

1º) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible:

$$\text{a) } A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 1+(-1) & 0+1 \\ 2+(-2) & -2+0 & 0+1 \\ 1+0 & -1+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } C + D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } 4A - 2D = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ no se puede hacer}$$

$$\text{d) } 2C - 3D = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 6-6 & 0-0 \\ 0-9 & -4+3 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \{(3 \times 3) \cdot (2 \times 3)\} \text{ no se puede hacer}$$

$$\text{f) } C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11} = (1 \ 3 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = -6$$

$$a_{12} = (1 \ 3 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -1$$

$$a_{13} = (1 \ 3 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4, \quad a_{21} = (0 \ -2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$a_{22} = (0 \ -2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad a_{23} = (0 \ -2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \\ = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } A \cdot B - B \cdot A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } A^3 = A \cdot A \cdot A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 0 \\ 18 & -18 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{i) } (C \cdot D)^t = (C_{(2 \times 3)} \cdot D_{(2 \times 3)})^t \text{ no se puede multiplicar}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } (A + B) \cdot (A - B) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } A^2 - B^2 &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{l) } (A - B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 0 \\ -13 & 13 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2º) Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{a) } A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = [3 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot (-1)] - \\ -[(-1) \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1] = 2 + 6 - 6 = 2$$

$$\text{b) } B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1] - [0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1] = 2$$

$$\text{c) } C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 8 + 27) - (6 + 6 + 6) = 36 - 18 = 18$$

$$\text{d) } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\text{desarrollando por la cuarta fila}) =$$

$$= (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-(1 + 1 + 1 + 1) - (-1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1) = -4$$

$$\text{e) } E = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{(C'_1 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4)\} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - F_1 \\ F'_4 = F_4 - F_1 \end{cases} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{desarrollando por la primera columna}) = (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

3º) Calcular, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 3 \neq 0 \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad |B| = 0 \Rightarrow \nexists B^{-1}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \left(C'_1 = C_1 - \frac{1}{2} C_2 \right) \right\} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad |D| = 4, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1 & 5/4 & -1/4 \\ -5/2 & 1 & 9/4 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

4°) Calcular el rango de las siguientes matrices determinando un menor principal

a) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right)$ matriz de orden (3×4) . Cogemos un menor de orden 2 distinto de

cero (puede ser cualquiera distinto de cero),

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ nos sirve y lo orlamos}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ no nos sirve así que orlamos con la cuarta columna } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ luego todos los}$$

menores posibles de orden 3 son cero con lo cual $R(A) = 2$ (que es el orden del mayor menor distinto de cero).

b) $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ matriz de orden (4×3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ Orlamos y obtenemos}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow R(B) = 3$$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matriz cuadrada de orden 4, luego calculamos directamente el determinante por si es distinto de cero y ya tendríamos el rango.

$$|C| = (-1)^{2+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$R(C) = 4$$

d) $D = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$ matriz de orden (4×5)

Cogemos entonces un menor de orden 2 distinto de cero

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ orlamos con la tercera fila y la primera columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow D = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

a partir de este menor de orden 3 seguimos Orlando con la cuarta fila y la segunda columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ por lo tanto no nos vale, seguimos orlando con la cuarta fila y la quinta columna:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow D = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Luego $R(D) = 4$ pues es el mayor menor que podemos considerar.

5º) Estudiar la resolubilidad de los siguientes sistemas y, si es posible, determinar sus soluciones:

$$a) \begin{cases} 2y - z = 1 \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - z = 9 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Estudiamos los rangos de A y de \bar{A}

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ orlamos } \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \text{ luego } R(A) = 3$$

$$|\bar{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \text{ luego } R(\bar{A}) = 4$$

$R(A) \neq R(\bar{A}) \Rightarrow$ Sistema incompatible S.I. No hay solución.

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y = 4 \\ x + 2z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{el rango no es 3, veremos si es 2, } \exists \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$$

Para ver el rango de \bar{A} podemos partir del mismo menor de orden 2 distinto de cero

$$\text{orlamos } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ el otro menor de orden 3 ya lo hemos estudiado al calcular}$$

$|A|$, luego tenemos que concluir $R(\bar{A}) = 2$, por lo tanto

$R(A) = 2 = R(\bar{A}) < \text{número de incógnitas} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado S.C.I. \Rightarrow ∞ soluciones, eliminamos la tercera ecuación y tomamos como parámetro libre z

$$\begin{cases} x + y = 3 - z & (1) \\ x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Observamos que hemos dejado en el primer miembro de las ecuaciones las variables que me proporcionan el menor principal que hemos utilizado para el cálculo del rango.

Hacemos $z = \alpha$ con lo cual el sistema queda

$$\begin{cases} x + y = 3 - \alpha & (1) \\ x + 2y = 4 & (2) \end{cases} \text{ hacemos } (2) - (1) \Rightarrow y = 4 - (3 - \alpha) = 1 + \alpha \text{ y por lo tanto tenemos}$$

despejando en (1) $x = 3 - \alpha - (1 + \alpha) = 2 - 2\alpha$

Solución: $\{(2 - 2\alpha, 1 + \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 2 & (1) \\ x - y - z = -2 & (2) \\ 2x + 2y - z = 5 & (3) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

$|A| = 6 \Rightarrow R(A) = 3$, utilizando el mismo menor de orden 3 obtenemos que $R(\bar{A}) = 3$ por lo tanto el sistema es *compatible determinado S.C.D.* y tiene una única solución.

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ (3) - (2) &\Rightarrow 3y = 7 \Rightarrow y = 7/3 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1) los valores de x e $y \Rightarrow z = 2 - x - y = 2 - 7/3 \Rightarrow z = -1/3$

$$d) \begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x + y - z = 0 & (2) \\ x + y = 0 & (3) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema homogéneo por lo tanto el sistema siempre es compatible

$$|A| = 0 \Rightarrow R(A) \neq 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow R(A) = 2 = R(\bar{A}) < \text{número de incógnitas} \Rightarrow S.C.I.$$

Eliminamos la primera ecuación y tomamos como parámetro libre x

Hacemos $x = \alpha$ y estudiamos el sistema proporcionado por el menor

$$\begin{cases} y - z = -\alpha \\ y = -\alpha \end{cases} \Rightarrow z = y + \alpha = -\alpha + \alpha = 0$$

Por lo tanto la solución es $\{(\alpha, -\alpha, 0) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$e) \begin{cases} x + y + 2z = 0 & (1) \\ x + 2y + 3z = 0 & (2) \\ x + 3y + 4z = 0 & (3) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$|A| = 0$ elegimos un menor de orden 2 distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow R(A) = R(\bar{A}) = 2 < \text{número de incógnitas} \Rightarrow S.C.I.$$

Eliminamos la tercera ecuación y tomamos como parámetro libre z

$$z = \alpha, \quad \begin{cases} x + y = -2\alpha & (1) \\ x + 2y = -3\alpha & (2) \end{cases} \Rightarrow (2) - (1) \Rightarrow y = -\alpha, \quad x = -2\alpha - y = -2\alpha + \alpha = -\alpha$$

Por lo tanto la solución es $\{(-\alpha, -\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$f) \begin{cases} x + y + z + t = 0 & (1) \\ x + y - z + t = 0 & (2) \\ x + y + t = 0 & (3) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ orlamos con la primera columna y la segunda columna $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, al tener dos columnas iguales, la otra posibilidad con la primera columna pasa exactamente igual por lo tanto $R(A) = R(\bar{A}) = 2 \Rightarrow S.C.I.$

Eliminamos la primera ecuación y tomamos como parámetros libres x e y

$$x = \alpha, \quad y = \beta \Rightarrow \begin{cases} -z + t = -\alpha - \beta & (2) \\ t = -\alpha - \beta & (3) \end{cases} \Rightarrow z = \alpha + \beta + t = \alpha + \beta - \alpha - \beta = 0$$

Por tanto la solución es $\{(\alpha, \beta, 0, -\alpha - \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$$g) \begin{cases} x + y - z + t = 0 & (1) \\ 2x + 2y - 2z + 2t = 0 & (2) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R(A) = R(\bar{A}) = 1 < \text{número de incógnitas} \Rightarrow S.C.I.$$

Como el rango es uno nuestro menor será cualquier número de la matriz, por ejemplo el número 1 que ocupa la posición a_{11}

Eliminamos la segunda ecuación y tomamos como parámetros libres y, z, t

$$y = \alpha, \quad z = \beta, \quad t = \gamma, \quad \Leftrightarrow \quad x = -\alpha + \beta - \gamma$$

Por lo tanto la solución es $\{(-\alpha + \beta - \gamma, \alpha, \beta, \gamma) / \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

6º) Resolver por la regla de Cramer

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + 4z = 13 \\ 3x - y + 2z = -3 \\ -3x + 5y - z = 9 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = 48$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-186}{48} = -\frac{31}{8}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 13 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{8}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 13 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 9 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9}{2}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x - 3y + 3z = 0 \\ 6x + y - 9z = 9 \\ 2x - 5y - 6z = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -9 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \quad |A| = -354$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 9 & 1 & -9 \\ 5 & -5 & -6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-177}{-354} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & -9 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-354} = 0, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & -9 \\ 2 & -5 & -6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{236}{-354} = -\frac{2}{3}$$