Sistemas de ecuaciones lineales

1. Introducción

Partimos de que hemos estudiado las matrices y determinantes.

Una expresión de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ es una ecuación lineal con n incógnitas.

Los números a_i se llaman coeficientes; y a "b" se le llama termino independiente. La linealidad viene dada por que las incógnitas "x_i" tienen exponente 1 y no se multiplican entre sí.

Se llama solución de esta ecuación a cada una de las n-tuplas valores de los x_i, que hacen que se cumpla la identidad.

Decimos que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

1.1 Sistema de ecuaciones lineales. Soluciones.

Así un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de igualdades de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 & E_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 & E_2 \\ ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m & E_m \end{cases}$$

Las incógnitas son $x_1, x_2, ..., x_n$; también utilizaremos x, y, z, t, ….

Los coeficientes son las a_{ij}, que es el coeficiente de la incógnita x_j de la i-ésima ecuación.

Los términos independientes son los b_i

Diremos que una n-tupla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es una solución de un sistema de ecuaciones lineales cuando al sustituir las incógnitas por los números s_i se verifican todas y cada una de las igualdades.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones.

Poner un ejemplo

1.2 Tipos de sistemas de ecuaciones lineales.

Los sistemas de ecuaciones pueden clasificarse según dos criterios.

1) Según el valor de los términos independientes serán:

- Homogéneos, cuando todos los términos independientes sean nulos.

Ejemplo: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x-7y=0 \end{cases}$

- No homogéneos, cuando algún término independiente es no nulo.

Ejemplo: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y=2 \\ x-y+3z=1 \end{cases}$

2) Según el número de soluciones que tenga. Un sistema de ecuaciones puede tener una solución única, múltiple o no tener solución:

- SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO S.C.D. si tiene una única solución

Ejemplo: $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=3 \\ x+2y-5z=0 \end{cases}$ Solución (1, 2, 1)

- SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO S.C.I. si tiene infinitas soluciones.

Ejemplo: $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x-y+2z=3 \end{cases}$ Solución $\left(\frac{6-\alpha}{5},\frac{3+7\alpha}{5},\alpha\right)_{\alpha\in R}$ (nota: $E_3=E_1+E_2$)

- SISTEMA INCOMPATIBLE S.I. si no tiene solución.

Ejemplo: $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=3 \\ 5y-7z=7 \end{cases}$ no tiene solución. (nota: $E_3=E_2-2E_1$, para los primeros términos pero no para los términos independientes).

Clasificar un sistema por este criterio se denomina DISCUTIR el sistema.

1.3 Expresiones de los sistemas de ecuaciones lineales.

Podemos expresar un sistema de 3 formas diferentes:

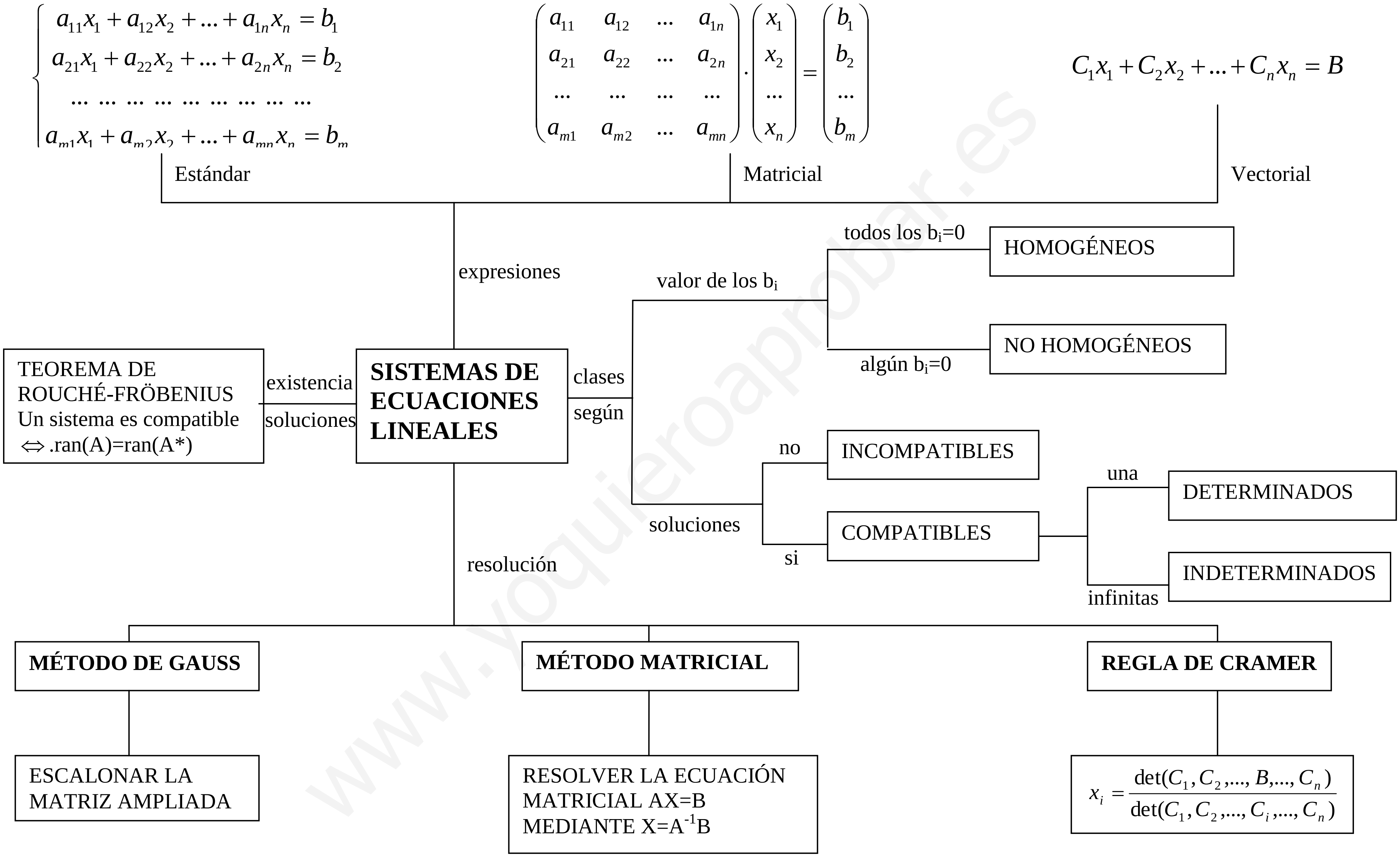
1) General
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2) Matricial
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\textit{Matriz de coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Matriz de} \\ \textit{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Matriz de} \\ \textit{tnos.indep.}}} \qquad A^* = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}}_{\textit{Matriz ampliada}}$$

simbólicamente AX=B

De forma más abreviada y para su resolución por Gauss se suele utilizar la matriz ampliada A*.

3) Vectorial $C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n = B$


$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$
$C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = B$
Estándar
Matricial
Vectorial
expresiones
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS Un sistema es compatible $\Leftrightarrow$ .ran(A)=ran(A*)
existencia
soluciones
clases según
valor de los b_i
todos los $b_i=0$
HOMOGÉNEOS
algún $b_i=0$
NO HOMOGÉNEOS
soluciones
no
INCOMPATIBLES
si
COMPATIBLES
una
DETERMINADOS
infinitas
INDETERMINADOS
resolución
MÉTODO DE GAUSS
ESCALONAR LA MATRIZ AMPLIADA
MÉTODO MATRICIAL
RESOLVER LA ECUACIÓN MATRICIAL AX=B MEDIANTE $X=A^{-1}B$
REGLA DE CRAMER
$x_i = \dfrac{\det(C_1, C_2, \dots, B, \dots, C_n)}{\det(C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_n)}$

2. Teorema de Rouché-Fröbenius. Sistema compatibles

El teorema de Rouché-Fröbenius nos da la condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Teorema de Rouché-Fröbenius:

"Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es compatible (tiene solución) si, y sólo si, el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada."

$$Sistema\ compatible \Leftrightarrow ran(A) = ran(A^*)$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea S un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es compatible $\Rightarrow$ existe al menos una solución $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Tomando la expresión vectorial del sistema

$S \equiv C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n = B$ si $s_1, s_2, \ldots, s_n$. es solución de S $\Leftrightarrow$ $C_1s_1 + C_2s_2 + \ldots + C_ns_n = B$

$\Leftrightarrow$ B es combinación lineal de $C_1, C_2, \ldots, C_n$ $\Leftrightarrow$ $ran(C_1, C_2, \ldots, C_n) = ran(C_1, C_2, \ldots, C_n, B)$

$\Leftrightarrow$ $ran(A) = ran(A^*)$

$\Leftarrow$) Si $ran(A) = ran(A^*)$ la última columna de la matriz ampliada es combinación lineal de las restantes columnas, ya que cualquier menor principal de A* lo es a su vez de A $\Leftrightarrow$ existen n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ talque $C_1s_1 + C_2s_2 + \ldots + C_ns_n = B$ $\Leftrightarrow$ $s_1, s_2, \ldots, s_n$. es solución de S.

En la discusión de un sistema de ecuaciones lineales utilizamos las consecuencias que se deducen de este teorema, siendo n=nº de incógnitas:

- Si $ran(A) \neq ran(A^*)$ entonces el sistema es incompatible (**S.I.**)
- Si $ran(A) = ran(A^*)$ entonces es sistema es compatible y si además

  $ran(A) = ran(A^*) = n$ entonces es un sistema compatible determinado (**S.C.D.**)

  $ran(A) = ran(A^*) < n$ entonces es un sistema compatible indeterminado (**S.C.I.**) con n-ran(A) grados de libertad.

Ejemplo: Clasificar: $\begin{cases} 2x+3y-4z=2 \\ x-\ \ y-\ \ z=1 \\ x+2y+\ \ z=0 \end{cases}$

Calculemos el ran(A) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow ran(A) = ran(A^*) = n = 3 \Rightarrow$ SCD

Ejemplo: Discutir: $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x-y+2z=3 \end{cases}$

Calculamos el ran(A) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$ ran(A)=2

Calculamos el ran(A*) partimos del menor de orden 2 no nulo, anterior y lo orlamos con la columna 2 nos da el det(A) que ya hemos visto es nulo, así que probamos con la columna de términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ ran(A*)=2.

Luego $ran(A) = ran(A^*) = 2 < n = 3 \Rightarrow$ S.C.I. con un grado de libertad.

Ejemplo: Discutir: $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=3 \\ \ \ \ 5y-7z=7 \end{cases}$

Calculamos el ran(A) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$ ran(A)=2

Calculamos el ran(A*) partimos del menor de orden 2 no nulo, anterior y lo orlamos con la columna 2 nos da el det(A) que ya hemos visto es nulo, así que probamos con la columna de términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Rightarrow$ ran(A*)=3.

Luego $ran(A) \neq ran(A^*) \Rightarrow$ S.I.

Ejercicio 1: Estudiar la existencia de soluciones del sistema siguiente: $\begin{cases} 2x-5y+4z+u=-3 \\ x-2y+z-u=5 \\ x-4y+6z+2u=10 \end{cases}$

Solución: $ran(A)=ran(A^*)=3<n=4 \Rightarrow$ S.C.I. con un grado de libertad.

Ejercicio 2: Discutir el siguiente sistema en función del parámetro "a": $\begin{cases} ax+y=a^2 \\ x+ay=1 \end{cases}$

Solución: $|A|=a^2-1$

- $Si\ a\neq \pm 1$, entonces $ran(A)=ran(A^*)=2=n \Rightarrow$ S.C.D
- Si a=1 $ran(A)=ran(A^*)=1<n=2 \Rightarrow$ S.C.I.
- Si a=-1 $ran(A)=1\neq ran(A^*)=2 \Rightarrow$ S.I.

Ejercicio 3: Estudiar la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro "a" $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{cases}$

Solución: $|A|=2a^2+4a-6=2(a-1)(a+3)$

- Si $a\neq -3$ y $a\neq 1$, entonces $ran(A)=ran(A^*)=3=n \Rightarrow$ S.C.D.
- Si a=-3, entonces ran(A)=2 y ran(A*)=3 $\Rightarrow$ S.I.
- Si a=1, entonces $ran(A)=ran(A^*)=2<n=3 \Rightarrow$ S.C.I.

Ejercicio 4: Discutir el sistema según los diferentes valores de "a": $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y-3z=8 \\ ax-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$

Solución: Si ran(A*)=4 entonces es S.I. Como $|A^*|=-8(a-2)$ tenemos:

- Si $a\neq 2$, entonces $ran(A)=3\neq ran(A^*)=4 \Rightarrow$ S.I.
- Si a=2, como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0$ entonces $ran(A)=ran(A^*)=3=n \Rightarrow S.C.D.$

3. Métodos de resolución de sistemas.

Recordemos que para resolver los sistemas, podemos transformarlos en otros equivalentes más simples, entendiendo por sistemas equivalentes dos sistemas que tienen las mismas soluciones.

Las transformaciones que podemos realizar para transformar un sistema en otro equivalente son:

- Intercambiar de orden 2 de sus ecuaciones.
- Intercambiar de orden 2 de sus incógnitas.
- Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un mismo número.
- Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella con las otras.

Existen tres métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones:

3.1 Método de Gauss

El método de Gauss es una generalización del método de reducción conocido para sistemas de 2 ó 3 incógnitas. Y la estrategia es la ya conocida y utilizada para matrices.

Consiste en, partiendo del sistema $\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$ transformarlo en otro equivalente de la forma: $\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}\, x_2 + \ldots + a'_{2n}\, x_n = b'_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a'_{mm-n}\, x_{m-n} + \ldots + a'_{mn}\, x_n = b'_m \end{array}\right.$ (forma escalonada del sistema)

Si utilizásemos la forma matricial ampliada $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ el proceso es similar a escalonar A*, como lo hemos hecho para el cálculo de rangos.

Para discutir un sistema escalonado (todas las ecuaciones son linealmente independientes) nos fijamos en la última ecuación:

- Si es resoluble el sistema es compatible si además

  El nº de ecuaciones = nº de incógnitas es S.C.D. ($ax_i=C$)

  El nº de ecuaciones ‹ nº de incógnitas es S.C.I. con nº de incógnitas - nº de ecuaciones grados de libertad ($0x_i=0$)

- Si no es resoluble (0=C)

En el caso de SCD la solución se obtiene por sustituciones sucesivas ascendentes, de la última ecuación obtenemos una incógnita que sustituimos en la inmediatamente superior de donde se obtiene otra que a su vez, junto con la primera, se sustituye el inmediatamente superior y así sucesivamente hasta llegar a la primera.

<u>Ejemplo</u>: Resolver: $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=3 \\ x+2y-5z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=3 \\ x+2y-5z=0 \end{cases} \underset{E_3-E_1}{\overset{E_2-2E_1}{=}} \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 5y-7z=3 \\ 4y-8z=0 \end{cases} \underset{E_2\leftrightarrow E_3}{\overset{\frac{1}{4}E_3}{=}} \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ y-2z=0 \\ 5y-7z=3 \end{cases} \underset{E_3-5E_2}{=} \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ y-2z=0 \\ 3z=3 \end{cases}$$

De $E_3 \Rightarrow$ z=1

De $E_2 \Rightarrow$ y-2=0 $\Rightarrow$ y=2

De $E_1 \Rightarrow$ x-4+3=0 $\Rightarrow$ x=1

Solución del sistema (1, 2, 1)

Matricialmente sería $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y luego la resolución es como arriba:

<u>Ejercicio 5</u>: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -2x+5y-z=5 \\ x+y+-2z=-3 \end{cases}$

Solución: (1, 2, 3)

Ejercicio 6: $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$

Solución: (6/9, -7/9, 2/9)

Para resolver en el caso de S.C.I. dependiendo de r parámetros, pasamos r variables al 2º miembro, y resolvemos como en el caso anterior.

Ejemplo: $\begin{cases} 3x - 7y + 2z = 0 \\ -2x + 2y - z = 3 \\ x - 5y + z = 3 \end{cases}$

Solución: $\begin{cases} 3x - 7y + 2z = 0 \\ -2x + 2y - z = 3 \\ x - 5y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y + z = 3 \\ 3x - 7y + 2z = 0 \\ -2x + 2y - z = 3 \end{cases} \underset{E_3+2E_1}{\overset{E_2-3E_1}{\Rightarrow}} \begin{cases} x - 5y + z = 3 \\ 8y - z = -9 \\ -8y + z = 9 \end{cases} \overset{E_3+E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x - 5y + z = 3 \\ 8y - z = -9 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow S.C.I.$ dependiendo de un parámetro, pasamos una variable al 2º miembro y realizamos un cambio z=α y resolvemos mediante sustitución ascendente: $\begin{cases} x - 5y = 3 - \alpha \\ 8y = \alpha - 9 \end{cases}$

De $E_2 \Rightarrow x = \dfrac{-3\alpha - 21}{8}$

De $E_1 \Rightarrow y = \dfrac{\alpha - 9}{8}$

Soluciones del sistema : $\left(\dfrac{-3\alpha - 21}{8}, \dfrac{\alpha - 9}{8}, \alpha \right)_{\alpha \in R}$ son infinitas soluciones.

Ejercicio 7: Discutir y resolver: $\begin{cases} 3x - z = -y \\ z = 6 + 5y \end{cases}$

Solución; $\left(\dfrac{6 + 4\alpha}{3}, \alpha, 6 + 5\alpha \right)_{\alpha \in R}$

Ejercicio 8: Discutir y resolver: $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = 6 \end{cases}$ Solución: $\left(\dfrac{2 - 2t}{5}, \dfrac{t - 6}{5}, t \right)_{t \in R}$

Ejercicio 9: Discutir y resolver: $\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 2x + y - z + 4t = 5 \\ x + 2y - 2z + 5t = 4 \end{cases}$ Solución: $(2 - \beta, 1 + \alpha - 2\beta, \alpha, \beta)_{\substack{\alpha \in R \\ \beta \in R}}$

Ejemplo: $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 3x-4y+2z=1 \end{cases}$

Solución: $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 3x-4y+2z=1 \end{cases} \underset{E_{3-2E_1}}{\overset{E_2-E_1}{\Rightarrow}} \begin{cases} 2x-y+z=2 \\ x+2y=-2 \\ -x-2y=-3 \end{cases} \overset{E_3+E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x-y+z=2 \\ x+2y=-2 \\ 0=-5 \end{cases}$ es S.I.

Ejercicio 10: Discutir y resolver: $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y=2 \\ -x-8y+9z=3 \end{cases}$ Solución S.I.

Ejercicios de planteamiento.

3.2 Método de la matriz inversa

Este método consiste en expresar el sistema en forma matricial **A.X=**B y despejar la matriz X, siempre que exista A^{-1}: $\mathbf{X=A^{-1}.B}$

3.3 Regla de Cramer

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas se dice que es Cramer $\Leftrightarrow$

- $|A| \neq 0$
- nº de ecuaciones = nº de incógnitas

Esto quiere decir que el sistema tiene que ser compatible determinado. También se pueden resolver por Cramer los sistemas compatibles indeterminados, introduciendo los parámetros necesarios, como veremos con un ejemplo.

La solución de un sistema de Cramer se obtiene de la siguiente forma:

"El valor de cada incógnita es el cociente de dividir el determinante formado por la matriz de los coeficientes sustituyendo en ella la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita buscada por la columna de términos independientes, por el determinante de la matriz de los coeficientes."

$$\text{Sea}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ **A.X**=B (como $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$) $\Rightarrow$ **X=A^{-1}.B** sabemos que

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ luego } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \ldots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \ldots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \ldots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ de aquí}$$

obtenemos los valores de cada incógnita, así

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}}{|A|} \underset{\substack{\text{por la} \\ \text{primera} \\ \text{columna}}}{\overset{\substack{\text{desarrollo} \\ \text{de este} \\ \text{determinante}}}{=}} \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

……….

$$x_n = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn}}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>: Resolver el sistema: $\begin{cases} x - y + 5z = 13 \\ 3x - 2y + z = 12 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

Solución: primero hay que ver si es de Cramer. Det(A)=25≠0.

Aplicamos la regla:

- $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 13 & -1 & 5 \\ 12 & -2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{25} = \dfrac{100}{25} = 4$

- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 13 & 5 \\ 3 & 12 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{25} = \dfrac{25}{25} = 1$

- $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 3 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{25} = \dfrac{50}{25} = 2$

Solución del sistema (4, 1, 2)

Ejercicio 11: Resolver: $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases}$

Solución: det(A)=2, solución del sistema (5/2, -7/2, -4)

Ejemplo de resolución de SCI por Cramer:

Resolver: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - 2z = 5 \\ x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ ran(A)=2

Orlando el menor de orden 2 para A* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ ran(A*)=2

Luego el sistema es compatible indeterminado dependiendo de un parámetro. Observando el menor de orden 2 $\neq 0$, vemos cuales son las ecuaciones linealmente independientes, y por tanto el sistema es equivalente a $\begin{cases} x - 2y = 3 - \alpha \\ 2x - 3y = 5 + 2\alpha \end{cases}$ que podemos resolver por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3-\alpha & -2\\ 5+2\alpha & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}}=7\alpha+1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3-\alpha\\ 2 & 5+2\alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}}=4\alpha-1$$

Soluciones del sistema: $(7\alpha+1,\ 4\alpha-1,\ \alpha)_{\alpha\in R}$

Ejercicio 12: Resolver $\begin{cases}3x-7y+2z=0\\ -2x+2y-z=3\\ x-5y+z=3\end{cases}$

Soluciones del sistema $\left(\dfrac{-3\alpha-21}{8},\ \dfrac{\alpha-9}{8},\ \alpha\right)_{\alpha\in R}$

4. Sistemas con parámetros

Un sistema lineal es dependiente de uno o más parámetros si alguno de sus coeficientes o términos independientes es variable.

Para discutir estos sistemas de ecuaciones lineales se emplea sobre todo el teorema de Rouché-Fröbenius.

Su resolución se hace como un sistema normal para cada caso.

Si estudiamos los rangos por Gauss es recomendable arrinconar el parámetro en la última ecuación.

Ejemplo: Discutir y resolver cuando sea posible $\begin{cases}x-3y=2\\ 2x+ay=5\end{cases}$

Solución: $\begin{cases}x-3y=2\\ 2x+ay=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-3y=2\\ (a+6)y=1\end{cases}$

- Si a=-6 $\Rightarrow$ S.I. no hay solución
- Si a≠-6 $\Rightarrow$ S.C.D. solución: $\left(\dfrac{2a+15}{a+6},\ \dfrac{1}{a+6}\right)$ son infinitos sistemas cada uno con una solución única.

Ejercicio 13: Discutir y resolver: $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ 4x+ay+2z=a \\ 8x+4y+2az=2a \end{cases}$

Solución: det(A)= $2(2-a)^2(a+4)$

- Si a≠2 y a≠-4 $\Rightarrow$ ran(A)=ran(A*)=3=nº incógnitas $\Rightarrow$ SCD
- Si a=2 ran(A)=ran(A*)=1 < nº incógnitas=3 $\Rightarrow$ SCI
- Si a=-4 ran(A)=2≠ran(A*)=3 $\Rightarrow$ SI

Ejercicio 14: Discutir y resolver: $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \\ 4x+ky=7 \end{cases}$

Solución: si k≠3 $\Rightarrow$ S.I., si k=3 $\Rightarrow$ S.C.D (1,1)

5. Sistemas homogéneos

Un sistema de ecuaciones es homogéneo cuando todos los términos independientes son nulos

Ejemplo: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ -x+3y+4z=0 \end{cases}$

Es evidente que estos sistemas tienen al menos una solución (0,0,0) conocida como solución trivial. Por tanto todos son sistemas compatibles.

Lo interesante es que tengan más soluciones es decir que sean SCI. De echo hay autores que no consideran la trivial como una solución y por tanto dicen que un sistema homogéneo tiene solución solo cuando es SCI.

Se resuelven de forma similar a los generales.

Ejercicio 15: Resolver a) $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ -x-7z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ -x+2y+2z=0 \end{cases}$

Ejercicio 16: Resolver a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ -4x-7y+4z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$