

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$

Resolución

a) Puesto que para $x = 2$ se anula el denominador pero no el numerador, el límite es $\pm\infty$.

Estudiamos los límites por la izquierda y por la derecha del punto 2 para analizar sus signos:

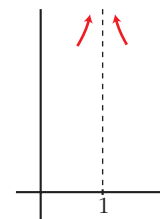
IZQUIERDA: $2 - 0,01 = 1,99$; $\frac{1,99+1}{1,99-2} = -299 < 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

DERECHA: $2 + 0,01 = 2,01$; $\frac{2,01+1}{2,01-2} = 301 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$



b) Puesto que para $x = 1$ se anula el denominador pero no el numerador, el límite es $\pm\infty$. Pero, además, tanto el numerador como el denominador son positivos en las proximidades del punto $x = 1$.

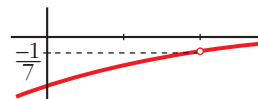
Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$



c) Para $x = 2$ se anulan el numerador y el denominador.

Puede simplificarse la fracción dividiendo ambos por $(x-2)$:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \frac{x-3}{x+5}$$



Ya no se anula el denominador, y el límite puede obtenerse sustituyendo x por 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+5} = -\frac{1}{7}$$

d) Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 2$. Por tanto, podemos simplificar la fracción:

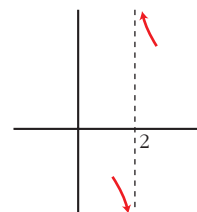
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2-3x)}{(x-2)(x^2-5x+6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$$

Ahora, para $x = 2$, observamos que se anula el denominador pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$. Veamos sus signos:

A la izquierda: $x = 2 - 0,01 = 1,99 \rightarrow \frac{1,99^2 - 3 \cdot 1,99}{1,99^2 - 5 \cdot 1,99 + 6} = \frac{-}{+} = -\infty$

A la derecha: $x = 2 + 0,01 = 2,01 \rightarrow \frac{2,01^2 - 3 \cdot 2,01}{2,01^2 - 5 \cdot 2,01 + 6} = \frac{-}{-} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$. No existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.



e) Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 3$.

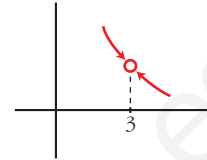
Por tanto, podemos simplificar la fracción:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2-2x)}{(x-3)(x^2-4x+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$$

El denominador ya no se anula para $x = 3$.

Por tanto, para hallar el límite, simplemente sustituimos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \frac{3^2-2 \cdot 3}{3^2-4 \cdot 3+4} = 3$$



2 Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ en $-2, 0$ y 2

b) $f(x) = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$ en $2, 0$ y 3

c) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$ en 1 y -3

d) $f(x) = \frac{x^4}{x^3+3x^2}$ en 0 y -3

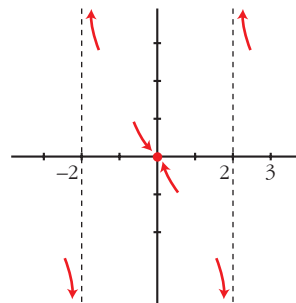
Resolución

a) $f(x) = \frac{x^3}{(x+2)(x-2)}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

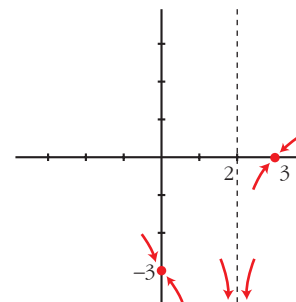


b) $f(x) = \frac{4(x-3)}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

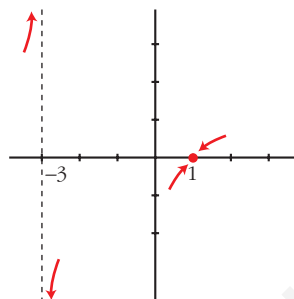
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$



$$c) f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

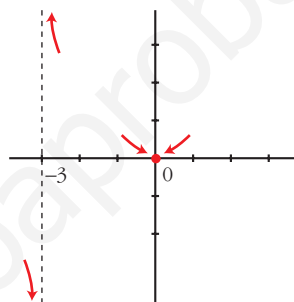
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$



$$d) f(x) = \frac{x^4}{x^2(x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$



www.yoquieroaprobar.es