Tema 4. Cinemática

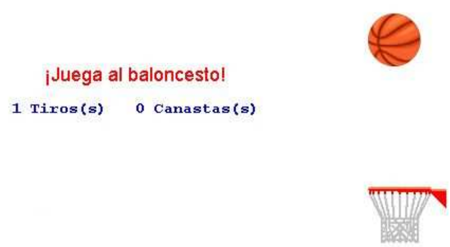
El movimiento es uno de los fenómenos físicos que se aprecian claramente si observamos el mundo que nos rodea. Vemos el movimiento de las personas, de los automóviles, del Sol y de la Luna, de los cuerpos que caen.....

Los conceptos fundamentales necesarios para explicar esos fenómenos los viste de forma cualitativa en 2º de ESO. Todos esos movimientos siguen unas leyes, sencillas en los casos más habituales, que se pueden expresar mediante ecuaciones matemáticas llamadas ecuaciones del movimiento, como viste en 4º de ESO.

En este tema vas a profundizar en algunos de esos aspectos, sobre todo en la formalización matemática de situaciones de interés con uno y dos móviles en movimientos horizontales, verticales y circulares, que ya resolviste en casos sencillos en ESO, y que ahora extenderás a casos con dos móviles y a movimientos en el plano (lanzamientos horizontal y oblicuo).

El baloncesto

Vas a comenzar con un partido de baloncesto. Cuando se lanza a canasta (aunque no se sea jugador de la NBA ni de la ÑBA), hay que tener en cuenta muchos factores para lograr el objetivo, que es encestar. Lo fundamental es saber dónde está la pelota cuando se hace el tiro, así como la posición de la canasta. Dependiendo de esos valores, el jugador decide lanzar con más o menos velocidad y con un ángulo u otro.



Utiliza el siguiente simulador y verás que puedes lograr encestar modificando los parámetros del tiro: clica sobre la pelota y arrastra el ratón para marcar la dirección y la velocidad de lanzamiento, soltando cuando te parezca oportuno. La pelota se moverá tal como tú hayas indicado. Aunque al principio no resulta fácil, rápidamente conseguirás encestar. Puedes clicar cuando la pelota está en el aire (¡habrás capturado un rebote!) y lanzar desde esa posición. También puedes probar a lanzar verticalmente hacia arriba para ver cómo se mueve el balón. ¡Experimenta!

Fíjate en lo que haces, porque te resultará muy útil cuando resuelvas la situación de los movimientos en el plan.

1. Magnitudes en el movimiento

Si te sientas como copiloto dentro de un automóvil que circula por una carretera ¿te estás moviendo? La respuesta no es tan sencilla como parece: si es por la noche y solamente miras dentro del coche, resultará difícil saber si el coche se mueve o no. Sin embargo, durante el día solamente tienes que mirar por la ventanilla.

Y si vas en el AVE, ¿te mueves o no? ¿Qué opina al respecto tu vecino, sentado como tú leyendo una revista?

En todos los casos, para saber si hay movimiento siempre debes hacer lo mismo: tienes que fijarte en si tu posición cambia respecto de un objeto que está fijo.

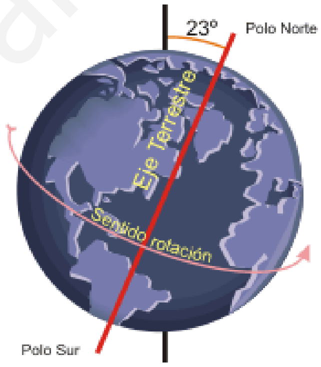
En los casos anteriores, ese **sistema de referencia** puede ser un árbol situado en la cuneta de la carretera o una farola del andén de la estación. Si tu posición cambia con respecto al sistema de referencia, que está fijo, la conclusión es que eres tú quien se mueve.

Movimiento y sistema de referencia

Un objeto se mueve cuando cambia su posición con respecto a un sistema de referencia, que se considera fijo.

Pero ¿realmente las referencias anteriores están fijas?

Si pensamos en que la Tierra gira sobre sí misma, tanto el árbol como la farola se mueven exactamente igual que la Tierra a la que están unidos.



Por tanto, **no hay sistemas de referencia fijos** de forma absoluta. Desde el punto de vista práctico, un objeto situado sobre la Tierra que esté en reposo respecto de ésta será un buen sistema de referencia; es decir, se puede utilizar el árbol, la casa y la farola a los que ya nos hemos referido.

Trayectoria y sistema de referencia

Fíjate ahora en lo que sucede cuando se deja caer una pelota desde lo alto del mástil de un barco de vela. Se trata de que "veas" la trayectoria (la línea que une todos los puntos por los que pasa el móvil) que sigue desde dos sistemas de referencia: a) la costa; b) el mismo barco. El hecho experimental es el mismo, ¡pero los dos observadores no ven lo mismo!

¿Qué movimiento se ve?

Los movimientos que aprecian dos observadores pueden ser diferentes: no se observa el mismo movimiento desde un sistema de referencia en reposo que desde uno que se mueve.

Magnitudes escalares y magnitudes vectoriales

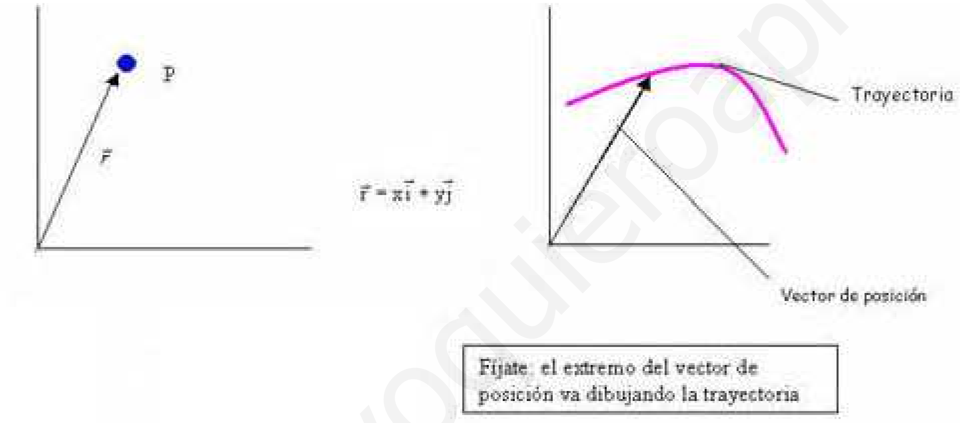
Una magnitud es escalar si indicando su valor numérico ya queda totalmente definida: tiempo, masa o temperatura.

Recuerda que en las magnitudes vectoriales debes conocer además de su magnitud o intensidad (**módulo del vector**, longitud del vector), su **dirección** y su **sentido**. En algunos casos, como en las fuerzas, además hay que saber su **punto de aplicación** para tener totalmente definido su efecto.

1.1 Expresión de la posición

Posición y trayectoria

Como la posición es una magnitud vectorial, se representa mediante un vector, llamado **vector de posición**.



Elección del sistema de referencia

Representar puntos en el plano resulta muy sencillo, ya que se trabaja con los ejes de cooordenadas típicos que se utilizan en Matemáticas. Para identificar un punto se indican sus dos coordenadas en el par (x,y), con sentido positivo a la derecha y arriba.

Componentes del vector de posición

Con esta notación, $\vec{r}$, la flecha indica que la magnitud es vectorial, mientras que si no hay flecha se indica el módulo del vector, $|\vec{r}|$ o r. En el vector de posición es la distancia al origen.

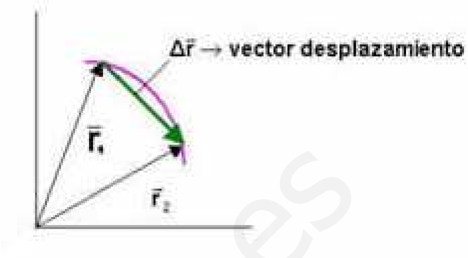
En lugar del propio vector, con mucha frecuencia se trabaja con sus **componentes**. ¿Cómo se obtienen las componentes de un vector?: en este caso, es muy sencillo, ya que las dos componentes están en la dirección de los ejes horizontal y vertical, **x** e **y**. Es decir, el vector de posición es la suma de sus vectores componentes. También se suelen escribir las componentes en función de los vectores unitarios en los dos ejes.

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vector desplazamiento y espacio recorrido

Cuando un objeto cambia su posición, su vector de posición también se modifica. El **vector desplazamiento** es precisamente la diferencia entre los vectores de posición final e inicial. Si te fijas en la figura, la diferencia de dos vectores es otro vector que comienza en el extremo del vector inicial y termina en el extremo del vector final.



El módulo del vector desplazamiento se llama desplazamiento, y es una magnitud escalar.

El **espacio recorrido** es la longitud de la trayectoria descrita por el móvil. Solamente coincide con el módulo del vector desplazamiento si la trayectoria es rectilínea y no hay cambio de sentido en el movimiento. Fíjate en el dibujo y verás que el módulo del vector desplazamiento -longitud de la flecha verde- no tiene el mismo valor que la longitud de la trayectoria -línea rosa-, y en que coincidirían solamente si la trayectoria fuese recta.

1.2 Vector velocidad

Observa en la imagen la posición que ocupan los corredores. ¿Cuál de ellos es el más rápido? La respuesta es clara: aquél que recorra la mayor distancia en el menor tiempo. Para indicarlo se utiliza una magnitud física, la velocidad.

La velocidad mide la rapidez con que un móvil cambia su posición. En el Sistema Internacional de unidades se mide en metros por segundo (m/s).

De esta forma, si un coche lleva una velocidad de 30 m/s en un momento determinado, significa que recorrerá 30 metros en cada segundo si mantiene constante esa velocidad.

Pero ¿y si ve un obstáculo en la carretera y frena para evitar el accidente? La velocidad ya no es constante, porque el móvil se desplaza cada vez más despacio, hasta que llega a detenerse. Decimos que lleva aceleración, ya que **la aceleración mide la rapidez del cambio de velocidad**.

Velocidades media e instantánea

Cuando un objeto se mueve, la velocidad que lleva en un momento determinado de su movimiento se llama **velocidad instantánea**. Se entiende por momento un intervalo de tiempo tan pequeño como para que la velocidad se mantenga constante en ese intervalo.

La **velocidad media** indica la velocidad promedio durante un tiempo apreciable, durante el cual la velocidad ha podido modificarse. Por ejemplo, un coche parte de una ciudad A y llega 5 horas después a una ciudad B, situada a 400 km. La velocidad media es obviamente de 80 km/h (400 km en 5 horas; 400 km/5 h= 80 km/h). ¿Significa que el marcador del coche siempre ha estado marcando 80 km/h? Evidentemente, no: ha podido ir un poco más deprisa o más lentamente, pararse a descansar, etcétera.

Unidades de la rapidez

Y hablando de coches y motos, su velocidad se suele indicar en km/h, en lugar de en m/s, que es la unidad del SI. ¿Recuerdas la equivalencia hay entre ellas? Fíjate en la siguiente conversión de unidades:

$$1\frac{km}{h}=\frac{1000\ m}{3600\ s}=\frac{1}{3{,}6}\frac{m}{s}$$

Despejando la igualdad, **1 m/s = 3,6 km/h**. Por tanto, una rapidez de 20 m/s corresponde a 72 km/h.

Rapidez y velocidad

Cuando decimos que la velocidad de un coche debe ser como máximo de 50 km/h cuando circula en ámbitos urbanos, en realidad nos estamos refiriendo a la magnitud del vector velocidad, a su módulo, que recibe el nombre de **rapidez** o **celeridad**.

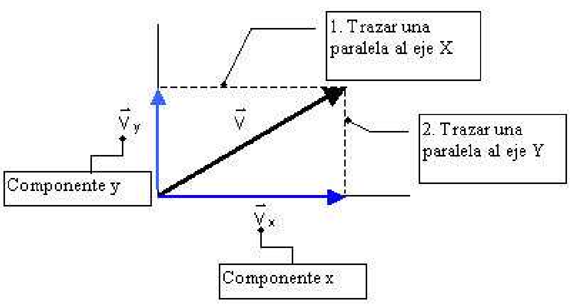
En ese sentido, el marcador de los coches no indica la velocidad, sino la rapidez (¡por lo que habría que llamarlo "rapidímetro" o "celerímetro" en lugar de velocímetro!): **la velocidad es una magnitud vectorial**, mientras que **la rapidez es un escalar**.

En la vida diaria, se utiliza el término velocidad en lugar de la rapidez: se dice que un autobús lleva una velocidad de 80 km/h, cuando se está indicando su rapidez. Se tiene en cuenta la dirección y el sentido del movimiento cuando resulta necesario.

Expresión del vector velocidad en función de sus componentes

Como ya sabes, la velocidad es una magnitud vectorial. Como siempre se utiliza la representación en el plano xy, las componentes del vector velocidad se obtienen con facilidad.

$$\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$$



Determinación de la rapidez

Como la rapidez es el módulo del vector velocidad, solamente tenemos que utilizar el teorema de Pitágoras, como ya se ha visto antes con el vector de posición:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Significado de la velocidad negativa

¿Qué quiere decir que un objeto lleva velocidad negativa? Vamos a analizar el caso más sencillo, comparando el caso de dos objetos que se mueven sobre la misma línea recta (que asociamos al eje matemático x) llevando velocidades respectivas y constantes de 5 m/s el móvil A y de -5 m/s el móvil B.

Vectorialmente, ambas velocidades se expresan como:

$$\vec{v}_a = 5\vec{i}\,; \quad \vec{v}_b = 5\,\vec{j}$$

En ambos casos, el módulo del vector es 5, por lo que la rapidez del movimiento también es 5. Es decir, los dos móviles recorren 5 metros en cada segundo. Entonces ¿dónde está la diferencia?: en que el móvil a se mueve en el sentido positivo del eje x (hacia la derecha), mientras que el b lo hace en el sentido negativo (hacia a la izquierda).

1.3 Vector aceleración

Los cambios de rapidez

Cuando un coche que circula por un tramo recto de carretera se encuentra con un obstáculo (una piedra grande, agua encharcada, etcétera), el conductor pisa el pedal del freno para que no se produzca el impacto o para pasar más despacio. El coche se mueve cada vez más lentamente, hasta que incluso llega a detenerse.

¿Qué característica del vector velocidad se ha modificado? La rapidez, que pasa del valor inicial a cero cuando el coche se para.

Se dice que hay aceleración cuando cambia el vector velocidad. La aceleración también es una magnitud vectorial, de la que debemos conocer tanto módulo como dirección y sentido.

En casos como el anterior, con variación de la rapidez, la **aceleración** se llama **tangencial,** ya que su dirección es tangente a la trayectoria.

Si el movimiento es rectilíneo, la única forma de que haya aceleración es que el móvil aumente o disminuya su rapidez (como se dice habitualmente, acelere o frene).

Los movimientos no rectilíneos

Vamos analizar ahora el caso de un móvil cuya trayectoria no es recta. En su movimiento, la dirección que sigue va cambiando aunque la rapidez sea constante. Es, por ejemplo, el caso de un coche que toma una curva. Pero, dado que la dirección es una de las características del vector velocidad y cambia en el giro, **el vector velocidad no es constante**. Al girar el volante se produce aceleración aunque la rapidez sea la misma y el marcador indique el mismo valor. En este caso, la **aceleración** se llama **normal** o **centrípeta**.

Aceleración y rapidez

Hay aceleración en un movimiento si cambia la rapidez (**aceleración tangencial**), si cambia la dirección (**aceleración centrípeta** o **normal**) o si lo hacen ambas.

Si la aceleración es positiva, la rapidez aumenta durante el proceso. Pero si es negativa, disminuye, hasta que el móvil llega a detenerse.

2. Movimientos rectilíneos

En los movimientos rectilíneos la dirección del movimiento no cambia, aunque puede hacerlo el sentido. Este curso solamente vas a ver los dos tipos de movimientos rectilíneos que ya conoces: uniforme (velocidad constante) y uniformemente acelerado (aceleración constante).

Otro movimiento rectilíneo muy importante es el movimiento vibratorio armónico, como puede ser el de un muelle que oscila, pero su descripción queda para la Física de 2º de Bachillerato.

Movimientos rectilíneos

En un movimiento rectilíneo, la dirección de su vector velocidad permanece constante, por lo que su trayectoria es una línea recta.

Composición de movimientos

Si un móvil M se mueve con respecto a un sistema de referencia que también se mueve con respecto a uno fijo ¿cómo se puede saber la velocidad de M con respecto al sistema fijo?

Fíjate en la cinta de imagen, que es de las que hay en los gimnasios para andar o correr. Si la pones a funcionar a 5 km/h (se mueve la cinta hacia atrás) y tú también te pones a andar a esa velocidad (hacia delante) ¿qué verá un observador fijo situado en el gimnasio?

El sentido común te indica que verá que tu posición no cambia, aunque ve que estás andando. La apreciación es obvia: si tu velocidad fuese mayor o menor que la de la cinta, ¡te caerías!

2.1 Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

El objetivo final al estudiar un movimiento es llegar a ser capaces de predecir la posición del móvil que nos interesa en cualquier instante, conociendo únicamente dos parámetros: la posición inicial y la velocidad con la que se desplaza.

Para obtener la ecuación del movimiento de un MRU puedes partir de la definición de velocidad media:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

donde x_0 y t_0 son la posición y el tiempo en el instante inicial. Como al medir el tiempo lo que se hace realmente es tomar intervalos del mismo, por simplicidad puedes tomar $t_0=0$ en todas las ecuaciones descritas en este tema.

Además, ya has visto que en un MRU la velocidad media siempre coincide con la instantánea, de modo que $v_m=v$ y por tanto:

$$v = \frac{x - x_0}{t} \Rightarrow x = x_0 + vt$$

que es la ecuación de la posición en un MRU.

Ecuaciones del MRU

$$x = x_0 + vt$$
$$v = v_0$$
$$a = 0$$

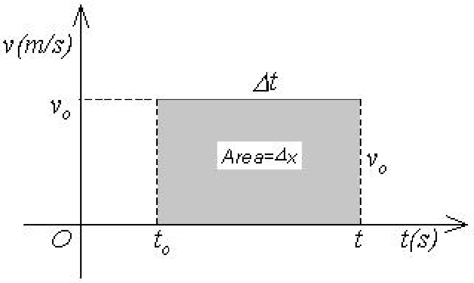
Gráficas de un movimiento rectilíneo uniforme

Las gráficas de un MRU tienen las siguientes características:

- La gráfica posición (x) frente al tiempo (t) es una recta oblicua, que pasa por el origen cuando la posición inicial es cero; si no es así, corta el eje de posiciones en el valor de la posición inicial. La pendiente de la recta es positiva si la velocidad es positiva y negativa en caso contrario.
- La gráfica velocidad (v) frente al tiempo (t) es siempre una recta horizontal, que corta el eje de velocidades en el valor de la velocidad del movimiento.
- Dado que no existe aceleración, ésta permanece con valor cero durante todo el movimiento.

Espacio recorrido y gráfica velocidad-tiempo

El área contenida bajo la gráfica que representa la velocidad (v) frente al tiempo (t) se corresponde con el espacio total recorrido durante el movimiento. Esta característica es válida para todo tipo de movimientos, no sólo para el rectilíneo uniforme.



2.2 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Como su propio nombre indica, en un MRUA la aceleración es constante, en módulo, dirección y sentido. Es decir, la velocidad aumenta o disminuye de forma constante en el tiempo.

Es frecuente encontrar movimientos con aceleración constante, al menos durante periodos de tiempo no muy grandes. Eso sí, hay uno especialmente importante: los movimientos verticales en caída libre. En ellos, la aceleración es de 9,8 m/s^2 hacia abajo. Es decir, un móvil en caída libre aumenta su velocidad en 9,8 metros por segundo en cada segundo de su movimiento.

Ecuaciones del MRUA

Dado que en un MRUA la velocidad varía con el tiempo, para describirlo necesitaremos, además de la posición $\mathbf{x_0}$, la velocidad $\mathbf{v_0}$ en el instante inicial y la aceleración **a** que actúa sobre el móvil.

Si partimos de la definición de aceleración media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

tomando de nuevo t_0=0 y como en un MRUA la aceleración permanece constante:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + at$$

que es la ecuación de la velocidad en un MRUA.

Para obtener la ecuación de la posición, podemos aprovecharnos del hecho que la velocidad media es constante en el cualquier intervalo, dado que la aceleración es constante. Entonces:

$$v_m = \frac{v_0 + v_f}{2} = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} = v_0 + \frac{1}{2}at$$

$$x = x_0 + vt = x_0 + v_m t = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Ecuaciones de un MRUA

$$x = x_0 + vt = x_0 + v_m t = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$a = a_0$$

Gráficas de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Las gráficas de un MRUA tienen las siguientes características:

- La gráfica posición (x) frente al tiempo (t) es una rama de parábola, que pasa por el origen cuando la posición inicial es cero; si no es así, corta el eje de posiciones en el valor de la posición inicial. La curva es cóncava si la aceleración es positiva y convexa en caso contrario.
- La gráfica velocidad (v) frente al tiempo (t) es una recta oblicua, que pasa por el origen cuando la velocidad inicial es cero; si no es así, corta el eje de velocidades en el valor de la velocidad inicial. La pendiente es positiva si la aceleración es positiva y negativa en caso contrario.
- La gráfica aceleración (a) frente al tiempo (t) es siempre una recta horizontal, que corta el eje de aceleraciones en el valor de la aceleración del movimiento.

La caída libre

En el caso particular de la caída libre, la aceleración es la debida a la gravedad (g) y las ecuaciones del MRUA quedan de la forma:

$$v = v_0 - gt$$

$$x = x_0 + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

Observa el signo negativo en las ecuaciones. Esto se debe a que el sistema de referencia tomado tiene como origen de coordenadas el suelo, y la dirección positiva del eje hacia arriba; en este sistema de referencia, como la gravedad siempre tiene el sentido hacia el centro de la tierra, toma un valor negativo, que queda reflejado en la ecuación.

2.3 Movimientos de dos móviles

Aunque muchas veces los problemas de cinemática se refieren al movimiento de un único cuerpo, no ocurre así siempre; resulta de particular interés el caso de dos móviles en movimiento simultáneo que se mueven en la misma recta.

La única precaución necesaria en este tipo de problemas es prestar especial atención en describir sus movimientos siempre referidos al mismo sistema de referencia, para obtener resultados coherentes. Su resolución es similar a los anteriormente tratados, mediante la resolución simultánea de las ecuaciones de todos los móviles afectados.

Algunas consideraciones generales a la hora de tratar problemas con varios móviles son:

- Las ecuaciones se aplican a cada movimiento por separado y hay que tener cuidado en diferenciar entre las variables de un movimiento y otro. Esto puede conseguirse añadiendo subíndices que los identifiquen.

- Aunque algunas variables serán diferentes para los dos movimientos, otras serán iguales. Deberemos identificar primero estas últimas, pues nos permitirán reducir el número de variables en el problema y hacer la solución mucho más fácil.

- En el caso en que algún movimiento sea la continuación de un primero, entonces la velocidad final y la posición final del primero serán la velocidad inicial y la posición inicial del segundo.

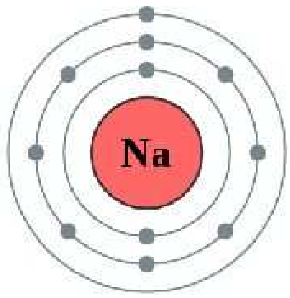
- Muchas veces la resolución gráfica de este tipo de problemas, representando en la misma gráfica los movimientos de todos ellos, permite una solución más rápida de los mismos.

No obstante, muchas veces lo más importante es entender bien los conceptos, pues puede ahorrarte mucho trabajo.

3. Movimiento circular uniforme

Los movimientos más habituales no son rectilíneos. No tienes mas que mirar a tu alrededor: a pesar de que la trayectoria recta es la más corta entre dos puntos, los automóviles se mueven por carreteras con curvas y con cambios de rasante, o bien se desvían para adelantar o detenerse; cuando un jugador de baloncesto lanza a canasta, el balón sigue una trayectoria parabólica; las ruedas de una bicicleta giran, lo mismo que hace la Luna alrededor de la Tierra, y también hay casos en los que las trayectorias son muy complejas, como sucede en cualquier montaña rusa. O situaciones en las que el movimiento es aleatorio, sin seguir ningún patrón geométrico, tal y como sucede en las partículas de un gas.





El caso de mayor interés y particularmente sencillo, en el que el móvil gira con rapidez constante (en intervalos de tiempo iguales recorre siempre el mismo espacio) y siempre a la misma distancia del centro de giro, es decir, con radio de giro fijo. El movimiento se llama **circular uniforme**, y se suele indicar como **mcu**.

Seguramente habrás pensado en las agujas de un reloj como caso característico, pero tienes casos tan cercanos como los taladros, las lavadoras o las ruedas de coches, bicicletas o de cualquier otro tipo de móvil. También se utiliza a escala microscópica en el modelo de Bohr para describir el movimiento de los electrones alrededor del núcleo de los átomos, como ya has visto, y a escala planetaria en relación con el giro de la Luna alrededor de la Tierra y de los planetas alrededor del Sol.

En la pista de pruebas

Hay un caso de pista circular particularmente llamativo en Nardó, localidad situada en el tacón de la bota que forma la península italiana. Se trata de una pista de pruebas para vehículos en la que se han batido récords de velocidad, superándose los 400 km/h.

Las imágenes vía satélite que facilita la NASA resultan espectaculares. Fíjate en que la pista se observa con toda nitidez gracias a sus 12,5 km de longitud y a que sus muros exteriores tienen 3 metros de altura.

La trayectoria seguida por un móvil que lleva mcu es circular, y mantiene una distancia constante al eje de giro, que es precisamente el radio de la circunferencia que traza al moverse.

Puede que te plantees preguntas tales como el radio que tiene la pista, para hacerte una idea de su tamaño, o el tiempo que le cuesta a un automóvil dar una vuelta completa si circula a 300 km/h.

A pesar de no haber entrado todavía en el mcu, puedes responder esas cuestiones utilizando los conocimientos que ya tienes.

En primer lugar, como la longitud de la circunferencia es 2πr y sabes que es 12,5 km, resulta que r es de casi 2 km (1989,4 m exactamente).

En cuanto al tiempo que necesita para dar una vuelta, puedes hacer una sencilla proporción para determinar que en 150 s da una vuelta completa. Al fin y al cabo, en cuanto a espacio recorrido ¿qué más da la forma de la trayectoria? Por tanto, debes razonar exactamente igual que lo hacías en el movimiento rectilíneo.

3.1 La posición de los móviles que giran

¿Cómo puedes saber dónde se encuentra en un momento concreto un móvil que lleva mcu? Si sabes situar un punto en el plano, la tarea es sencilla. Recuerda que el vector de posición se puede expresar en función de sus componentes cartesianas.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

En este caso, el móvil se mantiene siempre a una distancia r del centro de giro, precisamente el radio de la circunferencia que traza. Pero habitualmente interesa situar la posición del móvil sobre la trayectoria seguida, y resulta más sencillo indicar el ángulo girado (ϕ).

En geometría se toma como ángulo cero la posición (r,0); es decir, sobre el eje x, a r metros del centro.

Utilizando la trigonometría elemental puedes expresar las coordenadas cartesianas en función del radio y del ángulo ϕ con respecto al eje x, llamadas coordenadas polares.

Componentes del vector de posición en coordenadas polares

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\,sen\varphi$$

Coordenadas polares y coordenadas cartesianas

También puedes expresar las coordenadas polares en función de las cartesianas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Vas a utilizar expresiones de este tipo no solamente en el movimiento circular uniforme, sino también al estudiar lanzamientos en el plano y al trabajar con fuerzas en planos inclinados.

Medida de los ángulos

Acabas de ver que los ángulos se miden de dos formas, en grados o en radianes, de manera que una vuelta tiene 360º ó 2π radianes.

Recuerda que la longitud de la circunferencia es 2πr, por lo que el radio está contenido 2π veces en la vuelta completa. Y como el **radián** es el ángulo cuyo arco mide exactamente el radio, en una vuelta completa hay 2π radianes.

3.2 Velocidad angular

La velocidad de giro se puede expresar en unidades diferentes: vueltas por minuto (**rpm**, revoluciones por minuto) o por segundo (**rps**), grados por minuto o por segundo, y radianes por segundo (**rad/s**), que es la unidad del Sistema Internacional.

Esta magnitud se llama velocidad angular, y se representa por **ω**. Se calcula como **ω=ϕ/t**, donde **ϕ** es el ángulo girado en un tiempo t.

Seguramente, te habrás fijado más de una vez en lo hábiles que son los jugadores de baloncesto haciendo girar a gran velocidad un balón sobre su dedo: consiguen que la ω sea grande, y así el balón permanece girando en equilibrio.

Las ecuaciones del mcu son formalmente iguales a las del mru, pero indicando magnitudes angulares en lugar de lineales. Se denomina ϕ_0 al ángulo inicial que ocupa el móvil respecto del ángulo cero (el eje de la X).

Ecuaciones del movimiento circular uniforme

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$
$$\omega = \omega_0$$
$$\vec{r} = r\cos(\omega t + \varphi_0)\vec{i} + r\,sen(\omega t + \varphi_0)\vec{j}$$

3.3 Magnitudes lineales y angulares

Hay un caso de mcu que tiene un interés especial: se trata de aquellos mecanismos en los que el mcu se transforma en movimiento lineal. Es decir, automóviles, tractores, bicicletas, etcétera, en los que el giro de las ruedas apoyadas sobre el suelo hace que el móvil avance a retroceda.

¿Cómo puedes determinar la velocidad lineal del móvil si sabes la velocidad angular de sus ruedas? ¿Y el espacio recorrido a partir del ángulo girado? Para ello, es necesario establecer la relación existente entre magnitudes lineales y angulares.

Esta relación que acabas de comprobar se puede escribir como **s=ϕr**. Pero como el movimiento es circular uniforme, al dividir por el tiempo los dos lados de la igualdad tenemos que:

$$s = \varphi r \qquad \frac{s}{t} = \frac{\varphi}{t} r \qquad v = \omega r$$

Fíjate en que la velocidad lineal v es igual a la velocidad angular ω por el radio r.

Relación entre las magnitudes lineales y angulares

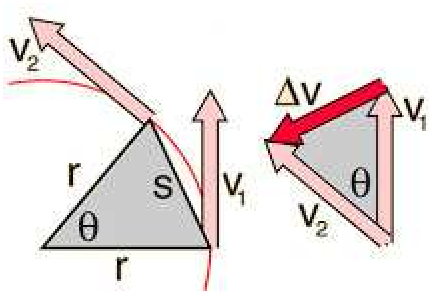
Las magnitudes lineales se calculan multiplicando la magnitud angular correspondiente (con los ángulos medidos en radianes) por el radio.

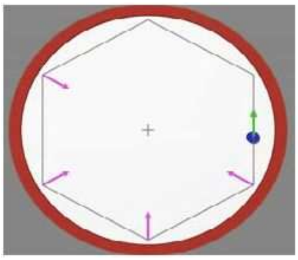
$$s = \varphi r \qquad\qquad v = \omega r$$

3.4 Aceleración centrípeta

Ya sabes que cuando la velocidad cambia de dirección hay aceleración, porque se produce un cambio en la velocidad. Esa aceleración recibe el nombre de centrípeta y la fuerza que la produce, provocando el cambio de dirección del móvil, se llama fuerza centrípeta.

Si te fijas en la imagen, cuando el móvil se mueve y la velocidad pasa del vector v1 al vector v2, la diferencia entre esos dos vectores está en la dirección del centro de curvatura de la trayectoria seguida por el móvil (el radio si es circular). Como el vector la aceleración mide la variación del vector velocidad por unidad de tiempo, su dirección es precisamente la del centro de curvatura: por esa razón se llama centrípeta.





En el vídeo puedes ver lo que sucede cuando la trayectoria del móvil es poligonal y tiende a un círculo: en todos los casos la dirección de la aceleración es hacia el centro de la figura geométrica, tendiendo al centro del círculo conforme aumenta el número de lados.

¿De qué factores depende la aceleración centrípeta?

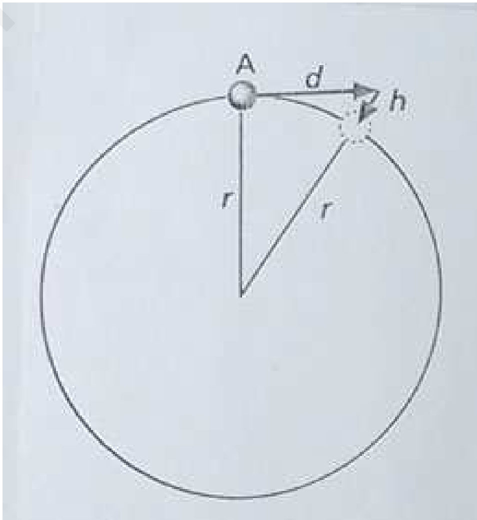
Cuanto más deprisa se mueve el móvil, más varía la dirección del vector velocidad por unidad de tiempo. Lo mismo sucede cuanto más cerrada es la curva que describe. Es decir, la aceleración es mayor cuanto mayor sea la velocidad v y menor el radio de curvatura r. Es decir, la aceleración depende de la rapidez del giro y del radio de curvatura, pero ¿cuál es la relación existente entre esas magnitudes?

Fíjate en la imagen. Vamos a suponer que el movimiento de giro desde el punto A es una sucesión de un movimiento tangente a la trayectoria a velocidad constante recorriendo d metros, seguido de otro acelerado en la dirección del centro de curvatura (el radio en movimientos circulares), recorriendo h metros. El tiempo invertido en ambos movimientos que en realidad son simultáneos es de Δt segundos. Las ecuaciones de los dos movimientos son:

$$d = v\,\Delta t \qquad h = \tfrac{1}{2}\,a_c\,(\Delta t)^2$$

Eliminando Δt en las ecuaciones anteriores resulta que:

$$a_c = \frac{v^2 2h}{d^2}$$



Observando la figura, puedes ver que $(r+h)^2 = r^2 + d^2$ (aplicando el teorema de Pitágoras) y desarrollando y despejando resulta que $d^2 = h^2 + 2rh$. Pero si consideramos un intervalo de tiempo Δt muy pequeño para que el movimiento se aproxime al real, h será mucho menor que el radio r, por lo que h^2 será muy pequeño frente a 2rh y se puede despreciar. Por tanto, es posible aproximar d^2 a 2rh. Esta aproximación será tanto mejor cuanto menor sea Δt, y cuando Δt tienda a cero se puede igualar d^2 a 2rh. Sustituyendo y despejando:

$$a_c = \frac{v^2 2h}{d^2} = \frac{v^2 2h}{2rh} = \frac{v^2}{r}$$

Aceleración centrípeta

Es un vector dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria y tiene como módulo $\mathbf{v^2/r}$ (la rapidez de giro al cuadrado dividida por el radio de curvatura).

3.5 Movimientos periódicos

El movimiento circular uniforme es un caso particular de movimiento periódico, que se caracteriza porque los móviles ocupan la misma posición en intervalos de tiempo iguales.

Fíjate en las aspas de los molinos de viento. Cuando giran con mcu, al cabo de un tiempo determinado vuelven a pasar por la misma posición: se trata de un movimiento periódico. Ese tiempo es menor cuanto más deprisa giren.

Lo mismo sucede con la bola que cuelga del muelle y oscila de forma periódica. Su movimiento es muy característico, y recibe el nombre de movimiento armónico simple.

La frecuencia y el periodo

No tienes mas que pensar en un carrusel que da vueltas para que resulte evidente que cuanto más deprisa gira, más vueltas da por unidad de tiempo y menos tiempo le cuesta dar una vuelta.

Se definen dos magnitudes que caracterizan los movimientos periódicos:

- la frecuencia **f**, que es el número de veces que se repite el ciclo completo de movimiento por unidad de tiempo (en el mcu, las vueltas giradas por segundo). Se mide en ciclos por segundo, unidad llamada hertzio, Hz.

- el periodo **T**, que es el tiempo necesario para que se realice un ciclo completo (en el mcu, para dar una vuelta). Se mide en segundos (s).

¿Cómo están relacionados frecuencia y periodo?

Si la frecuencia de un mcu es de 2 Hz, significa que da dos vueltas en cada segundo. Por tanto, le cuesta medio segundo dar una vuelta, por lo que el periodo es de 0,5 s. Si te fijas, observarás que 0,5 es el inverso de 2.

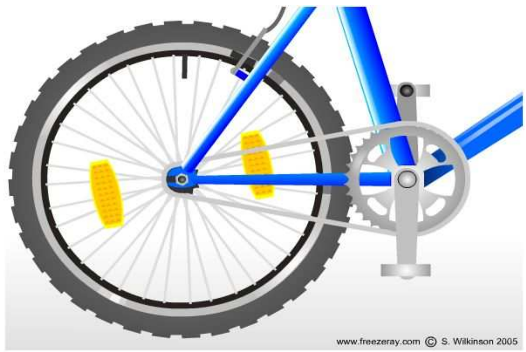
Relación entre la frecuencia y el periodo

La frecuencia y el periodo son dos magnitudes inversas, relacionadas como **f=1/T** ó **T=1/f**.

3.6 Aplicaciones

Bicicletas

En las bicicletas se ve muy bien cómo el movimiento circular de las ruedas se transforma en desplazamiento lineal de la máquina. El ciclista pedalea y el movimiento circular de los pedales hace girar el plato, transmitiéndose el giro al piñón mediante una cadena, con lo que se consigue que gire la rueda trasera.



Tanto el plato como el piñón son dos ruedas dentadas, de forma que según cuál sea la relación de dientes entre ambas se modifica la relación de vueltas giradas por las ruedas por cada giro completo de los pedales. Habitualmente hay más de un plato y de un piñón: con el cambio de marchas se pasa de uno a otro.

Observa en la simulación cómo al pulsar sobre el pedal y, sin soltarlo, hacer girar los pedales una vuelta, la rueda trasera de la bicicleta da tres vueltas (es decir, la relación es de 3 a 1), con lo que con un giro completo de pedales -dos pedaladas, una con cada pierna- se avanza el equivalente a tres giros de las ruedas.

Esa relación depende del número de dientes del plato y del piñón unidos por la cadena. En el caso de la simulación que acabas de ver, el plato tiene el triple de dientes que el piñón. ¡Reflexiona!

Además, hay que tener en cuenta que cuanto mayor es el tamaño de las ruedas, la bicicleta avanza más por cada giro que realizan cuando el ciclista pedalea.

Satélites geoestacionarios

Los satélites que se envían al espacio tienen funciones de toma de datos y fotografías con fines muy diversos, desde meteorológicos hasta militares, y también como transmisores de señales en telecomunicaciones.

Se encuentran orbitando alrededor de la Tierra a una distancia fija, manteniendo un movimiento circular uniforme. Algunos de ellos siempre se encuentran situados sobre el mismo punto de la Tierra, y se llaman geoestacionarios, mientras que otros pasan varias veces al día sobre el mismo sitio.

El más conocido de los satélites geoestacionarios es el Meteosat, que orbita a 35800 km situado sobre el cruce del meridiano 0 de Greenwich, que atraviesa los Pirineos, y la línea ecuatorial de la Tierra. Desde él se toman imágenes cada media hora, en las que se ve muy bien España, y son las fotografías que podemos ver en las predicciones del tiempo.

Aunque su velocidad angular es muy pequeña (1 vuelta al día, que son $7{,}3.10^{-5}$ rad/s), se mueve realmente muy deprisa, ya que su radio de giro es de 42200 km (6400 km del radio de la Tierra más 35800 km de altura de giro sobre la Tierra), con lo que su velocidad es de 3080,6 m/s, que equivalen a ¡11090 km/h!

Son suficientes tres satélites geoestacionarios, colocados formando un ángulo de 120 grados cada uno con respecto a los otros dos, para cubrir todo el globo y asegurar un sistema de comunicaciones mundial. Dibuja un triángulo equilátero y una circunferencia centrada dentro de él, que representa a la Tierra, de forma que en los vértices están los tres satélites de comunicaciones. Si un satélite recibe información que quiere enviar a las antípodas, no puede transmitirla directamente, ya que no "ve" en línea recta el punto de recepción. Por esa razón la pasa previamente a uno de los otros dos satélites, que es el que envía la señal a tierra. No tienes mas que hacer el dibujo para comprobarlo.

4. Composición de movimientos

En tu vida ordinaria observas gran cantidad de movimientos y muchos de ellos se producen en un plano. El salto de un niño, el lanzamiento de un objeto, una barca en un río, un avión en el aire, cualquier balón o pelota que se hace alcanzar un objetivo y un proyectil, son ejemplos de movimientos en dos dimensiones (el plano).

El movimiento más importante que vas a estudiar es el movimiento parabólico, que se produce cuando un objeto se mueve en las proximidades de la superficie terrestre con la aceleración de la gravedad. Grandes pensadores y científicos, como Aristóteles o Galileo Galilei, se ocuparon de este movimiento y escribieron tratados sobre los problemas de caída y tiro.

Ya has visto que la posición de un móvil depende del sistema de referencia elegido. El caso estudiado es la caída de una pelota desde lo alto de un mástil de un barco que avanza con movimiento uniforme y que impacta en la base del mástil: según el sistema de referencia la trayectoria es rectilínea o parabólica.

Galileo(1564-1642) explicó, mediante el estudio del movimiento de proyectiles, por qué la pelota cae en la base del mástil y no se queda atrás, como se creía hasta entonces: el movimiento de la pelota para el observador que se mueve con el velero es de caída libre, sin embargo para la observadora que está en la orilla es un movimiento parabólico (la trayectoria es una parábola), que puede considerarse como la superposición de un movimiento rectilíneo uniforme sobre la horizontal y de un movimiento de caída libre en la dirección vertical.

Principio de independencia de Galileo

Cuando un cuerpo está sometido a dos movimientos simultáneos, su cambio de posición es independiente del hecho de que los dos movimientos se produzcan sucesiva o simultáneamente.

De acuerdo con el Principio de Independencia de Galileo, el problema del movimiento en dos dimensiones se reduce a dos problemas de movimientos rectilíneos simultáneos unidos por la variable tiempo.

El principio de superposición

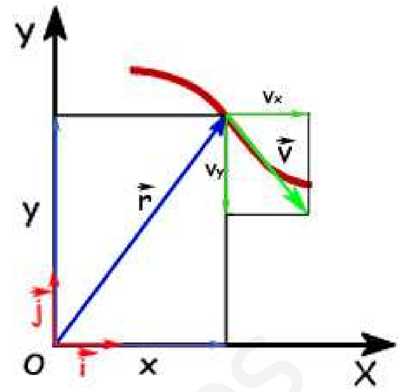
Existen muchas situaciones (cruzar un río, lanzar un balón a canasta, lanzar una jabalina, chutar a puerta, realizar un salto, disparar un proyectil), que pueden explicarse como combinación de varios movimientos. Todos estos casos se resuelven aplicando el Principio de Superposición, una consecuencia del Principio de Independencia de Galileo.

Principio de superposición

Cuando un cuerpo está sometido a varios movimientos independientes simultáneamente, el movimiento total se obtiene sumando vectorialmente dichos movimientos parciales.

Ecuaciones vectoriales del movimiento

La posición, la velocidad y la aceleración del movimiento resultante es la suma de las posiciones, velocidades y aceleraciones de cada uno de los movimientos independientes.



En dos dimensiones son dos las coordenadas de posición que varían, ya que la posición del móvil queda definida por el vector:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

donde pueden varias las posiciones en los dos ejes, x e y.

La posición, la velocidad y la aceleración están representadas por vectores y las componentes de cada vector en una dirección dada (x o y), cumplen las ecuaciones estudiadas en el caso del movimiento rectilíneo, uniforme o acelerado.

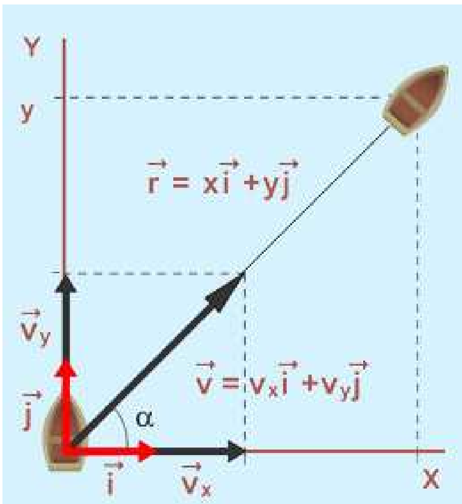
$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

4.1 Movimientos en el plano con velocidad constante

Movimientos en el plano con velocidad constante

Una lancha que debe cruzar un río o un avión que encuentra vientos laterales son ejemplos de movimientos que se producen con velocidad constante en el plano.



En estos casos se conoce la velocidad de un cuerpo con respecto a un sistema de referencia móvil y la velocidad de este sistema de referencia con relación a otro fijo. Por ejemplo, una lancha en un río se está moviendo con respecto al agua y el agua se está moviendo con respecto a un observador en la orilla.

La ecuación vectorial de la velocidad vendrá dada por:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y j$$

donde v_x y v_y son constantes. Su módulo será:

$$|v| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Si consideras que en el instante inicial (t = 0) la posición del móvil es:

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_o\vec{j}$$

La ecuación del movimiento, si tienes en cuenta que el movimiento en el eje X y el movimiento en el eje Y son uniformes, podrás escribirla:

$$\vec{r} = (x\vec{i} + y\vec{j}) = (x_0 + v_x t)\vec{i} + (y_0 + v_y t)\vec{j}$$

o agrupando términos:

$$\vec{r} = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j}) + (v_x t\vec{i} + v_y t\vec{j}) = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j}) + (v_x\vec{i} + v_y\vec{j})t = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

Si la posición inicial es $\vec{r}_0 = 0$, nos queda:

$$\vec{r} = v_x t\vec{i} + v_y t\vec{j}$$

y en componentes:

$$x = v_x t \qquad\qquad y = v_y t$$

5. Movimientos de proyectiles

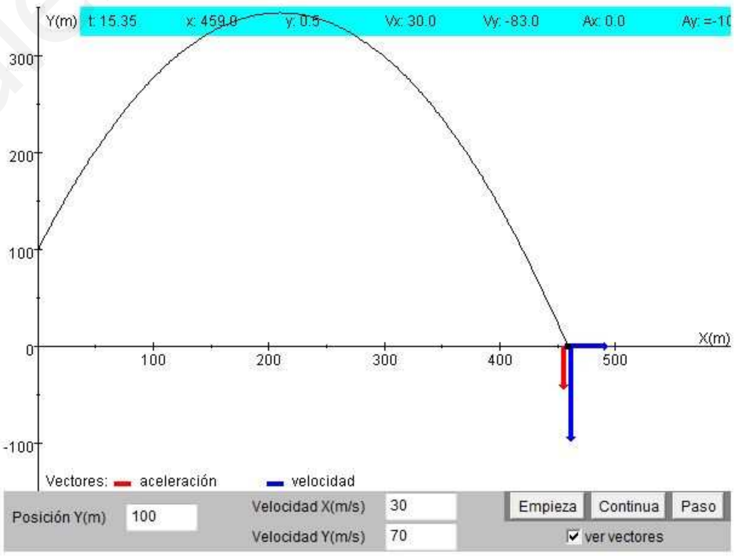
Un proyectil es un cuerpo que se mueve en las proximidades de la superficie terrestre, donde sabes que todos los cuerpos caen con una aceleración constante g, la aceleración de la gravedad.

Galileo observó que la trayectoria de un proyectil es una parábola y, por tanto, aunque se descomponga en dos movimientos para estudiarlo, el movimiento real es parabólico. Precisamente formuló su Principio de Independencia estudiando el movimiento de proyectiles.

En la simulación se representa el vector de posición de un proyectil cada segundo. Fíjate en que este vector siempre está en el plano de la figura.

Se representa también el vector desplazamiento en un segundo. La velocidad media en ese segundo es un vector que coincide con el desplazamiento.

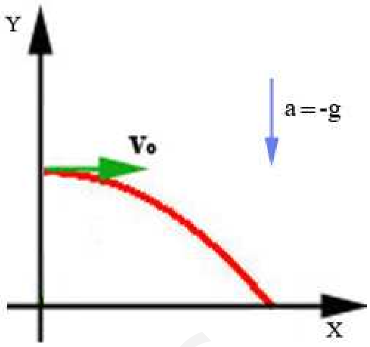
En la simulación siguiente puedes ver cómo se modifican las velocidades horizontal y vertical con la opción ver vectores activada. En la parte superior se indica como varían la posición, la velocidad y la aceleración.



En el movimiento de proyectiles

De acuerdo con el Principio de Independencia, puedes considerar el movimiento del proyectil como una combinación de un movimiento horizontal uniforme y de un movimiento vertical uniformemente acelerado.

5.1 Lanzamiento horizontal



Un caso particular de lanzamiento de proyectiles es el que se produce cuando la velocidad inicial $\mathbf{v_o}$ sólo tiene componente en el eje X:

$$\vec{v}_0 = v_{ox}\vec{i} = v_o\vec{i}$$

La velocidad en cualquier instante, dado que la aceleración es la de la gravedad, $a_y = -g$, será:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = \vec{v}_0 + a_y t\vec{j} = v_0\vec{i} - gt\vec{j}$$

En este caso la ecuación de la posición es:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + v_0 t)\vec{i} + (y_0 - \frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$$

Puedes encontrar la ecuación de la trayectoria eliminando el tiempo entre las ecuaciones (componentes del vector de posición):

$$x = x_0 + v_0 t$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

y, considerando $x_0 = 0$, queda:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2$$

que es la ecuación de segundo grado que representa la ecuación de una parábola.

5.2 Lanzamiento oblicuo

También puedes aplicar el Principio de Superposición en el lanzamiento de un proyectil con una velocidad inicial que forma un ángulo α con la horizontal.

Velocidad en el lanzamiento oblicuo

Si consideras que en el instante inicial (t = 0) la posición del móvil y su velocidad son:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j}$$

Si tienes en cuenta que se suele disponer del módulo de la velocidad inicial y del ángulo que forma con la horizontal:

$$\vec{v}_0 = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j} = v_0\cos\alpha\,\vec{i} + v_0 sen\alpha\,\vec{j}$$

Puedes obtener la velocidad en cualquier instante, recordando el movimiento rectilíneo y teniendo en cuenta que la aceleración es la de la gravedad (-g al ir hacia abajo):

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_0\cos\alpha\,\vec{i} + (v_0 sen\alpha - gt)\,\vec{j}$$

Posición en el lanzamiento oblicuo

Teniendo en cuenta que la aceleración es -g, la ecuación de la posición es:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + v_0 t\cos\alpha)\vec{i} + (y_0 + v_0 t sen\alpha - \frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$$

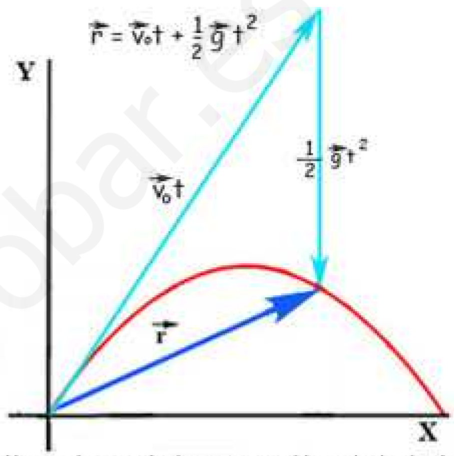
Agrupando los términos en forma vectorial:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Fíjate en que puedes considerar que el cuerpo cambia de posición debido a dos términos: el primero, la velocidad inicial, y el segundo, la acción de la gravedad.

Esto quiere decir que, si no hubiera aceleración gravitatoria, el cuerpo continuaría moviéndose a lo largo de una trayectoria recta en la dirección del vector velocidad inicial.

Por tanto, la distancia vertical, que el cuerpo "cae " desde la línea de la trayectoria recta, es la misma distancia que recorrería un cuerpo que cae libremente durante el mismo tiempo.



Vector de posición de un proyectil lanzado desde el origen con velocidad inicial $\vec{v}_0$

Ecuación de la trayectoria

Puedes escribir la ecuación de la trayectoria despejando el tiempo t entre las ecuaciones de las dos componentes del vector de posición:

$$x = x_0 + v_0 t\cos\alpha$$

$$y = y_0 + v_0 t sen\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Considerando que x_0=0, resulta que:

$$y = y_0 + \tan\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

que es una ecuación de segundo grado cuya representación gráfica es una parábola. Es decir, el movimiento de los proyectiles es parabólico.

¿Dónde hay que situar el origen del sistema de referencia?

De forma general, en la posición más baja y más a la izquierda que pueda ocupar el móvil, para que todas las posiciones verticales y horizontales sean positivas, de acuerdo con los ejes usados en Matemáticas.

Lanzamientos vertical, horizontal y oblicuo

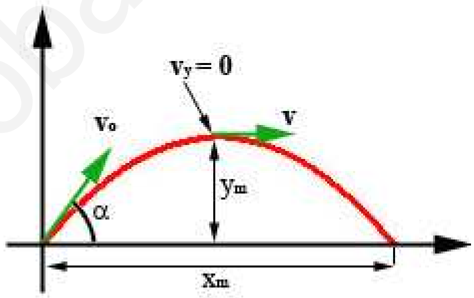
No debes pensar que son tres situaciones diferentes, que se resuelven con ecuaciones y planteamientos distintos: el caso general es el del lanzamiento oblicuo, que se reduce al vertical si el ángulo de lanzamiento es de 90º (hacia arriba) o de -90º (hacia abajo), y al horizontal si el ángulo es de 0º (hacia la derecha) o de 180º (hacia la izquierda).

5.3 Magnitudes de interés

Al analizar el lanzamiento oblicuo de un proyectil, resulta de gran interés conocer las siguientes magnitudes:

- el tiempo de vuelo, t_v.
- la altura máxima que alcanza, y_m,
- el ángulo de lanzamiento para un alcance horizontal máximo, x_m.

Tiempo de vuelo



Si eliges el origen del sistema de referencia tal que $x_o = 0$ e $y_o = 0$, puedes calcular el tiempo que el proyectil permanece en el aire hasta llegar al suelo, que se suele llamar tiempo de vuelo, t_v.

Como la trayectoria es simétrica puedes calcular el tiempo necesario para llegar al punto más alto y multiplicarlo por dos.

En este punto la componente vertical de la velocidad se anula, $v_y = 0$, y despejando t queda:

$$v_y = v_0 sen\alpha - gt = 0$$

$$t_v = \frac{2v_0 sen\alpha}{g}$$

Altura máxima

Como acabas de ver, el tiempo necesario para que el proyectil llegue al punto más alto es ($v_0$sen α/g) y el valor de la altura máxima lo calcularás sustituyendo ese valor en la ecuación de la posición y:

$$y_m = v_0 t sen\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = v_0\frac{v_0 sen\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sen\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 sen^2\alpha}{2g}$$

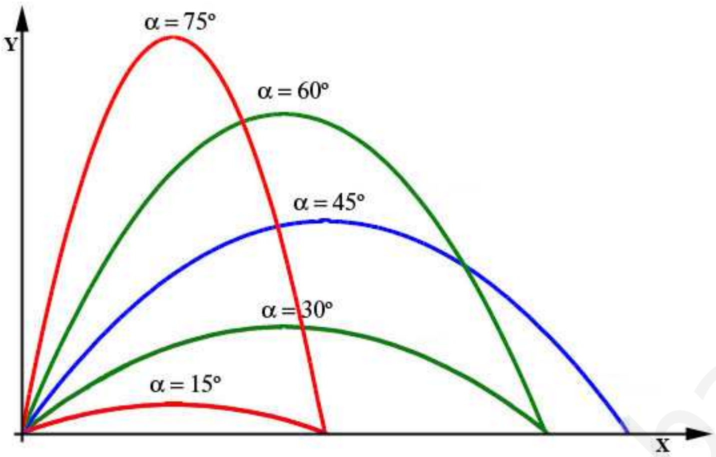
Alcance máximo

Como el tiempo de vuelo es el necesario para llegar al suelo, si sustituyes ese tiempo en la ecuación de la posición x obtienes que:

$$x_m = \frac{v_0^2 sen2\alpha}{g}$$

El valor máximo de alcance se da cuando sen $2\alpha=1$, igualdad que se cumple para un ángulo de 45º.

Observa también que la altura máxima se alcanza en el lanzamiento vertical.



Fórmulas en los lanzamientos

No hay que memorizar las fórmulas anteriores, ya que si en una situación dada hay que determinar cualquiera de ellas se calcula sustituyendo en las ecuaciones generales del movimiento de que se trate.