CÁLCULO VECTORIAL

1.- MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES.

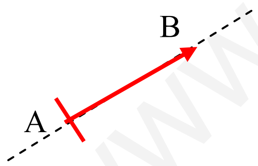
Se llama **magnitud física** a toda propiedad de los cuerpos que se puede medir, como pueden ser la masa, el volumen, el tiempo, la velocidad, etc. Las magnitudes físicas pueden ser escalares y vectoriales.

Magnitudes escalares: quedan perfectamente determinadas por un número y una unidad. Ejemplos: la masa, el volumen, el tiempo, la temperatura, etc.

Magnitudes vectoriales: para determinarlas además hay que dar una dirección y un sentido. Se representan mediante vectores. Ejemplos: la velocidad, la fuerza, etc.

2.- VECTORES.

Un vector es un segmento orientado.



A: origen , B: extremo

Se representan como $\vec{AB}$, o bien como $\vec{V}$

Los elementos de un vector son:

<u>Origen</u>: punto de aplicación (A).

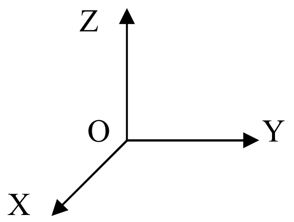
<u>Módulo</u>: representa el valor numérico de la magnitud, y viene indicado a escala por la longitud del vector. Es siempre positivo. Se representa como $|\vec{AB}|$, $|\vec{V}|$, V

<u>Dirección</u>: es la de la recta que contiene al vector, llamada recta de apoyo o línea de acción.

<u>Sentido</u>: indicado por la punta de flecha de su extremo.

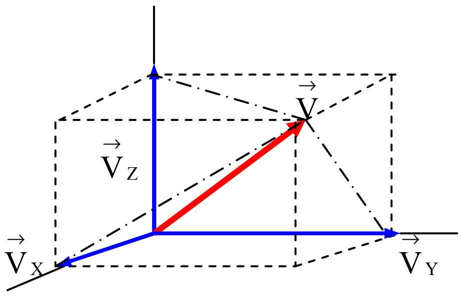
COMPONENTES VECTORIALES DE UN VECTOR.

Para situar un vector en el espacio es necesario tomar un sistema de referencia. Tomaremos el formado por los ejes cartesianos OX, OY, OZ, perpendiculares entre sí.



Las puntas de flecha indican el sentido que arbitrariamente se toma como positivo.

Se llaman **componentes vectoriales** o vectores componentes de un vector $\vec{V}$, a sus proyecciones orientadas sobre los ejes de coordenadas.



$\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$, $\vec{V}_Z$ son las componentes vectoriales del vector $\vec{V}$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_X + \vec{V}_Y + \vec{V}_Z}$$

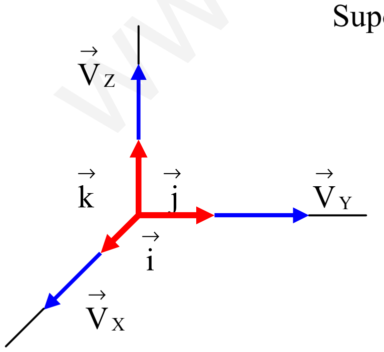
VECTORES UNITARIOS FUNDAMENTALES. COMPONENTES ESCALARES.

Un vector unitario o versor es un vector de módulo la unidad.

Todo vector se puede poner como $\boxed{\vec{V} = |\vec{V}| \times \vec{u}}$

siendo $\vec{u}$ un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{V}$.

Se llaman **vectores unitarios fundamentales** ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) a los vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados y sentido positivo.



Supongamos un vector de componentes vectoriales $\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$, $\vec{V}_Z$

$$\vec{V}_X = Vx \,.\, \vec{i} \quad , \quad \vec{V}_Y = Vy \,.\, \vec{j} \quad , \quad \vec{V}_Z = Vz \,.\, \vec{k}$$

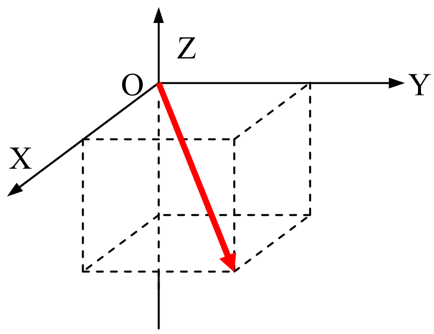
Por lo que : $\boxed{\vec{V} = Vx \,.\, \vec{i} + Vy \,.\, \vec{j} + Vz \,.\, \vec{k}}$

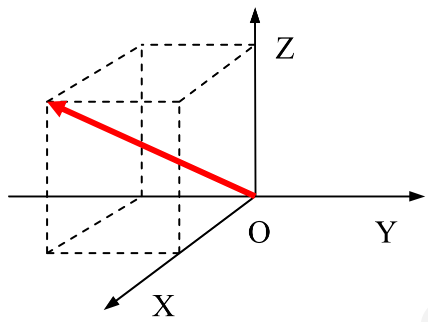
o bien $\vec{V} = (Vx , Vy , Vz)$

Los escalares Vx, Vy, Vz se llaman **componentes escalares** del vector $\vec{V}$. En valor absoluto coinciden con el módulo de las componentes vectoriales, pero están afectadas de un signo + o -, según el sentido de las componentes.

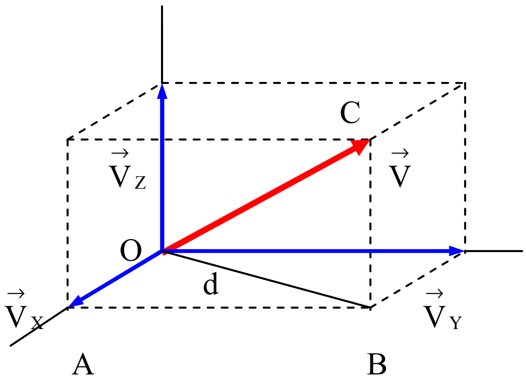
Ejemplos:

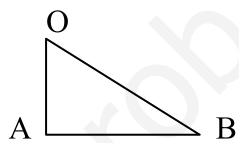
$\vec{A} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$ $\qquad\qquad$ $\vec{B} = 3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$



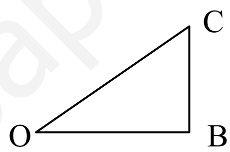


MÓDULO DE UN VECTOR.





$$d^2 = V_X^2 + V_Y^2$$

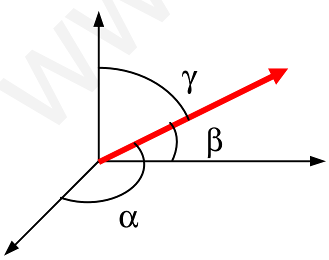


$$\left|\vec{V}\right|^2 = d^2 + V_Z^2$$

por lo que $\left|\vec{V}\right|^2 = V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2$, de donde: $\boxed{\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}}$

COSENOS DIRECTORES.

La dirección y el sentido de un vector quedan determinados por los **cosenos directores**, que son los cosenos de los ángulos que forma el vector con los ejes cartesianos:



$$\cos\alpha = \frac{V_X}{V} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{V_Y}{V} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{V_Z}{V}$$

$$\boxed{Vx = V.\cos\alpha} \quad \boxed{Vy = V.\cos\beta} \quad \boxed{Vz = V.\cos\gamma}$$

como $V^2 = V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2$, se deduce:

$$V^2 = V^2.\cos^2\alpha + V^2.\cos^2\beta + V^2.\cos^2\gamma \quad ; \quad V^2 = V^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

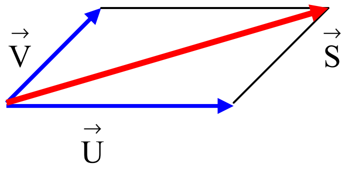
$$\boxed{1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

3. OPERACIONES CON VECTORES.

3.1. SUMA DE VECTORES

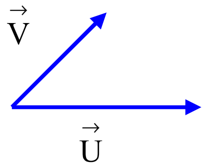
- **<u>Gráficamente</u>**: Se puede hallar de dos formas:

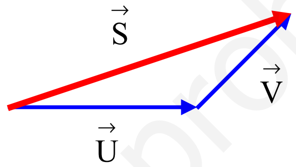
- <u>Regla del paralelogramo</u>: el vector suma $\vec{S}$ es la diagonal del paralelogramo formado por los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$.



$$\vec{S} = \vec{U} + \vec{V}$$

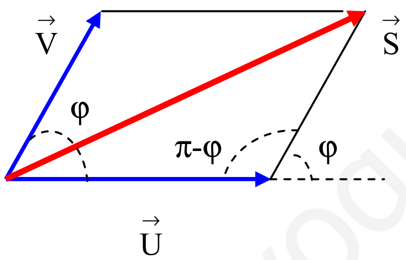
- <u>Regla del polígono</u>: Dados dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$, el vector suma $\vec{S}$, es un vector que tiene como origen, el origen de $\vec{U}$ y como extremo, el extremo de un vector equipolente a $\vec{V}$ (mismo módulo, dirección paralela y mismo sentido) con origen en el extremo de $\vec{U}$.





$$\vec{S} = \vec{U} + \vec{V}$$

Cálculo del módulo:



Por el teorema del coseno:

$$S^2 = U^2 + V^2 - 2.U.V.\cos(\pi-\varphi)$$

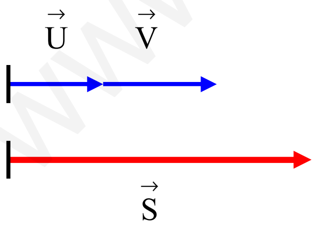
y como $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$

$$S^2 = U^2 + V^2 + 2.U.V.\cos\varphi$$

$$\boxed{S = \sqrt{U^2 + V^2 + 2.U.V.\cos\alpha}}$$

<u>Casos particulares</u>:

1) <u>Vectores con la misma dirección y sentido</u>:

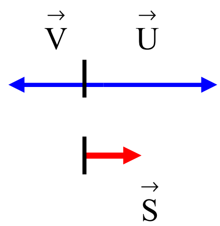


$\varphi = 0^{o}$, $\cos\varphi = 1$

$$S^2 = U^2 + V^2 + 2.U.V.\cos\varphi = U^2 + V^2 + 2.U.V$$

$$S^2 = (U + V)^2 \qquad \boxed{S = U + V}$$

2) <u>Vectores con la misma dirección pero sentido contrario</u>:

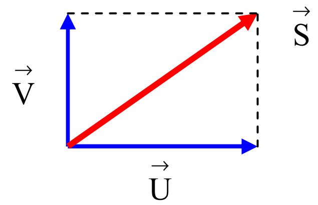


$\varphi = 180^{o}$, $\cos\varphi = -1$

$$S^2 = U^2 + V^2 + 2.U.V.\cos\varphi = U^2 + V^2 - 2.U.V$$

$$S^2 = (U - V)^2 \qquad \boxed{S = U - V}$$

3) <u>Vectores perpendiculares</u>:



$\varphi = 90^o \quad , \quad \cos\varphi = 0$

$$S^2 = U^2 + V^2 + 2.U.V.\cos\varphi = U^2 + V^2$$

$$\boxed{S = \sqrt{U^2 + V^2}}$$

- **Analíticamente (en función de las componentes cartesianas)**. El vector suma es un vector cuyas componentes son la suma de las componentes.

$$\vec{U} = Ux\,.\,\vec{i} + Uy\,.\,\vec{j} + Uz\,.\,\vec{k} \qquad , \qquad \vec{V} = Vx\,.\,\vec{i} + Vy\,.\,\vec{j} + Vz\,.\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{S} = \vec{U} + \vec{V} = (\,Ux + Vx)\,.\,\vec{i} + (Uy + Vy)\,.\,\vec{j} + (\,Uz + Vz\,).\,\vec{k}}$$

<u>Ejemplo:</u>

Dados los vectores $\vec{A} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$, la suma vectorial

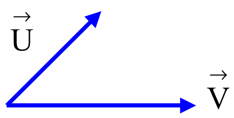
$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (\,2 + 4\,)\,\vec{i} + (-\,3 + 2\,)\,\vec{j} + (1 + 5\,)\,\vec{k} = 6\,\vec{i} - \vec{j} + 6\,\vec{k}$$

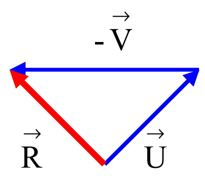
3.2. DIFERENCIA DE VECTORES.

- **Gráficamente**:

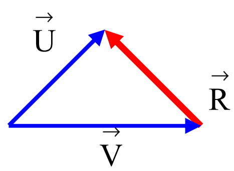
- Para restar dos vectores, se suma al minuendo el opuesto (mismo módulo, misma dirección, pero sentido contrario) del sustraendo.

$$\vec{R} = \vec{U} - \vec{V} = \vec{U} + (-\vec{V}\,)$$





- El vector diferencia $\vec{U} - \vec{V}$, es un vector que tiene como origen, el extremo de $\vec{V}$ (sustraendo) y como extremo, el extremo de $\vec{U}$ (minuendo).



- **En función de las componentes cartesianas**: El vector diferencia es un vector cuyas componentes son la diferencia de las componentes.

$$\vec{U} = Ux\,.\,\vec{i} + Uy\,.\,\vec{j} + Uz\,.\,\vec{k} \qquad , \qquad \vec{V} = Vx\,.\,\vec{i} + Vy\,.\,\vec{j} + Vz\,.\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = \vec{U} - \vec{V} = (Ux - Vx)\,.\,\vec{i} + (Uy - Vy)\,.\,\vec{j} + (Uz - Vz)\,.}$$

Ejemplo:

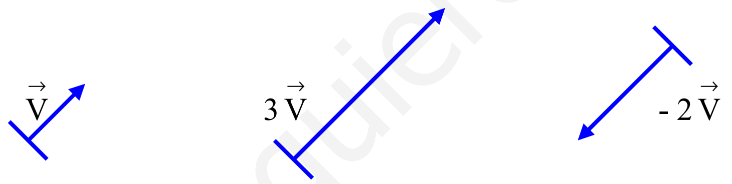
Dados los vectores $\vec{A} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$, la diferencia

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = (2 - 4)\,\vec{i} + (-3 - 2)\,\vec{j} + (1 - 5)\,\vec{k} = -2\,\vec{i} - 5\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$$

3.3. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR.

El producto de un escalar, q , por un vector $\vec{V}$, es otro vector que tiene:

- Módulo: el producto del $|\,q\,|$ por el modulo del vector $\vec{V}$.
- Dirección: la dirección de $\vec{V}$.
- Sentido: el de $\vec{V}$ si q es +, y sentido contrario a $\vec{V}$ si q es –



- En función de las componentes cartesianas:

$$\vec{V} = Vx\,.\,\vec{i} + Vy\,.\,\vec{j} + Vz\,.\,\vec{k} \qquad \boxed{q\,.\,\vec{V} = (q\,.Vx)\,.\,\vec{i} + (q\,.\,Vy)\,.\,\vec{j} + (q\,.\,Vz)\,.\,\vec{k}}$$

Ejemplo: $\vec{V} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}$, $\quad 3\,\vec{V} = 9\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$, $\quad -2\,\vec{V} = -6\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

- Esta operación permite justificar la expresión: $\vec{V} = |\vec{V}| \times \vec{u}$, y por tanto:

$$\vec{V}_X = Vx\,.\,\vec{i} \quad , \quad \vec{V}_Y = Vy\,.\,\vec{j} \quad , \quad \vec{V}_Z = Vz\,.\,\vec{k}$$

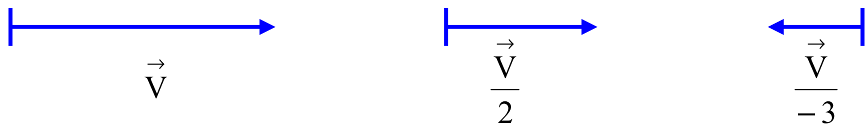
3.4. COCIENTE DE UN VECTOR POR UN ESCALAR.

El cociente de un vector $\vec{V}$ entre el escalar q , equivale al producto del vector por el inverso del escalar:

$$\frac{\vec{V}}{q} = \frac{1}{q} \times \vec{V}$$

Es, por tanto, otro vector que tiene:

- Módulo: el modulo del vector $\vec{V}$ dividido por el $|q|$
- Dirección: la dirección de $\vec{V}$.
- Sentido: el de $\vec{V}$ si q es +, y sentido contrario a $\vec{V}$ si q es –



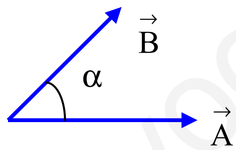
- En función de las componentes cartesianas:

$$\vec{V} = Vx \cdot \vec{i} + Vy \cdot \vec{j} + Vz \cdot \vec{k} \qquad , \qquad \boxed{\frac{\vec{V}}{q} = \frac{Vx}{q} \cdot \vec{i} + \frac{Vy}{q} \cdot \vec{j} + \frac{Vz}{q} \cdot \vec{k}}$$

Ejemplo: $\vec{V} = 6\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k} \quad , \quad \frac{\vec{V}}{2} = 3\,\vec{i} + \vec{j} - 1/2\,\vec{k} \quad ; \quad \frac{\vec{V}}{-3} = -2\,\vec{i} - 2/3\,\vec{j} + 1/3\,\vec{k}$

3.5. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se llama producto escalar entre ellos, al escalar que se obtiene multiplicando el módulo de $\vec{A}$ por el módulo de $\vec{B}$ y por el coseno del ángulo que forman entre ellos:



$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha}$$

- En función de las componentes cartesianas:

$$\vec{A} = Ax \cdot \vec{i} + Ay \cdot \vec{j} + Az \cdot \vec{k} \qquad , \qquad \vec{B} = Bx \cdot \vec{i} + By \cdot \vec{j} + Bz \cdot \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (Ax \cdot Bx)\,\vec{i} \cdot \vec{i} + (Ax \cdot By)\,\vec{i} \cdot \vec{j} + (Ax \cdot Bz)\,\vec{i} \cdot \vec{k} + (Ay \cdot Bx)\,\vec{j} \cdot \vec{i} + (Ay \cdot By)\,\vec{j} \cdot \vec{j} + (Ay \cdot Bz)\,\vec{j} \cdot \vec{k} + (Az \cdot Bx)\,\vec{k} \cdot \vec{i} + (Az \cdot By)\,\vec{k} \cdot \vec{j} + (Az \cdot Bz)\,\vec{k} \cdot \vec{k}$$

como:

·	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = Ax \cdot Bx + Ay \cdot By + Az \cdot Bz}$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{A} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2 \cdot 4) + (-3 \cdot 2) + (1 \cdot 5) = 8 - 6 + 5 = 7$$

3.6. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

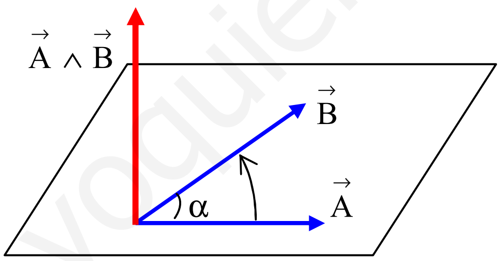
Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el producto vectorial $\vec{A} \wedge \vec{B}$ es un vector que tiene:

- Módulo: el producto del módulo de $\vec{A}$ por el módulo de $\vec{B}$ y por el seno del ángulo que forman entre ellos:

$$\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

- Dirección: perpendicular al plano determinado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$

- Sentido: se puede deducir de dos formas: 1) por la regla del sacacorchos: el sentido viene indicado por el sentido de avance de un sacacorchos que girase para ir del primer vector al segundo vector por el camino más corto. 2) por la regla de la mano derecha: cogiendo con la mano derecha la dirección del vector producto vectorial, de tal forma que los dedos indiquen el sentido de paso del primer vector al segundo vector por el camino más corto, el pulgar extendido indica el sentido del vector producto vectorial.



- En función de las componentes cartesianas:

$$\vec{A} = Ax \cdot \vec{i} + Ay \cdot \vec{j} + Az \cdot \vec{k} \quad , \quad \vec{B} = Bx \cdot \vec{i} + By \cdot \vec{j} + Bz \cdot \vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (Ax \cdot Bx)\ \vec{i} \wedge \vec{i} + (Ax \cdot By)\ \vec{i} \wedge \vec{j} + (Ax \cdot Bz)\ \vec{i} \wedge \vec{k} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

como:

$\wedge$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} = {} & (Ay \cdot Bz - Az \cdot By)\ \vec{i}\ + \\ & + (Az \cdot Bx - Ax \cdot Bz)\ \vec{j}\ + \\ & + (Ax \cdot By - Ay \cdot Bx)\ \vec{k} \end{aligned}}$$

Expresión que se corresponde con el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} Ay & Az \\ By & Bz \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} Ax & Az \\ Bx & Bz \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} Ax & Ay \\ Bx & By \end{vmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>: Dados los vectores $\vec{A}\,(1,\ 2,\ 4)$ y $\vec{B}\,(2,\ -1,\ 3)$. Halla el producto vectorial $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

Utilizando la anterior expresión:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (\,2\,.\,3 - 4\,.\,(-1))\,\vec{i}\ +\ (4\,.\,2 - 1\,.\,3)\,\vec{j}\ + (\,1\,.\,(-1) - 2\,.\,2)\,\vec{k}\ = 10\,\vec{i}\ + 5\,\vec{j}\ - 5\,\vec{k}$$

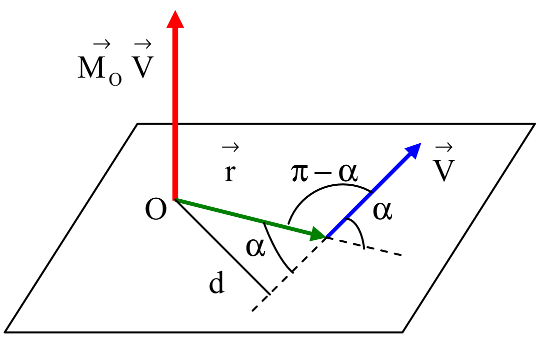
o bien como desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

3.7. MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO.

Se llama momento de un vector $\vec{V}$ respecto a un punto O: $\boxed{\vec{M}_O\,\vec{V} = \vec{r} \wedge \vec{V}}$

siendo $\vec{r}$ (vector de posición) un vector que tiene como origen el punto O, y como extremo, el origen de $\vec{V}$.



El vector momento, por tanto, es un vector que tiene:

- Módulo: el producto del módulo de $\vec{r}$ por el módulo de $\vec{V}$ y por el seno del ángulo que forman entre ellos:

$\left|\vec{M}_O \vec{V}\right| = |\vec{r}| \cdot |\vec{V}| \cdot \text{sen}\ \alpha$; como $|\vec{r}| \cdot \text{sen}\,\alpha = d$, siendo d la distancia del punto O a la línea de acción de $\vec{V}$, también se puede calcular: $\left|\vec{M}_O \vec{V}\right| = d \cdot |\vec{V}|$

es decir, el vector $\vec{V}$ se puede deslizar a lo largo de su línea de acción, sin que se modifique su momento.

- Dirección: perpendicular al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{V}$.
- Sentido: se traslada paralelamente $\vec{V}$ hasta el punto O, para que ambos vectores tengan origen común y a continuación se aplica la regla del sacacorchos o la regla de la mano derecha: el sentido viene indicado por el sentido de avance de un sacacorchos que girase para ir de $\vec{r}$ a $\vec{V}$ por el camino más corto.

3.8. DERIVADA DE UN VECTOR RESPECTO A UN ESCALAR.

Algunas magnitudes vectoriales, como la velocidad, varían en función de un escalar, como el tiempo: $\vec{V} = f(t)$. Se define la derivada de $\vec{V}$ respecto a t, como:

$$\vec{V}' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{d t}$$

La derivada de un vector $\vec{V}$ respecto a un escalar t , es la suma de las derivadas de sus componentes:

$$\vec{V} = Vx \cdot \vec{i} + Vy \cdot \vec{j} + Vz \cdot \vec{k}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{d t} = \frac{d\,Vx}{d t} \cdot \vec{i} + \frac{d\,Vy}{d t} \cdot \vec{j} + \frac{d\,Vz}{d t} \cdot \vec{k}}$$

$$\frac{dk}{d t} = 0 \qquad (f \pm g)' = f' \pm g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

$$\frac{dt}{d t} = 1 \qquad (f \,.\, g)' = f'.g + f.g' \qquad \left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$\frac{d t^n}{d t} = n.t^{n-1} \qquad (k \,.\, f)' = k \,.\, f'$$

PROBLEMAS

1.- Dado un vector $\vec{a}$ (3,4,-2), obtén su módulo y su dirección según los ejes OX, OY y OZ

Sol: $\sqrt{29}$, $\cos\alpha = 0{,}55$, $\cos\beta = 0{,}74$, $\cos\gamma = -0{,}37$

2.- Dados los vectores $\vec{a}$ (3,-1,-2) , $\vec{b}$ (0,3,-1) , $\vec{c}$ (-5,3,-8), realiza las operaciones: $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{a}+2\vec{b}$

Sol: (8,-1,5) , (-2,-1,-9) , (3,5,-4)

3.- Dado el vector $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}$ se pide:

a) Un vector unitario en su misma dirección.

b) El ángulo que forma con el eje OY.

c) Demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores vale la unidad.

Sol: $\vec{u} = \left(\frac{6}{\sqrt{149}}, \frac{8}{\sqrt{149}}, \frac{7}{\sqrt{149}}\right)$, $\cos\beta = 0{,}655$, $\beta = 49^{\circ}$

4.- Dados los vectores $\vec{a}$ (3,3,1) y $\vec{b}$ (0,1,-2), calcula el vector suma y el ángulo que forma dicho vector con el vector $\vec{a}$.

Sol: $\vec{S}$ = (3,4,-l) , α=25,9°

5.- Calcula un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del ejercicio anterior.

Sol: $\vec{u} = \left(\frac{-7}{\sqrt{94}}, \frac{6}{\sqrt{94}}, \frac{3}{\sqrt{94}}\right)$

6.- Suponiendo dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, cuyos módulos son 7 y 8 y que el ángulo que forman es de 30°, calcula el módulo del vector producto vectorial e indica el ángulo que formaría dicho vector con cada uno de los vectores.

Sol: 28 , 90° con cada uno.

7.- Dado el vector $\vec{a}$ = (-1,2,4) halla el producto escalar de dicho vector por su vector unitario.

Sol: $\sqrt{21}$

8.- Sean dos vectores cualesquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$. ¿Cuánto valdría el producto $\vec{a}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$?

Sol: Cero

9.- El vector $\vec{v}$ (2,1,0) tiene su punto de aplicación en A (3,0,-l). Halla: a) El momento de $\vec{v}$ respecto al origen de coordenadas. b) El momento respecto al punto B (3,-2,-l)

Sol: a) (1,-2,3) , b) (0,0,-4)

10.- Dado el vector $\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ donde x = m . sen wt e y = m . cos wt, encontrar su derivada y comprobar que el vector derivada es perpendicular al vector $\vec{v}$.

Sol: El producto escalar es cero

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.- ¿Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es máximo?.
¿En qué casos lo será?.

2.- ¿En qué caso el producto vectorial de dos vectores es cero?.

3.- ¿En qué caso el módulo de la suma de dos vectores tiene un valor máximo?.

4.- En el caso de tener dos vectores de igual dirección y sentido contrario, deduce gráficamente si el módulo de la suma es mayor que el módulo de la diferencia.

5.- Dado el vector $\vec{A} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$ determina $3/2 \times \vec{A}$
Sol: (3,9,-6)

6.- Determina el ángulo que forma el vector $\vec{B} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ con el eje OX.
Sol: 64,9º

7.- Halla un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{A}(1,2,3)$ y $\vec{B}(-1,0,2)$
Sol: $\vec{u} = \frac{4}{\sqrt{45}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{45}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{45}}\vec{k}$

8.- Dados $\vec{A}(5,3,4)$ y $\vec{B} = 6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, calcula:
a) Su producto escalar.
b) El ángulo que forman.
c) Los cosenos directores del vector $\vec{B}$.
Sol: a) 35 ; b) 39,37º ; c) 0,94 , -0,16 , 0,31

9.- Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{B}(3,4,0)$, calcula $\vec{A} \wedge \vec{B}$ y $\vec{B} \wedge \vec{A}$
Sol: (-8,6,21) , (8,-6,-21)

10.- ¿Cuál debe ser el valor de m para que el vector $\vec{A}(1,m,2)$ forma un ángulo de 60º con el eje OZ ?.
Sol: $\pm\sqrt{11}$

11.- Un vector $\vec{A}$ tiene de componentes (1,2,3). Otro vector $\vec{B}$ tiene de módulo $\sqrt{3}$ y su primera componente (B_x) vale 1. Determina $\vec{B}$ para que sea perpendicular a $\vec{A}$.
Sol: (1,1,-1) o (1, -17/13 , 7/13).

12.- Siendo los vectores $\vec{A}(A_x,5,3)$ y $\vec{B}(B_x,1,0)$ y sabiendo que $\vec{A} - \vec{B} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ y que el módulo de su suma vale 9. Determina el valor de A_x y B_x.
Sol: ± 3