NOMBRE: SOLUCIONADO	
CURSO: B2CT	**FECHA: 18/01/2012**

TEMA 3. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON.
TEMA 4. LEYES DE KEPLER: FUERZAS CENTRALES.
TEMA 5. CAMPO GRAVITATORIO.

NORMAS GENERALES

- Escriba a bolígrafo.
- No utilice ni típex ni lápiz.
- Si se equivoca tache.
- Si no tiene espacio suficiente utilice el dorso de la hoja.
- Evite las faltas de ortografía.
- Lea atentamente las preguntas antes de responder.
- Todas las preguntas tienen señalada la puntuación que les corresponde.
- Se puede utilizar la calculadora.
- El examen está valorado en 10 puntos.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

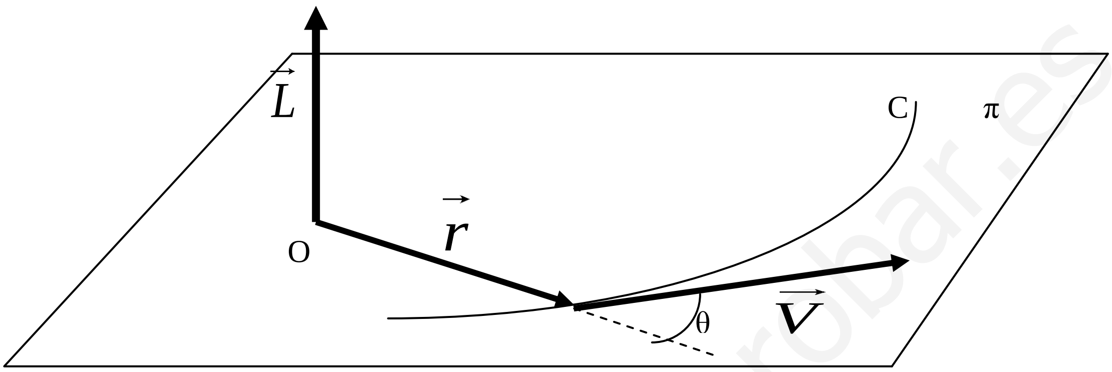
- Se plantearán al alumno cuestiones y problemas. **Se requerirá un correcto planteamiento de la cuestión planteada, así como la realización de dibujos o esquemas**, ajustes de ecuaciones etc.; que ayuden a una mejor comprensión de las cuestiones planteadas descontando hasta un 50% de la nota de la cuestión planteada, si no se cumplen los criterios anteriores.
- Se descontará de la cuestión un 25% de la nota si el alumno no indica las unidades o estas son incorrectas.
- Se descontará nota por las faltas de ortografía, **hasta un máximo de 2 puntos**, medio punto por falta.
- CADA CUESTION 1 PUNTO.
- CADA PROBLEMAS 3 PUNTOS.

CALIFICACIÓN	

CUESTIÓN 1

Definición de momento angular. Principio de conservación del momento angular: fuerzas centrales. (1p)

Es una magnitud vectorial que se representa por $\vec{L}$. Consideremos el caso de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$. Sea $\vec{r}$ el vector de posición de la partícula respecto a un punto fijo O. La partícula sigue una trayectoria C.



Se define la magnitud física vectorial momento angular $\vec{L}$ como:

$\vec{L} = \vec{r} \ x \ m.\vec{v} \quad o \quad \vec{L} = \vec{r} \ x \ \vec{p} \ \ siendo \ \vec{p} = m.\vec{v}$ *una magnitud vectorial llamada cantidad de movimiento.*

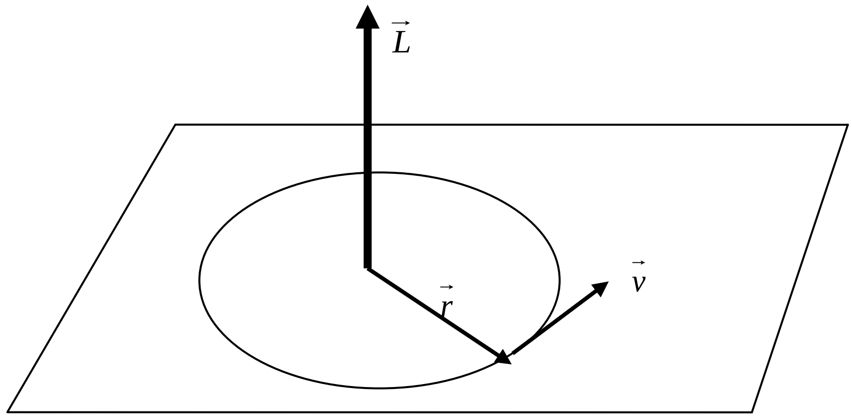
Por tanto, $\vec{L}$ viene definida por el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ y la cantidad de movimiento $\vec{p}$.

En cuanto al módulo de $\vec{L}$, por definición de producto vectorial vendrá dado por

$$\left|\vec{L}\right| = m.r.v.sen\theta$$

Por otra parte, $\vec{L}$ es perpendicular a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$, ya que es el resultado del producto vectorial de ambos vectores. Entonces, si la partícula se mueve en un plano determinado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$, $\vec{L}$ será perpendicular a dicho plano.

Un caso muy sencillo es el de una partícula que realiza un movimiento circular.



El movimiento es plano (plano del círculo) y los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí. El momento angular es entonces perpendicular al círculo. Este es el caso del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. El vector de posición $\vec{r}$ coincide con el radio del círculo por lo que es perpendicular al vector velocidad $\vec{v}$ en todo momento.

$$L = r.m.v.sen90 = r.m.v$$

$$Como\ v = w.r \Rightarrow L = r.m.w.r = m.r^2.w$$

Esta última expresión sugiere que el vector momento angular $\vec{L}$ es paralelo al vector velocidad angular $\vec{w}$.

Una magnitud física se dice que se conserva si se cumple que su derivada respecto a la variable tiempo es cero.

Ejemplo: $f(t) = 3 \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \frac{d(3)}{dt} = 0 \Rightarrow f(t)\, se\, conserva$

Es decir, cuando una magnitud física se conserva, esa magnitud es constante y por tanto, su derivada es cero.

En cursos anteriores has estudiado que la energía es una magnitud física que se conserva, por lo tanto, su derivada temporal es cero.

Para que el momento angular $\vec{L}$ se conserve, es necesario que su derivada temporal sea cero. Es decir

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte.\ y\ se\ conserva$$

Pero $\vec{L} = \vec{r}\ x\ m.\vec{v}$, luego su derivada será:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r}\, x\, m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\, x\, m\vec{v} + \vec{r}\, x\, \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Se aplica la regla de derivación de un producto

La derivada del vector de posición $\vec{r}$ es la velocidad $\vec{v}$.

Considerando, en el segundo término, que la masa m del móvil es constante, no se derivaría por lo que quedaría:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v}\, x\, m\vec{v} + \vec{r}\, x\, m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\, x\, m\vec{v} + \vec{r}\, x\, m.\vec{a}$$

Este término es la aceleración $\vec{a}$. La masa no se deriva.

Este término es cero

Ahora bien, en la última expresión el término $\vec{v}\, x\, m\vec{v}$ *es cero, ya que son vectores paralelos. Además, la segunda ley de Newton establece que* $m.\vec{a} = \vec{F}$, *siendo* $\vec{F}$ *la fuerza que actúa sobre la partícula. Por tanto, la derivada del momento angular quedaría:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\, x\, \vec{F}$$

Pero hemos visto que el producto vectorial del vector de posición y la fuerza es el momento de dicha fuerza. Es decir,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Si la magnitud momento angular $\vec{L}$ *se conserva, su derivada tiene que ser cero, luego el momento de las fuerzas* $\vec{M}$ *tiene que ser cero.*

$$Si\ \vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte.\ y\ se\ conserva$$

$$Pero\ \vec{M} = \vec{r}\, x\, \vec{F} \Rightarrow \vec{r} x \vec{F} = 0$$

¿En qué condiciones se cumple que $\vec{r} \, x \, \vec{F} = 0$ *?*

Para que el producto $\vec{r} \, x \, \vec{F} = 0$ *existen tres posibilidades:*

- *Caso 1: el vector de posición* $\vec{r}$ *es cero, la partícula está en el origen.*
- *Caso 2: el vector fuerza* $\vec{F}$ *es cero, la partícula no está sometida a fuerzas.*
- *Caso 3: los vectores* $\vec{r} \; y \, \vec{F}$ *son paralelos. Cuando los dos vectores son paralelos se dice que la fuerza es central.*
- *Si una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central, el momento angular es constante, es decir, es una magnitud física que se conserva .*
- *Este resultado es sumamente importante ya que algunas fuerzas que aparecen en la naturaleza son centrales: la fuerza gravitatoria y la fuerza eléctrica.*
- *La Tierra se mueve alrededor del Sol bajo la influencia de una fuerza central, la gravitatoria, cuya dirección pasa por el centro del Sol. Por ello, el momento angular de la Tierra alrededor del Sol es constante.*

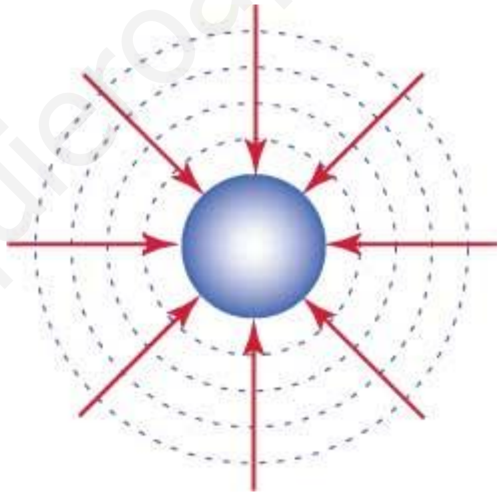
CUESTIÓN 2

A) Define los conceptos de líneas de fuerza y superficies equipotenciales para un campo gravitatorio. Dibújalas. (0,5p)

B) Define el concepto de energía potencial gravitatoria explicando su significado físico. (0,5p)

A) Un campo de fuerzas como el gravitatorio puede representarse de forma figurativa por líneas denominadas líneas de fuerza, o líneas de campo y por superficies equipotenciales.

Las líneas de campo se trazan de modo que el vector intensidad del campo gravitatorio es tangente a las líneas de campo y tienen el mismo sentido que éstas. Por otra parte, se trazan de modo que la densidad de líneas de campo (número de líneas que atraviesan la unidad de superficie colocada perpendicularmente a éstas) sea proporcional al módulo del campo gravitatorio. Esto significa que el campo gravitatorio es más intenso en aquellas regiones en que las líneas de campo están más juntas.

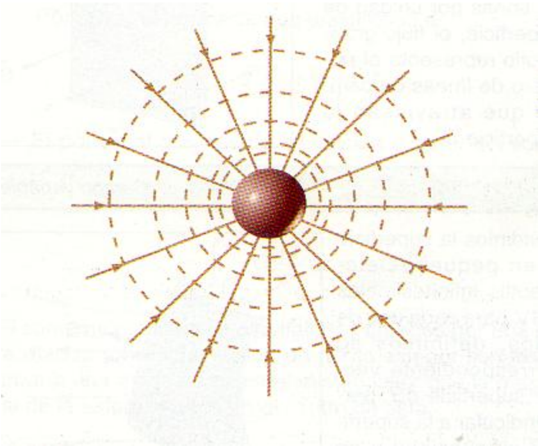


Al unir los puntos en los cuáles el potencial gravitatorio tiene el mismo valor, podemos obtener una serie de superficies llamadas ***equipotenciales****.*

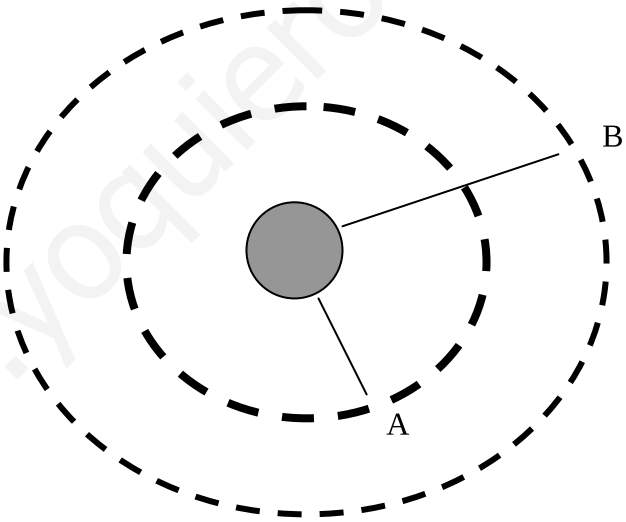
Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo *en cualquier punto. El trabajo que realiza el campo gravitatorio para trasladar una masa de un punto a otro de la misma superficie equipotencial es nulo.*

$$W = m\,(V_A - V_B) = 0$$

Para una masa puntual, el potencial toma el mismo valor en los puntos situados a la misma distancia de la masa. Por tanto, las superficies equipotenciales son esféricas concéntricas con centro en la propia masa.



En la figura hemos representado dos superficies equipotenciales de radios r_A y r_B. Nos planteamos la siguiente cuestión: ¿dónde es mayor el potencial en A o en B? ¿Y el campo?



En el infinito, el potencial es cero. A medida que nos acercamos hacia la masa el potencial va disminuyendo (su valor numérico aumenta pero recuerda que el potencial lleva un signo menos). Es decir, cuanta más pequeña es la distancia más pequeño es el potencial. De esta manera, el potencial en A es menor que en el B: ***V_A menor que V_B****, o cuanto mayor es la distancia mayor es el potencial:* ***V_B es mayor que V_A. El valor más alto que puede adquirir el potencial es cero, y eso ocurre a una distancia infinita.***

En cuanto al valor del campo, en el infinito también es cero, a medida que nos acercamos hacia la masa, su valor aumenta (al revés que el potencial ya que este disminuía). Piensa que el valor de la gravedad terrestre es 9,81 m/s²en la superficie de la Tierra, pero si te alejas, digamos hasta la Luna, la gravedad terrestre ahí será menor de 9,81 m/s². Por tanto:

<u>El campo gravitatorio aumenta a medida que nos acercamos a la masa que lo crea mientras que el potencial disminuye en esa misma dirección. O en otras palabras, el campo se orienta hacia los potenciales decrecientes</u>.

B) Supongamos que queremos calcular el trabajo para llevar una partícula de masa m_2 desde un punto A hasta el infinito.

$$W_{A\to\infty} = G.m_1.m_2.(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_A}) = -\frac{G.m_1m_2}{r_A} = Ep_A$$

<u>La energía potencial en un punto es el trabajo necesario que realiza la fuerza gravitatoria para trasladar una masa desde ese punto hasta el infinito.</u>

Notar que este trabajo es negativo. Eso quiere decir que no es un trabajo espontáneo, no lo hace el campo gravitatorio de una manera natural. La razón es que el campo gravitatorio es atractivo. Lo espontáneo, trabajo positivo, sería que la masa m_2 viniera desde el infinito hasta una distancia r.

<u>Si un trabajo es positivo, lo hace el campo gravitatorio.</u>

<u>Si un trabajo es negativo, va en contra de la interacción gravitatoria.</u>

CUESTIÓN 3

Un planeta esférico tiene un radio de 3000 km y la aceleración de la gravedad es 6 m/s². Halla la densidad media del planeta y la velocidad de escape del planeta para un objeto situado sobre su superficie. (1 p)

Dato: G=6,67.10⁻¹¹ N.m².kg⁻².

La densidad del planeta, suponiendo que es esférico, viene dada por

$$d=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3M}{4\pi R^3} \quad (1)$$

Esta expresión puede también escribirse como:

$$d=\frac{3M}{4\pi R^3}=\frac{M}{R^2}.\frac{3}{4\pi R} \quad (2)$$

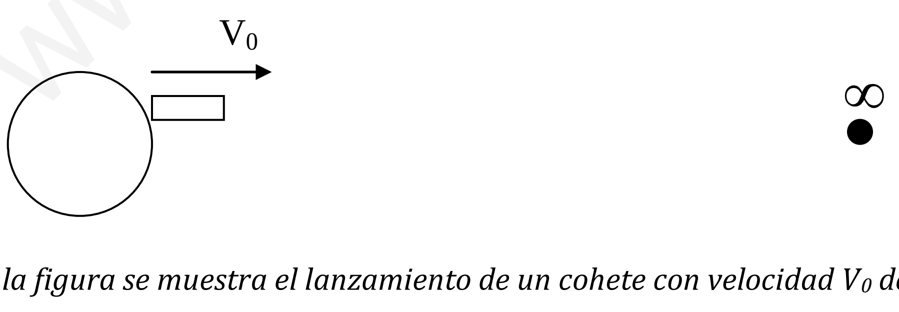
Por otra parte la gravedad del planeta será:

$$g=G.\frac{M}{R^2}\Rightarrow\frac{M}{R^2}=\frac{g}{G} \quad (3)$$

Sustituyendo la última expresión (3) en la ecuación (2) y teniendo en cuenta que el radio del planeta es R=3000 km = 3.10⁶ m:

$$d=\frac{g}{G}.\frac{3}{4\pi R}=\frac{6}{6,67.10^{-11}}.\frac{3}{4\pi(3.10^6)}=7162,02\,\frac{kg}{m^3}$$

Se llama velocidad de escape a la velocidad mínima con la cuál debe lanzarse un cuerpo desde un planeta para que llegue al infinito, es decir, para que llegue a un punto suficientemente lejano como para no sufrir la acción del campo gravitatorio del planeta.



En la figura se muestra el lanzamiento de un cohete con velocidad V_0 desde el planeta con la intención de que llegue hasta el infinito ∞.

Utilizamos el principio de conservación de la energía. Ahora bien, la energía mecánica en el infinito es cero

$$V_{escape} = \sqrt{\frac{2.G.M}{R}}$$

Teniendo presente la anterior ecuación (3):

$$\frac{M}{R^2} = \frac{g}{G} \Rightarrow \frac{M}{R} = \frac{g.R}{G}$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad de escape:

$$V_{escape} = \sqrt{\frac{2.G.M}{R}} = \sqrt{2G\,\frac{M}{R}} = \sqrt{2G\,\frac{g.R}{G}} = \sqrt{2.g.R}$$

Sustituyendo g=6 m/s² y R=3000 km=3.10⁶ m:

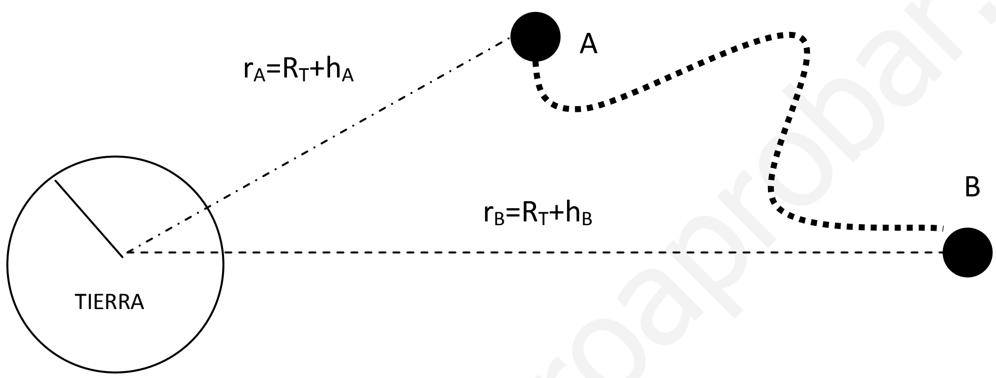
$$V_{escape} = \sqrt{2.(6).(3.10^6)} = 6000\ \frac{m}{s}$$

CUESTIÓN 4

a) Calcula el potencial gravitatorio en un punto A situado a 4200 km de la superficie terrestre y en otro punto B situado a 5800 km de la superficie.

b) Halla el trabajo realizado por el campo gravitatorio para llevar un satélite de 7500 kg desde el punto A al punto B. Interpreta el resultado obtenido.

Datos:Radio de la Tierra $6,38.10^{6}$ m; $M_{Tierra}=5,97.10^{24}$ kg; $G=6,67.10^{-11}$ $N.m^{2}.kg^{-2}$. (1p)



Las distancias del centro de la Tierra a los puntos A y B son:

$$r_A = R_T + h_A = 6370 + 4200 \Rightarrow r_A = 10.570\,km = 10.570.000\,m$$
$$r_B = R_T + h_B = 6370 + 5800 \Rightarrow r_B = 12.170\,km = 12.170.000\,m$$

A) <u>POTENCIAL EN EL PUNTO A:</u>

$$V_A = -G\frac{M_{TIERRA}}{r_A} = -6,67.10^{-11}.\frac{5,98.10^{24}}{(10.570.000)} = -3,7736.10^{7}\,\frac{J}{kg}$$

<u>POTENCIAL EN EL PUNTO B:</u>

$$V_B = -G\frac{M_{TIERRA}}{r_B} = -6,67.10^{-11}.\frac{5,98.10^{24}}{(12.170.000)} = -3,2775.10^{7}\,\frac{J}{kg}$$

B)

$$W_{A\to B}^{7500kg} = m\ \ V_A - V_B\ \ = 7.500\ \ -3,7736.10^{7} + 3,2775.10^{7}$$
$$W_{A\to B}^{7500kg} = -3,7211.10^{10}\ J$$

Puesto que el signo del trabajo es negativo, es un proceso no espontáneo, no natural. NO LO HACE LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA. Alejar dos masas no es un proceso natural, dado que la interacción gravitatoria es atractiva.

PROBLEMA 1

Un satélite artificial de 1000 kg gira alrededor de la Tierra a $3,6.10^7$ m de la superficie terrestre. Calcular:

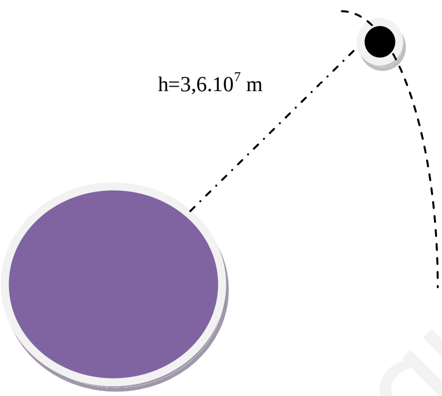
a) La velocidad orbital, el peso del satélite en la órbita y el periodo de rotación expresado en días. ¿Cómo se llaman estos satélites? (1p)

b) Energía mecánica del satélite en la órbita. (1p)

c) Si el satélite cayese a la Tierra, ¿con qué velocidad llegaría? ¿Importaría el camino seguido en la caída para el cálculo de la velocidad? (1p)

Datos: Radio de la Tierra $6,38.10^6$ m; $M_{Tierra}=5,97.10^{24}$ kg; $G=6,67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$.

a) $h=3,6.10^7$ m; $r=R_T+h=6,38.10^6+3,6.10^7= 4,238.10^7$ m



Para hallar la velocidad orbital se iguala la fuerza centrípeta a la fuerza gravitatoria:

$$G\frac{mM}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow G\frac{M}{r}=v^2$$

$$v=\sqrt{G\frac{M}{r}}=\sqrt{6,67.10^{-11}.\frac{5,97.10^{24}}{4,238.10^7}}=3065,3\frac{m}{s}$$

Y el periodo de la órbita será:

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2.(3,14).(4,238.10^7)}{3065,3}=86826,24=24\,h=1\,dia$$

Es un satélite geoestacionario, tarda un día en dar una vuelta por lo que siempre está sobre el mismo punto de la superficie terrestre.

El peso es:

$$P=m.g=m.\frac{G.M}{r^2}\Rightarrow P=1000.\frac{(6,67.10^{-11})5,97.10^{24}}{(4,238.10^7)^2}$$

$$P=1000.0,22=220\,N$$

b) *La energía mecánica en la órbita es:*

$$E = -G\frac{M.m}{2r} \Rightarrow E = -6,67.10^{-11}.\frac{5,97.10^{24}.(1000)}{2.(4,238.10^{7})}$$

$$E = -4,7.10^{9}\ J$$

c) *En primer lugar, la fuerza gravitatoria es conservativa y central por lo que no importa el camino seguido por una masa para ir desde un punto hasta otro, en este, caso, en la caída del cuerpo. En cuanto a la velocidad con la que llega a la Tierra.*

<u>Energías al inicio</u>:

- *La energía cinética inicial es cero porque el satélite cae, luego su velocidad inicial es cero.*
- *En cuanto a la energía potencial a esa altura tenemos:*

$$Ep = -G\frac{M.m}{r} = -6,67.10^{-11}.\frac{5,97.10^{24}.1000}{4,238.10^{7}}$$

$$Ep = -9,4.10^{9}\ J$$

Luego la energía mecánica inicial en la caída es:

E = Ec + Ep = $-9,4.10^{9}\ J$

<u>Energía final, al llegar a la Tierra</u>:

- *La energía cinética es Ec, que es la que buscamos.*
- *La energía potencial cuando llega a la Tierra es:*

$$Ep = -G\frac{M.m}{R_T} = -6,67.10^{-11}.\frac{5,97.10^{24}.1000}{6,38.10^{6}}$$

$$Ep = -6,25.10^{10}\ J$$

<u>Como se conserva la energía:</u>

$-9,4.10^{9}\ J$ = $-6,25.10^{10}\ J$ *+Ec(final)*

<u>Ec(final)= 5,31.10</u> ^{10} ***<u>J</u>***

<u>Y la velocidad final será:</u>

$$Ec = \frac{1}{2}.m.v^{2} \Rightarrow 5,31.10^{10} = \frac{1}{2}.1000.v^{2} \Rightarrow v = 10.306\frac{m}{s}$$

PROBLEMA 2

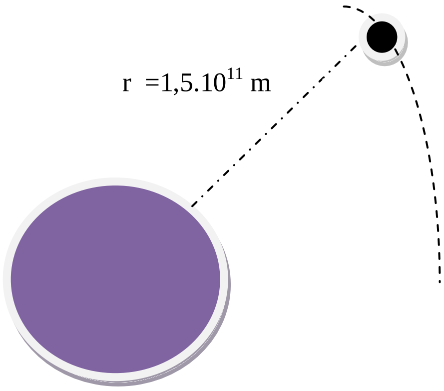
La distancia entre la Tierra y el Sol es 150 millones de kilómetros. La masa de la Tierra es 5,98.10²⁴ kg y la constante G=6,67.10⁻¹¹ N.m² /kg². Calcular:

a) Masa del Sol. (1p)

b) Periodo de revolución de Júpiter que está a 778 millones de kilómetros del Sol. (1p)

c) Velocidad y energía mecánica de la Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol. (1p)

Razónese el procedimiento empleado y explíquese brevemente las leyes físicas que utilizas.



a) La tercera Ley de Kepler establece que:

$T^2 = k.\,r^3$ (1)

El periodo de la Tierra alrededor del Sol es 1 año, 365 días o 31.536.000 segundos.

La constante de Kepler depende de la masa del planeta tractor, en este caso el Sol. Puede demostrarse que k viene dada por:

$$k = \frac{4.\pi^2}{G.M_{Sol}} \quad (2)$$

Sustituyendo datos en la ecuación (1):

$$(31.536.000)^2 = k.(1,5.10^{11})^3$$

$$k = 2,95.10^{-19}\ \frac{s^2}{m^3}$$

Sustituyendo el valor de k en la ec. (2) obtenemos la masa del Sol:

$$k = \frac{4.\pi^2}{G.M_{Sol}} \Rightarrow M_{Sol} = \frac{4.\pi^2}{G.k} \Rightarrow M_{Sol} = \frac{4.\pi^2}{6,67.10^{-11}.2,95.10^{-19}}$$

$$M_{Sol} = 2.10^{30}\ kg$$

b) Júpiter, al igual que la Tierra, gira alrededor del Sol por lo que tiene la misma constante de Kepler.

$$T^2_{Jupiter} = k.r^3_{Jup-Sol} \Rightarrow T^2_{Jupiter} = 2,95.10^{-19}.(7,78.10^{11})^3$$

$$T^2_{Jupiter} = 1,39.10^{17}\ s^2 \Rightarrow T_{Jupiter} = 3,73.10^8\ s = 11,82\ años$$

c) Para hallar la velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol basta con utilizar el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol y la distancia Tierra Sol:

$$v = \frac{2\pi r_{Tierra-Sol}}{T} = \frac{2\pi .1,5.10^{11}}{31.536.000} = 29.870\frac{m}{s}$$

Y la energía mecánica es la mitad de la energía potencial:

$$E = \frac{Ep}{2} = -\frac{G.M_{Sol}.M_{Tierra}}{2.r_{Tierra-Sol}} = -\frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}.2.10^{30}}{2.(1,5.10^{11})} = -2,66.10^{33}\ J$$

El signo de la energía mecánica significa que la Tierra está atrapada en el campo gravitatorio del Sistema Solar y obligada a dar vueltas alrededor del Sol. Se trata de un sistema ligado.

LEYES FÍSICAS UTILIZADAS: LEY DE GRACITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON Y TERCERA LEY DE KEPLER. **CONSULTA TUS APUNTES PARA ENUNCIAR ESTAS LEYES.**