CINEMÁTICA

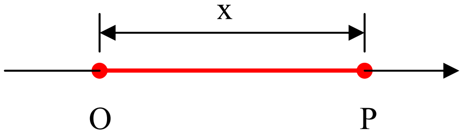
1. MAGNITUDES DEL MOVIMIENTO.

1.1. VECTOR DE POSICION.

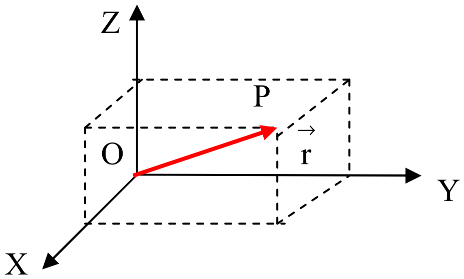
En el estudio del movimiento o **Cinemática** nos iremos al caso más sencillo: el del **móvil puntual**. Se llama así a todo móvil que puede considerarse un simple punto por tener un tamaño muy pequeño comparado con el del entorno en el que se mueve.

La primera cuestión que se plantea es cómo determinar la posición de un móvil. El concepto "posición de un cuerpo" sólo tiene significado si se define con relación a otro u otros cuerpos, que constituyen lo que llamamos un **sistema de referencia**. Así por ejemplo, en medio del océano o en un desierto de arena puede resultarnos imposible conocer nuestra posición; ello se debe a la falta de referencias fijas y reconocibles.

Cuando un móvil puntual se desplaza a lo largo de una recta, basta un punto fijo O de ella como referencia. La posición del móvil se determina por su distancia a O, con signo positivo o negativo según se encuentre a uno u otro lado de dicho punto de referencia. A esta distancia, afectada de su correspondiente signo, la llamaremos **abcisa** del móvil y la simbolizaremos por X:



Pero si el móvil puede ocupar cualquier posición en el espacio, utilizaremos como elementos de referencia tres ejes de coordenadas rectangulares OX, OY y OZ. La posición de un móvil puntual se determina entonces mediante su **vector de posición** que se define como **el vector que tiene su origen en el origen de coordenadas y su extremo en la posición del móvil.**



Simbolizaremos por $\vec{r}$ al vector de posición. Sus componentes son las coordenadas (x,y,z) del móvil puntual, y lo expresaremos como:

$$\boxed{\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}$$

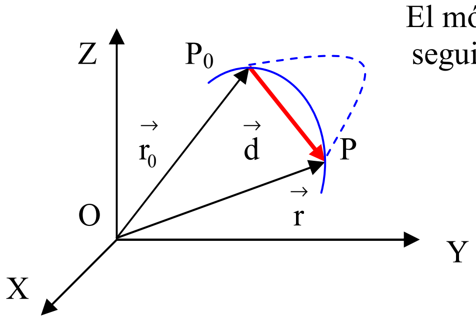
La elección del sistema de referencia es fundamental, ya que un movimiento puede ser sencillo o complejo dependiendo del mismo. Los ejes de coordenadas los imaginamos siempre ligados a uno o varios cuerpos reales, como si estuvieran rígidamente unidos a ellos. Lo más frecuente será suponer los ejes de coordenadas ligados a la Tierra; diremos entonces que la Tierra es el sistema de referencia. Pero no siempre será así; por ejemplo, si pretendemos estudiar el movimiento de un cuerpo dentro de un vagón de tren en marcha, puede ser más conveniente adoptar unos ejes de coordenadas unidos a su suelo y a sus paredes; en este caso, diremos que hemos tomado como sistema de referencia el vagón.

- Con el ejemplo anterior se pone de manifiesto que **la posición de un cuerpo siempre es relativa**, es decir, depende del sistema de referencia que estamos utilizando. Cuando un cuerpo se mueve, varía su posición al transcurrir el tiempo y por tanto, **todo movimiento es relativo**, lo que significa que cualquier cuerpo puede tener al mismo tiempo diferentes clases de movimiento, según el sistema de referencia que se adopte. Por ejemplo, un pasajero que permanece sentado en el interior de un automóvil en marcha se encuentra en reposo con relación al vehículo, pero en movimiento con respecto a la Tierra.

1.2. VECTOR DESPLAZAMIENTO.

Para poder abordar el estudio del movimiento es necesario expresar el cambio de posición de un móvil. Imaginemos un móvil puntual que se encuentra inicialmente en la posición P_0 y se desplaza hasta la posición final P siguiendo una trayectoria cualquiera. El cambio de posición que ha experimentado se representa mediante el llamado **vector desplazamiento**. Lo definiremos como **el vector que tiene su origen en la posición inicial del móvil y su extremo en la posición final.**

El móvil al pasar de P_0 a P puede seguir varias trayectorias.



En la figura anterior, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}_0$ son los vectores de posición final e inicial, respectivamente, del móvil puntual y O es el origen de coordenadas. El vector desplazamiento será: $\vec{d} = \Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, ya que $\vec{r}_0 + \vec{d} = \vec{r}$

Es decir, **el vector desplazamiento es la diferencia entre el vector de posición final y el inicial**, o lo que es lo mismo, **el incremento del vector de posición**.

- En la definición del vector desplazamiento sólo intervienen las posiciones inicial y final del móvil, por tanto, es independiente de la trayectoria seguida para pasar de una a otra posición.
- No hay que confundir el módulo del vector desplazamiento con el espacio o distancia recorrida que es la longitud de la trayectoria. En un movimiento de subida y bajada o, en un movimiento circular al dar una vuelta completa, el módulo del vector desplazamiento es cero, mientras que el espacio recorrido no lo es.

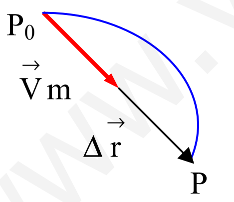
1.3. VELOCIDAD MEDIA E INSTANTÁNEA.

- Se llama **velocidad media al desplazamiento que realiza un móvil por unidad de tiempo entre dos instantes dados.**

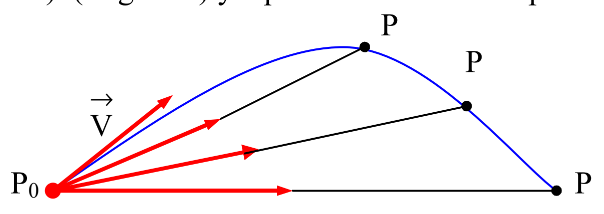
Si los instantes inicial y final corresponden a los tiempos t_0 y t, el vector velocidad media se puede expresar como:

$$\boxed{\vec{V}m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}}$$

De la fórmula se deduce que el vector velocidad media tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento ($\Delta\vec{r}$). (Figura 1) ya que Δt es un escalar positivo



(Fig. 1)



(Fig. 2)

- La velocidad media en un intervalo de tiempo infinitesimal (infinitamente pequeño) recibe el nombre de **velocidad instantánea**. La velocidad instantánea es, por tanto, el límite de la velocidad media en un intervalo de tiempo infinitesimal, es decir, cuando Δt tiende a 0 ($\Delta t \to 0$).

Si llamamos $\vec{V}$ al vector velocidad instantánea:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

la velocidad instantánea es la derivada del vector de posición respecto al tiempo.

Recordando que el vector de posición es: $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

llamando Vx, Vy y Vz a las componentes escalares del vector velocidad, podemos escribir la anterior igualdad de la siguiente forma:

$$\boxed{\vec{V} = Vx\,.\,\vec{i} + Vy\,.\,\vec{j} + Vz\,.\,\vec{k} = \frac{d\,x}{d\,t}\,.\,\vec{i} + \frac{d\,y}{d\,t}\,.\,\vec{j} + \frac{d\,z}{d\,t}\,.\,\vec{k}}$$

- Al módulo del vector velocidad se le llama **rapidez** o **celeridad** del movimiento.

- Como vimos anteriormente (figura 1), la dirección de la velocidad media es la secante a la trayectoria entre dos instantes. Si se consideran intervalos de tiempo cada vez menores, la dirección de la velocidad media llega a confundirse con la de la tangente a la trayectoria en el punto inicial. (figura 2). Matemáticamente esto sólo sucede cuando el incremento de tiempo es infinitesimal, es decir, para la velocidad instantánea.

  Por tanto, podemos resumir la velocidad instantánea de la siguiente manera:

- es la derivada con respecto al tiempo del vector de posición
- es un vector tangente a la trayectoria en el punto donde se encuentra el móvil, y sentido el del desplazamiento del móvil.

A.1. El vector de posición de un móvil en función del tiempo es $\vec{r} = t^3\,\vec{i} - 3t\,\vec{j} + (t^2 + 2)\,\vec{k}$
Las componentes de este vector están expresadas en metros y el tiempo, en segundos. Calcula: a) El módulo de la velocidad media del móvil entre los instantes t = 1 s y t = 5 s. b) Su velocidad instantánea para t =1 s y para t = 5 s
Sol: a) 31,72 m/s , b) 4,69 m/s , 75,72 m/s

1.4. ACELERACION MEDIA E INSTANTÁNEA.

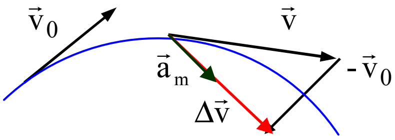
- La velocidad instantánea de un móvil puede permanecer invariable (movimiento uniforme) o cambiar a medida que transcurre el tiempo (movimiento variado).

Para medir cómo varía la velocidad con relación al tiempo transcurrido se define la aceleración. Si $\vec{v}_0$ y $\vec{v}$ son respectivamente las velocidades en los instantes inicial (t_0) y final (t), se llama **aceleración media a la variación de la velocidad instantánea por unidad de tiempo entre dos instantes dados**.

En el movimiento variado llamamos incremento de velocidad entre dos instantes a la diferencia entre la velocidad en el instante final y la velocidad en el instante inicial, es decir: $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, por tanto:

$$\boxed{\vec{a}\,m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}}$$

- De la fórmula se deduce que la aceleración media es un vector de la misma dirección y sentido que el incremento de velocidad, ya que $\Delta t > 0$.



la $\vec{a}_m$ está dirigida hacia la parte cóncava (interior) de la trayectoria

- La aceleración media correspondiente a un intervalo de tiempo infinitamente pequeño recibe el nombre de **aceleración instantánea**. Es el límite de la aceleración media en un intervalo de tiempo infinitesimal. En términos matemáticos se expresa:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

, es decir :

la aceleración instantánea es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo.

En función de sus componentes:

$$\boxed{\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \frac{d\,V_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{d\,V_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{d\,V_z}{dt} \cdot \vec{k}}$$

- Que el módulo de la aceleración de un móvil sea 2 m/s^2 significa que, por cada segundo de tiempo transcurrido, experimenta una variación de velocidad de 2 m/s.

- En un determinado instante, se dice que un movimiento es **acelerado o retardado** según <u>aumente o disminuya el módulo de su velocidad</u> (rapidez).

A.2. El vector de posición de un móvil puntual, expresado en unidades del S.I. es:
$\vec{r} = (t^3 - 8)\,\vec{i} - 4t\,\vec{j} + 5t^2\,\vec{k}$. Calcula el módulo de su aceleración instantánea para t = 3s.
<u>Sol</u>: 20,59 m/s^2

1.5. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACION.

Consideremos un móvil puntual que se desplaza siguiendo una trayectoria cualquiera, de forma que en un determinado instante lleva una aceleración $\vec{a}$ que, al igual que la aceleración media, está dirigida hacia la parte cóncava de la trayectoria:

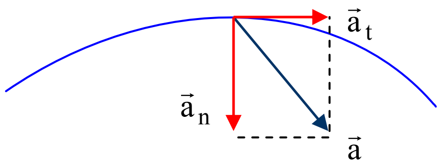


figura 3

El vector aceleración, $\vec{a}$, se puede descomponer en dos componentes perpendiculares entre sí: una ($\vec{a}_t$) tangente a la trayectoria en ese punto y otra ($\vec{a}_n$) perpendicular, normal a la trayectoria en ese punto, llamadas **componentes intrínsecas de la aceleración**. (figura 3)

Aceleración tangencial ($\vec{a}_t$) es la componente del vector aceleración tangente a la trayectoria en ese punto (en la dirección del vector velocidad).

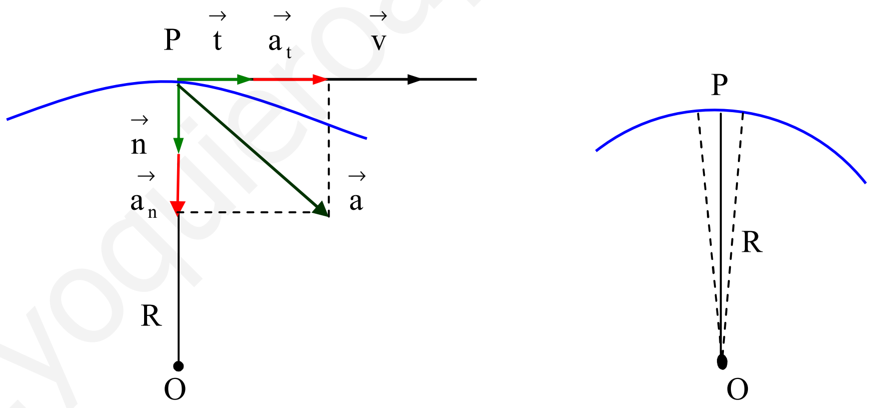
Aceleración normal ($\vec{a}_n$) es la componente del vector aceleración perpendicular a la trayectoria en ese punto (perpendicular al vector velocidad).

vectorialmente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$

en módulo: $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2$, por tanto: $|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2}$

<u>Deducción de los valores de a_t y a_n</u>:

Consideremos un móvil puntual describiendo una trayectoria cualquiera que en un instante dado se encuentra en el punto P, con una velocidad $\vec{v}$ y una aceleración $\vec{a}$:



$\vec{v}$ es la velocidad del móvil, tangente a la trayectoria en ese punto.

$\vec{a}$ es la aceleración del móvil.

$\vec{t}$ es el vector unitario tangente a la trayectoria y sentido el del movimiento.

$\vec{n}$ es el vector unitario perpendicular a la trayectoria y sentido hacia el interior de la misma.

R es el llamado radio de curvatura de la trayectoria en el punto P, que es la distancia desde dicho punto al centro de curvatura O. Este centro resulta del corte de dos líneas perpendiculares a la trayectoria, muy próximas entre sí, trazadas alrededor de dicho punto. En el caso de que la trayectoria sea una circunferencia, el centro de curvatura y el radio de curvatura son el centro y el radio de la misma, respectivamente

Como $\vec{v}=|\vec{v}|.\vec{t}$, entonces $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(|\vec{v}|.\vec{t})=\dfrac{d|\vec{v}|}{dt}.\vec{t}+|\vec{v}|.\dfrac{d\vec{t}}{dt}$

Se puede demostrar que: $|\vec{v}|.\dfrac{d\vec{t}}{dt}=\dfrac{|\vec{v}|^2}{R}.\vec{n}$, por tanto: $\vec{a}=\dfrac{d|\vec{v}|}{dt}.\vec{t}+\dfrac{|\vec{v}|^2}{R}.\vec{n}$

y como $\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$, siendo $\vec{a}_t=|\vec{a}_t|.\vec{t}$ y $\vec{a}_n=|\vec{a}_n|.\vec{n}$, se deduce que:

$$\boxed{|\vec{a}_t|=\frac{d|\vec{v}|}{dt}} \qquad \boxed{|\vec{a}_n|=\frac{|\vec{v}|^2}{R}}$$

Estas fórmulas de las componentes intrínsecas de la aceleración indican a qué son debidas:

- **la aceleración tangencial origina, o es debida, a un cambio en el módulo del vector velocidad** , ya que $a_t=\dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$
- **la aceleración normal**, también llamada **aceleración centrípeta** por estar dirigida hacia el centro de curvatura, **origina, o es debida, a un cambio en la dirección del movimiento, es decir, en la dirección de la velocidad** (ya que está asociada a $\dfrac{d\vec{t}}{dt}$, y lo único que puede variar de $\vec{t}$ a lo largo del tiempo, es su dirección pero no su módulo por ser un vector unitario), y como $\vec{t}$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$, la aceleración normal está asociada a un cambio en la dirección de la velocidad.

Ejercicio Resuelto nº 1

Las posiciones que ocupa un móvil en su movimiento, vienen dadas por las siguientes ecuaciones, en las que x, y, z quedan expresadas en metros y t en segundos:
$X=t^2+2t-5$; $Y=t+1$; $Z=t^3+2t$. Halla para el instante t = 2s:

a) La posición del móvil y la distancia al origen.
b) El vector velocidad y su módulo
c) El vector aceleración y su módulo.
d) El módulo de la aceleración tangencial y normal.
e) El radio de curvatura.

Solución:

a) $\vec{r}=(t^2+2t-5)\vec{i}+(t+1)\vec{j}+(t^3+2t)\vec{k}$; $\vec{r}_{2s}=3\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}$; $|\vec{r}|=\sqrt{162}$ m

b) $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=(2t+2)\vec{i}+\vec{j}+(3t^2+2)\vec{k}$; $\vec{v}_{2s}=6\vec{i}+\vec{j}+14\vec{k}$; $|\vec{v}|=\sqrt{233}$ m/s

c) $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=2\vec{i}+6t\vec{k}$; $\vec{a}_{2s}=2\vec{i}+12\vec{k}$; $|\vec{a}|=\sqrt{148}$ m/s^2

d) $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(2t+2)^2 + 1 + (3t^2+2)^2} = \sqrt{9t^4 + 16t^2 + 8t + 9}$

$$\left|\vec{a}_t\right| = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt} = \frac{36t^3 + 32t + 8}{2\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 8t + 9}} = \frac{360}{2\sqrt{233}} = \frac{180}{\sqrt{233}} = 11{,}8 \text{ m/s}^2.$$

$$\left|\vec{a}_n\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{a}_t\right|^2 = 148 - 11{,}8^2 \approx 9 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad \left|\vec{a}_n\right| = 3 \text{ m/s}^2$$

e) $\left|\vec{a}_n\right| = \dfrac{\left|\vec{v}\right|^2}{R} \quad ; \quad R = \dfrac{\left|\vec{v}\right|^2}{\left|\vec{a}_n\right|} = \dfrac{233}{3} = 77{,}6 \text{ m}$

A.3. La velocidad de un móvil es $\vec{v} = (38\,t - 4)\,\vec{i} + (103 - 41\,t)\,\vec{j}$. Sus componentes están expresadas en m/s y t es el tiempo en s. Calcula el módulo de la aceleración y de sus componentes tangencial y normal en el instante t = 2 s.
Sol: $a = 55{,}9$ m/s^2 , $a_t = 25$ m/s^2 , $a_n = 50$ m/s^2

2. TIPOS DE MOVIMIENTO.

2.1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO.

Hasta aquí todo lo que se ha dicho es aplicable a cualquier tipo de movimiento, sin embargo, cuando **la trayectoria del móvil es una recta** se pueden simplificar las expresiones obtenidas, para lo cual adoptaremos como eje de abcisas la recta sobre la que se desplaza el móvil y podremos escribir:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} \quad , \quad \vec{V} = Vx \,.\, \vec{i} = V \,.\, \vec{i} \quad , \quad \vec{a} = a_x \,.\, \vec{i} = a \,.\, \vec{i}$$

Como todos estos vectores tienen una dirección única e invariable (eje X), podemos prescindir de expresarla; por esta razón utilizaremos los escalares X, V y a , que son los módulos afectados de un signo + o – , en vez de los vectores correspondientes:

$$\boxed{V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \qquad \boxed{V = \frac{dx}{dt}} \qquad \boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

- En este movimiento la deducción de acelerado o retardado también se puede deducir:

- Si la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo, el módulo de la velocidad aumenta y el movimiento es **acelerado**.
- Si la velocidad y la aceleración tienen signos contrarios, el módulo de la velocidad disminuye y el movimiento es **retardado**.

A.4. ¿Qué significado tienen los signos + y – en la velocidad y en la aceleración en el M.R.?.

Ejercicio Resuelto nº 2

Una partícula se mueve a lo largo del eje X, de tal manera que su posición varía con el tiempo según la ecuación $X = 2t^2 - 1$, expresando el espacio en metros y el tiempo en segundos. Halla la velocidad media en los intervalos de tiempo siguientes:

a) entre 2 y 3 segundos.
b) 2 y 2,1 segundos.
c) 2 y 2,01 segundos.
d) 2 y 2,001 segundos.
e) Halla la velocidad instantánea a los 2 segundos.

Solución:

Al tratarse de un movimiento rectilíneo podemos trabajar con escalares:

a) $X_{2s} = 2.2^2 - 1 = 7\ \text{m}$; $X_{3s} = 2.3^2 - 1 = 17\ \text{m}$; $\Delta X = 17 - 7 = 10\ \text{m}$

$\Delta t = 3 - 2 = 1\ \text{s}$; $V_m = \dfrac{\Delta X}{\Delta t} = \dfrac{10\ \text{m}}{1\ \text{s}} = 10\ \text{m/s}$

b) $X_{2s} = 2.2^2 - 1 = 7\ \text{m}$; $X_{2,1s} = 2.(2{,}1)^2 - 1 = 7{,}82\ \text{m}$; $\Delta X = 7{,}82 - 7 = 0{,}82\ \text{m}$

$\Delta t = 2{,}1 - 2 = 0{,}1\ \text{s}$; $V_m = \dfrac{\Delta X}{\Delta t} = \dfrac{0{,}82\ \text{m}}{0{,}1\ \text{s}} = 8{,}2\ \text{m/s}$

c) $X_{2s} = 2.2^2 - 1 = 7\ \text{m}$; $X_{2,01s} = 2.(2{,}01)^2 - 1 = 7{,}0802\ \text{m}$

$\Delta X = 7{,}0802 - 7 = 0{,}0802\ \text{m}$; $\Delta t = 2{,}01 - 2 = 0{,}01\ \text{s}$

$V_m = \dfrac{\Delta X}{\Delta t} = \dfrac{0{,}0802\ \text{m}}{0{,}01\ \text{s}} = 8{,}02\ \text{m/s}$

d) $X_{2s} = 2.2^2 - 1 = 7\ \text{m}$; $X_{2,001s} = 2.(2{,}001)^2 - 1 = 7{,}008002\ \text{m}$

$\Delta X = 7{,}008002 - 7 = 8{,}002 \,.\, 10^{-3}\ \text{m}$; $\Delta t = 2{,}001 - 2 = 0{,}001\ \text{s}$

$V_m = \dfrac{\Delta X}{\Delta t} = \dfrac{8{,}002.10^{-3}\ \text{m}}{0{,}001\ \text{s}} = 8{,}002\ \text{m/s}$

e) $V = \dfrac{dX}{dt} = 4t$; $V_{2s} = 8\ \text{m/s}$

Observa que $8\ \text{m/s}$ es el valor al que tiende la velocidad media al considerar intervalos de tiempos cada vez más pequeños.

2.2. MOVIMIENTO UNIFORME.

Se llama **movimiento uniforme al movimiento en el que el vector velocidad es constante**.

En el movimiento uniforme la velocidad media coincide con la instantánea, por ello no vamos a distinguir entre ambas y hablamos simplemente de velocidad. La expresión de velocidad en el movimiento uniforme será:

$$\vec{v} = \vec{V}m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}$$

Según la definición, el movimiento uniforme ha de ser forzosamente rectilíneo. Efectivamente, si el vector velocidad es constante, ha de ser invariable no sólo en módulo sino también en dirección y sentido; y si la dirección del movimiento no cambia, éste ha de ser rectilíneo.

Pero por tratarse de un movimiento rectilíneo, tomando la trayectoria del móvil como eje de abcisas, la expresión anterior puede reducirse a:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

de donde se deduce:

$$x = x_o + v . \Delta t$$

A.5. Representa gráficamente la posición frente al tiempo, y la velocidad frente al tiempo, para un movimiento rectilíneo uniforme e interpreta dichas gráficas.

A.6. Dos vehículos A y B inician simultáneamente un viaje en la misma dirección y sentido. El vehículo A, con una velocidad de 80 Km/h, parte de una localidad que se halla a 30 km del vehículo B, que se desplaza a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que el segundo vehículo alcance al primero?. Sol: 1 hora

2.3. MOVIMIENTO CON ACELERACION CONSTANTE.

En el caso de un movimiento en el que **el vector aceleración es constante en módulo, dirección y sentido**, la aceleración media y la instantánea coinciden, por lo que en adelante no distinguiremos entre una y otra y hablaremos simplemente de aceleración.

La expresión de la aceleración será:

$$\vec{a} = \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}$$

despejando el vector velocidad de la expresión anterior, se obtiene:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a} . \Delta t$$

mientras que el vector de posición del móvil en función del tiempo viene dado por:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_0 . \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} . \Delta t^2$$

- La fórmula anterior se demuestra fácilmente por medio del cálculo integral. Nos vamos limitar a comprobarla y para ello la escribiremos de la siguiente forma:

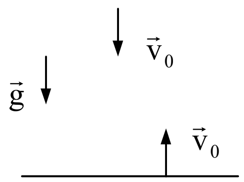
$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2$$

Sabemos que la velocidad instantánea es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo, por lo tanto, si se deriva esta ecuación obtendremos el valor del vector velocidad en función del tiempo:

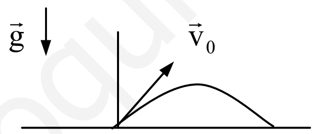
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 + \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot 2 \cdot (t - t_0) = \vec{v}_o + \vec{a} \cdot (t - t_0)$$

- El movimiento con aceleración constante puede ser de dos tipos:

a) Si la velocidad inicial es nula o tiene la misma dirección que la aceleración, el movimiento es rectilíneo y recibe el nombre de **movimiento rectilíneo uniformemente variado**.



b) Si la velocidad inicial tiene diferente dirección que la aceleración, el móvil describe una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al vector aceleración. El movimiento en este caso se llama **movimiento parabólico**.



2.3.1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO.

Lo expuesto en la pregunta anterior es aplicable a este tipo de movimiento, sin embargo, si adoptamos la trayectoria del móvil como eje de coordenadas, podemos expresar la posición, velocidad y aceleración del móvil mediante escalares. Así pues, las anteriores expresiones se transforman en las siguientes:

$$\boxed{v = v_0 + a \cdot \Delta t} \qquad \boxed{x = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + 1/2\, a \cdot \Delta t^2}$$

De estas dos expresiones se obtiene otra, muy útil en algunos casos:

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x}$$

A.7. Deduce la última ecuación a partir de las dos anteriores.

A.8. ¿Qué tipo de gráfico se obtiene para el M.R.U.V. al representar la velocidad frente al tiempo?. ¿Y al representar la posición frente al tiempo?

Ejercicio Resuelto nº 3

Desde la terraza de un edificio de 50 m de altura se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 20 m/s. La piedra al caer libra el edificio, tal como indica el dibujo. Determina:

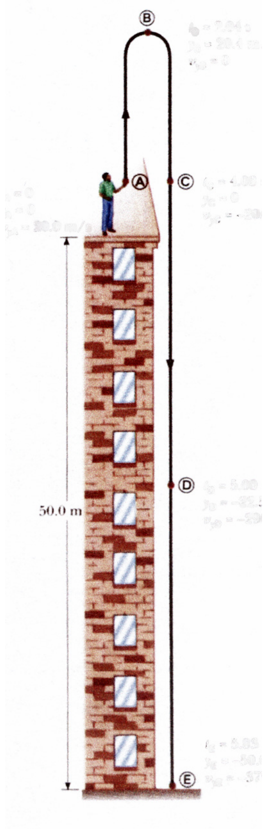
a) El tiempo necesario para que alcance la altura máxima.
b) La altura máxima.
c) El tiempo necesario para que la piedra alcance la altura desde la que fue lanzada.
d) La velocidad de la piedra en ese instante.
e) La velocidad y posición de la piedra en 5 s.
f) El tiempo que tarda la piedra en llegar al suelo y velocidad con que impacta.

Solución:

A las posiciones de la piedra durante el recorrido les asignamos las letras A, B, C, D y E

Tomamos como origen de coordenadas el suelo, sentido positivo del eje Y hacia arriba, y como origen de tiempos el instante en el que se lanza la piedra, por lo que:

$Y_0 = Y_A = 50$ m , $V_0 = V_A = 20$ m/s , $a = g = -9{,}8$ m/s^2 , $t_0 = 0$ s



a) La velocidad arriba del todo, V_B será cero.

$$V = V_0 + a \,.\, \Delta t \quad ; \quad V_B = V_A + a \,.\, t$$

$$0 = 20 + (-9{,}8)\, t \quad ; \quad t = 2{,}04 \text{ s}$$

b) $Y = Y_0 + v_0 \,.\, \Delta t + 1/2\, a \,.\, \Delta t^2$

$$Y_{max.} = Y_B = Y_A + V_A \,.\, t + \frac{1}{2} a \,.\, t^2$$

$$Y_B = 50 + 20 \,.\, 2{,}04 + \frac{1}{2}(-9{,}8)(2{,}04)^2 = 70{,}4 \text{ m}$$

c) $Y_c = Y_A = 50$ m ; $Y_c = Y_A + V_A \,.\, t + \frac{1}{2} a \,.\, t^2$

$$50 = 50 + 20.t - \frac{1}{2}(-9{,}8)\, t^2 \quad ; \quad 0 = t\,(20 - 4{,}9\, t)$$

dos soluciones: $t_1 = 0$ (inicial) ; $t_2 = 4{,}08$ s (vuelve a pasar)

d) $V_C = V_A + a \,.\, t = 20 + (-9{,}8)\,.\,(4{,}08) = -20$ m/s

e) Será el punto D:

$$V_D = V_A + a \,.\, t = 20 + (-9{,}8)(5) = -29 \text{ m/s}$$

$$Y_D = Y_A + V_A \,.\, t + \frac{1}{2} a \,.\, t^2 = 50 + 20.5 + \frac{1}{2}(-9{,}8)\, 5^2 = 27{,}5 \text{ m}$$

f) Será el punto E:

$$Y_E = Y_A + V_A \,.\, t + \frac{1}{2} a \,.\, t^2 ; \quad 0 = 50 + 20.t + \frac{1}{2}(-9{,}8)\, t^2 \quad ; \quad -4{,}9\, t^2 + 20\, t + 50 = 0$$

dos soluciones: $t_1 = 5{,}83$ s ; $t_2 = -1{,}75$ s (no válida, antes de lanzar)

$$V_E = V_A + a \,.\, t = 20 + (-9{,}8)\,.\,(5{,}83) = -37{,}13 \text{ m/s}$$

A.9. Desde una altura de 80 m se deja caer un cuerpo en el mismo instante en que se lanza otro desde el suelo hacia arriba con velocidad de 50 m/s. Tomando $g = 9{,}8\ m/s^2$, calcula:
a) El tiempo que tardan en cruzarse. Sol: 1,6 s
b) A qué altura se cruzan. Sol: 67,46 m
c) Qué velocidad tiene cada uno en ese momento. Sol: - 15,68 m/s y 34,32 m/s
d) Dónde se encuentra el segundo cuando el primero llega al suelo. Sol: 122 m
e) Si sube o baja el segundo cuando el primero llega al suelo.

A.10. Deduce los valores de a_t y a_n para el M.R.U. y para el M.R.U.V.

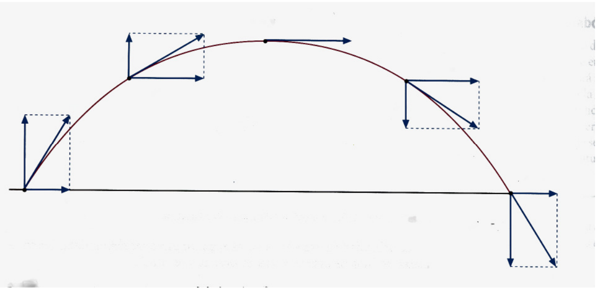
2.3.2. TIRO PARABOLICO.

Si un móvil se desplaza con aceleración constante (en módulo, dirección y sentido) y no coinciden las direcciones de su velocidad inicial y aceleración, describirá un movimiento parabólico. Si dicha aceleración es la de la gravedad se le da el nombre de tiro parabólico, y un caso particular es el tiro horizontal (la dirección de la velocidad inicial es horizontal).

En el tiro parabólico se supone que sobre el móvil no actúa otra fuerza que la de la gravedad, y que ésta es constante en todo el recorrido; por tanto, son válidas las ecuaciones vistas en el movimiento con aceleración constante.

Ejercicio Resuelto nº 4

Se dispara un cañón con un ángulo de tiro de 30º y con una velocidad inicial de 500 m/s. Tomando $g = 10\ m/s^2$, calcula:
a) El módulo de la velocidad a los 3 s.
b) La posición del proyectil en ese instante.
c) La altura máxima alcanzada.
d) El alcance del tiro.
e) La ecuación de la trayectoria.



Solución:

Tomamos como origen de coordenadas el cañón, sentido positivo del eje Y hacia arriba, sentido positivo del eje X el del avance del proyectil, y como origen de tiempos el instante del disparo ($t_0 = 0$), por lo que los datos del problema en forma vectorial son:

$$\vec{a} = \vec{g} = -10\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{r}_o = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} = 0 \quad ;$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos 30\,\vec{i} + v_0 \,\text{sen} 30\,\vec{j} = 500\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + 500 \cdot \frac{1}{2}\vec{j} = 250\sqrt{3}\,\vec{i} + 250\,\vec{j} \quad ;$$

a) $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a} \cdot \Delta t \;\; ; \;\; \vec{v} = 250\sqrt{3}\,\vec{i} + 250\,\vec{j} - (10\,\vec{j})\,t \;\; ;$ $\boxed{\vec{v} = 250\sqrt{3}\,\vec{i} + (250 - 10\,t)\,\vec{j}}$

$$t = 3\ s \;\; ; \;\; \vec{v} = 250\sqrt{3}\,\vec{i} + (250 - 10.3)\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{v} = 250\sqrt{3}\,\vec{i} + 220\,\vec{j} \quad ; \quad |\vec{v}| = 485{,}7\ m/s$$

b) $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \Delta t^2 \quad ; \quad \vec{r} = 0 + (250\sqrt{3}\,\vec{i} + 250\,\vec{j})\,t + \frac{1}{2}(-10\,\vec{j})\,t^2$

$$\boxed{\vec{r} = 250\sqrt{3}\,t\,\vec{i} + (250\,t - 5\,t^2)\,\vec{j}}$$

$t = 3$ s , $\vec{r} = 250\sqrt{3}\,.\,3\,\vec{i} + (250\,.\,3 - 5.\,3^2)\,\vec{j}$

$\vec{r} = 750\sqrt{3}\,\vec{i} + 705\,\vec{j}$

c) La altura máxima la alcanza cuando $V_y = 0$; $250 - 10\,t = 0$; $t = 25$ s

$$y_{max} = 250\,t - 5\,t^2 = 250\,.\,25 - 5\,.\,25^2 \quad ; \quad y_{max} = 3125 \text{ m}$$

f) Alcance horizontal máximo: Cuando $y = 0$; $250\,t - 5\,t^2 = 0$

dos soluciones: $t_1 = 0$; $t_2 = 50$ s

$$x_{max} = 250\sqrt{3}\,t \quad ; \quad x_{max} = 12500\,.\sqrt{3} \text{ m}$$

e) Ecuación de la trayectoria: combinando la ecuación de la posición horizontal con la de la posición vertical y eliminando el tiempo:

$x = 250\sqrt{3}\,t$, $y = 250\,t - 5\,t^2$ despejando t de la ecuación de x:

$t = \dfrac{x}{250\sqrt{3}}$ y sustituyendo en la de la y resulta: $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{x^2}{37500}$

A.11. Desde lo más alto de un edificio de 50 m de altura se lanza un cuerpo oblicuamente hacia arriba con una velocidad inicial de 25 m/s en una dirección que forma un ángulo α con la horizontal, tal que sen $\alpha = 0{,}6$ y cos $\alpha = 0{,}8$. Suponiendo nula la resistencia del aire y que la aceleración de la gravedad es de 10 m/s^2, determina:

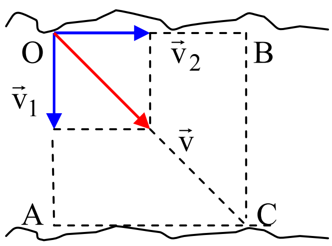
a) El vector de posición del móvil en función del tiempo.
b) En qué punto chocará con el suelo, supuesto horizontal. Sol: 100 m
c) La velocidad del móvil en función del tiempo.
d) Su velocidad en el instante del choque con el suelo. Sol: 40,31 m/s
e) La altura máxima que alcanzará el móvil en su recorrido. Sol: 61,25 m
f) La ecuación de la trayectoria de este movimiento.

2.4. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS.

Cuando un móvil se encuentra sometido a dos movimientos simultáneos e independientes, efectúa un movimiento que es combinación o composición de ellos. Por ejemplo, el movimiento de un nadador al atravesar un río es el resultado de la combinación de dos movimientos: uno debido al esfuerzo del nadador y otro debido a la corriente del agua.

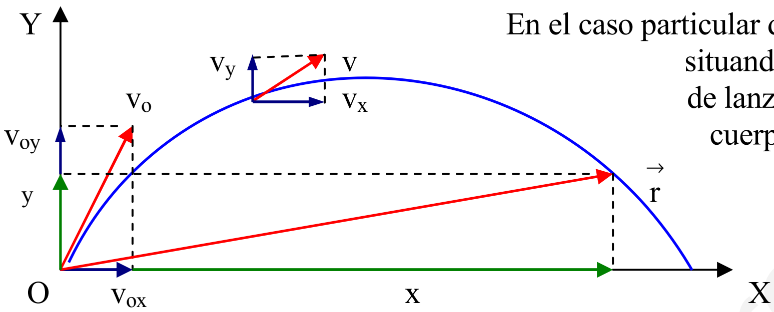
En estos casos es evidente que el cambio de posición del móvil es independiente de que los dos movimientos actúen sucesiva o simultáneamente; de lo que se deduce que el vector de posición así como el vector velocidad resultantes son la suma vectorial de los respectivos vectores de posición y velocidad de los movimientos componentes.

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2} \qquad \boxed{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2}$$



- En el caso de un nadador que atraviesa un río, su cambio de posición es OC (con velocidad $\vec{v}$) y es debido al esfuerzo del nadador para recorrer OA (con velocidad $\vec{v}_1$) y al arrastre del río OB = AC (con velocidad $\vec{v}_2$).

- En el tiro parabólico desde el mismo instante de ponerse el cuerpo en movimiento la única fuerza que actúa es la gravedad en sentido vertical y hacia abajo, que le obliga a caer al mismo tiempo que se desplaza horizontalmente. Por tanto, el movimiento es el resultado de la composición de dos movimientos, uno rectilíneo uniforme en dirección horizontal y otro rectilíneo uniformemente variado en dirección vertical.



En el caso particular del lanzamiento desde el suelo, situando el origen del S.R. en el punto de lanzamiento y considerando que el cuerpo se mueve en el plano XOY, resulta que:

$$\vec{v} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j}$$
$$\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

Las componentes de la velocidad en cualquier instante serán:

Componente horizontal: $v_x = v_{ox}$, ya que en esta dirección es un M.R.U.

Componente vertical: $v_y = v_{oy} + g\,.\Delta t$, ya que en esta dirección es un M.R.U.V.

Las componentes del vector de posición en cualquier instante serán:

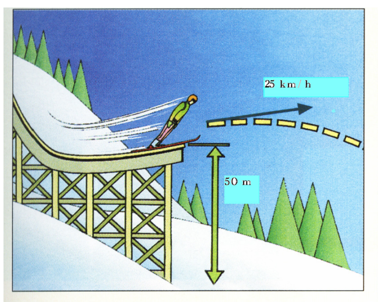
Componente horizontal: $x = x_o + v_{ox}\,.\,\Delta t = v_{ox}\,.\,\Delta t$, ya que es un M.R.U.

Comp. vertical: $y = y_o + v_{oy}.\Delta t + 1/2\, g\,.\Delta t^2 = v_{oy}.\Delta t + 1/2\, g.\Delta t^2$, por ser M.R.U.V.

Ejercicio Resuelto nº 5

Un esquiador baja por una pendiente y se despega del suelo moviéndose en dirección horizontal con una rapidez de 25 m/s. Si la plataforma de salida está a una altura del suelo de 50 m, calcula:

a) El vector de posición en el instante del salto.
b) El tiempo que tardará en caer en la nieve.
c) El espacio horizontal recorrido.
d) La velocidad con que llega a la nieve.
e) El vector de posición final.



Solución: Se toma como origen de coordenadas el punto del suelo, en la nieve, que está justo debajo de la salida de la plataforma del esquiador, sentido positivo del eje Y hacia arriba, sentido positivo del eje X el del avance del esquiador, y como origen de tiempos el instante del salto ($t_0 = 0$).

Eje X: M.R.U. $X_0 = 0$, $V_{0x} = 25$ m/s
Eje Y: M.R.U.V. $Y_0 = 50$ m , $V_{0y} = 0$, $a = g = -\,9{,}8$ m/s^2

a) $\vec{r}_0 = x_o\,\vec{i} + y_o\,\vec{j}$; $\vec{r}_0 = 50\,\vec{j}$

b) Cuando llegue a la nieve, su altura será $Y_{nieve} = 0$

$$Y_{nieve} = Y_o + V_{oy}\,t + \frac{1}{2}\,g.t^2 \quad ; \quad 0 = 50 + 0\,.t + \frac{1}{2}(-9{,}8)\,t^2 \quad ; \quad t = 3{,}19\ s$$

c) $X = X_0 + V_x t$; $X = 0 + 25\ .\ 3{,}19 = 79{,}75$ m

d) Al llegar al suelo la velocidad horizontal sigue siendo la misma $V_x = 25$ m/s

y la vertical: $V_y = V_{oy} + g\,.\Delta t = 0 - 9{,}8\ .\ 3{,}19 = -31{,}26$ m/s ;

por tanto, $\vec{v} = 25\,\vec{i} - 31{,}26\,\vec{j}\ m/s$; $\left|\vec{v}\right| = 40\ m/s$

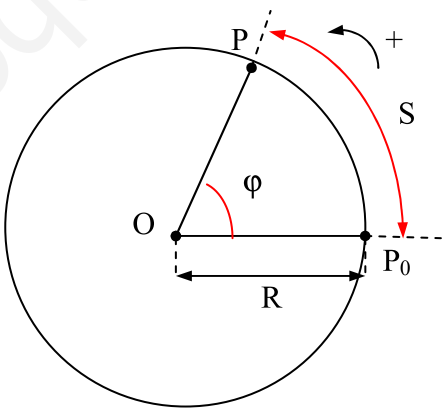
e) $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$; $\vec{r} = 79{,}75\,\vec{i} + 0\,\vec{j} = 79{,}75\,\vec{i}$

A.12. Resuelve la A.11. mediante composición de movimientos.

2.5. MOVIMIENTO CIRCULAR. MAGNITUDES ANGULARES.

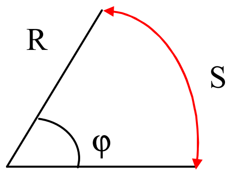
Se llama **movimiento circular al de un móvil cuya trayectoria es una circunferencia**.

Consideremos un móvil puntual moviéndose sobre una circunferencia de centro O y radio R , que en un instante determinado se encuentra en P.



Para el estudio de este movimiento se podía tomar como referencia un sistema de ejes cartesianos con origen en O, pero las fórmulas resultarían complejas, por eso, vamos a tomar un punto de referencia P_0 sobre la circunferencia y considerando positivo el sentido contrario al de las agujas del reloj, la posición del móvil puede describirse por medio del arco de circunferencia, S , con origen en P_0 y extremo en P. Pero también puede determinarse su posición por medio del ángulo φ que forman los radios OP_0 y OP.

En el S.I. el arco S, se mide en metros y el ángulo φ, en radianes (1 radián es el ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que se ha trazado).

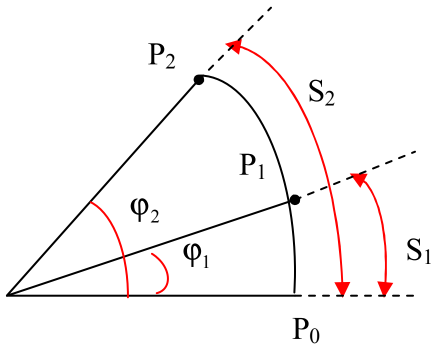


$\varphi = 1$ rad si $S = R$

por tanto, el ángulo en radianes se calcula: $\varphi = \dfrac{S}{R}$

y en consecuencia: $S = \varphi \cdot R$ (arco = ángulo x radio)

Al estudiar el movimiento de un móvil que inicialmente no está en P_0 sino en P_1, y al cabo de un cierto tiempo en P_2, la fórmula arco = ángulo x radio , queda como:



$$\boxed{\Delta S = \Delta \varphi \cdot R}$$

A partir del arco recorrido y del ángulo girado se pueden definir dos nuevos conceptos de velocidad muy útiles para el movimiento circular: la velocidad lineal y la velocidad angular.

- Se llama **velocidad lineal de un móvil al arco de trayectoria recorrido por unidad de tiempo**. Según que el intervalo de tiempo considerado sea finito o infinitamente pequeño será, respectivamente, una velocidad lineal media (v_m) o instantánea (v):

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}} \qquad \boxed{v = \frac{dS}{dt}}$$

La velocidad lineal en el SI, se expresa en m/s

- Se llama **velocidad angular** de un movimiento circular al **ángulo que gira el móvil por unidad de tiempo**. Designaremos por w_m a la velocidad angular media y por w a la instantánea:

$$\boxed{w_m = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}} \qquad \boxed{w = \frac{d\varphi}{dt}}$$

La velocidad angular en el SI, se expresa en rad/s

- El signo de la velocidad angular, al igual que el de la lineal, es el que corresponde al sentido en que el móvil recorre su trayectoria.

- Se llama **aceleración angular** a la **variación de la velocidad angular por unidad de tiempo**. Si designamos por α_m a la aceleración angular media y por α a la instantánea, se obtiene:

$$\boxed{\alpha_m = \frac{\Delta w}{\Delta t}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{d\,w}{d\,t}}$$

La aceleración angular en el SI se expresa en rad /s^2

La aceleración angular puede ser positiva o negativa según aumente o disminuya la velocidad angular

<u>**Relación entre las magnitudes lineales y angulares**</u>:

- A partir de la expresión que relaciona el arco y el ángulo, se obtiene una sencilla relación entre la velocidad lineal y la angular:

$S = \varphi\ .\ R$; derivando respecto al tiempo: $\frac{d\,S}{d\,t} = \frac{d\,\varphi}{d\,t}\,.\,R + \varphi\,.\underbrace{\cancel{\frac{d\,R}{d\,t}}}_{0}$; $\boxed{v = w\ .\ R}$

- A partir de la expresión $v = w\ .\ r$, derivando respecto al tiempo:

$$\frac{d\,V}{d\,t} = \frac{d\,w}{d\,t}\,.\,R + w.\underbrace{\cancel{\frac{dR}{dt}}}_{0}$$, y por tanto: $\boxed{a_t = \alpha\ .\ R}$

- En el movimiento circular, la aceleración normal puede expresarse también en función de la velocidad angular:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(w.\,R)^2}{R}$$, simplificando: $\boxed{a_n = w^2.\,R}$

2.6. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

Se llama **movimiento circular uniforme al de un móvil que recorre una circunferencia con velocidad angular constante**. Como la velocidad lineal es igual a la velocidad angular por el radio, <u>la velocidad lineal también es constante</u>.

En todo instante $w = w_m$ y $v = v_m$, por tanto: $\boxed{w = \frac{\Delta\,\varphi}{\Delta\,t}}$ y $\boxed{v = \frac{\Delta\,S}{\Delta\,t}}$

De aquí se deducen las ecuaciones aplicables a este tipo de movimiento que son análogas a las del movimiento rectilíneo uniforme:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + w\ .\Delta t} \qquad \boxed{s = s_0 + v\ .\Delta t}$$

- En el movimiento circular uniforme, el vector velocidad no es constante, ya que su dirección cambia de forma uniforme. Por ello, en este movimiento existe siempre aceleración normal constante. Por el contrario, la aceleración tangencial es nula, puesto que el módulo de la velocidad no varía.

También se deducen: $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$; $a_n = \frac{v^2}{R} = cte \neq 0$

2.7. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO.

Se llama **movimiento circular uniformemente variado al de un móvil que recorre una circunferencia con aceleración angular constante**. Como la aceleración tangencial es la aceleración angular por el radio, también la aceleración tangencial es constante.

$$\alpha = \alpha_m = \frac{\Delta w}{\Delta t} \quad ; \quad a_t = \alpha \,.\, R = \frac{\Delta w}{\Delta t} \,.\, R = \frac{w - w_0}{\Delta t} \,.\, R = \frac{w.R - w_0.R}{\Delta t} = \frac{v - v_o}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Las ecuaciones aplicables a este movimiento son semejantes a las del M.R.U.V.:

$w = w_0 + \alpha . \Delta t$	$v = v_0 + a_t . \Delta t$
$\varphi = \varphi_0 + w_0 . \Delta t + 1/2\ \alpha .(\Delta t)^2$	$s = s_0 + v_0 . \Delta t + 1/2\ a_t .(\Delta t)^2$
$w^2 - w_0^2 = 2 . \alpha . \Delta \varphi$	$v^2 - v_0^2 = 2 . a_t . \Delta S$

- En el movimiento circular uniformemente variado existen tanto aceleración tangencial (ya que varía el módulo de la velocidad lineal) como aceleración normal (ya que varía la dirección del movimiento). Pero mientras que el módulo de a_t es constante, el de a_n no lo es, puesto que v varía con el tiempo.

También se deducen: $a_t = \frac{dv}{dt} = cte \neq 0$; $a_n = \frac{v^2}{R} \neq cte \neq 0$

<u>Ejercicio Resuelto nº 6</u>

Una partícula describe una circunferencia de 5 m de radio con una velocidad constante de 2 m/s. En un instante dado frena con una aceleración tangencial constante de 0,5 m/s^2 hasta pararse. Calcula:

a) La velocidad angular en rpm de la partícula antes de empezar a frenar.
b) La aceleración de la partícula antes de empezar a frenar.
c) La aceleración 2s después de empezar a frenar.
d) La aceleración angular mientras frena.
e) El tiempo que tarda en parar.
f) El número de vueltas que da desde que empieza a frenar hasta que se para.

Solución:

a) La velocidad angular se obtiene de la relación $v = \omega \cdot R$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2 \text{ m/s}}{5 \text{ m}} = 0{,}4 \text{ rad/s} = \frac{0{,}4 \text{ rad/s} \cdot 60 \text{ s/min}}{2\pi \text{ rad/rev}} = 3{,}82 \text{ rpm}$$

b) Antes de empezar a frenar, el módulo de la velocidad es constante. Por tanto, la única aceleración que tiene es la aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2^2}{5} = 0{,}8 \text{ m/s}^2$$

c) En este instante tiene aceleración tangencial $a_t = -0{,}5 \text{ m/s}^2$ y también normal:

$$v = v_0 + a_t . t = 2 - 0{,}5 \cdot 2 = 1 \text{ m/s} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1^2}{5} = 0{,}2 \text{ m/s}^2$$

Por tanto. la aceleración de la partícula será:

$$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_n^{\,2}} = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (0{,}2)^2} = 0{,}54 \text{ m/s}^2$$

d) La aceleración angular se puede obtener de la relación $a_t = \alpha \cdot R$

$$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{-0{,}5 \text{ m/s}^2}{5 \text{ m}} = -0{,}1 \text{ rad/s}^2$$

e) De la ecuación $v = v_0 + a_t . t$, despejamos el tiempo $t = \dfrac{v - v_0}{a_t} = \dfrac{0-2}{-0{,}5} = 4 \text{ s}$

Nota: Comprueba que sale lo mismo que con la ecuación $\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$

f) Calculamos el arco recorrido : $\Delta S = v_0 \cdot t + 1/2\, a_t \cdot t^2 = 2 \cdot 4 - 1/2 \cdot 0{,}5 \cdot 4^2 = 4 \text{ m}$

Número de vueltas $n = \dfrac{\Delta s}{2\pi R} = \dfrac{4 \text{ m}}{2.\pi.5 \text{ m/vuelta}} = 0{,}13$ vueltas

Nota: Comprueba que sale lo mismo calculando $\Delta\varphi$ en radianes y después pasarlos a revoluciones.

$$\Delta \varphi = w_0 \cdot t + 1/2\, \alpha \cdot t^2$$

A.13. Un móvil recorre una circunferencia de radio R = 40 m con una aceleración angular constante de 0,03 rad/s^2. En el instante t =0 se mueve con una velocidad angular de 0,05 rad/s. Calcula a_t, a_n y a en el instante t = 5 s. Sol: 1,2 m/s^2 , 1,6 m/s^2 , 2 m/s^2

PROBLEMAS

1.- Un móvil inicia su movimiento desde el punto (0,0). Recorre 2 km hacia el Norte, después se dirige hacia el Este recorriendo 1 km más; a continuación se dirige hacia el Sur desplazándose 4 km, luego toma la dirección Oeste recorriendo 3 km y por último recorre 1 km hacia el Norte. Calcula:

a) Los desplazamientos parciales. Sol: (0,2) , (1,0) , (0,-4) , (-3,0) , (0,1)
b) El desplazamiento total. Sol: (-2,-1)
c) La distancia recorrida. Sol: 11 km
d) ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra al final?. Sol: $\sqrt{5}$ km

2.- El movimiento de una partícula viene dado por x = t, y = 2t –1, z = t +1, en donde x,y,z se miden en metros y t en segundos. Calcula:

a) La posición de la partícula en cualquier instante.
b) La posición inicial de la partícula. Sol: (0,-1,1)
c) La posición de la partícula a los 5 s. Sol: (5,9,6)
d) ¿A qué distancia del origen del sistema de referencia se encuentra la partícula en ese instante (t = 5 s)?. Sol: 11,9 m
e) ¿Qué trayectoria sigue la partícula?. Sol: una recta

3.- Un punto se mueve según las ecuaciones $x = 2 - t$, $y = t^2$. Calcula:

a) La posición inicial. Sol: (2,0)
b) La posición 4 s después. Sol: (-2, 16)
c) El desplazamiento en ese intervalo de tiempo. Sol: (-4, 16)
d) Ecuación de la trayectoria. Sol: $y = x^2 - 4x + 4$

4.- Una partícula se mueve según las ecuaciones: $x = t^3$, $y = 2t$, $z = 1$, en unidades del S.I. Calcula:

a) La velocidad media en el intervalo 2 a 5 s. Sol: $39\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ m/s
b) La velocidad en cualquier instante. Sol: $3\,t^2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ m/s
c) La velocidad para t = 0 s. Sol: $2\,\vec{j}$ m/s
d) La aceleración en cualquier instante. Sol: $6t\,\vec{i}$ m/s^2
e) La aceleración tangencial en cualquier instante. Sol: $a_t = \dfrac{18\,t^3}{\sqrt{9t^4+4}}$
f) La aceleración normal en cualquier instante. Sol: $a_n = \dfrac{12\,t}{\sqrt{9t^4+4}}$
g) El módulo de la velocidad, aceleración, aceleración tangencial y aceleración normal para t = 1s.

5.- Una partícula se mueve a lo largo del eje X según la ecuación: $x = t^2 - t - 2$, en unidades del S.I.. Calcula:

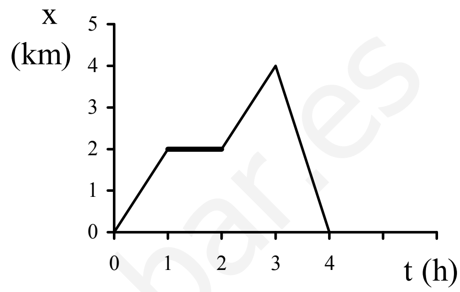
a) La posición inicial de la partícula. Sol: $x_0 = -2$ m
b) ¿En qué instantes pasa la partícula por el origen de coordenadas?. Sol: t = 2 s
c) ¿Dónde se encuentra la partícula al cabo de 5 s?. Sol: 18 m
d) La velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo 2 a 3s. Sol: 4 m/s
e) La velocidad en los instantes t = 2s y t = 5s. Sol: 3 y 9 m/s

6.- Un tren metropolitano parte de una estación con aceleración constante y al cabo de 10 s alcanza una velocidad de 72 km/h. Mantiene esa velocidad durante 2 minutos. Al llegar a la estación siguiente, frena uniformemente recorriendo 200 m hasta parar. Se supone movimiento rectilíneo. Calcula:

a) La aceleración en la primera fase del movimiento. <u>Sol</u>: 2 m/s^2
b) El espacio que recorre en la primera fase. <u>Sol</u>: 100 m
c) La aceleración que tiene en la última fase. <u>Sol</u>: - 1 m/s^2
d) Tiempo que ha estado en movimiento en la última fase. <u>Sol</u>: 20 s
e) Espacio total recorrido. <u>Sol</u>: 2.700 m
f) Dibuja los diagramas a-t , v-t y x-t.

7.- El diagrama x-t de un movimiento rectilíneo viene dado por la figura que se muestra.

a) Da toda la información de este movimiento.
b) Dibuja el diagrama v-t.



8.- Desde la azotea de un edificio de 80 m de altura se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 20 m/s. Calcula:

a) Altura respecto a la calle a la que se encuentra 1 s después de ser lanzada. <u>Sol</u>: 95,1 m
b) Altura máxima que alcanza sobre la calle. <u>Sol</u>: 100,4 m
c) Posición respecto a la calle a los 4 s. <u>Sol</u>: 81,6 m
d) Tiempo que tarda en llegar a la calle. <u>Sol</u>: 6,57 s
e) Velocidad que tiene a los 3 s. <u>Sol</u>: - 9,4 m/s
f) Velocidad con que llega al suelo. <u>Sol</u>: - 44,38 m/s

9.- Desde un punto del suelo se lanza un cuerpo A verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. Desde otro punto, situado 70 m más arriba sobre la misma vertical, 2 s más tarde se deja caer otro cuerpo B sin velocidad inicial. Suponiendo que la aceleración de la gravedad es 10 m/s^2 y que la resistencia del aire es despreciable, determina:

a) Las ecuaciones de los movimientos de ambos móviles.
b) La altura a la que chocarán ambos cuerpos. <u>Sol</u>: 25 m
c) Sus velocidades en el instante del choque. <u>Sol</u>: - 20 m/s , - 30 m/s

10.- Por un punto pasa un cuerpo con velocidad constante de 20 m/s. Dos segundos más tarde, parte de dicho punto en la misma dirección y sentido otro cuerpo con aceleración constante de 2 m/s^2. Calcula:

a) Tiempo que tarda el segundo cuerpo en alcanzar al primero. <u>Sol</u>: 21,83 s
b) ¿A qué distancia lo alcanzará?. <u>Sol</u>: 476,6 m
c) Velocidad que tiene cada uno en ese instante. <u>Sol</u>: 20 y 43,66 m/s

11.- Desde un acantilado de 60 m de altura se lanza un cuerpo horizontalmente con una velocidad de 20 m/s. Calcula, tomando g = 10 m/s^2

a) Posición del cuerpo 2 s después. <u>Sol</u>: $40\,\vec{i} + 40\,\vec{j}$ m
b) Velocidad que tiene en ese instante. <u>Sol</u>: $20\,\vec{i} - 20\,\vec{j}$ m/s
c) Tiempo que tarda en llegar a la superficie del agua. <u>Sol</u>: 3,46 s

d) Velocidad que tiene en ese instante y dirección de caída. Sol: 39,96 m/s formando un ángulo de 60º con el agua
e) Valor del alcance máximo. Sol: 69,2 m
f) Punto de la trayectoria en el que $\left|\vec{V}_X\right| = \left|\vec{V}_Y\right|$. Sol: (40,40) m

12.- Un cañón dispara un proyectil con una velocidad de 400 m/s y un ángulo de elevación de 30º. Calcula, tomando $g = 10\ m/s^2$:
a) La posición, la velocidad y la dirección del proyectil a los 5 s.
Sol: ($1.000\sqrt{3}$, 875) m ; 377,49 m/s formando un ángulo de 23,4º con la horizontal.
b) En qué instantes el proyectil se encuentra a 1.000 m de altura. ¿Qué velocidad tiene en esos instantes?. Sol: 5,86 s ; 34,14 s ; 374,15 m/s
c) Altura máxima alcanzada por el proyectil. Sol: 2.000 m
d) Velocidad en ese instante. Sol: ($200\sqrt{3}$, 0) m/s
e) Alcance máximo. Sol: $8.000\sqrt{3}$ m
f) ¿Con qué velocidad llega a la horizontal del punto de lanzamiento?.Sol: ($200\sqrt{3}$, -200)
g) Ecuación de la trayectoria. Sol: $y = x / \sqrt{3} - x^2 / 24.000$

13.- Un futbolista chuta hacia la portería con una velocidad de 15 m/s y un ángulo de inclinación de 30° en el momento en que se encuentra a 15,6 m de la portería. Calcula la altura que alcanza el balón cuando pasa por la línea de meta y su velocidad en ese instante.
Sol: 1,9 m ; 13,7 m/s

14.- En unos Juegos Olímpicos un lanzador de jabalina consigue alcanzar una distancia de 90 m con un ángulo de inclinación de 45°. Calcula: a) la velocidad de lanzamiento; b) el tiempo que la jabalina estuvo en el aire.
Sol: a) 29,7 m/s ; b) 4,3 s

15.- Un avión en vuelo horizontal rectilíneo, a una altura de 7.840 m y con una velocidad de 450 km/h deja caer una bomba por la vertical de un punto A del suelo. Si $g = 9,8\ m/s^2$:
a) ¿Al cabo de cuánto tiempo se producirá la explosión de la bomba por choque con el suelo?. Sol: 40 s
b) ¿Qué distancia habrá recorrido entre tanto el avión?. Sol: 5.000 m
c) ¿A qué distancia del punto A se producirá la explosión?. Sol: igual que b)
d) ¿Cuánto tiempo tardará en oírse la explosión en el avión, a contar desde el instante del lanzamiento de la bomba, si la velocidad del sonido en el aire = 340 m/s ?. Sol: 64,8 s

16.- Un jugador de béisbol lanza una pelota con una velocidad de 50 m/s y un ángulo de elevación de 30º. En el mismo instante otro jugador situado a 150 m en la dirección que sigue la pelota, corre para recogerla cuando se encuentra 1 m por encima del suelo, con una velocidad constante de 10 m/s. ¿Llegará a recoger la pelota?. En caso negativo, tiene dos soluciones: correr más deprisa o salir antes. Calcula, tomando $g = 10\ m/s^2$:
a) En el primer caso, ¿con qué velocidad debería correr?. Sol: 13 m/s
b) En el segundo caso, cuánto tiempo antes de lanzar la pelota debe salir. Sol: 1,52 s

17.- Un barquero quiere cruzar un río de 100 m de anchura; para ello rema perpendicularmente a la corriente, imprimiendo a la barca una velocidad de 2 m/s respecto al agua. La velocidad de la corriente es 0,5 m/s. Calcula:

a) Tiempo que tarda en atravesar el río. Sol: 50 s
b) Velocidad de la barca. Sol: 2,06 m/s
c) ¿En qué punto de la orilla opuesta desembarcará?. Sol: desviado 25 m
d) ¿Qué espacio ha recorrido la barca cuando llega a la orilla opuesta?. Sol: 103 m

18.- Un avión que vuela a 900 km/h en el sentido Sur-Norte, se encuentra con un viento que sopla a 200 km/h en el sentido Este-Oeste.
a) ¿Cuál es la velocidad real del avión y la dirección del movimiento?.
Sol: 921,95 km/h , 12,53º Oeste
b) ¿Cómo conseguiría el piloto mantener invariable el rumbo del avión en el sentido Sur-Norte?. Sol: desviarse 12,84º al Este.
c) ¿Cuál sería en este último caso la velocidad del avión?. Sol: 877,5 km/h

19.- Un cuerpo describe una vuelta completa alrededor de un punto. ¿Ha descrito el móvil una trayectoria?. ¿Ha realizado un desplazamiento?. ¿Por qué?.

20.- ¿A qué se debe que un cuerpo con movimiento circular uniforme posea aceleración, si el módulo de su velocidad toma siempre el mismo valor?.

21.- Un disco efectúa un movimiento circular uniformemente variado. ¿Tienen todos sus puntos la misma velocidad angular y lineal en un instante determinado?. ¿Y la misma aceleración angular, tangencial y normal?. Explica las respuestas.

22.- Una rueda gira con velocidad constante de 800 rad/min. Calcula la velocidad lineal de un punto situado a 6 cm del eje y de otro situado a 30 cm del eje. ¿Cuál es la aceleración centrípeta de cada uno de esos puntos?. Sol: 0,8 m/s , 4 m/s , 10,67 m/s^2 , 53,34 m/s^2

23.- Un automóvil circula por una carretera rectilínea con una velocidad inicial de 72 km/h. En ese momento el conductor pisa el acelerador hasta que la velocidad aumenta a 90 km/h tras recorrer 250 m. Sabiendo que las ruedas del coche tienen un radio de 50 cm, calcula:
a) Velocidad angular de las ruedas en los instantes inicial y final. Sol: 40 y 50 rad/s
b) Número de revoluciones que describen entre los dos instantes. Sol: 79,6 vueltas
c) Aceleración angular de las mismas entre los dos instantes. Sol: 0,9 rad/s^2

24.- Una rueda de 20 cm de diámetro gira con una velocidad de 60 rpm, deteniéndose en 5 segundos por la acción de un freno. Si el movimiento ha sido uniformemente retardado, determina: a) Aceleración angular de la rueda. Sol: - 1,26 rad/s^2
b) Número de revoluciones que describe hasta que se para. Sol: 2,5 vueltas
c) Velocidad lineal y la aceleración tangencial de un punto de la periferia de la rueda, 3 s después de comenzar a frenar. Sol: 0,25 m/s , - 0,126 m/s^2

25.- Un volante de 30 cm de diámetro se pone en movimiento con una aceleración de 0,2 rad/s^2.
a) ¿Cuál es su velocidad angular a los 10 s y cuántas revoluciones describe en ese tiempo?. Sol: 2 rad/s , 1,59 revol.
b) ¿Cuánto tiempo tarda en realizar 20 revoluciones?. Sol: 35,4 s
c) ¿Cuáles son las componentes intrínsecas de la aceleración de un punto de la periferia del disco a los 5 s de ponerse en movimiento?. Sol: $a_t = 0{,}03$ m/s^2 , $a_n = 0{,}15$ m/s^2

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1.- El movimiento de una partícula viene dado por la ecuación: $x = - t^2 + 10\ t + 5$, en el S.I. Calcula:

a) En qué instante pasa por el origen de coordenadas. Sol: 10,48 s
b) Qué velocidad tiene en ese instante. Sol: - 10,96 m/s
c) Dibuja los diagramas v–t y a–t.

2.- Una partícula se mueve en el plano XY. Las ecuaciones paramétricas de su movimiento son: $x = 4\ t^2 – 1$, $y = t^2 + 3$, en el S.I. Calcula:

a) La velocidad de la partícula en cualquier instante. Sol: $8\ t\ \vec{i} + 2\ t\ \vec{j}$
b) La velocidad para t = 0. Sol: (0,0)
c) La aceleración en cualquier instante. Sol: 8,24 m/s^2
d) La aceleración para t = 1 s.
e) La ecuación de la trayectoria. Sol: $x - 4\ y + 13 = 0$

3.- Halla las ecuaciones de la velocidad y de la posición de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado sabiendo que su aceleración vale 2 m/s^2 , su velocidad para t =1 s vale 8 m/s y pasa por el origen cuando t = 10 s. Sol: $v = 6 + 2\ t$; $x = - 160 + 6\ t + t^2$

4.- La ecuación vectorial del movimiento de una partícula viene dada por la expresión: $\vec{r} = 2\ t^2\ \vec{i} - t\ \vec{j} + 3\ (t – 1)\ \vec{k}$, expresando la posición en cm y el tiempo en s. Calcula:

a) El vector desplazamiento correspondiente al intervalo de tiempo de 1 a 2 s.
b) La velocidad media en este intervalo.
c) La velocidad instantánea en t = 1 s y t = 2 s. ¿Por qué la velocidad calculada en el apartado anterior está comprendida entre estas dos últimas?.
d) La aceleración instantánea en t = 1 s y t = 2 s.

5.- Las ecuaciones que dan las coordenadas de un punto en movimiento en función del tiempo son: $x = 2\ t$; $y = 5\ t^2$. Halla la ecuación de la trayectoria y el tipo de curva que es. Sol: $y = 5\ x^2 / 4$

6.- Las coordenadas de un punto en movimiento son: $x = 4$ sen $(5\ t)$, $y = 4 \cos (5\ t)$.

a) ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria?. Sol: $x^2 + y^2 = 16$
b) ¿Cuál es la velocidad en el instante t = 1 s ?. Sol: 20 m/s
c) ¿Cuál es la aceleración en el instante anterior?. Sol: 100 m/s^2

7.- Un automóvil arranca con aceleración constante de 2 m/s^2, durando esta aceleración 10 s. A continuación, su velocidad se hace constante durante 2 min, al cabo de los cuales, frena con aceleración de – 4 m/s^2 hasta detenerse. Halla el espacio total recorrido, calcula la velocidad media del trayecto y construye las gráficas v-t y x-t. Sol: 2.550 m ; 18,88 m/s

8.- Desde el borde de un acantilado, un muchacho lanza horizontalmente una piedra al mar, imprimiéndole una velocidad de 20 m/s. Si el borde del acantilado está 50 m por encima del nivel del mar, contesta:

a) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en llegar al agua?. Sol: 3,16 s
b) ¿Cuál es su velocidad y su posición a los 2 s de ser lanzada?. Sol: 28,28 m/s , (40,30) m
c) ¿Qué desplazamiento horizontal experimenta al llegar al agua?. Sol: 63,2 m
d) Determina la ecuación de la trayectoria. Sol: $y = 50 – x^2 / 80$

9.- Una barca intenta atravesar un río de 200 m de ancho, perpendicularmente a la corriente del agua. Sabiendo que la velocidad que desarrolla su motor es de 36 km/h y que la velocidad del agua es de 2 m/s, calcula:
a) Velocidad con que la barca se mueve respecto al punto de partida. Sol: 10,2 m/s
b) Tiempo que invierte en atravesar el río. Sol: 20 s
c) Punto de la otra orilla del río al que llega la barca. Sol: desviada 40 m
d) Dirección, respecto a la corriente de agua, que debería tener la trayectoria de la barca para alcanzar la otra orilla en una posición situada frente a la salida. Sol: 78,46º

10.- Un joven lanza piedras horizontalmente desde lo alto de un acantilado de 25 m de altura. Si desea que choquen contra un islote que se encuentra a 30 m de la base del acantilado, calcula: a) la velocidad con que debe lanzar las piedras ; b) el tiempo que tardan en chocar contra el islote. Sol: a) 13,3 m/s ; b) 2,2 s

11.- Se dispara un cañón con una inclinación de 45º con respecto a la horizontal, siendo la velocidad de salida de 490 m/s. Calcula el alcance, altura máxima y tiempo necesario para tal avance y tal ascenso.
Nota: $g = 10\ m/s^2$. Sol: 24.010 m , 6.003 m , 34,65 s , 69,3 s

12.- Desde el punto más elevado de un edificio de 18 m de altura se lanza un cuerpo con una velocidad inicial de 15 m/s, formando un ángulo α con la horizontal de tal forma que $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$ y $\cos\alpha = 0{,}8$. Tomando $g = 10\ m/s^2$, halla:
a) Expresión del vector de posición en función del tiempo.
b) Distancia a la que caerá del pie del edificio si el suelo es horizontal. Sol: 36 m
c) Expresión de la velocidad en función del tiempo.
d) Velocidad en el instante del choque con el suelo. Sol: 24,18 m/s
e) Ecuación de la trayectoria. Sol: $y = 18 + 3x/4 - 5x^2/144$
f) Altura máxima que alcanzará. Sol: 22 m

13.- Calcula la velocidad angular del movimiento de rotación de la Tierra. Halla la aceleración centrípeta de un punto del Ecuador expresada en cm/s^2, considerando que el radio de la Tierra = 6.400 km. Sol: $7{,}27 \cdot 10^{-5}$ rad/s , $3{,}38\ cm/s^2$

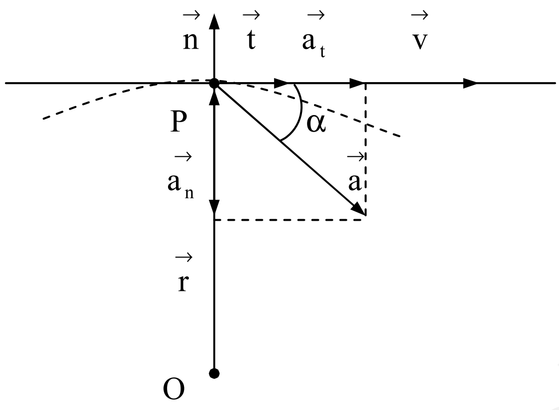
14.- Una rueda de 10 cm de radio comienza a girar partiendo del reposo con aceleración angular constante. Al cabo de 5 s su velocidad angular es de 3.000 rpm. Calcula la aceleración angular y la longitud del arco recorrida por un punto de la periferia de la rueda durante dicho tiempo. Sol: $20\pi\ rad/s^2$, 25π m

15.- Un volante parte del reposo con aceleración constante. Después de dar 100 vueltas, la velocidad es de 300 rpm. Calcula:
a) La aceleración angular. Sol: $0{,}785\ rad/s^2$
b) La aceleración tangencial de un punto situado a 20 cm del eje. Sol: $0{,}157\ m/s^2$

APÉNDICE:

COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACION.

Consideremos un móvil puntual P que se desplaza sobre una circunferencia de radio r.



Tomaremos el centro O de dicha circunferencia como origen de coordenadas. De esta forma se pueden considerar los siguientes vectores:

$\vec{r}$ es el vector de posición del móvil. Su módulo es igual al radio r de la circunferencia.

$\vec{v}$ es la velocidad del móvil, tangente a la trayectoria en cada punto. En el caso que estamos considerando, los vectores de posición y velocidad son perpendiculares entre sí, ya que tienen la dirección del radio y de la tangente a la circunferencia en el punto P, respectivamente.

$\vec{a}$ es la aceleración del móvil, que puede formar un ángulo cualquiera con el vector velocidad.

$\vec{t}$ es el vector unitario tangente a la trayectoria. Este vector se calcula simplemente dividiendo el vector velocidad por la velocidad lineal:

$$\text{como} \quad \vec{v} = v \,.\, \vec{t} \quad , \quad \text{se deduce:} \quad \vec{t} = \frac{\vec{v}}{v}$$

$\vec{n}$ es el vector unitario perpendicular a la trayectoria y sentido hacia el exterior de la misma. Como tiene la dirección y sentido del vector de posición, se obtiene dividiendo éste por su módulo, es decir:

$$\text{como} \quad \vec{r} = r \,.\, \vec{n} \quad , \quad \text{se deduce:} \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Si se proyecta el vector aceleración sobre la tangente y sobre la normal (perpendicular) a la trayectoria, se obtienen las llamadas **componentes intrínsecas de la aceleración**, representadas por $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$, que, para cualquier movimiento en un plano, se pueden definir de la siguiente forma:

Aceleración tangencial ($\vec{a}_t$) es la componente del vector aceleración tangente a la trayectoria en ese punto (en la dirección del vector velocidad).

Aceleración normal ($\vec{a}_n$) es la componente del vector aceleración perpendicular a la trayectoria en ese punto (perpendicular al vector velocidad).

Por consiguiente, las componentes tangencial y normal de la aceleración serán:

$$a_t = a \,.\, \cos\alpha \qquad y \qquad a_n = a \,.\, \mathrm{sen}\,\alpha$$

O bien, la componente de un vector en una dirección es igual al producto escalar del vector por el vector unitario en dicha dirección:

$$a_t = \vec{a} \,.\, \vec{t} \qquad y \qquad a_n = \vec{a} \,.\, \vec{n}$$

<u>Deducción de los valores de a_t y a_n</u>:

a) <u>Aceleración tangencial</u>:

Como se ha visto, en todo movimiento la velocidad lineal tiene igual módulo que el vector velocidad. Por ello, se puede escribir:

$$v^2 = \left|\vec{v}\right|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Si la velocidad del móvil es variable, cada término de la anterior igualdad es una función del tiempo, elevada al cuadrado. Derivando dicha igualdad con respecto al tiempo, obtenemos:

$$2 \,.\, V \,.\, \frac{d\,V}{d\,t} = 2\,V_x \,.\, \frac{d\,Vx}{d\,t} + 2\,V_y \,.\, \frac{d\,Vy}{d\,t} + 2\,V_z \,.\, \frac{d\,Vz}{d\,t}$$

Simplificando y teniendo en cuenta que la derivada de cada componente del vector velocidad es la correspondiente componente del vector aceleración, resulta:

$$V \,.\, \frac{d\,V}{d\,t} = V_x \,.\, a_x + V_y \,.\, a_y + V_z \,.\, a_z = \vec{V} \,.\, \vec{a}$$

Teniendo en cuenta lo que hemos visto anteriormente, se obtiene:

$$\frac{d\,V}{d\,t} = \frac{\vec{a} \,.\, \vec{v}}{v} = \vec{a} \,.\, \vec{t}$$

por lo que:

$$\boxed{a_t = \frac{d\,v}{d\,t}}$$

Esto equivale a decir que la aceleración tangencial de un móvil es la variación de su velocidad lineal por unidad de tiempo. Así pues, **la aceleración tangencial** produce una variación de la velocidad lineal del móvil y, por lo tanto**, hace cambiar el módulo del vector velocidad**.

Cuando a_t tiene el mismo signo que v, el módulo de la velocidad aumenta (movimiento acelerado); cuando a_t tiene signo contrario al de v, el módulo de la velocidad disminuye (movimiento retardado).

- En el movimiento circular existe una sencilla relación entre la aceleración tangencial y la angular. En efecto, a partir de la expresión $v = w \cdot r$, derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dw}{dt} \cdot r \quad , \quad \text{y por tanto:} \quad \boxed{a_t = \alpha \cdot r}$$

b) Aceleración normal:

La deducción que hacemos a continuación es válida para todo tipo de movimiento circular.

Si situamos el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia recorrida por el móvil, los vectores de posición y velocidad serán perpendiculares. Sabemos que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo, por lo que: $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$

Dado que ambos vectores varían al transcurrir el tiempo, podemos derivar la anterior igualdad con respecto al tiempo. La derivada del producto escalar de dos vectores se calcula de la misma forma que la derivada de un producto de dos funciones:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{r} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \quad , \quad \text{sustituyendo, se obtiene:} \quad \vec{a} \cdot \vec{r} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{r} + v^2 = 0 \quad , \quad \text{y dividiendo por r , podemos escribir:} \quad \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r} + \frac{v^2}{r} = 0$$

pero el vector $\vec{r}$ entre r es el vector unitario $\vec{n}$ en la dirección y sentido de $\vec{r}$, por consiguiente: $\vec{a} \cdot \vec{n} + \frac{v^2}{r} = 0$, es decir: $\boxed{a_n = -\frac{v^2}{r}}$

El signo negativo indica que **la aceleración normal** tiene sentido contrario al del vector $\vec{n}$, es decir, está dirigida hacia el centro de la circunferencia recorrida por el móvil, por eso también se le llama **aceleración centrípeta**. Se deduce que **la aceleración normal supone un cambio en la dirección del movimiento**.

Por ello, para que exista aceleración normal es necesario:

1) Que la velocidad del móvil no sea nula. Para lo cual el móvil ha de estar en movimiento.

2) Que el radio de la circunferencia descrita no sea infinito. Para lo cual la trayectoria no ha de ser recta (una circunferencia de radio infinito es una recta).

El cumplimiento simultáneo de ambas condiciones supone un cambio en la dirección del movimiento.

- En el movimiento circular, la aceleración normal puede expresarse también en función de la velocidad angular:

$$a_n = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(w.\,r)^2}{r}$$, simplificando: $$\boxed{a_n = -\,w^2.\,r}$$