que la diferencia de recorridos es de 1 m, tenemos que: $\lambda = \frac{2}{2n+1}(n = 0, 1, 2...)$. Por otro lado, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad están ligadas por: $v = f\lambda$, de donde se deduce que: $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{(2n+1)v}{2} = (2n+1)170(Hz)$, con n = 0,1,2...



[b] En la zona entre los altavoces se están propagando dos ondas sonoras idénticas en todo excepto en el sentido de propagación; en consecuencia, se producirán ondas estacionarias en esa zona.

[c] La intensidad del sonido que llega al observador es la suma de las intensidades de las dos ondas sonoras, esto es,

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{0,1(W)}{4\pi \cdot 5^2(m^2)} + \frac{0,1(W)}{4\pi \cdot 4^2(m^2)} = 3,18 \cdot 10^{-4} + 4,97 \cdot 10^{-4} = 8,15 \cdot 10^{-4}\left(\frac{W}{m^2}\right).$$

El nivel de intensidad sonora es, entonces, $\beta = 10 \log \frac{8,15 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 89(dB)$. Se trata de un nivel de intensidad sonora muy fuerte.

3. El lanzamiento del pelotari

[a] Demuestra que la aceleración de una partícula en un punto cualquiera de un campo gravitatorio coincide con la intensidad del campo gravitatorio en dicho punto.
[b] Un pelotari observa que una pelota de mano, lanzada verticalmente hacia arriba, invierte 6 s en volver al punto de partida. Si se supone despreciable la resistencia del aire, ¿cuál era la rapidez inicial de la pelota? ¿cuál fue la altura máxima que alcanzó?
[c] Imagina que el pelotari pudiese lanzar esa misma pelota, con idéntica rapidez inicial, desde la superficie de Saturno. Halla la altura máxima y el tiempo de vuelo de la pelota.

{DATOS: Masa de Saturno = $5{,}68\cdot10^{26}$ kg. Radio de Saturno = $5{,}82\cdot10^{7}$ m. Constante de la gravitación universal, G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²}

Respuesta

[a] Véase cualquier libro de Física.

[b] Las ecuaciones de este movimiento, tomando como sistema de referencia los habituales ejes de coordenadas cartesianas en el punto de lanzamiento, son: $\left\{\begin{array}{l} v = v_o - 9,8t \\ y = v_o t - 4,9t^2 \end{array}\right.$. En el punto más alto de la trayectoria, la velocidad de la pelota es nula; además, para alcanzar dicho punto ha invertido 3 s, por lo que de la ecuación de la velocidad se deduce: $v_o = v + 9,8t = 9,8 \cdot 3 = 29,4(\frac{m}{s})$. De la ecuación de la posición, obtenemos la altura máxima que alcanzó la pelota: $y_{\max} = 29,4 \cdot 3 - 4,9 \cdot 9 = 44,1(m)$.

[c] En primer lugar, calculamos la intensidad del campo gravitatorio en la superficie saturniana, que coincide con la aceleración debida a la gravedad en dichos puntos. Se cumple que: $g' = G\frac{M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{5,68\cdot10^{26}}{(5,82\cdot10^{7})^2} = 11,2\left(\frac{N}{kg}\right)$.
Las ecuaciones de este movimiento son: $\left\{\begin{array}{l} v = 29,4 - 11,2t \\ y = 29,4t - 5,6t^2 \end{array}\right.$. El tiempo de subida se obtiene haciendo nula la velocidad: $t = \frac{29,4}{11,2} = 2,63(s)$; el tiempo de vuelo de la pelota es el doble de este valor: 5,26 s. La altura máxima es, ahora, $y_{\max} = 29,4 \cdot 2,63 - 5,6 \cdot 2,63^2 = 38,6(m)$.
Estos resultados son coherentes. La aceleración en la superficie de Saturno, dirigida verticalmente hacia abajo, es mayor que en la Tierra, así que, para la misma velocidad inicial de lanzamiento, el tiempo del vuelo y la altura máxima han de tener valores inferiores a los correspondientes terrestres.

4. La energía del satélite

Un satélite de 200 kg de masa se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r = $2R_T$.

[a] Calcula la velocidad angular y el periodo del satélite.
[b] Deduce la expresión simplificada para la energía mecánica de un satélite terrestre que describe una órbita circular.
[c] ¿Cuál es la energía del satélite en su órbita?
[d] Calcula la energía necesaria para trasladarlo a una órbita circular de radio r' = $4R_T$.

{DATOS: $GM_T = 4\cdot10^{14}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-1}$; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m}

Respuesta

[a] La fuerza gravitatoria sobre el satélite se comporta como fuerza centrípeta, por lo que: $G\frac{M_T m}{r^2} = m\omega^2 r$; de donde se deduce: $\omega^2 = \frac{GM_T}{r^3} = \frac{GM_T}{(2R_T)^3} = \frac{GM_T}{8R_T^3}$; al hacer la aplicación numérica se obtiene: $\omega^2 = \frac{4\cdot10^{14}}{8\cdot(6{,}37\cdot10^6)^3} = 1{,}93\cdot10^{-7}$; la velocidad angular es, entonces, $\omega = 4{,}40\cdot10^{-4}(\frac{rad}{s})$.
El periodo del satélite en su órbita vale: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4{,}4\cdot10^{-4}} = 1{,}43\cdot10^4(s) = 3{,}97(h)$.

[b] Consulta el libro de Física.

[c] La energía mecánica de un satélite en un órbita circular está dada por: $E_m = -\frac{GM_T m}{2r}$; en nuestro caso, $E_m = -\frac{4\cdot10^{14}\cdot200}{4\cdot6{,}37\cdot10^6} = -3{,}14\cdot10^9(J)$.

[d] La energía necesaria para trasladar el satélite a una órbita más lejana es la diferencia entre las energías mecánicas final e inicial, es decir, $\Delta E_m = -GM_T m\left(\frac{1}{8R_t} - \frac{1}{4R_T}\right) = \frac{GM_T m}{8R_T}$. Sustituyendo los valores, queda: $\Delta E_m = \frac{4\cdot10^{14}\cdot200}{8\cdot6{,}37\cdot10^6} = 1{,}57\cdot10^9(J)$.

5. El campo eléctrico de cuatro cargas

[a] Descripción vectorial del campo eléctrico: intensidad del campo eléctrico.
[b] Cuatro cargas iguales, Q>0, están situadas en los vértices de un cuadrado de lado L. Calcula la intensidad del campo eléctrico resultante en el punto medio de uno de los lados y en el centro del cuadrado.

Respuesta

[a] Repasa los apuntes de Física.

[b] En primer lugar, se dibujan las intensidades del campo eléctrico, debidas a cada una de las cargas, en el punto medio de uno de los lados. En segundo lugar, calculamos los módulos de algunas intensidades, ya que los valores de $\vec{E}_3$y $\vec{E}_4$no es preciso calcularlos porque dichos vectores se anulan mutuamente. Los otros dos vectores, por la simetría de la distribución, tienen el mismo módulo: $E_1 = E_2 = k\frac{Q}{r^2} = k\frac{4Q}{5L^2}$, ya que r es la hipotenusa de los triángulos rectángulos de la figura 1.
Para aplicar el principio de superposición, descomponemos los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ (figura 2); sus componentes horizontales se anulan, al tiempo que las componentes verticales se suman. Por lo tanto, el módulo de la intensidad del campo eléctrico resultante en el punto medio de uno de los lados es: $E_T = 2E_1 sen\,\theta$. El valor del seno de ángulo θ se obtiene de la geometría; en el triángulo rectángulo de la izquierda,
$sen\,\theta = \frac{L}{r} = \frac{L}{\frac{\sqrt{5}\,L}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. En consecuencia,
$E_T = 2k\frac{4Q}{5L^2}\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{25}k\frac{Q}{L^2}$. La dirección de esta intensidad es perpendicular al lado del cuadrado en su punto medio y el sentido hacia afuera del cuadrado.

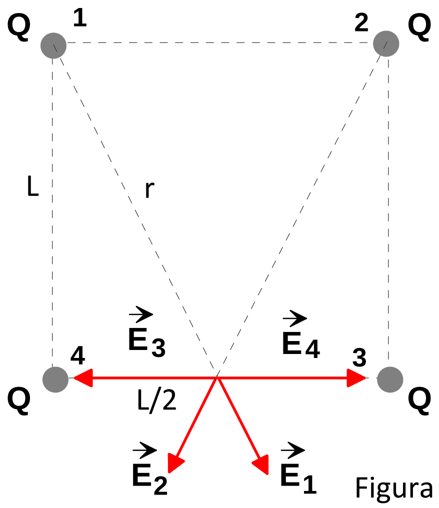


Figura 1

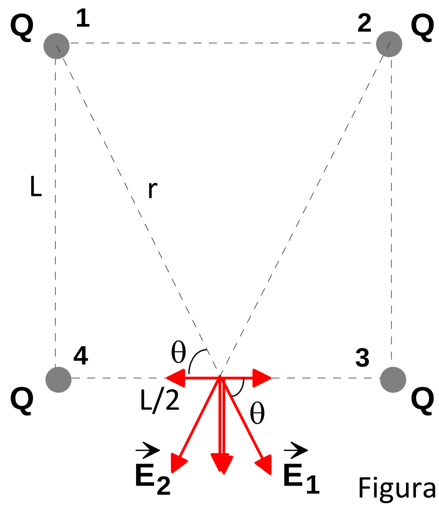


Figura 2

En el centro del cuadrado, la intensidad del campo eléctrico resultante es nula, ya que las cuatro intensidades individuales se anulan dos a dos. El alumno puede comprobarlo fácilmente.

6. Energía en un campo eléctrico

Dos cargas eléctricas de valor +Q están fijas, respectivamente, en los puntos (0, a) y (0, -a) m. Una partícula de carga +q y masa m, inicialmente en el origen de coordenadas, se separa un poco hacia la derecha y se deja en libertad.

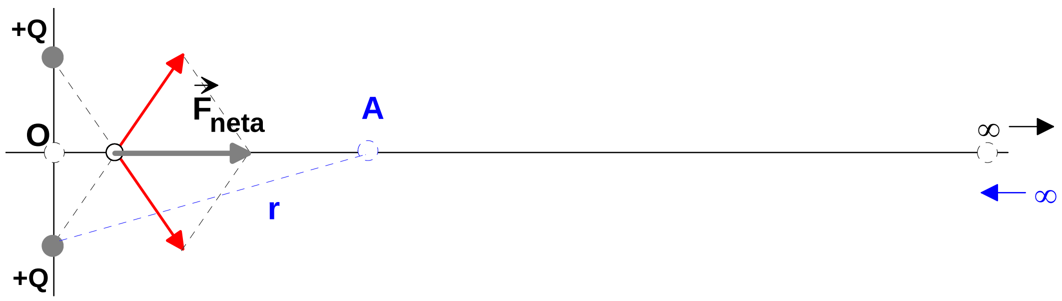
[a] Demuestra que la partícula se desplazará hacia la derecha a lo largo del eje X.

[b] Halla, por consideraciones de energía, la rapidez de la partícula cuando $x \to \infty$.

[c] Si la partícula se lanza en el eje X, hacia la izquierda, desde el ∞ con una rapidez igual a la mitad de la obtenida en el apartado anterior, ¿en qué punto del eje X quedará momentáneamente en reposo?

Respuesta

[a] Cuando la partícula se encuentra en el origen de coordenadas, las dos fuerzas que las cargas fijas ejercen sobre ella dan resultante nula, pero al desplazarla un poco hacia la derecha aparece una fuerza resultante dirigida en el sentido +X; por lo tanto, la partícula se desplazará hacia la derecha a lo largo del eje X.



[b] Imagina que la partícula se encuentra inicialmente en reposo en el origen de coordenadas y que, tras un empujón infinitesimal hacia la derecha, se mueve hacia $+\infty$. Dado que la energía mecánica de la partícula se conserva, tenemos que: $E_m(O) = E_m(\infty)$, es decir, $qV(O) = \frac{1}{2}mv_\infty^2$, ya que en el origen de coordenadas no hay energía cinética y en el punto final no hay energía potencial. El potencial eléctrico en el punto O vale: $V(O) = 2k\frac{Q}{a}$; por lo tanto, $2k\frac{Qq}{a} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$; $v_\infty^2 = \frac{4kQq}{am}$; $v_\infty = 2\sqrt{\frac{kQq}{am}}$.

[c] En esta situación puede aplicarse de nuevo la ley de conservación de la energía mecánica. En el estado inicial la energía potencial eléctrica es nula y la rapidez de la partícula es: $v'_\infty = \sqrt{\frac{kQq}{am}}$. En el estado final sólo hay energía potencial eléctrica. Se cumple que: $E_m(\infty) = E_m(A)$; $\frac{1}{2}mv'^2_\infty = qV(A)$; al sustituir los valores de la rapidez y del potencial eléctrico, se obtiene: $\frac{1}{2}m\frac{kQq}{am} = 2k\frac{Qq}{r}$; $\frac{1}{2a} = \frac{2}{r}$; $r = 4a$. Se pide el valor de la abscisa, así que: $r^2 = 16a^2$; $x^2 + a^2 = 16a^2$; $x = a\sqrt{15}$.