Opción A

Ejercicio 1.

Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B - C = D$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$X \in M_{3\times 2}$. La mejor forma de resolver esta ecuación matricial, dado que las matrices que intervienen en el producto tienen pocos ceros, es la siguiente:

$$A \cdot X \cdot B - C = D \Rightarrow A \cdot X \cdot B = D + C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (D + C) \cdot B^{-1}$$

$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot (D + C) \cdot B^{-1}$ *, entonces calculamos las inversas de A y B*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 - 12 - 3 = -2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2$$

$$\begin{matrix} B_{11} = 1 & B_{21} = -(-3) = 3 \\ B_{12} = -1 & B_{22} = -5 \end{matrix} \qquad \Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & 4 \\ 19 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

Probar, aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}_{F_1=F_1+F_2+F_3} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}_{\substack{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1}} =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Ejercicio 3.

Calcula para qué valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y halla A^{-1} para x =3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -x^2+6-1 = 5-x^2$$

$$A^{-1} \ \ existe \Leftrightarrow |A| \neq 0 \ ; \ 5-x^2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow A \ admite \ inversa \ si \ x \neq \sqrt{5} \ \ y \ \ x \neq -\sqrt{5}$$

$$para \ \ x=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ |A| = -4$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 18 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \quad \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 18 & 10 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix}_{\substack{C_1=C_1-C_5 \\ C_2=C_2-C_5 \\ C_3=C_3-C_5 \\ C_4=C_4-C_5}} = \begin{vmatrix} 1-2a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & a \\ 2a-1 & 2a-1 & 2a-1 & 2a-1 & 1-a \end{vmatrix}_{F_5=F_5+F_1+F_2+F_3+F_4} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+3a \end{vmatrix} = (1-2a)^4 \cdot (1+3a)$$

Opción B

Ejercicio 1.

Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I - 2A$, donde I denota la matriz identidad.

- Probar que $\det(A) \neq 0$ y encontrar A^{-1}.
- Calcular dos números p y q tales que $A^4 = p \cdot I + q \cdot A$.
- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Sabemos que se cumple $A^2 = I - 2A \Rightarrow A^2 + 2A = I \Rightarrow A(A+2I) = I \Rightarrow |A(A+2I)| = |I| \Rightarrow$
$\Rightarrow |A||A+2I| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0.$

Como tenemos $A(A+2I) = I \Rightarrow A^{-1} = A + 2I$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (I-2A)\cdot(I-2A) = I - 4A + 4A^2 = I - 4A + 4(I-2A) = 5I - 12A$, *entonces*
$p = 5$ *y* $q = -12$

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & k\end{pmatrix} \Rightarrow \quad A^2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2+k\\ -2+k & 1+k^2\end{pmatrix}$$

$$I-2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & 2k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1-2k\end{pmatrix} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}5 & -2+k\\ -2+k & 1+k^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1-2k\end{pmatrix}$$

$$entonces \quad \begin{cases}-2+k=-2\\ 1+k^2=1-2k\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}k=0\\ k^2+2k=0 \Rightarrow k=0\,,\; k=-2\end{cases} \Rightarrow\; k=0$$

Ejercicio 2.

- Sea A una matriz 4×4 tal que $|A|=-2$, calcula, justificando la respuesta:
  $|3A|$; $|-A^{-1}|$; $|A^4|$; $|2A\cdot A^{-1}|$; $|A\cdot A^t|$; $\left|\left(A^t\right)^{-1}\right|$; $\left|\left(A^{-1}\right)^t\right|$

- Demostrar que si A es una matriz 3×3 tal que $A^t=-A$, entonces $|A|=0$. ¿Y si A es una matriz $n\times n$, se verifica lo anterior?

$* \; |3A|=3^4\cdot|A|=81\cdot(-2)=-162 \qquad (A\ es\ una\ matriz\ 4\times 4)$

$$Como \quad A\cdot A^{-1}=I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}|=|I| \Rightarrow |A|\cdot|A^{-1}|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

$* \; |-A^{-1}|=(-1)^4\cdot|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=-\dfrac{1}{2}$

$* \; |A^4|=|A\cdot A\cdot A\cdot A|=|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A|=(-2)^4=16$

$* \; |2A\cdot A^{-1}|=|2I|=2^4\cdot|I|=16$

$* \; |A\cdot A^t|=|A|\cdot|A^t|=|A|\cdot|A|=(-2)^2=4$

$* \; \left|\left(A^t\right)^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A^t|}=\dfrac{1}{|A|}=-\dfrac{1}{2}$

$* \; \left|\left(A^{-1}\right)^t\right|=|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=-\dfrac{1}{2}$

Sabemos que se cumple $|A|=|A^t|$; *como* $A\in M_{3\times 3} \Rightarrow |-A|=(-1)^3\cdot|A|=-|A|$, *entonces*

$A^t=-A \Rightarrow |A^t|=|-A| \Rightarrow |A|=-|A| \Rightarrow |A|=0$

Si $A\in M_{n\times n} \Rightarrow |-A|=(-1)^n|A| \Rightarrow$ *si n es impar* $|A|=0$, *si n es par no se puede asegurar que* $|A|=0$.

Ejercicio 3.

Hallar una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A^t = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X \cdot A^t = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot X \cdot \left(A^t\right)^{-1}, \quad pero \ \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot X \cdot \left(A^{-1}\right)^t$$

$$|A| = 1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.

Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix}_{\substack{C_4 = C_4 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_2}} = \begin{vmatrix} 5 & x & 0 & -2 \\ x & 5 & -2 & 0 \\ x & 3 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 & 2 \end{vmatrix}_{\substack{F_1 = F_1 + F_4 \\ F_2 = F_2 + F_3}} = \begin{vmatrix} 8 & 2x & 0 & 0 \\ 2x & 8 & 0 & 0 \\ x & 3 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 & 2 \end{vmatrix}_{desarrollo\ por\ C_4} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2x & 0 \\ 2x & 8 & 0 \\ x & 3 & 2 \end{vmatrix}_{desarrollo\ por\ C_3} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2x \\ 2x & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot \left(64 - 4x^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(64 - 4x^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 16 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$$