

PROBLEMAS RESUELTOS DE OPTIMIZACIÓN

Ejercicio 1

Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en euros, viene dada en función de la cantidad invertida, x en euros, por medio de la expresión:

$$R(x) = -0,001x^2 + 0,4x + 3,5$$

Deducir qué cantidad de dinero convendrá invertir en dicho plan.

¿Qué rentabilidad se obtuvo en el caso anterior?

Solución:

Obviamente, convendrá invertir la cantidad que mayor rentabilidad produzca:

$$R'(x) = -0,002x + 0,4$$

$$R'(x) = 0 \Rightarrow -0,002x + 0,4 = 0 \Rightarrow x = \frac{0,4}{0,002} = 200$$

$$R''(x) = -0,002 < 0, \text{ por tanto } x = 200 \text{ € es un máximo de la función } R(x)$$

$$\text{La rentabilidad que se obtiene es } R(200) = -0,001(200)^2 + 0,4 \cdot 200 + 3,5 = 43,5 \text{ €}$$

Ejercicio 2

Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un círculo de radio $\frac{1}{2}$

Solución:

Sean x e y las dimensiones del rectángulo.

El área es $A = x \cdot y$

Además, x e y son los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa 1:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2} \text{ sustituyendo en } A:$$

$$f(x) = x \cdot \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{x^2 - x^4}$$

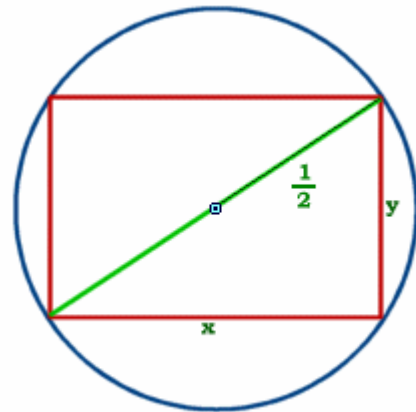
Por tanto, debemos maximizar esta función:

$$f'(x) = \frac{2x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{x^2 - x^4}} = \frac{2x \cdot (1 - 2x^2)}{2x \cdot \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De los dos valores obtenidos, descartamos el negativo por no tener sentido en este problema.

Comprobemos si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es máximo:



$$f''(x) = \frac{-4x \cdot \sqrt{1-x^2} - (1-2x^2) \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-4x \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{x \cdot (1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{\frac{-4x \cdot (1-2x^2) + x \cdot (1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-4x \cdot (1-x^2) + x \cdot (1-2x^2)}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{-4x + 4x^3 + x - 2x^3}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^3}} = \frac{2\frac{2\sqrt{2}}{8} - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{2}{4}\right)\right)^3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3}} < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ es máximo}$$

$$\text{En cuyo caso, } y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las dimensiones se corresponden con un CUADRADO de lado $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio 3

Los costes de fabricación, $C(x)$ en euros, de cierta variedad de salchichas, dependen de la cantidad elaborada (x en kilos) de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C(x) = 10 + 2x$$

El fabricante estima que el precio de venta en euros de cada kilogramo de salchichas viene dado por:

$$P(x) = 20 - \frac{6x^2}{800}$$

Obtener la función de ganancias

¿Qué cantidad de salchichas interesa producir para maximizar ganancias?

Calcular en este caso, el precio de venta y la ganancia que se obtiene.

Solución:

Sea x el número de kilogramos de salchichas a fabricar

$$\text{El precio de venta de un kilogramo de salchichas es } P(x) = 20 - \frac{6x^2}{800}$$

$$\text{En total obtendremos por la venta de } x \text{ kilogramos: } x \cdot P(x) = 20x - \frac{6x^3}{800}$$

La función de ganancias es:

$$G(x) = x \cdot P(x) - C(x) = \left(20x - \frac{6x^3}{800}\right) - (10 + 2x) = -\frac{6x^3}{800} + 18x - 10$$

$$G'(x) = -\frac{18x^2}{800} + 18 = -\frac{9x^2}{400} + 18$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{9x^2}{400} + 18 = 0 \Rightarrow -\frac{9x^2}{400} = -18 \Rightarrow 9x^2 = 18 \cdot 400 = 7200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{7200}{9} = 800 \Rightarrow x = \pm\sqrt{800} = \pm 20\sqrt{2}$$

De los dos valores obtenidos descartamos el negativo

Vamos si el valor positivo es máximo:

$$G''(x) = -\frac{18x}{400}$$

$$\text{Claramente se aprecia que } G''(20\sqrt{2}) = -\frac{18 \cdot 20\sqrt{2}}{400} < 0$$

$x = 20\sqrt{2}$ es un máximo, por lo que conviene fabricar $20\sqrt{2} \cong 28,28$ Kg de salchichas para obtener el máximo beneficio.

El precio de venta de un kilogramo de salchicha será:

$$P(20\sqrt{2}) = 20 - \frac{6 \cdot (20\sqrt{2})^2}{800} = 20 - \frac{6 \cdot 800}{800} = 20 - 6 = 14 \text{ €}$$

Las ganancias obtenidas por la venta de $20\sqrt{2} \cong 28,28$ Kg es:

$$G(20\sqrt{2}) = -\frac{6 \cdot (20\sqrt{2})^3}{800} + 18 \cdot (20\sqrt{2}) - 10 = -6 + 360 \cdot \sqrt{2} - 10 =$$

$$360 \cdot \sqrt{2} - 16 \cong 493,12 \text{ €}$$

Ejercicio 4

Descomponer el número 16 en dos sumandos positivos tales que su producto sea máximo.

Solución:

Sean x e y dichos sumandos: $x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x$

La función a optimizar es la que determina el producto de ambos números:

$$x \cdot y = x \cdot (16 - x) = 16x - x^2 \Rightarrow f(x) = 16x - x^2$$

$$f'(x) = 16 - 2x$$

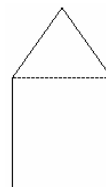
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 16 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{2} = 8$$

$$f''(x) = -2 < 0, \text{ por tanto } x = 8 \text{ es un máximo, } y = 16 - 8 = 8$$

Los dos sumandos son ambos iguales a 8.

Ejercicio 5

Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero como indica la figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6.6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

Solución:

llamemos:

$2x$ = Lado del triángulo equilátero = base del rectángulo

x = Mitad del lado del triángulo equilátero

y = Altura del rectángulo

h = altura del triángulo

El perímetro es: $P = 6x + 2y = 6,6$

Altura del triángulo:

$$h = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3} \cdot x$$

El área total de la ventana es:

$$A = \left(\frac{1}{2} \cdot (2x) \cdot (\sqrt{3} \cdot x) \right) + (2x \cdot y) = \sqrt{3} \cdot x^2 + 2x \cdot y$$

Despejando "y" del perímetro: $2y = 6,6 - 6x \Rightarrow y = 3,3 - 3x$

$f(x) = \sqrt{3} \cdot x^2 + 2x \cdot (3,3 - 3x) = (\sqrt{3} - 6) \cdot x^2 + 6,6x$ es la función de superficie a optimizar.

$$f'(x) = 2 \cdot (\sqrt{3} - 6) \cdot x + 6,6$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow 2 \cdot (\sqrt{3} - 6) \cdot x + 6,6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6,6}{2 \cdot (\sqrt{3} - 6)} = \frac{-3,3}{(\sqrt{3} - 6)} = \\ &= \frac{3,3}{(6 - \sqrt{3})} = \frac{3,3 \cdot (6 + \sqrt{3})}{(36 - 3)} = \frac{3,3 \cdot (6 + \sqrt{3})}{33} = \frac{(6 + \sqrt{3})}{10} \end{aligned}$$

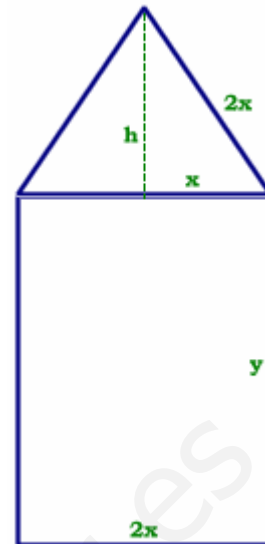
$$f''(x) = 2 \cdot (\sqrt{3} - 6) < 0, \text{ por lo que } \frac{(6 + \sqrt{3})}{10} \text{ es un máximo.}$$

DIMENSIONES DEL RECTÁNGULO:

$$\text{BASE} = 2x = 2 \cdot \frac{(6 + \sqrt{3})}{10} = \frac{(6 + \sqrt{3})}{5} \cong 1,55$$

$$\text{ALTURA} = y = 3,3 - 3 \cdot \frac{(6 + \sqrt{3})}{10} = \frac{33}{10} - \frac{3 \cdot (6 + \sqrt{3})}{10} = \frac{15 - 3\sqrt{3}}{10} \cong 0,98$$

LADO DEL TRIÁNGULO: $2x \cong 1,55$



Ejercicio 6

Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los coches entre las 2 horas y las 6 horas de la tarde viene dada por:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \text{ para } t \in [2,6]$$

¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad? Justifica la respuesta.

¿A qué hora circulan los coches con menor velocidad? Justifica la respuesta.

Solución:

Para determinar las horas en que los coches circulan a mayor y menor velocidad debemos calcular los máximos y mínimos de la función $v(t)$

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8$$

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72$$

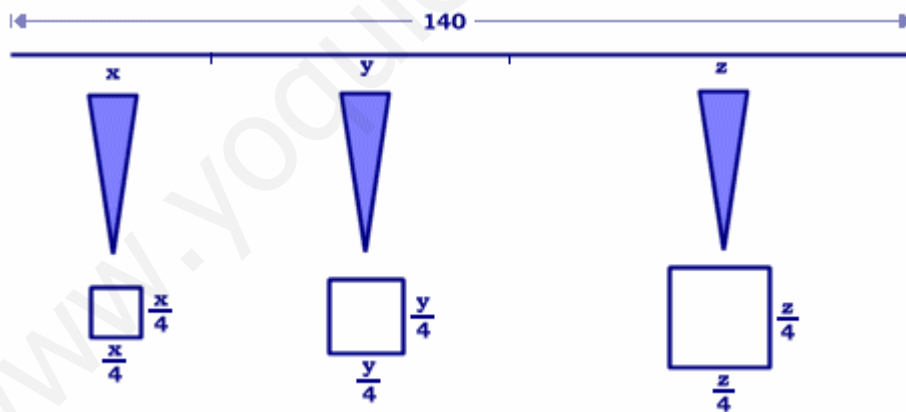
$$v'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 30t + 72 = 0 \Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 864}}{6} = \frac{30 \pm \sqrt{36}}{6} = \begin{cases} \frac{36}{6} = 6 \\ \frac{24}{6} = 4 \end{cases}$$

$$v''(t) = 6t - 30 \Rightarrow \begin{cases} v''(6) = 6 \cdot 6 - 30 = 6 > 0 & \text{mínimo} \\ v''(4) = 6 \cdot 4 - 30 = -6 < 0 & \text{máximo} \end{cases}$$

A las 4 de la tarde los coches circulan a mayor velocidad, mientras que a las 6 circulan a menor velocidad.

Ejercicio 7

Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 metros. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que uno de ellos tenga longitud doble de otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

Solución:

Sean los tres trozos x , y , z

Un ellos ha de medir el doble de otro: $y = 2x$

Además, los tres han de medir 140 m:

$$x + y + z = 140 \Rightarrow z = 140 - x - y = 140 - x - 2x = 140 - 3x$$

La función a optimizar es la suma de áreas de los cuadrados que se forman con cada trozo. Si cada trozo forma un cuadrado, el lado será la cuarta parte de la longitud del trozo correspondiente:

$$A = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \left(\frac{140 - 3x}{4}\right)^2$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \left(\frac{140 - 3x}{4}\right)^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{2x}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \left(\frac{140 - 3x}{4}\right) \cdot \frac{-3}{4} = \frac{1}{16} \cdot (2x + 8x - 840 + 18x) = \\ &= \frac{1}{16} \cdot (-840 + 28x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{16} \cdot (-840 + 28x) = 0 \Rightarrow x = \frac{840}{28} = 30$$

$$f''(x) = \frac{1}{16} \cdot 28 > 0, \quad x = 30 \text{ es un mínimo}$$

Con esto, los tres trozos son:

$$x = 30$$

$$y = 2x = 60$$

$$z = 140 - 3x = 140 - 90 = 50$$

Ejercicio 8

La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $\alpha(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$, donde x es el tiempo transcurrido desde 1 de enero de 1990 contado en años.

¿Hasta que año está creciendo la concentración de ozono?

¿Cuál es la concentración máxima de ozono que se alcanza en esa ciudad?

Solución:

$$\alpha(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$$

$$\alpha'(x) = 15 - 1,2x$$

$$\alpha'(x) = 0 \Rightarrow 15 - 1,2x = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{1,2} = 12,5$$

$$\alpha''(x) = -1,2 < 0, \text{ por tanto, } x = 12,5 \text{ es máximo}$$

La concentración de ozono contaminante ha estado creciendo hasta 12,5 años después, es decir, hasta el 30 de junio de 2002.

La concentración máxima ha sido:

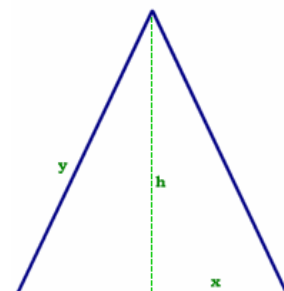
$$\alpha(12,5) = 90 + 15 \cdot 12,5 - 0,6 \cdot (12,5)^2 = 58,75 \text{ microgramos por metro cúbico.}$$

Ejercicio 9

Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:

Sea la base "2x", la altura "h", y uno de los lados iguales "y".



$$2y + 2x = 8 \Rightarrow y = 4 - x$$

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(4 - x)^2 - x^2} = \sqrt{16 - 8x + x^2 - x^2} = \sqrt{16 - 8x} = 2 \cdot \sqrt{4 - 2x}$$

$$\text{La superficie será: } f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2 \cdot \sqrt{4 - 2x} = 2x \cdot \sqrt{4 - 2x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \sqrt{4 - 2x} + 2x \cdot \frac{-2}{2 \cdot \sqrt{4 - 2x}} = 2 \cdot \sqrt{4 - 2x} - \frac{2x}{\sqrt{4 - 2x}} = \\ &= \frac{2 \cdot (4 - 2x) - 2x}{\sqrt{4 - 2x}} = \frac{8 - 4x - 2x}{\sqrt{4 - 2x}} = \frac{8 - 6x}{\sqrt{4 - 2x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8 - 6x}{\sqrt{4 - 2x}} = 0 \Rightarrow 8 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f''(x) = \frac{-6 \cdot \sqrt{4 - 2x} - (8 - 6x) \cdot \frac{-2}{2 \cdot \sqrt{4 - 2x}}}{4 - 2x} = \frac{-6 \cdot \sqrt{4 - 2x} + \frac{8 - 6x}{\sqrt{4 - 2x}}}{4 - 2x} =$$

$$= \frac{\frac{-6 \cdot (4 - 2x)}{\sqrt{4 - 2x}} + \frac{8 - 6x}{\sqrt{4 - 2x}}}{4 - 2x} = \frac{-6 \cdot (4 - 2x) + (8 - 6x)}{(4 - 2x) \cdot \sqrt{4 - 2x}} = \frac{-16 + 6x}{(4 - 2x) \cdot \sqrt{4 - 2x}} =$$

$$= \frac{2 \cdot (-8 + 3x)}{2 \cdot (2 - x) \cdot \sqrt{4 - 2x}} = \frac{(-8 + 3x)}{(2 - x) \cdot \sqrt{4 - 2x}}$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\left(-8 + 3 \cdot \frac{4}{3}\right)}{\left(2 - \frac{4}{3}\right) \cdot \sqrt{4 - 2 \cdot \frac{4}{3}}} = \frac{-4}{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{4 - \frac{8}{3}}} = \frac{-12}{2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}} < 0$$

$x = \frac{4}{3}$ es un máximo.

$$\text{La base del triángulo es } 2x = \frac{8}{3}$$

$$\text{Uno de los lados iguales es: } y = 4 - x = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Se trata de un triángulo equilátero.

$$\text{La altura es } h = 2 \cdot \sqrt{4 - 2x} = 2 \cdot \sqrt{4 - \frac{8}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 10

Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión:

$$N(p) = 300 - 6p$$

Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete.

¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es 15 euros?

¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios?

¿Cuáles son esos ingresos máximos?

Solución:

$N(p) = 300 - 6p$ es el número de viajeros según el precio del billete, p .

a) Por tanto la función que nos proporciona los ingresos en función del precio del billete será el producto del número de viajeros por el precio que paga cada uno:

$$f(p) = N(p) \cdot p = 300p - 6p^2$$

b) $f(15) = 300 \cdot 15 - 6(15)^2 = 3150$ € ingreso diario para un billete de 15€

c) $f'(p) = 300 - 12p$

$$f'(p) = 0 \Rightarrow 300 - 12p = 0 \Rightarrow p = \frac{300}{12} = 25 \text{ €}$$

$$f''(p) = -12 < 0, \text{ por tanto, } p = 25 \text{ € es máximo}$$

d) $f(25) = 300 \cdot 25 - 6(25)^2 = 3750$ € ingresos máximos.

Ejercicio 11

Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos materiales distintos. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro?

Solución:

Sean "x" e "y" los lados (en cm.) de los dos cuadrados respectivamente.

Si la suma de perímetros es 1 metro:

$$4x + 4y = 100 \Rightarrow y = 25 - x$$

La función de costes es:

$$C = 2x^2 + 3y^2 = 2x^2 + 3 \cdot (25 - x)^2 = 2x^2 + 1875 - 150x + 3x^2 = 5x^2 - 150x + 1875$$

$$C(x) = 5x^2 - 150x + 1875$$

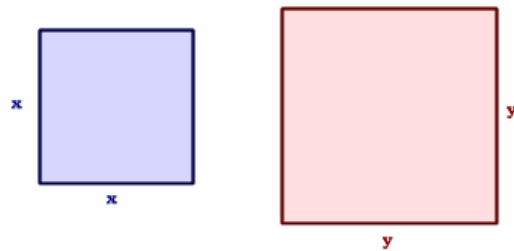
$$C'(x) = 10x - 150; C'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 150 = 0 \Rightarrow x = \frac{150}{10} = 15$$

$$C''(x) = 10 > 0; \text{ por tanto } x = 15 \text{ es mínimo}$$

Los cuadrados deben medir de lados, respectivamente:

$$x = 15 \text{ cm}$$

$$y = 25 - 15 = 10 \text{ cm}$$



Ejercicio 12

Descomponer el número 81 en dos sumandos de forma que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.

Solución:

Sean "x" e "y" ambos sumandos:

$$x + y = 81 \Rightarrow x = 81 - y$$

$$P(y) = x \cdot y^2 = (81 - y) \cdot y^2 = 81y^2 - y^3$$

$$P'(y) = 162y - 3y^2$$

$$P'(y) = 0 \Rightarrow 162y - 3y^2 = 0 \Rightarrow 3y \cdot (54 - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 54 \end{cases}$$

$$P''(y) = 162 - 6y;$$

$$P''(54) = 162 - 6 \cdot 54 = -162 < 0 ; y = 54 \text{ es máximo}$$

$$P''(0) = 162 - 6 \cdot 0 = +162 > 0 ; y = 0 \text{ es mínimo}$$

Los sumando son $y = 54$, $x = 81 - 54 = 27$

Ejercicio 13

Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie interior posible.

- ¿Qué longitud deben tener los postes y el larguero?
- ¿Qué superficie máxima interior tiene la portería?

Solución:

Perímetro de la portería:

$$x + 2y = 10 \Rightarrow x = 10 - 2y$$

La superficie encerrada:

$$S(y) = x \cdot y = (10 - 2y) \cdot y = 10y - 2y^2$$

$$S'(y) = 10 - 4y$$

$$S'(y) = 0 \Rightarrow 10 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$S''(y) = -4 < 0 ; y = 2,5 \text{ es un máximo}$$

Los postes deben medir cada uno $y = 2,5$ m

El larguero deberá medir $x = 10 - 2 \cdot 2,5 = 5$ m

La superficie encerrada será $S(2,5) = 10 \cdot 2,5 - 2(2,5)^2 = 12,5$ m²



Ejercicio 14

Un comercio abre sus puertas a las nueve de la mañana, sin ningún cliente, y las cierra cuando se han marchado todos. La función que representa el número de clientes, dependiendo del número de horas que lleva abierto, es:

$$\alpha(h) = -h^2 + 8h$$

El gasto por cliente decrece a medida que van pasando horas desde la apertura y sigue la función:

$$g(h) = 300 - 25h$$

- ¿En que hora se produce la mayor afluencia de clientes?
- ¿Cuánto gasta el último cliente?
- ¿Cuando hay mayor recaudación, en la cuarta o en la quinta hora?

Solución:

$$a) \alpha(h) = -h^2 + 8h$$

$$C'(h) = -2h + 8$$

$$C'(h) = 0 \Rightarrow -2h + 8 = 0 \Rightarrow h = \frac{8}{2} = 4$$

$C''(h) = -2 < 0$, por tanto, $h = 4$ es máximo:

La mayor afluencia de clientes se produce 4 horas después de abrir, es decir, a las 13h.

b) Cuando el último cliente sale, no queda ninguno:

$$\alpha(h) = -h^2 + 8h = 0 \Rightarrow h \cdot (-h + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h = 0 \\ h = 8 \end{cases}$$

Cuando $h = 0$, es decir, a las 9 de la mañana, el comercio acaba de abrir

Cuando $h = 8$, es decir, a las 5 de la tarde, el comercio acaba de cerrar

A esa hora: $g(8) = 300 - 25 \cdot 8 = 100€$ gasta el último cliente

c) La recaudación en un determinado momento es el producto del número de clientes por lo que gasta cada uno:

$$R(h) = \alpha(h) \cdot g(h)$$

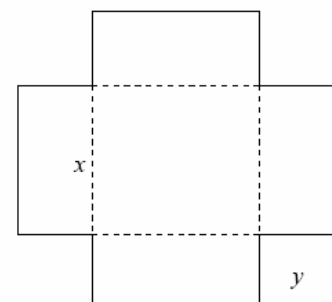
$$R(4) = \alpha(4) \cdot g(4) = (-4^2 + 8 \cdot 4) \cdot (300 - 25 \cdot 4) = 16 \cdot 200 = 3200€$$

$$R(5) = \alpha(5) \cdot g(5) = (-5^2 + 8 \cdot 5) \cdot (300 - 25 \cdot 5) = 15 \cdot 175 = 2625€$$

Se recauda más a las 4 horas de abrir.

Ejercicio 15

Hallar las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 50 m^3 de volumen, que tenga superficie mínima.

Solución:

$$V = x^2 \cdot y = 50 \Rightarrow y = \frac{50}{x^2}$$

La superficie será la suma de cuatro caras laterales iguales y la base cuadrada:

$$S = 4 \cdot x \cdot y + x^2$$

$$f(x) = 4x \cdot \frac{50}{x^2} + x^2 = \frac{200}{x} + x^2$$

$$f'(x) = -\frac{200}{x^2} + 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{200}{x^2} + 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{200}{x^2} \Rightarrow x^3 = 100 \Rightarrow x = \sqrt[3]{100}$$

$$f''(x) = \frac{400}{x^3} + 2$$

$$f''(\sqrt[3]{100}) = \frac{400}{(\sqrt[3]{100})^3} + 2 = \frac{400}{100} + 2 = 6 > 0; \quad x = \sqrt[3]{100} \text{ es un mínimo}$$

Las dimensiones del depósito serán:

$$x = \sqrt[3]{100} \text{ cm}$$

$$y = \frac{50}{(\sqrt[3]{100})^2} = \frac{50 \cdot \sqrt[3]{100}}{100} = \frac{\sqrt[3]{100}}{2} \text{ cm}$$

Ejercicio 16

La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto

es: $C(x) = \frac{x^3}{100} + 8x + 20$

Se define la función de coste medio por unidad como $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$

¿Cuántas unidades x_0 son necesarias producir para que sea mínimo el coste medio por unidad?

¿Qué relación existe entre $Q(x_0)$ y $C'(x_0)$?

Solución:

$$a) \quad Q(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{x^3}{100} + 8x + 20}{x} = \frac{x^2}{100} + 8 + \frac{20}{x}$$

$$Q'(x) = \frac{x}{50} - \frac{20}{x^2}$$

$$Q'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{50} - \frac{20}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{50} = \frac{20}{x^2} \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$$

$$Q''(x) = \frac{1}{50} + \frac{40}{x^3}$$

$$Q'(10) = \frac{1}{50} + \frac{40}{10^3} > 0; x_0 = 10 \text{ es un mínimo}$$

Es necesario producir 10 unidades para que el coste medio por unidad sea mínimo.

$$Q(x) = \frac{x^3}{100} + 8x + 20$$

$$C'(x) = \frac{3x^2}{100} + 8$$

$$C'(x_0) = C'(10) = \frac{3 \cdot 10^2}{100} + 8 = 11$$

$$Q(x_0) = Q(10) = \frac{10^3}{100} + 8 + \frac{20}{10} = \frac{100}{100} + 8 + 2 = 11$$

$Q(x_0)$ y $C'(x_0)$ son iguales.

Ejercicio 17

Un barco B y dos ciudades costeras A y C forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 Km y 5 Km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3 Km/h y caminar a 5 Km/h, ¿a qué distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible?

Solución:

Sea D el punto donde el nadador abandona la costa y continua a nado.

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= x \\ \overline{DC} &= z \\ \overline{BD} &= y \end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \\ &= \sqrt{144} = 12 \end{aligned}$$

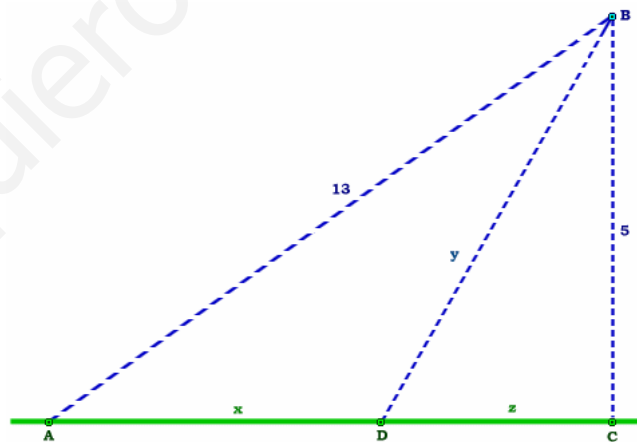
Entonces:

$$\begin{aligned} \overline{DC} &= z \\ \overline{AD} &= x = 12 - z \\ \overline{BD} &= y = \sqrt{25 + z^2} \end{aligned}$$

El tiempo que emplea en ir caminando desde A hasta D es:

Tiempo(h)	-----	Longitud(Km)	-----	5	⇒ t ₁ =	12 - z
1	-----	5	-----			
t ₁	-----	12 - z	-----			

El tiempo que emplea en ir nadando desde D hasta B es:



$$\begin{array}{l} \text{Tiempo(h)} \\ 1 \\ t_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Longitud(Km)} \\ 3 \\ \sqrt{25+z^2} \end{array} \Rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{25+z^2}}{3}$$

$$\text{El tiempo total empleado será: } T(z) = \frac{12-z}{5} + \frac{\sqrt{25+z^2}}{3}$$

$$T'(z) = \frac{-1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2z}{2 \cdot \sqrt{25+z^2}} = \frac{-1}{5} + \frac{z}{3 \cdot \sqrt{25+z^2}}$$

$$T'(z) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{5} + \frac{z}{3 \cdot \sqrt{25+z^2}} = 0 \Rightarrow \frac{-1}{5} + \frac{z}{3 \cdot \sqrt{25+z^2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5z = 3 \cdot \sqrt{25+z^2} \Rightarrow 25z^2 = 9 \cdot (25+z^2) \Rightarrow 225 + 9z^2 - 25z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 225 - 16z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{225}{16}} = \pm \frac{15}{4}$$

$$\begin{aligned} T''(z) &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{25+z^2} - z \cdot \frac{z}{\sqrt{25+z^2}}}{25+z^2} = \frac{1}{3} \frac{\frac{25+z^2}{\sqrt{25+z^2}} - z \cdot \frac{z}{\sqrt{25+z^2}}}{25+z^2} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{25+z^2 - z^2}{(25+z^2) \cdot \sqrt{25+z^2}} = \frac{1}{3} \frac{25}{(25+z^2) \cdot \sqrt{25+z^2}} \end{aligned}$$

Obviamente:

$$T''\left(\frac{15}{4}\right) > 0, \quad z = \frac{15}{4} \text{ es un mínimo:}$$

El hombre deberá abandonar la costa a $x = 12 - z = 12 - \frac{15}{4} = \frac{33}{4} = 8,25$ Km de la ciudad A.

Ejercicio 18

Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función: $I(x) = 28x^2 + 36000x$, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse mediante la función $G(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$, donde x representa la cantidad de unidades vendidas.

Determinar:

La función que define el beneficio anual en euros.

La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. Justificar que es máximo.

El beneficio máximo.

Solución:

a) el beneficio es:

$$B(x) = I(x) - C(x) = (28x^2 + 36000x) - (44x^2 + 12000x + 700000) =$$

$$= -16x^2 + 24000x - 700000$$

$$b) \quad B'(x) = -32x + 24000$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -32x + 24000 = 0 \Rightarrow x = \frac{24000}{32} = 750$$

$$B''(x) = -32 < 0 \Rightarrow x = 750 \text{ es máximo}$$

Deberán venderse 750 unidades

c) El beneficio máximo es:

$$B(750) = -16(750)^2 + 24000 \cdot 750 - 700000 = 8300000 \text{€}$$

Ejercicio 19

La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Hallar los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

Solución:

Sean "x", "y", "z" dichos números:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x + 2y + 3z = 120 \end{cases}$$

$$(e_2 - e_1) : y + 2z = 60 \Rightarrow y = 60 - 2z$$

$$(2e_1 - e_2) : x - z = 0 \Rightarrow x = z$$

El producto es $P = x \cdot y \cdot z = z \cdot (60 - 2z) \cdot z$

La función a maximizar es $f(z) = z \cdot (60 - 2z) \cdot z = 60z^2 - 2z^3$

$$f'(z) = 120z - 6z^2$$

$$f'(z) = 0 \Rightarrow 120z - 6z^2 = 0 \Rightarrow 6z \cdot (20 - z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 20 \end{cases}$$

$$f''(z) = 120 - 12z$$

$$f''(0) = 120 - 12 \cdot 0 = 120 > 0; \quad z = 0 \text{ es un mínimo}$$

$$f''(20) = 120 - 12 \cdot 20 = -120 < 0; \quad z = 20 \text{ es un máximo}$$

$$y = 60 - 2 \cdot 20 = 60 - 40 = 20$$

$$x = z = 20$$

Por tanto, los tres números son iguales a 20.

Ejercicio 20

En los estudios epidemiológicos realizados en determinada población se ha descubierto que el número de personas afectadas por cierta enfermedad viene dado por la función:

$$f(x) = -3x^2 + 72x + 243$$

siendo x el número de días transcurridos desde que se detectó la enfermedad.

Determinar:

El número de días que han de transcurrir hasta que desaparezca la enfermedad.

El número máximo de personas afectadas.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la enfermedad.

Justificar las respuestas.

Solución:

A) La enfermedad desaparece cuando no hay ningún enfermo:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 72x + 243 = 0 \Rightarrow x = \frac{-72 \pm \sqrt{72^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 243}}{-6} =$$

$$= \frac{-72 \pm \sqrt{5184 + 2916}}{-6} = \frac{-72 \pm \sqrt{8100}}{-6} = \frac{-72 \pm 90}{-6} = \begin{cases} x_1 = \frac{-72 - 90}{-6} = 27 \\ x_2 = \frac{-72 + 90}{-6} = -3 \end{cases}$$

Obviamente, no tiene sentido que hayan transcurrido -3 días

Por tanto, han de transcurrir 27 días para que desaparezca la enfermedad.

B) $f'(x) = -6x + 72$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 72 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{72}{6} = 12$$

$$f''(x) = -6 < 0; \quad x_0 = 12 \text{ es un máximo}$$

El número máximo de personas enfermas se da a los 12 días, y el número máximo de personas enfermas es:

$$f(12) = -3 \cdot 12^2 + 72 \cdot 12 + 243 = 675 \text{ personas enfermas}$$

C) La función $f(x)$ es una parábola con coeficiente principal negativo, esto es, con las ramas hacia abajo y un máximo en su vértice:

La enfermedad crecerá entre los días (0,12) y decrecerá entre los días (12,27)

Ejercicio 21

Determinar la mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 metro.

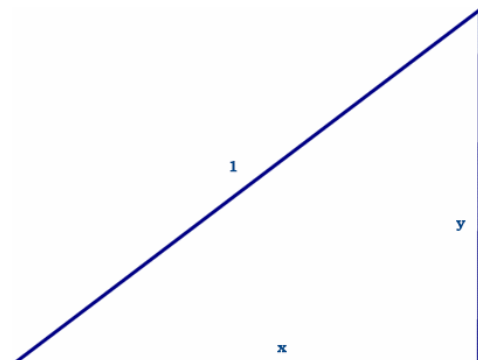
Solución:

El lado mayor es la hipotenusa:

Sean "x" e "y" los catetos del triángulo:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{El área es } S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$



La función a maximizar es $f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x\right) \cdot \sqrt{1 - x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{2 \cdot \sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x^2}{2 \cdot \sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4x \cdot \sqrt{1 - x^2} - (1 - 2x^2) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-4x \cdot (1 - x^2) + x \cdot (1 - 2x^2)}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4x \cdot (1 - x^2) + x \cdot (1 - 2x^2)}{(1 - x^2) \cdot \sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-4x + 4x^3 + x - 2x^3}{(1 - x^2) \cdot \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^3 - 3x}{(1 - x^2) \cdot \sqrt{1 - x^2}}$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{8} - \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}}{\left(1 - \frac{2}{4}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} < 0$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un máximo

Los catetos del triángulo son:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

que es un triángulo rectángulo isósceles.