Materiales didácticos

Bachillerato

Problemas de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Materiales didácticos Bachillerato

Problemas de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Autores:

Ana Yolanda Alvero Coloma
Javier Goicoechea López-Vailo
María Teresa González Lamuela
Jesús Javier Jiménez Ibáñez
José Javier Labarga Álava
José María Mateo Rubio

Coordinación:

José María Mateo Rubio

Gobierno de Navarra
Departamento de
Educación y Cultura

Edita:
Departamento de Educación y Cultura. Gobierno de Navarra

ISBN:
84-235-2079-X

DL: NA-3385-2000

Imprime: Gráficas Ona

Presentación

Con su publicación y distribución, el Departamento de Educación y Cultura del Gobierno de Navarra pretende proporcionar a los profesores y profesoras que van a impartir el Bachillerato un instrumento que les ayude a desarrollar el nuevo currículo y a planificar su práctica docente.

Esta serie de materiales didácticos ofrece propuestas de programación y el desarrollo de unidades didácticas que incluyen sugerencias, orientaciones y actividades que pueden ser aprovechadas de diversos modos por el profesorado, bien incorporándolas a sus propias programaciones, bien adaptándolas a las características de sus alumnos.

Esta iniciativa se enmarca en la voluntad del Departamento de publicar y poner en manos del profesorado todo aquel material didáctico y curricular, elaborado por equipos docentes o por los propios centros, que sirva de ejemplificación y orientación para los diferentes departamentos didácticos.

Jesús Laguna Peña
Consejero de Educación y Cultura

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La idea de esta sencilla publicación surgió como una de las varias actividades a desarrollar en nuestro grupo de trabajo, grupo que tiene su origen en una de las primeras reuniones de coordinación de las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Es interesante resaltar que el grupo lo formamos TODOS los profesores del ámbito del CAP de Tudela que impartimos la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales en 2º de Bachillerato.

Éstos son los objetivos que nos planteamos con esta colección de cuestiones y problemas con soluciones:

1. Tener una base de datos con actividades contrastadas en nuestros centros que nos faciliten el trabajo en cursos sucesivos a los profesores de esta asignatura en la elaboración de pruebas, cuestiones y problemas a proponer, etc.

2. Ser una ayuda para los alumnos en su aprendizaje de los distintos temas de esta asignatura y que les sirva de referencia en la preparación de cualquier examen parcial, final o de Selectividad. Por esta razón, damos las soluciones de las actividades.

3. Transmitir en cierto modo a los otros Centros de Navarra y a la Universidad lo que hacemos y entendemos que son actividades propias del Programa de esta Asignatura en Navarra. Por eso hemos descartado cualquier cuestión que a nuestro modo de ver no esté integrado en dicho programa.

No es nuestra pretensión con este cuaderno sustituir las actividades de un libro de texto en el que normalmente van apareciendo en orden progresivo de dificultad, empezando por cuestiones muy triviales, pero que al principio son necesarias. Nosotros hemos obviado este tipo de cuestiones porque los objetivos son distintos.

Esperamos que este cuaderno sea útil en la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura a todo el que lo utilice. Con esto quedaremos satisfechos.

Sólo nos queda animar a otros posibles grupos a tareas semejantes para entre todos tener una visión más amplia de lo que hacemos y podemos hacer los que nos dedicamos a enseñar esta asignatura.

Para terminar, agradecer a todos los que nos han animado en este trabajo, y en especial a María Luisa Eraso, asesora de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

I. Álgebra

A. Matrices y determinantes

1.- a) Averigua para qué valores de **t** la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ no tiene inversa

b) Si se puede, calcula la inversa de **A** para t =2.

Sol: a) t=3 t=1 b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcular, si es posible: a) $A + 6B^t$, b) $(A \cdot B) \cdot C$, c) $(B \cdot A) \cdot C$, d) C^4

Sol: a) $\begin{pmatrix} 9 & 48 & -2 \\ 1 & 13 & -6 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ *c) (B · A) · C no se puede* *d)* $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden tres, cuyos elementos vienen dados por la expresión $a_{ij} = 2i - j - 2$. Calcular la inversa de A.

Sol: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *No tiene inversa por ser çA ç= 0*

4.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Halla las matrices B que conmutan con A (es decir AB = BA)

Sol: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *con* $a, b \in R$

5.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de m para los que la matriz A no es inversible.

b) Hallar la matriz X que es solución de la ecuación: X A + 2 B = I siendo A la matriz dada para m = 3

Sol: a) m = 1 ó m = - 2 ; $\quad$ *b)* $X = \dfrac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 8 & -10 \\ 51 & 2 & -45 \\ 30 & 0 & -50 \end{pmatrix}$

6.- a) Encuentre una matriz X que verifique la igualdad $A \cdot B - X = A^2$

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcula el determinante de X

c) Calcula, si es posible, la inversa de X

Sol: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *b) 1* $\quad$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

7.-Dadas la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & k \\ -6 & k & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar los valores de k para los cuales existe la matriz inversa de A.

b) Si k = -1, calcular si existe A^{-1}.

c) Resolver la ecuación matricial $X \cdot A - 2I = B^2$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y A la matriz inicial para k = -1.

Sol: a) k ¹ 0 y k ¹ -2 $\quad$ *b)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ *c)* $X = \begin{pmatrix} -12 & -24 & -10 \\ 35 & 71 & 29 \\ 30 & 60 & 24 \end{pmatrix}$

8.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde "a" es un número real:

a) Calcular el valor o los valores reales de "a" para los que A no tiene inversa.

b) Resolver la ecuación AX + B = I, donde A es la matriz inicial para a = 0, I es la matriz identidad y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol: a) a=1 y a=-1 *b)* $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

9.- a) En la ecuación X A + B = C se sabe que:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

1) Despejar X en esa ecuación. 2) Calcular X.

b) ¿Cuánto debe valer "*a*" en la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ para que M tenga inversa?

Sol: a) 1) $X=(C-B)\cdot A^{-1}$ *2)* $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $a \neq -5$

10.- Determinar la matriz X que satisface la ecuación $3X + I = A \cdot B - A^2$ siendo:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e **I** la matriz unidad de orden 3.

Sol: $X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

11.-Determina la matriz desconocida **M** en el siguiente producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -14 & 0 \\ 16 & 22 \end{pmatrix}$$

Sol: $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

12.-Resolver la ecuación matricial: $\mathbf{AX + B^2 = 3\ I}$

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Sol:* $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

13.- Halla la matriz X que cumple la igualdad AX + B = 2C, sabiendo que:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Sol: $X=\begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$

14.- Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valor del parámetro “a” la ecuación AX + B = 2C no tiene solución?.
b) Resolver la ecuación del apartado anterior para el valor a = 0.

Sol: a) a=-2 b) $X=\begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

15.- Hallar una matriz X tal que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Sol: $X = \begin{pmatrix} -10 & 8 & 3 & 0 \\ 25 & -22 & -2 & 0 \\ -12 & 11 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

16.- Despeja X en esta ecuación matricial: AX + X - 3I = 0, sabiendo que A+I tiene inversa.

Sol: $X=(A+I)^{-1}3$

17.- En un colegio se imparten los cursos 1º,2º y 3º. Los profesores tienen asignado un número de horas de clase, tutorías y guardias de acuerdo con la siguiente matriz:

$$M=\begin{array}{c} \\ 1º \\ 2º \\ 3º \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Clase} & \text{Guardias} & \text{Tutorías} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

El colegio paga cada hora de clase a 2000 ptas., cada hora de guardia a 500 ptas. y cada hora de tutoría a 1000 ptas. según el vector: $C=\begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$

El colegio dispone de 5 profesores para primer curso, 4 para segundo y 6 para tercero, representados por el vector P= (5 4 6).

Calcula cada uno de los siguientes productos de matrices e interpreta los resultados:

a) PM b) MC c) PMC

Sol: a) $PM=\begin{pmatrix} CLASE & GUARD & TUTOR \\ 304 & 55 & 47 \end{pmatrix}$ *Representan las horas totales de: clases, guardias y tutorías.*

b) $MC=\begin{pmatrix} 45500 \\ 44000 \\ 46500 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \to 1º\ curso \\ \to 2º\ curso \\ \to 3º\ curso \end{array}$ *Representa el precio total de cada curso.*

c) PMC= 682500 ptas. Es el precio total de todas las actividades de todos los cursos.

18.-La cadena de hoteles NH posee tres hoteles en una ciudad: Excelsior, Paraíso y Oasis. Cada hotel dispone de tres tipos de habitaciones: de lujo, doble e individual. El Excelsior posee 6 habitaciones de lujo, 30 dobles y 10 individuales. El Paraíso 4, 50 y 10 respectivamente y el Oasis 4, 50 y 8. El precio por habitación y noche es 10.000 ptas. la de lujo, 7.000 ptas. la doble y 5.000 ptas. la individual.

a) Recoge estos datos en dos matrices indicando qué significa cada fila y columna.

b) Suponiendo que estuvieran completos una noche, expresar mediante una matriz los ingresos obtenidos por cada hotel.

Sol: a) A matriz que indica el nº de habitaciones de cada hotel. B matriz que indica el precio por habitación .
b) A . B matriz que indica los ingresos obtenidos por cada hotel.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & D & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 30 & 10 \\ 4 & 50 & 10 \\ 4 & 50 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ Exc. \\ Par. \\ Oas. \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} Ptas \\ \begin{pmatrix} 10000 \\ 7000 \\ 5000 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ Lujo \\ Doble \\ Indiv. \end{array} \qquad A\cdot B=\begin{array}{c} Ptas \\ \begin{pmatrix} 320000 \\ 440000 \\ 430000 \end{pmatrix} \end{array}$$

19.- En un centro educativo los datos de matrícula por cursos son: 3º de secundaria: 50 alumnos y 70 alumnas; 4º de secundaria: 65 alumnos y 50 alumnas; 1º de bachillerato: 35 alumnos y 38 alumnas; y en 2º de bachillerato: 32 alumnos y 30 alumnas.

Un estudio realizado en el centro indica que cada alumno/a de 3º lee por año 2 libros de novela, ninguno de poesía y un libro de otros temas. Cada alumno/a de 4º lee 3 novelas, 1 de poesía y 2 de otros temas. Un alumno/a de 1º lee sólo 4 novelas, y un alumno/a de 2º lee 4 novelas, 3 de poesía y 4 de otros temas.

a) Disponer la información acerca de matrícula y lectura en dos matrices.
b) Explica qué representan cada uno de los elementos de la matriz producto de las dos matrices anteriores.
c) ¿Cuántos libros de novela leen por curso todas las alumnas matriculadas en el centro?

Sol: *a)* $M = \begin{pmatrix} 50 & 65 & 35 & 32 \\ 70 & 50 & 38 & 30 \end{pmatrix}$ $\quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $M\,L = \begin{pmatrix} 563 & 161 & 308 \\ 562 & 140 & 290 \end{pmatrix}$

c) 562, ya que el elemento a_{21} de la matriz producto representa el nº de libros de novela que leen entre todas las alumnas por año

20.- La carne que se consume en dos residencias A y B consiste en hamburguesas y pollo. Los precios por Kg. de ambos productos en el hipermercado durante los meses de octubre y noviembre fueron:

$$\begin{array}{c} \\ \text{oct} \\ \text{nov} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Pollo} & \text{Hamb.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 200 \\ 160 & 190 \end{pmatrix} \end{array}$$

El consumo mensual de las dos residencias en carne fué:

$$\begin{array}{c} \\ \text{resid A} \\ \text{resid B} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Kg pollo} & \text{Kg hamb} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 800 & 600 \\ 700 & 400 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mediante operaciones con las matrices anteriores, encuentra una matriz que exprese el gasto de ambas residencias en carne durante los dos meses.

Sol:
$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{Res}A \\ \mathrm{Res}B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} oct & nov \end{array} \\ \begin{pmatrix} 240000 & 242000 \\ 185000 & 188000 \end{pmatrix} \end{array}$$

B. Sistemas de ecuaciones lineales. Problemas

1.- Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 6z = 24 \\ -3x + 5y + 9z = 40 \\ x + 2y - 3z = 16 \end{array}\right\}$

Sol: $x = 3a$, $y = 8$, $z = a$ con $a \in \mathbb{R}$

2.- a) Resuelve y clasifica el sistema de ecuaciones lineales : $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -2x + y = -6 \\ 3y - 6x = -3 \end{cases}$

b) Representa gráficamente el sistema e interpreta la solución.

Sol: Sistema incompatible. Dos rectas son paralelas y la otra las corta.

3.- Clasifica y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + y - z = 6 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x + 3y - 4z = -9 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y - 2z = -2 \\ x + y - 2z = -4 \\ x - 4y + 2z = 6 \end{array}\right\}$

Sol: a) compatible determinado: $x = 3$, $y = 3$, $z = 6$

b) compatible indeterminado: $x = \dfrac{6a - 10}{5}$, $y = \dfrac{4a - 10}{5}$, $z = a$ con $a \in \mathbb{R}$

4.- Interpreta gráficamente y resuelve el sistema: $\left.\begin{array}{l} x + 3y = -3 \\ 5x + y = 13 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\}$

Sol: Sistema incompatible. Son tres rectas que se cortan dos a dos.

5.- Resuelve este sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ 4x + y = 9 \end{array}\right\}$

Sol: Sist. compat. Indet. $x = \dfrac{8 - 2w}{3}$, $y = \dfrac{-5 + 8w}{3}$, $z = w$ con $w \in \mathbb{R}$

6.- Resuelve el sistema: $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-4y+z=1 \end{array}\right\}$

Sol: Sistema compatible indeterminado de solución (1-a, a/3, a) con a Î Â.

7.- Resuelve y clasifica el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=0 \\ 2x-y-z=2 \\ 3x+y+2z=2 \end{array}\right\}$

Sol: Sistema compatible indeterminado de solución ($\dfrac{4-z}{5}$ *,* $-\dfrac{7z+2}{5}$ *, z) con z Î Â*

8.- Los 32 alumnos de una clase tienen edades de 18, 19 y 20 años. Si la media de sus edades es de 18,5 años.¿ Cuántos alumnos hay de cada edad si de 18 años hay 6 más que entre 19 y 20 años?

Sol: 19 de 18 años, 10 de 19 años y 3 de 20 años

9.- Los estudiantes de cierto curso venden camisetas, gorros y banderines para ayudarse a pagar un viaje. Cada camiseta se vende a 800 ptas, cada gorra a 120 ptas. y cada banderín a 200 ptas. Los costes de cada prenda son de 300 ptas. por camiseta, 20 ptas. por gorra y 80 ptas. por banderín.

El beneficio neto obtenido es de 67400 ptas. y el gasto total es de 34600 ptas. Sabiendo que se han vendido un total de 270 unidades , calcúlese cuántas se han vendido de cada clase.

Sol: 100 camisetas, 150 gorros y 20 banderines.

10- Nuestro proveedor de pilas nos cobra por una pequeña, dos medianas y una grande, 305 ptas. En otra ocasión, por dos pequeñas, tres medianas y dos grandes, 540 ptas.

a) ¿Cuánto nos cuestan 5 pequeñas, 9 medianas y 5 grandes?
b) ¿Cuál es el precio de una pila mediana?
c) ¿Cuánto vale una pequeña más una grande?
d) ¿Podemos calcular el precio de una pila pequeña?
e) Si añadimos la condición que una grande vale el doble de una pequeña, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos de pilas?

Sol: a) 1455 ptas. b) 70 ptas. c) 165 ptas. d) no podemos e) 110 ptas. la pila grande y 55 ptas. la pila pequeña.

11.- Una empresa cinematográfica dispone de tres salas A , B , y C. Los precios de entrada a cada una de estas salas son 100 , 200 y 300 ptas., respectivamente. Un día, la recaudación conjunta de las tres salas fue de 42.500 ptas. y el número total de espectadores que acudieron fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubiesen asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se obtendría una recaudación total de 40.000 ptas. Calcula el número de espectadores que acudió a cada sala.

Sol: 50 espectadores a la sala A, 75 a la sala B y 75 a la sala C

12.- Un fabricante de espárragos de Navarra fabrica tres clases de latas: lata de calidad extra de 1kg a 500 ptas, lata de calidad suprema de 500 gr. a 300 ptas. y lata de calidad primera de 250 gr a 100 ptas.

Tiene un pedido de un cliente de 300 kg por valor de 150.000 ptas, si se utilizan para envasarlo 700 latas, calcular cuántos envases de cada tipo se necesitan.

Sol: 100 latas extra, 200 latas calidad suprema y 400 latas calidad primera

13.- Una tienda posee tres tipos de conservas A,B y C. El precio medio de las tres conservas es de 150 pts. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, debiendo abonar 8400 pts.Otro compra 20 unidades de A y 25 de C y abona 6900 pts. Calcula el precio de una unidad de A, otra de B y otra de C.

Sol: A: 120 pts, B: 150 pts y C: 180 pts.

14.- La suma de las edades de tres personas es, en el momento actual, 73 años. Dentro de diez años la edad de la mayor de ellas será el doble de la edad de la persona más joven. Hace doce años la persona con edad intermedia tenía el doble de años que la más joven. Hallar las edades de las tres personas.

Sol: 40, 18 y 15 años

15.- Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y una tercera de sajones. Al asaltar una fortaleza el capitán promete una recompensa de 901 escudos que se repartirán de la siguiente forma: el soldado que primero suba y todos los de su compañía recibirán un escudo, el resto de la recompensa se repartirá a partes iguales entre el resto de los soldados. Sabiendo que si el primero que sube es un suizo, los de las demás compañías reciben medio escudo; si el primero es zuavo, los restantes reciben un tercio de escudo y si el primero es sajón, un cuarto de escudo, ¿cuántos hombres hay en cada compañía?

Sol: 265 suizos, 583 zuavos y 689 sajones

16.- Alfredo va al mercado y compra naranjas, plátanos y berenjenas. Si el peso total de la compra es 6 kg. , y sabemos que, compra 1 kg. más de naranjas que de plátanos, que los precios son 120, 250 y 90 por kg. de naranjas, plátanos y berenjenas respectivamente, y que en total ha pagado 950 ptas., calcula las cantidades respectivas de los productos adquiridos.

Sol: 3 kg. de naranjas, 2 kg. de plátanos y 1 kg. de berenjena.

17.- A Victoria le van a confeccionar su vestido de novia, por el que tendrá que pagar 174200 ptas. En la confección se utilizan 15 metros entre raso, seda y pasamanería bordada. Los metros de raso serán el doble que los de seda. Los precios del raso, seda y pasamanería son 5500, 6200 y 6800 ptas. el metro respectivamente. Si del precio total 50000 ptas. se destinan a la mano de obra y 35000 ptas. para beneficio del comerciante, ¿cuántos metros de cada material serán necesarios?

Sol: 8 m de raso, 4 m de seda y 3 m de pasamanería.

18.- Juan y Pedro invierten 2000000 de ptas. cada uno. Juan coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% y el resto al 6%. Pedro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%. Determinar la cantidad B, sabiendo que Juan obtiene unos intereses de 105000 ptas. y Pedro de 95000 ptas.

Sol: A=500.000 , B=500.000 y C=1.000.000

19.- Ayer se agotaron en la Oficina de Turismo todos los folletos que quedaban. Había folletos en español, francés e inglés, en total 80. Se sabe que si en español hubiese habido 10 folletos menos y en francés 20 más hubiera habido el mismo número en los dos idiomas. Por otra parte, con el mismo número de folletos que los que había, tanto en español como en inglés, pero doble número de folletos en francés, el número de folletos en inglés hubiese sido exactamente un tercio del total. Queremos calcular cuántos folletos había exactamente en cada idioma al comienzo del día. Plantea el sistema adecuado y resuélvelo.

Sol: 40 en español, 30 en inglés y 10 en francés.

C. Cuestiones teórico-prácticas

1.- a) Forma un sistema de dos ecuaciones que tenga como solución $x=2$, $y=-1$, $z=3$

b) Encuentra todas las soluciones del anterior sistema.

c) Forma un sistema homogéneo de tres ecuaciones que tenga como solución:

$x=2, \quad y=-1, \quad z=3$

d) Resuelve dicho sistema.

2.- Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Si una matriz tiene tres filas menos que columnas, ¿cuál tiene mayor dimensión $(A \cdot A^t)$ ó $(A^t \cdot A)$?

b) Poner un ejemplo de dos matrices A y B de forma que el multiplicar $(B \cdot A)$ el resultado sea una matriz cuadrada de orden (1x1)

c) ¿Cómo debe ser una matriz A para que se cumpla: $A + A^t = I$?.

Sol: a) mayor dimensión $A^t \cdot A$ b) B dimensión 1xn y A nx1 c) A cuadrada $a_{ii}=1/2$ y los $a_{ij}=-a_{ji}$

3.- Comentar brevemente estas frases:

a) El producto de dos matrices diagonales M y N es una matriz diagonal y MN=NM

b) Los productos AA^t y A^tA siempre se pueden realizar y tienen el mismo orden.

c) Todo sistema homogéneo es compatible.

d) El determinante de una matriz de orden tres es igual que el determinante de su opuesta.

Sol: a) cierto b) Los productos siempre se pueden realizar pero no tienen el mismo orden más que cuando A es cuadrada. c)Verdadero d) *Falso. Los determinantes son también opuestos.*

4.-Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Puede ocurrir que dos matrices se puedan sumar pero no se puedan multiplicar?.

b) Todo sistema homogéneo es compatible determinado. ¿Verdadero o falso?.

c) Dada una matriz A de dimensión (mxn) siendo $m \neq n$, ¿se puede calcular la expresión: $A \cdot A^t - A^t \cdot A$?.

Sol: a) Sí , b) falso , c) no se puede calcular puesto que m ^{1} *n*

5.- Razonar las respuestas:

a) Si tenemos un sistema compatible indeterminado de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. ¿Se puede obtener un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?

b) Pon un ejemplo de sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas que sea incompatible.

c) Al aplicar el método de Gauss a tres sistemas de ecuaciones lineales he obtenido estas situaciones :

$$\text{i)}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 4 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{iii)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Clasifica estos sistemas en función del nº de soluciones.

Sol: a) Sí . La interpretación gráfica del sistema dado son dos rectas coincidentes, para que sea incompatible basta añadir una ecuación cuya representación gráfica sea una recta paralela a las anteriores.

b) Imposible pues todo sistema homogéneo es compatible pues tiene por lo menos la solución trivial (0,0,0)

c) i) Compatible determinado ii) Incompatible iii) Compatible indeterminado

6.- a) Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas y C una matriz de dimensión 2x3 ¿Cuántas filas y columnas tiene B sabiendo que existe la matriz $A \cdot B \cdot C$?. ¿ Qué dimensión tiene la matriz $A \cdot B \cdot C$?.

b) Sea D una matriz tal que al multiplicarla por su traspuesta da una matriz de dimensión 1x1 y el producto de la traspuesta de D por D es 3x3. Calcular la dimensión de la matriz D . ¿ Tiene D inversa ?

c) Siendo $E^t = (\ 1\ \ 2\ \ 3\ )$ la traspuesta de la matriz E. Calcular el determinante de la matriz $E \cdot E^t$

d) Sean A y B dos matrices cuadradas cualesquiera de orden 2. ¿ Es cierta la igualdad siguiente: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Sol: a) B tiene 4 filas y 2 columnas. $A \cdot B \cdot C$ es de dimensión 3 x 3 .

b) D es de dimensión 1 x 3. Como no es cuadrada no tiene inversa.

c) Cero.

d) No.(No se cumple la propiedad conmutativa en el producto de matrices).

7.-Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y poner un ejemplo o contraejemplo:

a) Un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas, puede ser incompatible.
b) Si a un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas que es compatible indeterminado, le añadimos una nueva ecuación el nuevo sistema será siempre compatible determinado.

Sol: a) Verdad, b) Falso

8.- Escribe un sistema homogéneo de tres ecuaciones que tenga como solución:

x = 1 , y = 2 , z = -1

Sol: Hay infinitas soluciones, por ejemplo $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

9.- Sean A una matriz de dimensión 5x4, B una matriz de dimensión mxn y C de dimensión 3x7. Si se sabe que se puede obtener la matriz producto ABC, ¿cuál es la dimensión de la matriz B? ¿Y la de la matriz ABC?

Sol: B dimensión 4x3 y ABC dimensión 5x7

10.- Si tenemos un sistema compatible indeterminado de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. ¿Se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?

Sol: sí

11.- Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n. Si AB = AC ¿se puede concluir que B = C ?

Sol: si A tiene inversa sí, en general NO

12.- Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{array}\right\}$

a) Añadir una ecuación lineal al sistema dado, de modo que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añadir una ecuación lineal al sistema dado, de modo que el sistema resultante sea compatible e indeterminado. Resolver el sistema así formado

Sol: a) hay infinitas, por ejemplo 2x - 3y = 7 b) $\left(\frac{7-z}{5}\right.$, $\frac{z-2}{5}$ *, z) con z Î Â*

13.- El siguiente sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado

$$S \equiv \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y-z=4 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$$

a) Si se elimina en el sistema S una de las ecuaciones ¿cómo es el sistema que resulta?

b) ¿Qué ecuación debe quitarse a S para que x = 0, y = 0, z = 0 sea una solución del nuevo sistema.

c) Si se añade una ecuación a S, el sistema resultante ¿puede ser....

i) ...compatible determinado?

ii)....compatible indeterminado?

iii) ...incompatible?

Justificar las respuestas y poner un ejemplo si es posible.

Sol: a) compatible indeterminado b) x+ y - z = 4
c) compatible determinado o incompatible

14.- Sean S y S' dos sistemas de ecuaciones lineales de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, con la misma matriz de coeficientes.

a) Justifica con un ejemplo que uno de los sistemas puede ser compatible y otro incompatible.

b) Si ambos son compatibles, ¿puede uno ser determinado y otro indeterminado?

Sol: b) No

D. Programación lineal

1.- Maximiza y minimiza la función $p = x + 2y - 3$ con las siguientes

$$\text{restricciones:} \left.\begin{array}{l} 2x - 3y \geq 0 \\ 5y \leq 9 \\ 3x \leq 2 \end{array}\right\}$$

Sol: Máximo (2/3,4/9) y no existe mínimo

2.- En la región determinada por $x + y \geq 2$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ halla el punto en el que la función $f(x, y) = 3x + 4y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?

Sol: Mínimo (1 , 1). No hay máximo

3.- Una persona tiene 500.000 ptas. para invertir en dos tipos de acciones A y B. El tipo A tiene bastante riesgo con un interés anual del 10 % y el tipo B es bastante seguro con un interés anual del 7 %. Decide invertir como máximo 300.000 ptas. en A y como mínimo 100.000 ptas. en B, e invertir en A por lo menos tanto como en B. ¿Cómo deberá invertir su dinero para maximizar sus intereses anuales? ¿A cuánto ascenderán éstos?

Sol: El máximo lo obtendrá invirtiendo 300.000 ptas. en acciones tipo A y 200.000 ptas. en acciones tipo B. Ascenderá a 44.000 ptas.

4.- Una fábrica textil elabora prendas de punto de calidades A y B. Las de calidad A se fabrican con 1 unidad de lana y 2 unidades de fibra sintética y las de calidad B con 2 unidades de lana y 1 de fibra sintética. Los beneficios obtenidos en la venta de las prendas son de 1500 ptas. para las de calidad A y 1000 ptas. para las de calidad B. Sabiendo que sólo se dispone de 180 unidades de lana y 240 de fibra sintética, se pide:

a) Determinar cuántas prendas de cada tipo deben elaborarse para obtener un beneficio máximo si la producción no puede ser superior a 1000 prendas.
b) ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio?. Justificar las respuestas.

Sol: Se deben elaborar 100 prendas de calidad A y 40 de calidad B. Los beneficios serán 190.000 pesetas.

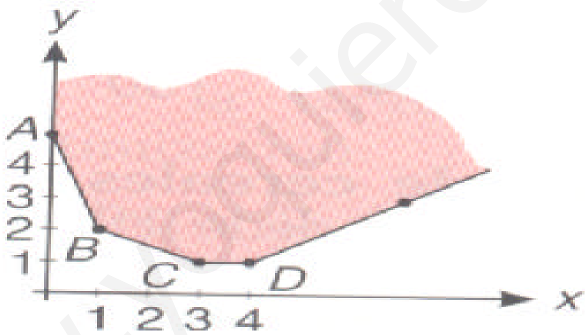
5.- Un joyero produce dos modelos de pulseras: el modelo MODERN y el modelo CLASSIC. En su producción se utilizan tres tipos de máquinas, P, Q y R. El siguiente cuadro especifica cuánto tiempo (en horas) necesita cada una de las máquinas para fabricar cada uno de los modelos:

	P	Q	R
MODERN	2	3	1
CLASSIC	4	1	5

Cada máquina puede trabajar un máximo de 60 horas semanales. Si sabemos que por cada una de las pulseras del modelo MODERN obtiene un beneficio de 10000 ptas. y por cada una de las del modelo CLASSIC un beneficio de 12000 ptas. ¿cuántas ha de fabricar de cada modelo para maximizar su beneficio?

Sol: 18 modern y 6 classic.

6.- Dadas las funciones f(x , y) = 2x + 7y g(x , y) = 2x - y h(x , y) = y - x i(x , y) = x - 4y j(x , y) = x + 2y
¿en qué puntos se dan el máximo y mínimo, si existen, de cada una de esas funciones en la región factible de la figura?



Sol: a) mínimo en C b) ni máximo ni mínimo c) ni máximo ni mínimo d) máximo en D e) todos los puntos del segmento BC son mínimos

7.- Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La joya del primer tipo se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 4000 ptas. La del segundo tipo se vende a 5000 ptas. Y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata.
Si sólo dispone de 750 g de cada metal ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Sol: 300 de cada tipo.

8.- Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 25 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuestos: C1 y C2, elaborados con ambos piensos. El paquete de C1 contiene 1 unidad de A y 5 de B, siendo su precio de 100 ptas., y el de C2 contiene 4 unidades de A y 1 de B, siendo su precio 300 ptas. ¿ Qué cantidades de C1 y de C2 deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?

Sol: 4 paquetes de C1 y 5 de C2

9 .- Una empresa fabrica dos tipos de componentes para ordenador A y B que vende a 3'2 euros y 1'8 euros respectivamente. El coste de fabricación es de 2 euros la componente A y 1 euro la B. La empresa dispone de 3.000 euros para la producción diaria de ambas componentes, y puede almacenar, como mucho, 2.000 componentes. Halla el número de componentes de cada tipo que deberá producir al día para obtener el máximo beneficio.

Sol: 1.000 componentes de cada clase

10.- Un comerciante dispone de 500 jamones, 400 botellas de vino y 225 bolas de queso con los que quiere preparar dos tipos de lotes.
El lote A consta de un jamón y 2 botellas de vino; el lote B consta de 2 jamones, una botella de vino y una bola de queso. Por cada lote tipo A obtiene un beneficio de 2000 ptas. y 3000 ptas. por cada uno tipo B.
¿Cuántos lotes de cada tipo debe preparar para maximizar sus ganancias? . ¿Cuál es el beneficio máximo?.

Sol: 100 lotes tipo A y 200 lotes tipo B
Beneficio máximo 800.000 ptas.

11.- Una empresa de aviación comercial tiene que atender una línea que presenta una demande de 800 plazas diarias para un determinado trayecto. Para atenderla tiene 8 aviones de 80 plazas y 7 aviones de 100 plazas. Además dispone de 9 tripulaciones. El coste por avión pequeño es de 600.000 ptas. y por avión grande de 800.000 ptas. Calcula cuántos aviones grandes y cuántos pequeños debe disponer diariamente para que el coste sea mínimo.

Sol: 5 aviones de 80 plazas y 4 aviones de 100 plazas

12.- Determina el máximo y el mínimo valor de la función f (x,y) = 5x + 2y sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \\ x \leq 4y \\ x \geq 3 \\ y \geq 2 \end{array}\right\}$$

Sol: mínimo valor de 19 en x = 3 y = 2
máximo valor de 44 en x = 8 y = 2

13.- Un atleta debe tener al día al menos doce vitaminas del tipo A, cuatro del B y ocho del tipo C. Para ello dispone de dos tipos de comprimidos C1 y C2, cada uno de los cuales contiene las siguientes unidades de estas vitaminas:

	A	B	C
C1	3	2	4
C2	4	1	3

Si cada comprimido C1 cuesta 10pts. y cada comprimido C2 5pts., ¿cuántos comprimidos de cada clase debe tomar al día para obtener las vitaminas indicadas al mínimo coste?

Sol: segmento de recta 2x + y = 4 comprendido entre x=0 y x= 4/5

14.- Una fábrica de juguetes produce dos tipos de coches teledirigidos. A y B. Por razones comerciales, las unidades producidas de A y B están limitadas, respectivamente, a 200 y 300.
La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricar los juguetes y conoce que la producción de cada unidad de A precisa de 3 horas de trabajo y reporta unos beneficios de 1500pts., mientras que cada unidad de tipo B consume 6 horas de trabajo y supone un beneficio de 2300pts.
Determinar, justificando la respuesta, los niveles óptimos de producción de A y B de manera que el beneficio global sea máximo.

Sol: 200 unidades de cada tipo

15.- Se considera la región del plano determinada por las inecuaciones:

$$x+3 \geq y \;\; ; \;\; 8 \geq x+y \;\; ; \;\; y \geq x-3 \;\; ; \;\; x \geq 0 \;\; ; \;\; y \geq 0$$

a) Dibujar la región que definen y calcular sus vértices.

b) Hallar el punto de esta región en el que la función F(x,y) = 6x + 4y alcanza el valor máximo y calcular dicho valor.

Sol. a) (3 ,0) , (5'5 , 2'5) , (2'5 , 5'5) , (0 , 3) , (0 , 0)
b) máximo valor de 43 en el vértice (5'5 , 2'5)

16.- Una fábrica de carrocerías de coches y camiones tiene dos naves. En la nave A, para fabricar la carrocería de un camión se invierten 7 días/operario y para fabricar la de un coche 2 días/operario. En la nave B se invierte 3 días/operario tanto en carrocerías de camiones como de coches. Por limitaciones de mano de obra y maquinaria, la nave A dispone de 300 días/operario, y la B de 270 días/operario. Si los beneficios que se obtienen por cada camión son de 6 millones de pesetas y por cada coche de 2 millones de pesetas. ¿Cuántas unidades de cada uno se deben producir para maximizar las ganancias?

Sol: 66 automóviles y 24 camiones

17.- Un hipermercado necesita como mínimo 16 cajas de langostinos, 5 cajas de nécoras y 20 de percebes. Dos mayoristas, A y B, se ofrecen al hipermercado para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden dicho marisco en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de langostinos, 1 de nécoras y 2 de percebes, y el B envía 2, 1 y 7 cajas respectivamente. Cada contenedor que suministra A cuesta 210000 ptas. Y cada uno de los que suministra B 300000 ptas. ¿Cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades mínimas con el menor coste?

Sol: 3 contenedores al A y 2 al B
Coste mínimo de 1.230.000 ptas.

18.- Una empresa de productos químicos elabora dos productos A y B. El producto A lleva un 10% de fósforo, un 20% de potasio y el resto de agua. El producto B lleva un 30% de fósforo, un 10% de potasio y el resto de agua. Disponen de 1800 kg. de fósforo y de 1600 kg. de potasio. Por otra parte la empresa no debe fabricar una cantidad del producto B que sea más del doble de la cantidad que fabrique del A. La empresa vende el producto A a 75 ptas/kg. y el producto B a 150 ptas/kg. ¿Cuántos Kg de cada producto ha de fabricar para que el importe de la venta sea máximo?

Sol: 6.000 del tipo A y 4.000 del B

19.- Un pastelero tiene 150 kg. de harina, 22 kg. de azúcar y 27,5 kg. de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles P_1 y P_2 . Para hacer una docena de pasteles de tipo P_1 necesita 3 kg. de harina, 1 kg. de azúcar y 1 kg. de mantequilla y para hacer una docena del tipo P_2 necesita 6 kg. de harina, 0,5 kg. de azúcar y 1 kg. de mantequilla. El beneficio que obtiene por una docena de tipo P_1 es 20 y por una docena de tipo P_2 es 30. Halla el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo.

Sol: 5 docenas del tipo P_1 y 22 docenas y media del tipo P_2.

20.- Minimizar y maximizar la función f (x , y) = x + y en la región determinada por las

inecuaciones siguientes $\begin{cases} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$

Sol: Mínimo (40 , 20) y no hay máximo.

21.- Un almacén de confección que dispone de 70 camisetas, 120 camisas y 110 pantalones, hace liquidación de existencias. Quiere ponerlo a la venta en dos tipos de lotes: el lote A, formado por 2 camisas, 1 pantalón y 1 camiseta se venderá a 600 ptas. ; el lote B, formado por 1 camisa, 2 pantalones y 1 camiseta, se venderá a 700 ptas. Calcula cuántos lotes conviene que hagan de cada clase para obtener el máximo de ganancias y cuanto dinero ingresarán.

sol: x = 30 y = 40 El dinero que se ingresa es 46.000 ptas.

22.- En una fábrica se construyen sillas grandes y pequeñas. Las sillas grandes necesitan $4m^2$ de madera y las pequeñas 3 m^2. El fabricante necesita construir al menos tres sillas grandes y al menos el doble de pequeñas que de grandes. Se dispone de 60 m^2 de madera y los beneficios son de 200 ptas. y 300 ptas. por silla pequeña y grande respectivamente. ¿ Cuántas sillas de cada tipo se deben fabricar para obtener el beneficio máximo?.

Sol: Deben fabricarse 6 sillas grandes y 12 pequeñas
Beneficio máximo 4200 ptas.

23.- Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 24 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuesto: C1 y C2, elaborados con ambos piensos. El paquete de C1 contiene 1 unidad de A y 5 de B, siendo su precio 100 ptas., y el de C2 contiene 4 unidades de A y 1 de B, siendo su precio 300 ptas. ¿ Qué cantidades de C1 y C2 deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?

Sol: Deben fabricarse 4 paquetes de C1 y 5 de C2
El coste mínimo es 1900 ptas.

24.- Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A , 3 mg de vitamina B , 30 de la C y 2 de la D. Para ello se van a mezclar piensos de dos tipos , P y Q , cuyo precio por kg. para ambos es de 30 ptas. y cuyo contenido vitamínico por kg. es el siguiente:

	A	B	C	D
P	1 mg	1 mg	20 mg	2 mg
Q	1 mg	3 mg	7,5 mg	0 mg

¿ Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿ Cuál es este gasto mínimo?

Sol: El mínimo gasto lo dan todos los puntos del segmento que une
$\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$ con $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
Ese gasto mínimo es de 60 ptas.

25.- Un comerciante desea comprar dos tipos de frigoríficos, F1 y F2. Los del tipo F1 cuestan 30.000 ptas. y los del tipo F2 cuestan 50.000 ptas. Sólo dispone sitio para 20 frigoríficos y de 700.000 ptas. para hacer las compras. ¿ Cuántos frigoríficos ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que en cada frigorífico gana el 30% del precio de compra?.

Sol.: Todos los puntos del segmento (0,14) al (15,5) de coordenadas enteras.
Es decir: ***0*** *del tipo F1 y* ***14*** *del tipo F2*   ***10*** *del tipo F1 y* ***8*** *del tipo F2*
5 *del tipo F1 y* ***11*** *del tipo F2*   ***15*** *del tipo F1 y* ***5*** *del tipo F2*

II. Análisis

A. Límites y continuidad

1.- Algunos expertos estimaron a comienzos de los años 90 que el sida crecía a razón del 20% anual. Si suponemos que en esa fecha, en una determinada ciudad, había 1000 enfermos de sida y la fórmula de crecimiento viene dada por $E(t)=1000(1+0{,}20)^{t}$, se pide:

a) ¿Cuántos enfermos habría a comienzos de 1993?
b) ¿Cuántos habrá a principios del 2000?
c) ¿Cuánto tardará en duplicarse el número de afectados?

Sol: a) 1728 b) 6192 c) aproximadamente 3'8 años

2.- Una empresa de montajes en cadena, ha determinado que el número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento, de acuerdo con la función $M(t)=\dfrac{30t}{t+4}$ donde t es el tiempo en días.

a) ¿Cuántos montajes realizará el primer día? ¿Y el décimo?
b) ¿Qué ocurriría con el número de montajes, si nunca acabara el entrenamiento?
c) Dibuja la función.

Sol: a) 6; aproximadamente 21 b) como mucho 30 montajes.

3.- Las pérdidas o ganancias de una empresa,en cientos de millones de ptas, siguen una ley $y=\dfrac{2x-4}{x+2}$ siendo x los años de vida de la empresa.

a) Determina el año en que la empresa deja de tener pérdidas
b) ¿Están sus beneficios limitados? Si lo están, ¿cuál es su límite?

Sol: a) a los 2 años b) están limitados por 200 millones de ptas.

4.- Calcula los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$ d) $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x-3}\right)^{3x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x+5}\right)^{x}$

NOTA: Puedes ayudarte con calculadora.

Sol : a) 0 b) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ c) $+\infty$ d) 0 e) e^{3} f) 0.

5.- Calcula los límites siguientes: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{1+x}\right)$

Sol: a) e^3 b) -¥ c) 0

6.- Calcula el valor de los siguientes límites. Caso de no existir , explica por qué:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{1-x^2}\right)^{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)^{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{4x^3-2}\right)^{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$

Sol: a) No existe b) e c) 0 d) No existe.

7.- Realiza, con todos los pasos, los límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x^2}{1+x^2}\right)^{x^2+7}$

Sol: a) e^2 b) $-\dfrac{1}{2}$ c) e^2

8.- Dada la función f(x)= $\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<2 \\ 2x-3 & si \quad 2\le x<4 \\ 5 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

Dibuja la función y estudia su continuidad.

Sol: en x=2 discontinuidad no evitable de salto 2

9.- Considérese la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$. Hallar los puntos de discontinuidad y clasificarlos.

Sol: x = 3 disc evitable y x = 2 disc. inevitable de salto infinito

10.-Dibuja y estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & si \quad x\le 0 \\ x^2-3x-1 & si \quad 0<x<3 \\ \dfrac{2}{x-5} & si \quad x>3 \end{cases}$$

Si la función es discontinua para algún valor de x, indica qué tipo de discontinuidad presenta y cómo se evitaría.

Sol: En x=3 no está definida la función y hay una discontinuidad evitable y en x=5 hay una discontinuidad inevitable.

11.- Sea f(x)= $\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4x}$. Halla los puntos de discontinuidad, clasifícalos, halla las asíntotas y su posición respecto de la función.

Sol: Puntos de discontinuidad: x=0, x=4 ; en x=0 discont evitable; en x=4 discont no evitable asintótica (de salto ∞) ; asíntota vertical x=4 ; posición: a la derecha $+\infty$ y a la izquierda $-\infty$; asíntota oblicua y=x; posición: cuando x tiende a $+\infty$ la curva encima de la asíntota; cuando x tiende a $-\infty$, la curva debajo de la asíntota.

12.-a) Calcula las ecuaciones de las asíntotas de la función: f(x) = $\dfrac{x^2}{x^2-1}$

b) Con las asíntotas y algún punto auxiliar dibuja aproximadamente su gráfica.

Sol: AV: x = -1 , x = 1 AH: y = 1

13.- Calcula los siguientes límites e interpreta gráficamente el resultado:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

Sol: a) No existe, los límites laterales son distintos; en x=2 hay una asíntota vertical
b) El límite es 4. En x=3 hay una discontinuidad evitable.

B. Derivadas y aplicaciones

1.-Aplicando la definición de derivada, halla la de la función: $f(x)=\dfrac{3}{x}$.

Sol: $f'(x)=\dfrac{-3}{x^2}$

2.-Dada la parábola $y=x^2-2x-2$, se traza la cuerda que une los puntos de abscisas $x=1$ y $x=3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola, paralela a esta cuerda.

Sol: $y=2x-6$

3.- Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$

a) Hallar sus asíntotas verticales y horizontales.
b) Hallar la ecuación de la recta tangente en x = 2

Sol: a) $x=1$, $x=-1$, $y=0$ *b)* $y=\dfrac{10}{9}x-\dfrac{32}{9}$

4.- Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\ln\dfrac{2x^2}{x+1}$ en el punto de abscisa x =1.

Sol: $y=\dfrac{3}{2}(x-1)$

5.- Calcular la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ en x = 2

Sol: $y-2=-3(x-2)$

6.- Sea la función $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x-3}$ halla las asíntotas de la función y calcula la ecuación de la recta tangente en x=2.

Sol: Asíntotas $x=3$; $y=x-1$ *Ec. De la recta tangente:* $y=0$

7.- Derivar las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3(2x-7)^5}{5}$ b) $f(x) = 2\ln\left(\dfrac{4x-1}{x}\right)$

c) $f(x) = (1-5x)\cdot e^{3x}$ d) $f(x) = \sqrt{1-x}\cdot \operatorname{sen} x$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2}{(2x-3)^3}$

Sol: *a) y'* $= 6(2x-7)^4$ *b) y'* $= \dfrac{2}{x(4x-1)}$ *c) y'* $= -e^{3x}(15x+2)$

d) y' $= \sqrt{1-x}\cdot\cos x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-x}}$ *e) y'* $= -\dfrac{6x(x+3)}{(2x-3)^4}$

8.- Halla la derivada tercera de la función $y = \dfrac{2x+1}{2x}$

Sol: $y''' = \dfrac{-3}{x^4}$

9.- Calcula las derivadas de las funciones:

a) $y = \operatorname{sen}^2 5x$ en el punto $x = \dfrac{p}{4}$

b) $y = \sqrt{e^{\operatorname{tg} x}}$ en el punto $x = p$

Sol: a) y' = 5 *b) y'* $= \dfrac{1}{2}$

10.- Calcula las siguientes derivadas:

a) $y = \operatorname{sen}^3(2x+1)^2$ b) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ c) $y = \dfrac{xe^x}{2^x}$

Sol: a) $12\,(2x+1)\operatorname{sen}^2(2x+1)^2\cos(2x+1)^2$ *b)* $\dfrac{2}{3\left(x^2-1\right)}$ *c)* $\left(\dfrac{e}{2}\right)^x\left(1+x\ln\dfrac{e}{2}\right)$

11. Derivar $y = e^{-x^2}(5\cos x + \operatorname{sen} 3x) + \ln(1-x)$

Sol: $y' = -2xe^{-x^2}(5\cos x + \operatorname{sen} 3x) + e^{-x^2}(-5\operatorname{sen} x + 3\cos 3x) - \dfrac{1}{1-x}$

12.- Deriva y simplifica las siguientes funciones:

a) $y = e^{3x}\operatorname{sen}^2 x$ b) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

Sol: a) e^{3x} *sen x (3 sen x + 2 cos x)*   *b)* $\dfrac{1}{\cos x}$

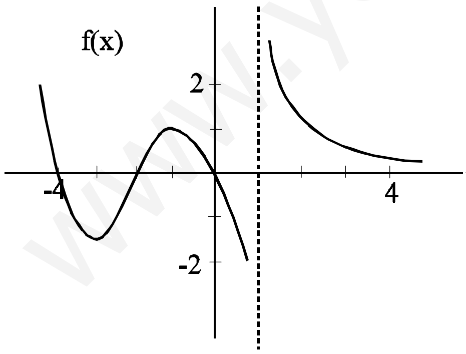
13. Calcular las derivadas: a) $y = (1-5x)\cdot\sqrt{1+2x}$ b) $y = 4\ln(x^2+1) + (\operatorname{sen} 3x)^2$

Sol: *a)* $y' = \dfrac{-4-15x}{\sqrt{1+2x}}$ *b)* $y' = \dfrac{8x}{x^2+1} + 6\operatorname{sen}(3x)\cos(3x)$

14. - Hallar asíntotas y máximos y mínimos y de $y = \dfrac{x^2}{x^2-9}$.

Sol: asíntotas: x = 3, x = -3, y = 1 máximo: (0,0)

15. Dada la gráfica de la función f(x) , se pide (justificando la respuesta)



a) Dominio de f(x)

b) ¿Qué puedes decir de:

¿ f´(0) , f´(-1) , f´(-2), f´´(-3), f´(1) ?

c) ¿ En algún punto *f´´(x) = 0* ?

d) Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$

Sol: a) Â - {1 } b) f´(0) < 0 , f´(-1) = 0 , f´(-2) >0 , f´´(-3) > 0 ,f´(1) no existe

c) Sí, aproximadamente en el (-2 , 0)   d) 0 , + ¥ , no existe (1zda -¥ y derecha + ∞)

16.- Determinar los valores de **a** y **b** para que la función $f(x) = x^3 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto (-1 , 4).

Sol: a=-3 , b=2

17.- Hallar a y b para que la función f (x) = $x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga un punto de inflexión en x = 3 y un mínimo relativo en x = 1.

Sol: a= -9 , b=15

18.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en su punto de inflexión.

Sol: y = -3x+3

19.- La función f(x) = $3x^2$ + mx + 8 presenta un mínimo en x =1. Calcula m y el valor del mínimo.

Sol: m = -6; f (1)= 5

20.- La gráfica de la función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (-1 , 0) y tiene un máximo en el punto (0 , 4). Hallar los coeficientes a , b y c.

Sol: a = -3 , b = 0 , c = 4

21.- Dada la función f (x) = a x^2 - 5x + b

a) Halla el valor de a y b sabiendo que f (0) = 6 y f ' (1) = - 3
b) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente 3 ?

Sol: a = 1 b = 6 , en el punto x = 4

22. La función $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x + b$ corta al eje de abscisas en x = 3 y tiene un punto de inflexión en $x = \frac{2}{3}$. Hallar a y b.

Sol: a = 2 , b = -21

23.- Representa la función f(x)=$\begin{cases} x^2+1 & si\ x \geq 0 \\ x-1 & si\ x < 0 \end{cases}$

Estudia su continuidad y derivabilidad, su crecimiento, sus máximos y mínimos.

Sol: Discont y no derivable en x = 0 , siempre creciente, ni máximos ni mínimos

24.- Sea f(x)=$\begin{cases} x^2-1 & si & x<2 \\ 2x-3 & si & 2 \leq x < 4 \\ 5 & si & x \geq 4 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad y su derivabilidad
b) Dibuja su gráfica

Sol: Discont y por tanto no derivable en x =2 , continua y no derivable en x = 4

25.- a) Escribe una función que sea discontinua evitable en el punto x = 1 y discontinua no evitable en x = -2. Represéntala gráficamente.
b) Pon un ejemplo de función que sea continua pero no derivable en el punto x = 3, y dibuja su gráfica.

26.- La función $f(x) = |\ x+1\ |$ ¿presenta un mínimo relativo en algún punto?. ¿En qué puntos es derivable? Razónalo.

Sol: Mínimo (-1,0). Derivable: R-$\{-1\}$

27.-Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \leq 0 \\ 1-x^2 & si\ 0 < x \leq 1 \\ x & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

Si la función es discontinua para algún valor de x, indica qué tipo de discontinuidad presenta y cómo se evitaría. Si en algún punto la función no fuese derivable indica la razón.

28.- Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ x^2+x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Sol.: x = 0 único punto en el que no es derivable

29.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 7 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Sol: Continua en R - {1} , derivable en R - {1,3}

30.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ -3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Sol: x=2 discontinuidad evitable (por lo tanto no derivable). En x = 0 continua pero no derivable. En los demás puntos continua y derivable.

31.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 9x+8 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^3-10 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 2x^2+3x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Sol: Continua en R - {1}. Discontinuidad inevitable de salto finito en x=1. Derivable en $R-\{1,2\}$

32- Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} & si \quad x \le 0 \\ e^x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Sol: f(x) es discontinua no evitable con salto infinito en x = -1
f(x) es discontinua no evitable con salto finito en x = 0
f(x) no es derivable en x = -1 ni en x = 0 por no ser continua.

33. - Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} & si \quad x \le 1 \\ 2x^3 - 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) ¿En qué punto o puntos es discontinua?. ¿De qué tipo?
b) ¿Es derivable en x=1?. ¿Y en x = -1?. ¿Por qué?

Sol: a) Continua en x=1. Discontinua no evitable en x=-1.
b) No derivable en x=-1 por no ser continua.
No derivable en x=1 por ser $f'(1^-) \neq f'(1^+)$

34.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & si \quad x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) ¿Es continua en x=1?. ¿Por qué?.
b) ¿Es derivable en x=1?. ¿Por qué?.
c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x=2.

Sol: a) f(x) es continua en x = 1. b) f(x) no es derivable en x=1. c) $y - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}(x-2)$

35.- Dada la función: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a)Estudiar su crecimiento/decrecimiento. ¿Tiene algún máximo o mínimo relativo?. ¿En qué punto o puntos?
b)Estudiar su concavidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?. ¿En qué punto?
c)Representarla gráficamente.

Sol: a)Creciente en (-∞,0) y en (2, +∞). Máximo (0,4). Mínimo (2,0)
b)Abierta hacia abajo en (-∞,1), abierta hacia arriba en (1,+∞).
Punto de inflexión: (1,2)

36.- Estudia y representa la función $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

Sol: corta a los ejes en (0,0) , asíntota vertical x = 1, asíntota horizontal y = 1. No tiene simetrías, mínimo en (0,0) , pto inflex en $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{9}\right)$

37.- Estudia y representa $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

Sol: Corta a los ejes en (0,0) asíntota vertical x = 1, asíntota oblicua y = x+1, no simetrías, máximo en (0,0) , mínimo en (2,4). Sin puntos inflexión.

38.- Estudia y representa $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}$

Sol: Corta al eje OX en (-2,0) y al eje OY en (0,4); asíntota y=1, máximo en ($^1/_2$,5) *y mínimo en (-2,0)*

39. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

Sol: AV: x = -2 y x = 2 , AH: y = -1 , mín: (0 , 0)

40.- a) Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$

b)¿ En qué puntos de la función anterior la recta tangente es paralela al eje de abscisas?. Escribir la ecuación de dicha recta tangente en los puntos obtenidos.

Sol: a) AV : x = 1 , AO: y = -x-1 , máx : (2 , -4) , mín: (0 , 0).
b) En P (2 , -4) , ec. recta tg: y = -4 y en Q (0 , 0) , ec. de recta tg: y = 0

41.- Estudiar y representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}$

Sol: máx (-2 , -8) , min (0 , 0) ; AV : x = -1 ; AO : y = 2x- 2

42.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{4-x}$

a) Calcula las ecuaciones de sus asíntotas y determina su posición respecto a la gráfica.

b) Estudia su crecimiento. ¿Tiene extremos relativos?. ¿Dónde?.

c) Estudia su concavidad. ¿Tiene inflexiones?. ¿Dónde?.

d) Con los datos anteriores, representa gráficamente f(x).

Sol: a) Asíntota vertical: x = 4. Asíntota horizontal: y = -1.
b) f(x) es creciente en todo su dominio.
c) Cóncava abierta hacia arriba en (-∞,4); abierta hacia abajo en (4,+∞).

43.- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$
¿Tiene máximos o mínimos esta función? Razona tu respuesta.

Sol: Mn (0,0) Creciente: (0,3) $\cup(3,\infty)$ *Decreciente:* $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$

44.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$, determinar:

a) Dominio y asíntotas.

b) Intervalos de crecimiento-decrecimiento. Extremos relativos.

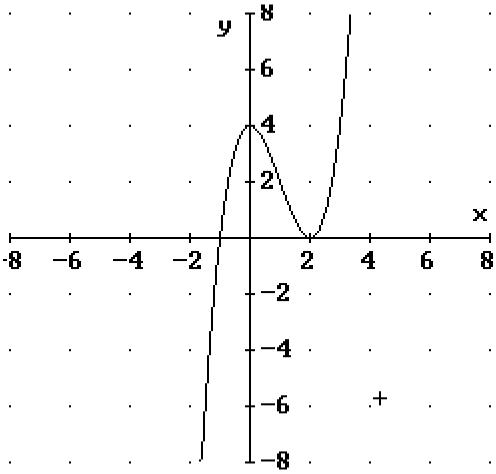
Sol: a) Dominio: R - {4} ; asíntota vertical x=4, asíntota oblicua y =-x-4
b) Crece:(0 , 4) È (4 , 8) ; decrece:(-¥ , 0) È (8 , +¥) ; máx (8 , -16) ; mín (0 , 0)

45.- Representa la función $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

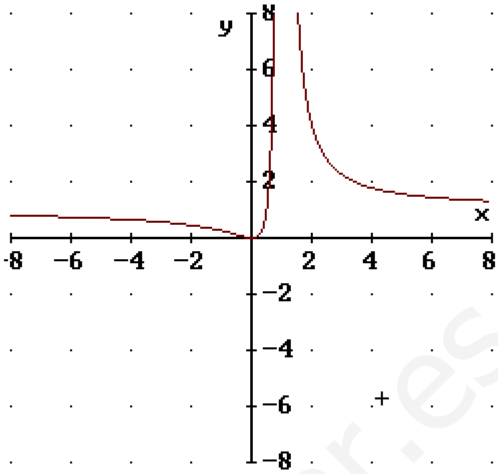
46.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-x}{2x^2-8}$ calcula: el dominio, las asíntotas, los cortes con los ejes, los intervalos de crecimiento-decrecimiento y los extremos relativos.

Sol: Dominio R- {-2, 2} asíntotas x=2 x=-2 y = $\dfrac{1}{2}$ *cortes (0,0) y (1,0)*
Máximo (0,55 , 0,03) mínimo (7,45 , 0'466)

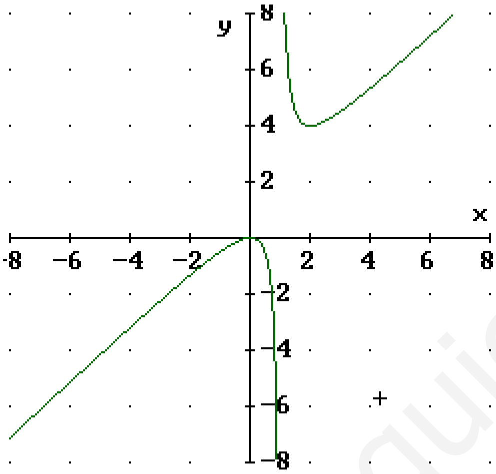
GRÁFICAS DE FUNCIONES



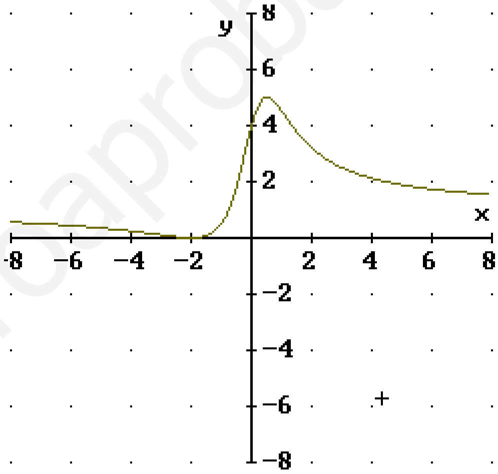
Ejercicio 35



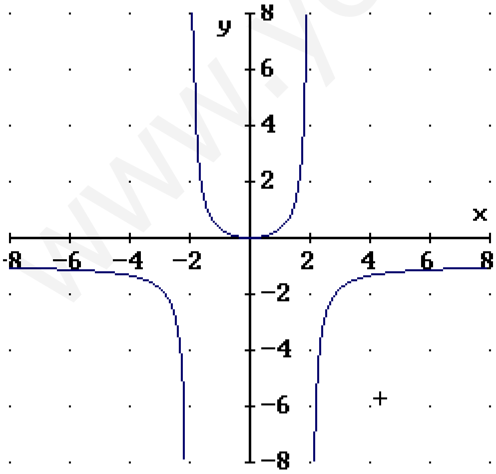
Ejercicio 36



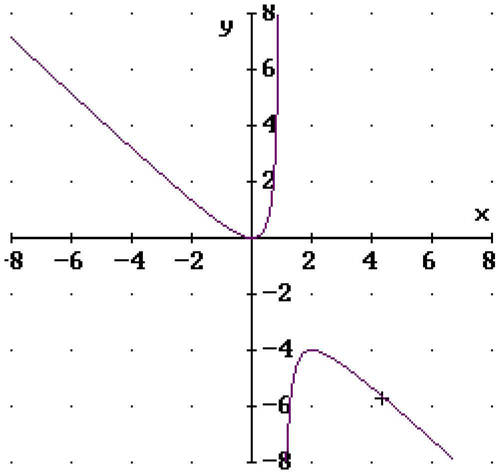
Ejercicio 37



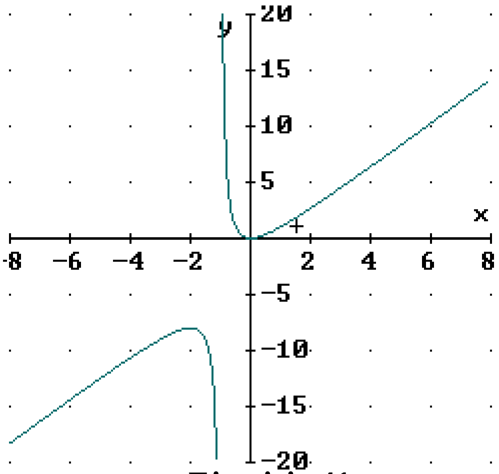
Ejercicio 38



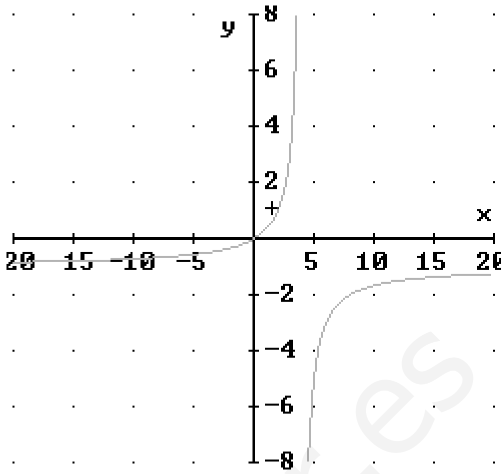
Ejercicio 39



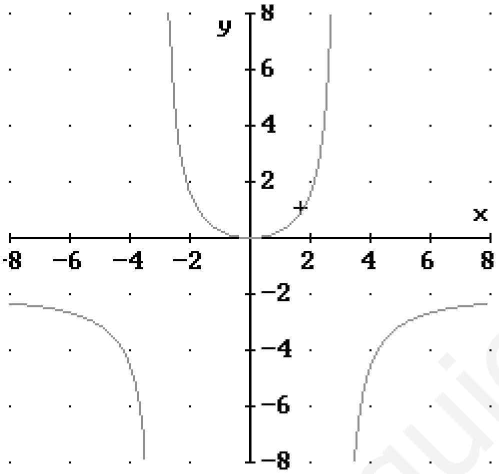
Ejercicio 40



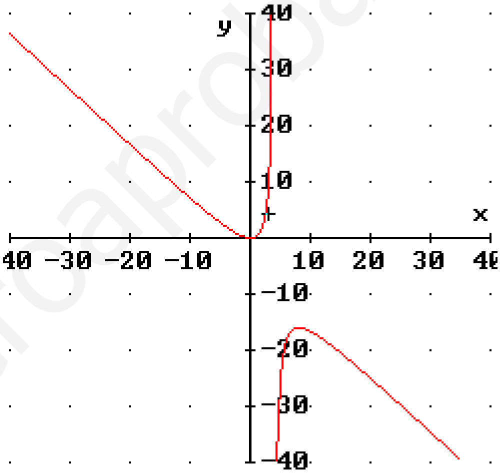
Ejercicio 41



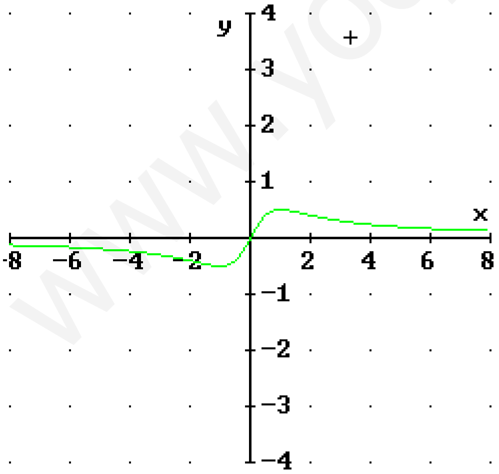
Ejercicio 42

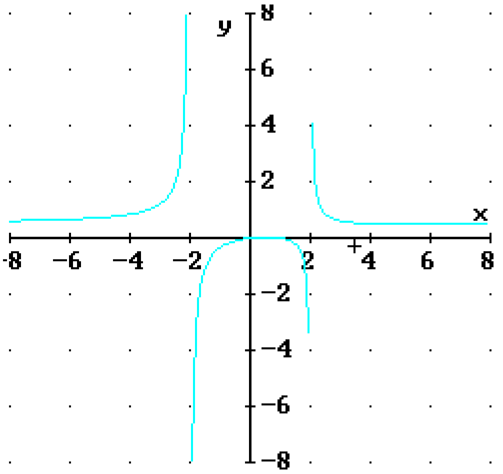


Ejercicio 43



Ejercicio 44





Ejercicio 45

Ejercicio 46

C. Cuestiones de tipo test sobre funciones

01.- La ecuación $x^2 + y^2 = 9$

- ☐ corresponde a una función de dominio R
- ☐ corresponde a una función de dominio [-3,3]
- ☐ corresponde a una función de dominio $\{x \in R / 0 \leq x \leq 3\}$
- ☐ no corresponde a una función

02.- El dominio de las funciones f(x) = Lx , g(x) = e^x

- ☐ es R para las dos
- ☐ es $[0,+\infty]$ para la 1ª y R para la 2ª
- ☐ es $[0,+\infty]$ para la 1ª y R para la 2ª
- ☐ es $[0,+\infty]$ para las dos

03.- La función f(x) = $\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+3)}$

- ☐ es discontinua en x = 2 y en x = -3 y tiene límite finito en x = 2
- ☐ es discontinua en x = -3 solamente
- ☐ es continua en todo R
- ☐ es discontinua en x = 2 y en x = -3 y no tiene límite en esos puntos

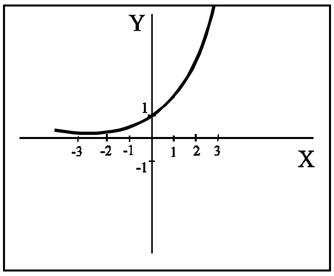
04.- El límite cuando $x \rightarrow 3$ de la función f(x) = $\dfrac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}$

☐ vale $\dfrac{-1}{4}$ ☐ es ∞ ☐ vale $\dfrac{1}{4}$ ☐ no existe

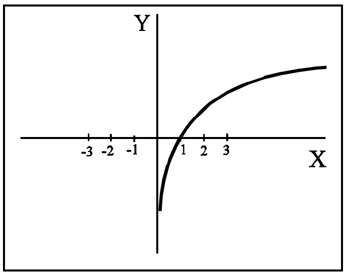
05.- ¿Qué función de las siguientes corresponde a cada gráfica?

$f_1(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ $\qquad$ $f_2(x) = (x+2)^2 + 1$ $\qquad$ $f_3(x) = \text{sen } x$

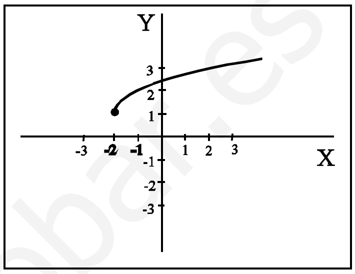
$f_4(x) = e^x$ $\qquad$ $f_5(x) = |x(x-2)|$ $\qquad$ $f_6(x) = \ln x$ $\qquad$ $f_7(x) = \dfrac{2}{x}$



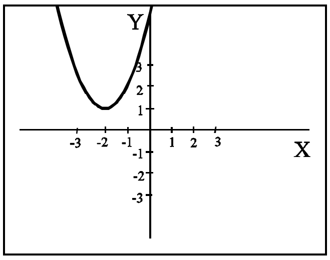
a)



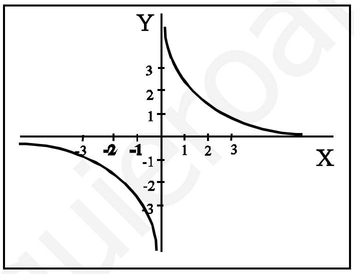
b)



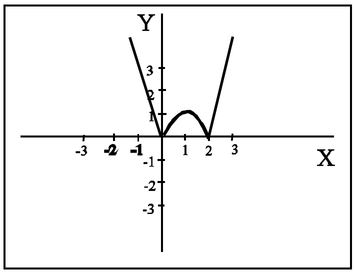
c)



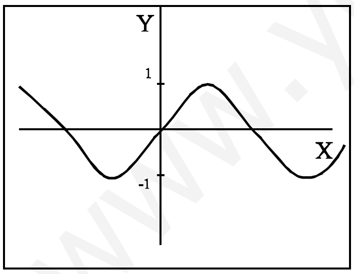
d)



e)



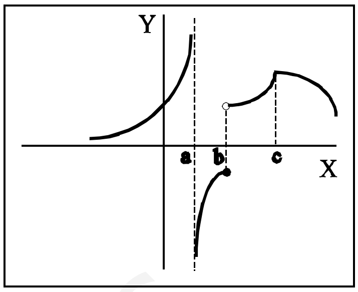
f)



g)

06.- Dibuja (en rojo) el dominio y (en azul) el recorrido de las funciones anteriores. Escribe simbólicamente el dominio y el recorrido de esas funciones.

07.- Sea f(x) una función cuya gráfica es la que aparece en la figura:



- ☐ f(x) es discontinua en a, b y c
- ☐ f(x) es discontinua en a y b, pero no en c
- ☐ f(x) es discontinua en b y en c, pero no en a
- ☐ f(x) es discontinua en b, pero no en a ni en c

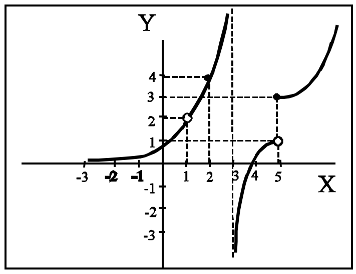
08.- Para la misma función f(x) anterior:

- ☐ f(x) no es derivable en a ni en b ni en c
- ☐ f(x) no es derivable en a ni en b pero sí en c
- ☐ f(x) no es derivable en b ni en c, pero sí en a
- ☐ f(x) no es derivable en a, pero sí lo es en b y en c

09.- Para la misma función f(x) de las dos cuestiones anteriores:

- ☐ f(x) no tiene ninguna asíntota
- ☐ f(x) sólo tiene una asíntota vertical
- ☐ f(x) sólo tiene una asíntota horizontal
- ☐ f(x) tiene una asíntota vertical y otra horizontal

10- Sea g(x) la función cuya gráfica aparece en la figura. El símbolo o representa un “agujero” en la gráfica, es decir, un punto en el que no está definida la función. Escribe el valor de los siguientes límites (finitos o infinitos) de g(x) en caso de que existan y pon una N si no existen:



a) Cuando $x \to 1^-$:	g) Cuando $x \to 3^-$:
b) Cuando $x \to 1^+$:	h) Cuando $x \to 3^+$:
c) Cuando $x \to 1$:	i) Cuando $x \to 3$:
d) Cuando $x \to 2^-$:	j) Cuando $x \to 5^-$:
e) Cuando $x \to 2^+$:	k) Cuando $x \to 5^+$:
f) Cuando $x \to 2$:	l) Cuando $x \to 5$:

11- Dí si la misma función g(x) de la pregunta anterior es continua (C), discontinua evitable (DE) o discontinua no evitable (NE) en los siguientes puntos:

en x = 1 : en x = 2 : en x = 3 : en x = 5 :

12- La función f(x) = $|x^2 - 9|$

- ☐ es continua y derivable en x = -3 y en x = 3
- ☐ es discontinua pero derivable en x = -3 y en x = 3
- ☐ no es continua ni derivable en x = -3 ni en x = 3
- ☐ es continua pero no derivable en x = -3 y en x = 3

13.- ¿En qué punto tiene la función $f(x) = x^3 - x + 2$ una tangente paralela a la recta $2x - y + 2 = 0$?

☐ en x=-1 y en x=1 ☐ en ningún punto ☐ sólo en x=1 ☐ en el punto (0,2)

SOLUCIONES A LAS CUESTIONES.

01: 4ª 02: 2ª 03: 1 04: $-\frac{1}{4}$ 05: c) e) f) a) g) b) d)

07: 2ª 08: 1ª 09: 4ª

10: a): 2 b): 2 c): 2 d): 4 e): 4 f): 4 g): $+\infty$ h): $-\infty$ i): N j): 1 k): 3 l): N

11: en x = 1: DE, en x = 2: C, en x = 3: NE, en x = 5: NE.

12: 4ª 13: 1ª

D. Problemas de máximos y mínimos

1.- La función $f(x) = \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600)$ representa el beneficio, expresado en millones de pesetas, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.

a) Representa gráficamente dicha función.
b) ¿ Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?
c) ¿ Cuál es el mayor beneficio posible?

Sol: b) $20 < x < 80$ c) 50 unidades

2.- Deseamos comprar 18 ordenadores y en el mercado hay de dos tipos. Sabemos que el beneficio que podemos obtener de su uso está dado por el producto del número de ordenadores del primer tipo que se compra por el cuadrado del número de ordenadores del otro tipo que se adquiere. Determinar el número de ordenadores de cada tipo que debemos adquirir para que el beneficio sea máximo.

Sol: 6 del primer tipo y 12 del segundo

3.- Una compañía de transportes ha comprobado que el número de viajeros diarios depende del precio del billete según la función: $n(p)=3000-6p$ donde $n(p)$ es el número de viajeros cuando p es el precio del billete. Obtener:

a) La función que expresa los ingresos diarios (I) de esta empresa en función del precio del billete (p).
b) El precio del billete que hace máximos dichos ingresos.
c) ¿ A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos?

Sol: a) $I=3000p-6p^2$ b) $p=250$ c) 375000

4.- En su modelo para los costes de almacenamiento y transporte de materiales para un proceso de manufactura, Lancaster obtuvo la siguiente función de coste:

$$C(x) = 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right)$$

Donde C(x) es el coste total (en dólares) de almacenamiento y transporte durante tres meses de x toneladas de material. ¿Qué cantidad de materiales hace que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el valor de dicho coste?

Sol: 4 tm de materiales y 17200 \$.

5.- Un club deportivo cuenta con un número de socios que viene dado en miles de personas por la función : $s(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$ donde x indica el número de años desde la última remodelación.

a) Hállese el año en que el club ha tenido el mayor número de socios.
b) El cuarto año se remodeló de nuevo. Estudiar si esta remodelación tuvo éxito o no.

Sol: a) 1 año después de la remodelación b) Sí tuvo éxito

6.- El propietario de un inmueble tiene alquilados 40 pisos del mismo a 30.000 ptas. al mes cada uno. Por cada mil pesetas de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficios produce al propietario?

Sol: 35.000 pesetas

7.- Se sabe que el rendimiento, r en % de un estudiante que realiza un examen de una hora viene dado por $r(t) = 300t(1-t)$ siendo $0 \le t \le 1$, t en horas. Explica cuándo aumenta y cuándo disminuye el rendimiento. ¿Cuándo se anula?. ¿Cuándo es máximo?.

Sol: Aumenta de 0 a 1/2 , disminuye de 1/2 a 1. Se anula en 0 y 1. Es máximo en 1/2.

8.- Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad R(x) en miles de pesetas, viene dada en función de la cantidad que se invierte x, en miles de pesetas, por la siguiente expresión: $R(x) = -0.001x^2 + 0.4x + 3.5$

a) Deduce y razona qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan.
b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

Sol: a) 200.000 ptas. b) 43.500 ptas.

9.- Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una gran ciudad en los últimos años, indica que la concentración de estos viene dada por la función:

C(x)= $-0.2x^2 + 5x + 30$ (x en años a partir del 1-1-1990)

a) Halla la tasa media de variación entre enero de 1991 y enero de 1995.
b) Según su estudio, ¿en qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?
c) ¿En el año 1997 era creciente C(x)?
d) Halla la pendiente de la recta tangente a esta función en x = 8. Interpreta el resultado obtenido.

Sol: a) 3.8 b) A mediados del 2002 c) Sí d) 1.8. La concentración de gases contaminantes era creciente en 1998

10.- Una empresa ha realizado un estudio acerca de los costes de producción, llegando a la conclusión de que producir x unidades de un objeto dado tiene un coste expresado por

$$f(x)= 0.25x^2 - 25x + 25$$

La venta de x unidades de ese producto proporciona unos ingresos dados por la expresión:

$i(x)= (30 + 0.125x)x$, siendo x el nº de unidades producidas.

Se pide:

a) Hallar el número de unidades que se deben producir para que los costes sean mínimos.
b) Hallar la expresión de los beneficios obtenidos en función de x, suponiendo que se venden las x unidades producidas.
c) Hallar el número de unidades que se deben producir y vender para obtener el máximo beneficio.

Sol: a) 50 unidades b) $B(x)= - 0.125x^2 +55x-25$ c)220 unidades

11.- Un fabricante estima que si se usan x máquinas el coste del proceso de producción será: $C(x) = 20x+2000/x$ euros. Esboza la porción relevante de esta función de coste y estima cuántas máquinas deberá usar el fabricante para minimizar el coste.

Sol: Deberá usar 10 máquinas para minimizar el coste.

12.- Al comercializar cierto producto, una empresa ha descubierto que el precio de venta por unidad viene dado por:

$P(x) = 50/x^{1/2}$ (siendo x en nº de unidades vendidas)

Si el coste de producción de x unidades es $C(x) = 0'5x + 500$ euros, calcula el precio unitario que proporciona el máximo beneficio.

Sol: x = 2500 unidades. Precio unitario 1 euro.

13.- Un fabricante puede producir juguetes (no bélicos) a un coste de 20 euros cada uno. Se estima que si los juguetes se venden a x euros cada uno, los usuarios comprarán (120-x) de ellos al mes. Expresa el beneficio mensual del fabricante como una función del precio, dibuja esta función y utiliza el gráfico para estimar el precio óptimo de venta.

Sol: 70 euros.

14.- La demanda de consumo para un cierto artículo es D(p) = -200p+12000 unidades por mes cuando el precio de mercado es de p dólares por unidad.

a) Dibuja esta función de demanda.
b) Expresa el gasto total mensual de los consumidores como una función de p.
c) Dibuja la función de gasto total mensual.
d) Discute el significado económico de la p-intersección de la función de gasto.
e) Usa el gráfico de la parte c) para estimar el precio de mercado que genera el mayor gasto de consumo.

Sol: El mayor gasto de consumo lo genera un precio de 30 $ la unidad.

15.- Un vendedor de bolígrafos ha observado que si los vende a 10 céntimos de euro es capaz de vender 1000 unidades diarias, pero por cada unidad monetaria de aumento en el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte, a él le cuesta fabricar un bolígrafo 5 u.m. Averigua el precio de venta para que se maximice el beneficio.

Sol: 12'5 céntimos de euro.

16.- Un granjero tiene un cerdo de 150 kg., cuya alimentación le supone un gasto de 36u.m./día. El cerdo engorda 3 kg/día. En este momento podría venderlo a 120u.m./kg, pero está bajando el precio a razón de 2u.m. por día y kilogramo. ¿Cuánto tiempo deberá esperar el granjero para vender el cerdo, con objeto de obtener el máximo beneficio? Comprueba la solución.

Sol: deberá esperar 2 días.

17.- Una compañía de autobuses alquila uno de 50 plazas a grupos de 35 o más personas. Si un grupo contiene exactamente 35 personas, cada persona paga 60 dólares. En grupos mayores, la tarifa de todos se reduce en un dólar por cada persona que sobrepase de las 35. Determina el tamaño del grupo para el cual los ingresos de la compañía serán mayores. ¿Cuáles son dichos ingresos?.

Sol: 47 ó 48 personas. Ingresos 2256 $

18.- Una huerta tiene actualmente 25 árboles que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

a) La producción actual de la huerta.
b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan **x** árboles más.
c) La producción que se obtendría en total de la huerta si se plantan **x** árboles más.
d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?. Interpretar el resultado.

Sol: a) 15000 b) 600 - 15x c) P (x) = (25 + x) · (600 - 15x)
d) Solución matemática: nº de árboles 32 ó 33 produciendo 15840 frutos
Solución real 32 árboles, ya que ocasionan menos gastos y menos trabajo.

19.- Cierta empresa vende bombillas a 70 ptas./unidad. A este precio una cadena de supermercados le compra 6.000 bombillas cada mes. El fabricante desea elevar el precio de la bombilla y estima que por cada peseta de aumento en el precio, su cliente comprara 80 unidades menos cada mes. Sabiendo que el precio de coste de una bombilla es de 30 ptas. ¿A qué precio debe venderlas el fabricante para ganar el mayor beneficio posible?.

Sol: 87,5 ptas.

20.- A un vendedor de ordenadores le cuesta 140.000 ptas. cada modelo PCHE-COMPR. Ha comprobado que, al precio de 240.000 ptas./unidad, vende 30 ordenadores mensualmente y que, por cada 2.000 ptas. de descuento en el precio puede vender 3 unidades más al mes. Calcular a qué precio debe venderlos para obtener el máximo beneficio posible?. ¿Cuál es el beneficio?.

Sol: precio 200.000 ptas. con beneficio de 5.400.000 ptas.

21.- Los ingresos de una fábrica de abono dependen del número de kilogramos producidos y vienen dados por la siguiente función: $I(x) = x^2 - 6x$, siendo x el número de kilogramos producidos.

En la misma fábrica los costos de producción, en cientos de pesetas vienen dados por la función: $C(x) = \frac{7}{4}x + 2$

a) ¿Qué cantidad de producción debe existir para que los ingresos sean crecientes?.
b) ¿Con qué cantidad de producción se obtienen los mínimos ingresos?. ¿Y los máximos?
c) ¿Cuándo se producen los costos mínimos?. ¿Y los máximos?.
d) ¿Para alguna producción se produce el equilibrio?. (los ingresos coinciden con los costos?
e) ¿Cuál es la función beneficio?. ¿Cuál es el mínimo beneficio?. ¿Y el máximo?

Sol: a) $x > 3$
b) mínimos con $x = 3$ y máximo no hay (aumentan cuanto más se produce)
c) costos mínimos con $x = 0$, máximos no hay (aumentan cuanto más se produce)
d) $x = 182{,}098$ kg
e) $B(x) = x^2 - 181x - 200$
Mínimo beneficio matemático (- 8389,8 ptas.). Realmente no fabricando nada el beneficio mínimo sería (- 200 ptas.)
Máximo no hay (aumentan cuanto más se produce)

22.-El beneficio mensual de un empresario por la fabricación por la fabricación de x unidades diarias de un producto, en miles de pesetas, viene dado por la función:

$B(x) = - 0,05\, x^2 + 200\, x - 1000$ Calcular:

a) La tasa de variación media del beneficio cuando pasa de fabricar 1000 a fabricar 1200 piezas diarias.
b) La tasa de variación instantánea cuando fabrica 1000 unidades diarias.
c) Si con el utillaje actual sólo puede fabricar hasta 1500 unidades diarias, ¿cuántas debería fabricar para obtener el máximo beneficio?
d) Renovando el utillaje podría llegar a fabricar hasta 2500 unidades diarias. ¿Cuántas unidades diarias debe fabricar si renueva el utillaje para obtener el máximo beneficio?

Sol: a) 90 b) 100 c) 1500 d) 2000

23.-La demanda de un modelo de bomba hidráulica fabricado por una empresa está en función del precio de venta. A un precio de p miles de pesetas, la empresa vende (10000 - 50 p) bombas al mes. Hallar:

a) La función I(p) que da el ingreso mensual de la empresa.
b) El precio al que debería vender cada bomba para que el ingreso mensual sea máximo. ¿Cuánto sería ese ingreso máximo?

Sol: a) $10000\, p - 50\, p^2$ *b)* $p = 100$ $I = 500000$ *(miles de pesetas)*

24.-El coste de fabricación de x unidades de cierto artículo viene dado en euros por la función:
$C(x) = 4x - 2\sqrt{x} + 85$

a) ¿Cuál es el coste unitario?
b) ¿Para qué producción resulta mínimo el coste unitario?

Sol: a) $c = 4 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{85}{x}$ *b)* $x = 7225$

25.-El número de insectos por cada hectárea de bosque de una especie estacional viene dado por la función:

$N(t) = - t^2 + 4\, t + \ln\,(t + 1)$

Siendo N el número de insectos en miles de individuos, y t el tiempo transcurrido desde el comienzo de la estación en semanas. Calcular en qué momento es máximo el número de insectos por hectárea.

Sol: Al cabo de 2,16 semanas.

26.- Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 pesetas la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada peseta que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 pesetas, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero?

Sol: precio de venta 95 ptas.

E. Integrales. Aplicaciones

1.- a) Dada f(x)=x ^{2} -4x ,aplicando la definición de derivada, halla f`(2)

b) Halla las ecuaciones de la tangente a esa función en los puntos de corte con el eje de abscisas.

c) Halla el área encerrada por la función y las tangentes anteriores

Sol: a) 0, b) y = -4x, y = 4 (x-4), c) $\frac{16}{3}$

2.- Halla las siguientes integrales : a) $\int (x-1)^{20}$ xdx b) $\int \operatorname{tg} 3x dx$ c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ dx

Sol: a) $\frac{(x-1)^{22}}{22} + \frac{(x-1)^{21}}{21} + C$, *b)* $-\frac{1}{3} \ln|\cos 3x| + c$, *c) 2e* $^{\sqrt{x}}$ *+ c*

3.- Calcula: $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ $\int \cos(3x-5)dx$ $\int \frac{x^2-5x}{x-2} dx$

Sol: a) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$, *b)* $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x-5) + C$, *c)* $\frac{(x-3)^2}{2} - 6 \ln|x-2| + C$

4.- Sea f (x)= x e $^{-x^2}$

a) Halla sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.
b) Halla sus asíntotas.
c) Halla el área limitada por la función , el eje de abscisas, x = 0 y x = M, siendo M la abscisa del máximo.

Sol: a) Máximo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}\right)$ *, Mínimo en* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}\right)$*, Puntos de inflexión en (0,0),* $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}\right)$ *y* $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}\right)$ *b) y = 0 c)* $\frac{1}{2}$ *(1-e* $^{-\frac{1}{2}}$ *)*

5.-Calcula aproximadamente $\int_1^6 \ln(x+3)\, dx$ dividiendo el intervalo $[1,6]$ en 5 partes iguales

Sol: 9,2182

6.- La curva $y = a\left(1-(x-2)^2\right)$ con $a > 0$ delimita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de **a.**

Sol: a = 9

7.- Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcula **a**, **b**, **c** y **d**.

Sol: a= -1 b=0 c=3 d=0

8.- Calcula: a) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$ b) $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$ c) $\int x(1-x)^{20}\, dx$

Sol: a) $-2\sqrt{1+\cos x}+C$ b) tgx - x+ C c) $\frac{-(1-x)^{21}}{21}+\frac{(1-x)^{22}}{22}+C$

9.- Sean $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$ y $h(x) = e^2$. Calcula el área del recinto limitado por esas tres funciones.

Sol: $0,5\,(e^2+1)$

10.-Sean las funciones $y = x^3-4x^2+4x$; $y = -3x^2+6x$. Determina:

a) Los puntos de corte con los ejes de cada función.
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento,máximos y mínimos de las dos funciones.
c) El área encerrada por ambas funciones.

Sol: a)(0,0)(2,0); (0,0) (2,0) b) 1ª creciente en $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $\left(\frac{2}{3},2\right)$ máximo en $\left(\frac{2}{3},\frac{32}{27}\right)$ y mínimo (2,0); 2ª creciente en$(-\infty,1)$ y decreciente en $(1,+\infty)$ y máximo en (1,3) c) $\frac{37}{12}u^2$

11.-Calcula: a) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$ b) $\int\frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^4 x}$ c) $\int c\operatorname{tg} 3x dx$ d) $\int\frac{x dx}{(1-x)^5}$

Sol: a) $\sqrt{2x-3}+C$ b) $\frac{1}{3\cos^3 x}+C$ c) $\frac{1}{3}\ln|\operatorname{sen} 3x|+C$ d) $\frac{1}{4(1-x)^4}-\frac{1}{3(1-x)^3}+C$

12.- Calcular el área comprendida entre las gráficas de las siguientes funciones:

$$y = x^3 - x \qquad ; \qquad y = 3x.$$

Sol: 8u²

13.- Calcular $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{1+x^2}\,dx$

Sol: 7

14.- Calcular el área comprendida entre las gráficas de las siguientes funciones:

$$y = x^2 - 4x \qquad ; \qquad y = 6x - x^2$$

Sol: 125/3u²

15. Calcular las integrales: a) $\int \frac{5x}{x^2+4}dx$ b) $\int (\cos x)^2 \operatorname{sen} x \, \mathrm{dx}$

Sol: *a)* $\frac{5}{2}\ln(x^2+4) + k$ *b)* $-\frac{(\cos x)^3}{3} + k$

16. - Calcular las siguientes integrales:

$a)\int x\sqrt{x+2}\,dx$ $b)\int \frac{dx}{\cos^2 x + \cos x \operatorname{sen} x}$ (utilizar el cambio tgx = t)

Sol: $a)\frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C$ $b)\ln\left|1+\operatorname{tg} x\right| + C$

17. Dada la función f(x) = x^3-2x+1, calcular:

a) La primitiva cuya gráfica pasa por el punto A = (1,2).

b) La primitiva que se anula para x = 2.

Sol: $a)\ \frac{x^4}{4} - x^2 + x + \frac{7}{4}$ $b)\ \frac{x^4}{4} - x^2 + x - 2$

18-a) Halla $\int_0^2 (x^2 + 1)\, dx$ mediante el método de los trapecios, dividiendo el intervalo de integración en ocho partes iguales.

b) Calcula el error cometido en el apartado anterior.

Sol: a) 4’6875 b) 0’0209

19. Halla el área del recinto limitado por la curva y = -(x+2) (x-2) (x-4) y el eje de abscisas. (Intenta hacer la gráfica y marca el área que nos piden).

Sol: 148/3u²

20.-Calcular la siguiente integral: $\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\, dx$

Sol: $\frac{1}{6}\sqrt{(2x+3)^3} - \frac{3}{2}\sqrt{2x+3} + C$

21.- a) Halla la primitiva de f(x) = cotgx cuya gráfica pasa por el punto (π/2 , π/2).

b) Halla la primitiva de la función f(x) = $3x^2$- 4x + 3 que se anula en x = 2.

Sol: $a)\ \ln|\operatorname{sen} x| + \frac{p}{2}$ $b)\ x^3 - 2x^2 + 3x - .6$

22.a) Calcula el área comprendida entre la curva y = x^3+1, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 2, utilizando el método de los trapecios (dividimos el intervalo en 5 partes iguales).

b) ¿Qué error hemos cometido en el apartado anterior?

Sol: a) 6’16 b) 0’16

23.- Halla el área del recinto limitado por la curva y = x^2-5x+6, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=5. (Intenta hacer la gráfica).

Sol: 17/3

24.- Dos funciones opuestas están definidas en el mismo intervalo [a , b] ¿Cómo son sus integrales definidas? ¿y sus áreas?.

25.-Si f(x) es continua en [a,b] ¿puede ser que $\int_a^b f(x)dx = 0$? Poner un ejemplo aclaratorio.

26.- Calcula el área entre la curva $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ y el eje X.

Sol: $\frac{37}{12}u^2$

27.- Halla la función primitiva de las siguientes funciones: a) $f(x) = e^{2x+7}$

b) $g(x) = \frac{1}{(1-2x)^5}$ c) $h(x) = sen(5-3x)$ d) $i(x) = \frac{x+2}{2x^2+8x-7}$

Sol: *a)* $F(x) = \frac{e^{2x+7}}{2} + K$ *b)* $G(x) = \frac{1}{8(1-2x)^4} + K$

c) $H(x) = \frac{\cos(5-3x)}{3} + K$ *d)* $I(x) = \frac{\ln\left|2x^2+8x-7\right|}{4} + K$

28.- Calcular, de forma aproximada, el área comprendida entre la curva $y = Ln(x-1)$ y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.(Dividir el intervalo en 4 partes iguales)

Sol: 1.282 u^2

29.-Calcula el área de la figura limitada por la curva $y = x^2$, y las rectas $y = x$, $x = 0$ y $x = 2$.

Sol: 1 u^2

30.-Realiza las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ b) $\int \frac{x-1}{2x^2-4x+3}dx$ c) $\int (3x-2)^{20}\,dx$ d) $\int \cos\frac{p}{2}x\,dx$

Sol: *a)* $\frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4}+K$ *b)* $\frac{1}{4}Ln\left|2x^2-4x+3\right|+K$

c) $\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^{21}}{21}+K$ *d)* $\frac{2}{p}sen\frac{p}{2}x+K$

31.-Dada la función $f(x)=x^3-2x^2+x$, halla la ecuación de su recta tangente en el origen, y calcula el área de la región que queda encerrada entre la curva y su tangente.

Sol: $y = x$; $A=\frac{4}{3}u^2$

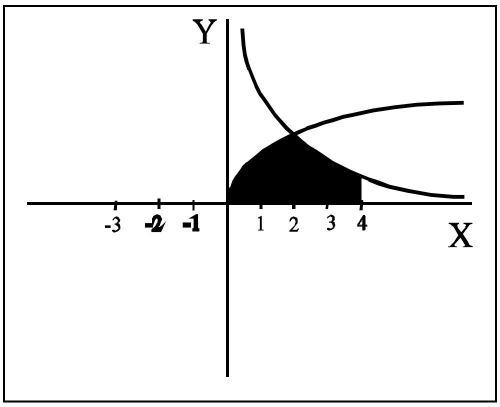
32.- Calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones: $y=x(6-x)$ e $y=x$.

Sol: $\frac{125}{6}u^2$

33.-Calcula el área sombreada de la figura:
(unidad: cm.)

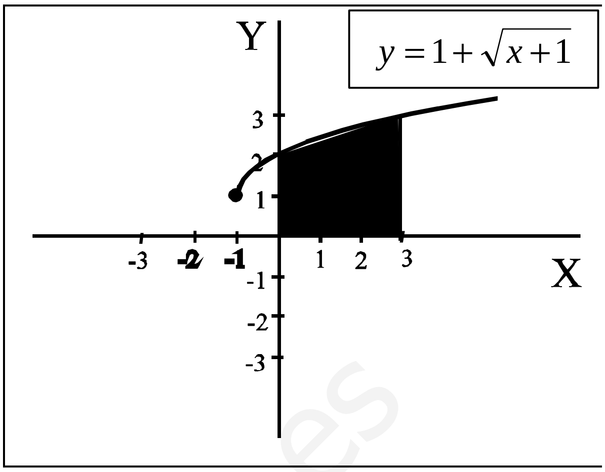
Las funciones son:

$f(x)=\sqrt{2x}$ y $f(x)=\frac{4}{x}$



Sol: Área = 2.67 + 2.77 = 5.44 cm^2

34.- Calcula de forma aproximada, sin utilizar el concepto de integral definida, el área que se indica en la figura, dividiendo el intervalo $[0,3]$ seis subintervalos de amplitud 0.5.



Sol:

Mediante rectángulos: $\begin{cases} \textit{réctangulos inferiores}: 7.4115 \\ \textit{réctangulos superiores}: 7.9115 \end{cases}$ *Área: 7.6115*

Mediante trapecios: Área: 7.6115

35.- Calcula el área de la figura anterior por integración.

Sol: Área: 7.6667

36.- Halla el área del recinto limitado por la curva $y = -x^2+5x-6$ y el eje de abscisas. (Intenta hacer la gráfica).

Sol: $\frac{1}{6}u^2$

37.- Calcula el área del recinto limitado por las funciones $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$

Sol: $\frac{8}{3}\text{u}^2$

38.- Dada la función $y = (3x - 4)^5$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente en x = 1.
b) Halla una primitiva que pase por el punto (2 , 0).

Sol: a) $y = 15x - 16$ *b)* $F(x) = \frac{(3x-4)^6}{18} - \frac{32}{9}$

39.- Hallar una primitiva de $y = (2x - 3)^5$ que tome el valor 1 para x = 2

Sol: $f(x) = \frac{(2x-3)^6}{12} + \frac{11}{12}$

40. Un publicista diseña un panel publicitario que tiene forma de base horizontal de 10 metros de longitud y el resto del contorno limitado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 5 \\ -x + 10 & \text{si} \quad 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

Se pide:

a) Dibujar la gráfica del recinto correspondiente al cartel publicitario.

b) Calcular su superficie.

Sol: área 45'83 u^2

41. Hallar la función cuya derivada segunda es $6x^2 + 2x - 14$ tal que en x = 0 vale 10 y su primera derivada pasa por el punto (1 , -11).

Sol: $F(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 10$

42. Dada la función $y = x^2 - 4$

a) Calcula las rectas tangentes a esa función en los puntos de corte con el eje de abcisas.

b) Halla el área limitada por la curva y las dos rectas tangentes calculadas anteriormente.

Sol: a) $y = 4x - 8$, $y = -4x - 8$ b) $\frac{16}{3}$ u^2

III. Probabilidad e inferencia estadística

A. Probabilidad

1.- De una baraja española de 40 cartas se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea bastos o menor de 5 ?

Sol: 0.55

2.- Sean A y B dos sucesos aleatorios. Supóngase que P(A) = 0,4 mientras que $P(A \cup B)=0,7$. Sea P(B) = p.

a) ¿ Para qué valor de p son A y B sucesos incompatibles ?
b) ¿Para qué valores de p son A y B independientes ?

Sol: a) p = 0.3 b) p = 0.5

3.- La probabilidad del suceso A es $\frac{2}{3}$, la del suceso B es $\frac{3}{4}$ y la intersección $\frac{5}{8}$. Hallar:

a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos.
b) La probabilidad de que no ocurra B.
c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.
d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

Sol: a) P(AÈB)=19 / 24 b) *$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1/4$*
c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 5/24$ d) $P(A/B)=5/6$

4.- Razona la siguiente afirmación: si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es menor que $\frac{1}{2}$, la suma de las probabilidades de ambos por separado no puede exceder de $\frac{3}{2}$.

5.- Un estuche contiene 15 lápices de color rojo y 10 de color azul.

a) Si elegimos uno al azar ¿Cuál es la probabilidad de que sea rojo?
b) Si extraemos dos ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean azules?
c) Si elegimos dos, calcular la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo rojo?

Sol: a) 0´6 b) 0´15 c) 0´25

6.- El equipo directivo de una empresa está constituido por 25 personas de las que un 60% son mujeres. El gerente tiene que seleccionar una persona de dicho equipo para que represente a la empresa en un certamen internacional. Decide lanzar una moneda. Si sale cara, selecciona una mujer y si sale cruz, un hombre.

Sabiendo que 5 mujeres y 3 hombres del equipo directivo no hablan inglés, halla la probabilidad de que la persona seleccionada hable inglés.

Sol: $\frac{41}{60}$

7.- En una facultad universitaria, los alumnos se clasifican según su sexo y hábito fumador:

	Fumador	**No fumador**	**TOTAL**
Varón	**189**	**301**	**490**
Mujer	**165**	**335**	**500**
TOTAL	**354**	**636**	**990**

A la vista de estos datos, calcula la probabilidad de que elegido un alumno al azar:

a) Sea no fumador.
b) Sea mujer y no fumadora.
c) Sea fumadora sabiendo que es mujer.
d) Sea varón si el alumno elegido no fuma.

Sol: *a)* $\frac{106}{165}$ *b)* $\frac{67}{198}$ *c)* $\frac{33}{100}$ *d)* $\frac{301}{636}$

8.- Una persona escribe tres cartas y sus tres sobres correspondientes a tres personas distintas. Pero, ¡AY! Con las prisas, introduce las cartas en los sobres al azar. Calcular:

a) La probabilidad de que las tres cartas estén correctamente situadas en sus sobres.
b) La probabilidad de que dos y solo dos lo estén.
c) La probabilidad de que al menos una carta se corresponda con su sobre.

Sol: *a)* $\frac{1}{6}$ *b) 0* *c)* $\frac{2}{3}$

9.- En un cubo una de las caras va pintada de rojo, dos caras de azul y las tres restantes de negro. Se lanza el cubo tres veces.

a) Hallar la probabilidad de que salga una sola vez el rojo.
b) Hallar la probabilidad de que salga las tres veces el mismo color.
c) Si las tres veces ha salido el mismo color, hallar la probabilidad de que éste sea el negro.

Dar las soluciones en forma de fracción irreducible

Sol: a) $\frac{25}{72}$ *b)* $\frac{1}{6}$ *c)* $\frac{3}{4}$

10.-Sea $P(A) = 0'7$ $P(B) = 0'6$ y $P(A^c \cup B^c) = 0'58$

a) ¿Son independientes A y B?
b) Halla la probabilidad de que no se cumplan ni A ni B.

Sol: a) sí b) 0'12

11.- Una fábrica tiene tres máquinas, A, B y C, que producen tornillos. Del total de tornillos se producen, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20%.La máquina A produce un 5% tornillos defectuosos, la B un 4% y la C, un 2%.
a) Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.
b) Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina C.

Sol: a) $\frac{41}{1000}$ *b)* $\frac{4}{41}$

12.- En una ciudad se publican dos periódicos, A y B. La probabilidad de que una persona lea el periódico A es 0,4. La de que lea el B es 0,3 y la de que lean ambos 0,1.
Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar:
a) No lea ninguno de los dos.
b) Lea A pero no B.
c) La probabilidad de que lea A sabiendo que lee B.
d) La probabilidad de que lea los dos sabiendo que lee alguno de ellos.

Sol: a) $\frac{2}{5}$ *b)* $\frac{3}{10}$ *c)* $\frac{1}{3}$ *d)* $\frac{1}{6}$

13.- Sean A, B sucesos aleatorios. Se sabe que p (A) = 0,6; p (B) = 0,4; p (A $\cap$ B)= 0,3

a) ¿Los sucesos A, B son compatibles? ¿Por qué?
b) ¿Los sucesos A, B son independientes? ¿Por qué?
c) Calcular la probabilidad de que ocurra A o B (o ambos)
d) Calcular la probabilidad de que no ocurra ni A ni B
e) Calcular la probabilidad de que ocurra A, pero no B

Sol: a) sí b) no c) 0' 7 d) 0'3 d)0'3

14.-Una urna contiene tres bolas blancas y cuatro negras. Se extraen dos bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de sean las dos blancas?. ¿Cuál es la probabilidad de que sean las dos blancas, si han salido del mismo color?

Sol: a) $\frac{1}{7}$ *b)* $\frac{1}{3}$

15.- Se extraen simultáneamente tres naipes de una baraja de 40 cartas. Halla la probabilidad de obtener

a) tres copas
b) dos copas y un oro
c) al menos una copa

Sol: a) $\frac{3}{247}$ *b)* $\frac{45}{988}$ *c)* $\frac{291}{494}$

16.- De los sucesos aleatorios A, B se sabe que P(A) =0,6, P($\bar{B}$)=0,6 y P($\bar{A} \cup \bar{B}$)=0,9. Calcular las siguientes probabilidades: P($A \cap B$), P($B \cap \bar{A}$), P(B / A) y P($\bar{A} / B$).

Sol: 0,1 0,3 $\frac{1}{6}$ *= 0,167 0,75*

17.-Un jugador de fútbol, especialista en lanzar penaltis, mete 4 de cada 5 que tira. Para los próximos 3 penaltis que tire, se consideran los siguientes sucesos:

A = $\{mete\ sólo\ 1\ de\ ellos\}$, B= $\{mete\ 2\ de\ los\ tres\}$ y C = $\{mete\ el\ primero\}$.

Halla: P (A $\cup$B) , P (A $\cap$B) y P (B $\cap$C)

Sol: a) $\frac{12}{25}$ *b) 0* *c)* $\frac{32}{125}$

18.-Un cajón contiene 6 pantalones y otro 6 camisas a juego con aquéllos. Si se elige un pantalón y una camisa al azar ¿Qué probabilidad existe de que formen pareja?

Sol: $\frac{1}{6}$

19.-Una urna contiene 2 bolas blancas y tres rojas. Otra tiene 3 blancas y 5 rojas. Se saca una bola de la primera urna y se introduce en la otra, extrayendo a continuación una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea blanca
b) Haya sido blanca la bola trasvasada de urna, si la segunda sacada es blanca

Sol: a) $\frac{17}{45}$ *b)* $\frac{8}{17}$

20.-En Sartaguda hay tres lugares de diversión a los que suelen ir un grupo de amigos. Las probabilidades de que vayan al primero, segundo o tercero son, respectivamente, 0'3, 0’5 y 0’7. Hallar la probabilidad de que el grupo de amigos vaya:

1. Solamente a uno de los lugares.
2. Únicamente a dos de los lugares.
3. A los tres lugares.

Sol: 1) 0’395 2) 0’395 3) 0’105

21.-En un determinado curso están matriculados 80 varones y 40 mujeres. Aprueban el curso completo 60 varones y 32 mujeres.

a) Determina la probabilidad de que un alumno del curso sea varón y apruebe.
b) Halla la probabilidad de que una persona matriculada suspenda
c) Una de las personas matriculadas ha aprobado. Halla la probabilidad de que sea mujer.

Sol: a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{30}$ c) $\frac{8}{23}$

22.- Se dispone de un mazo de 450 fichas de estudiantes de una escuela de idiomas. Cada estudiante cursa un solo idioma de los 3 que se imparten. El número de mujeres es 3/2 del de hombres y los estudiantes de inglés representan el 80 % del alumnado. El número de estudiantes de francés duplica al de estudiantes de alemán.

Sea M el suceso “sacar una ficha de mujer” al extraer un ficha, al azar, del citado mazo (análogamente, sean H,I , F y A sacar hombre, inglés, francés y alemán , respectivamente).

Sabiendo que M/A es el suceso seguro y que M/F y H/F son equiprobables, determina:

a) Probabilidad de F. Probabilidad de $M \cap I$.
b) Probabilidad de F/M

Sol: a) $\frac{2}{15}$; $\frac{7}{15}$ *b)* $\frac{1}{9}$

23.- Una caja contiene 10 bolas blancas, 5 negras y 5 rojas. Se extraen dos bolas consecutivamente de la caja. Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas si:

a) Antes de extraer la segunda bola se vuelve a meter la primera de la caja.
b) La segunda bola se extrae sin haber metido la primera en la caja.

Sol: *a)* $\frac{1}{4}$ *b)* $\frac{9}{38}$

24.- Ana, Juan y Raúl, que están esperando para realizar una consulta médica, sortean, al azar, el orden en que van a entrar.

a) Calcula la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.
b) Determina si son independientes los sucesos A y B siendo A:" la mujer entra antes que alguno de los hombres ", y B:" los dos hombres entran consecutivamente".

Sol: *a)* $\frac{1}{3}$ *b) dependientes*

25.-Se lanza un dado dos veces.

a) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados sea 4
b) Calcula la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1, sabiendo que la suma es 4.

Sol: *a)* $\frac{1}{12}$ *b)* $\frac{1}{3}$

26.- En una caja hay 15 caramelos de naranja, 8 de limón y 7 de fresa. Si se sacan sucesivamente 2 caramelos al azar, ¿ Cuál es la probabilidad de que los dos sean de limón?

Sol: 28/435

27.- Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla, y en cada una, una moneda. La de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz; la moneda de la caja roja tiene dos caras y la de la caja amarilla no está trucada. Se toma una caja al azar y se lanza la moneda que está en esa caja. Calcular razonadamente:

a) La probabilidad de que salga cara.
b) La probabilidad de que sabiendo que ha salida cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.

Sol: *a)* $\frac{13}{18}$ *b)* $\frac{6}{13}$

28.- Tres cofres idénticos contienen:

Cofre A: 1 moneda de oro y 4 de bronce.
Cofre B: 2 monedas de oro y 6 de bronce.
Cofre C: 3 monedas de oro y 7 de bronce.

¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una moneda al azar, de un cofre extraído al azar, sea de oro?

Sol: $\frac{1}{4}$

29.- En un supermercado, el 70% de las compras las realizan mujeres; de las compras realizadas por éstas, el 80% supera las 2000 ptas., mientras que de las compras realizadas por hombres sólo el 30% supera esa cantidad.

a) Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere las 2000 ptas.?

b)Si se sabe que un ticket de compra no supera las 2000 ptas., ¿cuál es la probabilidad de que la compra haya sido hecha por una mujer?

Sol: a) 0'65 b) 0'4

30.- En una ciudad hay 6 hombres por cada 4 mujeres. Se sabe que el 9 % de los hombres y el 11 % de las mujeres están infectadas por la bacteria "Helycobacter Pílori". Se toma una persona de esa ciudad al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Sea hombre y esté infectado?.

b) Sea una persona infectada?.

c) Si resulta estar infectada sea un hombre?.

Sol: a) 0,054 b) 0,098 c) 0,551

31.- En una empresa 25 de cada 100 mujeres y 6 de cada 10 hombres llevan gafas. Si el número de mujeres es 3 veces superior al de hombres, hallar la probabilidad de que una persona empleada elegida al azar:

a) no lleve gafas
b) sea mujer y lleve gafas
c) sea mujer, sabiendo que lleva gafas.

Sol: a) $\frac{53}{80}$ *b)* $\frac{3}{16}$ *c)* $\frac{5}{9}$

32.- Se escogen 5 personas al azar. ¿Qué probabilidad hay de que al menos dos de ellas hayan nacido el mismo día de la semana?

Sol: 0,8500625

33.- En una encuesta sobre los deportes que practican los alumnos de una universidad resulta que el 24 % practican fútbol, el 20 % baloncesto, el 15 % ciclismo, el 11 % fútbol y baloncesto, el 8 % fútbol y ciclismo, el 5 % baloncesto y ciclismo y el 3 % los tres deportes. Se elige un alumno al azar. ¿Qué probabilidad hay de que

a) practique un solo deporte?
b) no practique ninguno?
c) practique baloncesto y ciclismo si resulta que practica algún deporte?

Sol: a) 0,20 b) 0,62 c) 0,1316

34.- En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es 0,1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0,95. La probabilidad de que funcione la alarma sin que haya incidente es de 0,03.
Si ha funcionado la alarma, calcular la probabilidad que no haya habido incidente.

Sol: 0,2213

35.- En una estantería hay 60 novelas y 20 libros de poesía. Una persona A elige un libro al azar de la estantería y se lo lleva. A continuación otra persona B elige otro libro al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por B sea una novela?
b) Si se sabe que B eligió una novela, ¿cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por A sea de poesía?

Sol: a) 0,75 b) 0,253

36.- Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene diez bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y en la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho.

a) ¿ Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?
b) Si se ha obtenido una bombilla fundida, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la primera caja?

Sol: a) 0,3138 b)0,4248

37.- Tenemos tres urnas con la siguiente composición de bolas blancas y negras: en la primera hay 3 blancas y 7 negras; en la segunda son 5 blancas y 5 negras, y en la tercera hay 8 blancas y dos negras.
Tiramos un dado perfecto y extraemos una bola de la urna primera si sale 1, 2 o 3, sacamos una bola de la segunda si sale 4 o 5 y, finalmente, sacamos una bola de la tercera si sale 6. Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.

Sol: 0,45

38.- En una casa hay tres llaveros, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él una llave para intentar abrir el trastero.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?
c) Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al primer llavero?

Sol: a) 0,1559 b) 0,2916 c) 0,4276

39.- Dos máquinas A y B han producido respectivamente, 100 y 200 piezas. Se sabe que A produce un 5% de piezas defectuosas y B un 6%. Si se toma una pieza al azar ¿qué probabilidad hay de que no sea defectuosa?.

Sol: 0'943

40.-En una estantería de una biblioteca hay 8 libros de aventura y 5 libros de poesía. Entran dos personas de forma consecutiva y cada una coge un libro. Hallar la probabilidad de:

a) Las dos tomen un libro del mismo tipo.
b) Al menos una tome un libro de poesía.
c) Cada una tome un tipo distinto de libro.

Sol: a) 0'4872 b) 0'64102 c) 0'5128

41.- En un club el 35% de los socios practican algún deporte. De estos socios el 20% tiene problemas musculares. De los que no practican deporte el 75% tiene algún problema muscular. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegida una persona al azar, no tenga problemas musculares?.

Sol: 0'4425

42.- Se sortea un viaje a Miami entre los 120 mejores clientes de una caja de ahorros. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

a) Probabilidad de que le toque a un hombre soltero.
b) Si se sabe que el afortunado es casado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?.

Sol: a) 0'1666 b) 0'5625

43.- En un lote de 20 pastillas de jabón hay 8 con premio. Adquirimos 2 pastillas de dicho lote, ¿cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una premiada?.

Sol: 0'6526

44.- En dos urnas A y B se introducen dos bolas blancas y una negra , y tres bolas negras y una blanca respectivamente. Se selecciona una al azar y se extrae también al azar una bola de dicha urna.

a) ¿ Cual es la probabilidad de obtener una bola blanca ?
b) Si la bola extraída resultó ser blanca , ¿ cuál es la probabilidad de que sea de la urna A ?

Sol: a) 11 / 24 b) 8 / 11

45.- En un colegio se va a hacer una excursión a una estación de esquí con dos autobuses, uno grande y uno pequeño. Las dos terceras partes de los alumnos apuntados a la excursión irán en el autobús grande y el resto , en el pequeño. Se sabe que todos los alumnos que viajarán en el autobús pequeño saben esquiar y el 40 % de los que lo harán en el otro autobús no saben esquiar. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un alumno de la excursión elegido al azar sepa esquiar.
b) Elegimos un alumno de la excursión al azar y se observa que sabe esquiar. ¿Cuál es la probabilidad de que viaje en el autobús grande?

Sol: a) 0´73 b) 0´55

B. Distribuciones discretas. La binomial

1.- La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta vienen dada por:

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
p(x)	*0.15*	*0.25*	*0.2*	*m*	*0.15*

a) Halla m para que se trate de una función de probabilidad.
b) Calcula y representa gráficamente su función de distribución.
c) Halla $P(X \leq 4)$ y $P(2 \leq X < 4)$

Sol: a) *m = 0.2* c) *P(X £ 4) = 0.85* *P(2 £ X < 4) = 0.45*

2.- Una variable aleatoria discreta, x, tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(x = i) = \begin{cases} \dfrac{k(i-1)}{4} & para \quad i = 2 \quad i = 3 \quad i = 4 \\ 0 & para \quad los \quad demás \quad valores \end{cases}$$

a) Calcula el valor de k.
b) Calcula el valor medio de x.
c) Representa gráficamente la función de distribución, F(x).

Sol: *a)* $\frac{2}{3}$ *b)* $\frac{10}{3}$

3.- En un juego de azar cada jugador levanta una carta al azar estando completa la baraja de 40 cartas. Si sale el as de oros se ganan 600 pesetas, si sale otro as se ganan 300, si sale un rey se ganan 200, si sale sota o caballo ni se gana ni se pierde, y si sale otra carta cualquiera se pierden 100 pesetas. Llamando x a la pérdida o ganancia, calcular:

a) La función de probabilidad.
b) La función de distribución.
c) El valor medio de x. ¿Cuánto se gana o se pierde a la larga?. ¿Es equitativo el juego?. ¿Por qué?

Sol: a) y b)

X	*-100*	*0*	*200*	*300*	*600*
f(x)	$\frac{24}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$
F(x)	$\frac{24}{40}$	$\frac{32}{40}$	$\frac{36}{40}$	$\frac{39}{40}$	$\frac{40}{40}$

c) E(x) = -2,5 $\Rightarrow$ *a la larga se pierden como media 2,50 ptas. por cada juego, por lo que no es equitativo, sino favorable a la banca.*

4.- En una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 negras se hacen tres extracciones sin reemplazamiento. Halla la distribución de probabilidad de la variable X=”número de bolas blancas sacadas”, y calcula su media y su varianza.

Sol:

X_i	*0*	*1*	*2*	*3*
P_i	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

Media= $\frac{105}{56}$

Varianza= 0’5022

5.- En el lanzamiento de tres monedas, calcula la probabilidad de los sucesos:

a) Obtener tres caras.
b) Sacar al menos dos caras.
c) Sacar sólo dos caras o sólo dos cruces.
d) Sacar dos caras si se ha obtenido una cruz.

Sol: a) $\frac{1}{8}$ *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* $\frac{3}{4}$ *d)* $\frac{3}{7}$

6.- En una distribución B(10 ; 0´2) calcula:

a) p(x=3) b) p(x>2) c) p(x$\leq$ 2) d) la media y la varianza

Sol: a) 0´2013 b) 0´322 c) 0´6778 d) m =2 varianza 1´6

7.- En un cuestionario con 8 preguntas cada una tiene 4 respuestas posibles, de las que sólo una es correcta. Un candidato decide contestarlas todas al azar.

a) ¿Qué probabilidad tiene de acertar al menos 3?
b) ¿Cuántas cabe esperar que acierte?

Sol: a) 0´321457 b) E(x) = 2

8.- Al lanzar dos dados sobre una mesa de juego se toma como variable la más alta de las dos puntuaciones obtenidas. Se pide:

a) Escribe en una tabla la distribución de probabilidad y la función de distribución.
b) Calcula la esperanza de x.
c) Calcula la varianza de x

Sol: a) P (x = i)= siendo i = 1,2,3,4,5,6.
b) E (x)= 4,4722 c) V (x)= 1,9715

9. - El 4% de los disquetes de ordenador que fábrica una determinada empresa resultan defectuosos. Los disquetes se distribuyen en cajas de 5 unidades. Calcular la probabilidad de que en una caja no haya ningún disquete defectuoso.

Sol: B (5 ; 0´04) p(x=0)=0´96^5 *= 0´815*

10.- La opinión que tiene la población sobre la gestión de su ayuntamiento es favorable en el 30% de los casos y desfavorable en el resto. Elegidas 10 personas al azar, hallar:

a) La probabilidad de que, exactamente, dos la consideren favorable.

b) La probabilidad de que ninguno la considere desfavorable.

sol:) (B (10 ; 0´3)) a) $P(x=2)=\binom{10}{2}0.3^2\cdot 0.7^8=0.23347444$

b) $P(x=10)=0.3^{10}=0.000005904$

11.- La probabilidad de aprobar la selectividad es del 80%. ¿ Cuál es la probabilidad de que de un grupo de 6 alumnos de un colegio aprueben al menos la mitad ?.

Sol: 0´9011

12.- La última novela de cierto afamado autor ha tenido un importante éxito, hasta el punto de que el 80% de los lectores ya la han leido. Un grupo de 4 amigos son aficionados a la lectura. ¿ Cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan leido la obra 2 personas ? ¿ Y al menos 2 personas ?

Sol: B (4 ; 0´8) P (x = 2) = 0´1536 y P (x ³ 2) = 0´9728

13.- En una ciudad se han elegido al azar 730 habitantes. ¿ Cual es la probabilidad de que 4 de ellos hayan nacido el 7 de mayo ?

Sol: P (x=4) = 0´09 B(730, 1/365)

14.- La probabilidad de que un estudiante de Economía obtenga el título de economista es 0.6. Calcula la probabilidad de que de un grupo de 3 amigos matriculados en Economía:

a) Los tres sean economistas.
b) Ninguno obtenga el título.
c) Al menos uno de los amigos obtenga el título.
d) Sólo uno obtenga el título.

Sol: a) 0´216; b) 0´064; c) 0´936; d) 0´288

15.- Un proceso de producción tiene una proporción de piezas defectuosas del 25%.

a) Si se toman 9 piezas, ¿cuál es la probabilidad de encontrar dos defectuosas?
b) ¿Cuántas muestras, como mínimo, se han de tomar para que la probabilidad de encontrar al menos una defectuosa sea 0.8?

Sol: a) 0´3003 b) 6 como mínimo.

16.- Se va a construir una planta nuclear en cierta comunidad. Se sabe que el 80% de la población se opone a la construcción de dicha planta y el 20% restante está a favor.

a) Si elegimos al azar una muestra de cinco personas, ¿cuál es la probabilidad de que tres o más estén a favor de la construcción?
b) Si elegimos al azar una muestra de 20 personas, ¿cuál es la probabilidad de que todos estén en contra de la construcción?.

Sol: a) 0´05792 b) 0´0115

17.- Se sabe que en una ciudad un 20 % de los hogares han sufrido algún delito contra la propiedad. Para realizar un estudio sobre la delincuencia en el área se seleccionaron 10 hogares al azar. Calcular las siguientes probabilidades:

a) Que al menos 3 de ellos hayan sufrido algún delito.
b) Que menos de 4 hayan sufrido algún delito.

Sol: a) 0,3222 b) 0,8791

18.- a) Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con tres respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Un alumno contesta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente más de 3 preguntas?

b) ¿Cuál la de que conteste mal a todas?

c) En este examen un alumno sabe las respuestas a 5 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que responda bien a más de 5?

Sol: a) 0´4408 b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ *=0´0173* *c)* $B\left(5;\frac{1}{3}\right)$ *0´8683*

19.- Un estudio estadístico ha demostrado que sobre 1800 peticiones de trabajo, 600 personas buscan trabajo por primera vez, mientras que los restantes provienen de otro empleo. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 6 personas que buscan trabajo haya al menos 2 que no hayan trabajado antes?

Sol: 0'6488

20.- En un cierto hospital se comprobó que la aplicación de un determinado tratamiento en enfermos de cirrosis produce una cierta mejoría en el 68% de los casos. Si se aplica el tratamiento a 10 personas, calcular:

a) Probabilidad de que mejoren todos.
b) Probabilidad de que no mejore ninguno.
c) Número de personas que se espera que mejoren.

Sol: a) 0'0211 b) 0'00001 c) media 6'8

C. Distribuciones continuas. La normal

1.- La función de densidad de una variable aleatoria X es:

$$f(x)=\begin{cases} k(x+4) & si\ \ 0 \le x \le 4 \\ 0 & en\ \ otro\ \ caso \end{cases}$$

a) Calcula el valor de k
b) Representa gráficamente f(x)
c) Halla la función de distribución y represéntala
d) Halla la probabilidad de que $X\in[2,4]$

Sol: a) $K = \dfrac{1}{24}$ *c)* $F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x<0 \\ \dfrac{x^2}{48}+\dfrac{x}{6} & 0 \le x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$ *d) 7/12*

2.- Una variable aleatoria continua se distribuye con una función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 2 \\ k(2-x)(x-5) & si\ \ 2 \le x \le 5 \\ 0 & si\ \ x > 5 \end{cases}$$

Calcular:
a) El valor de k.
b) La función de distribución.
c) La probabilidad de que x sea mayor que 4.

Sol: a) $k = \dfrac{2}{9}$ *b)* $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<2 \\ \dfrac{1}{27}\left(-2x^3+21x^2-60x+52\right) & \text{si } 2 \le x \le 5 \\ 1 & \text{si } x>5 \end{cases}$ *c) P(x>4) =* $\dfrac{7}{27}$

3.- La demanda diaria de un determinado producto sigue una probabilidad dada por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

donde x viene expresado en miles de unidades.

Comprobar que ciertamente f(x) es una función de densidad.
Calcular la probabilidad de que el número de unidades demandadas en un día :

a) no supere 3600 unidades
b) esté comprendido entre 600 y 1800 unidades.

Sol: a) 1 b) 0´48

4.- En una clínica de maternidad se comprobó que el peso de los recién nacidos en kilos era una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 2 \\ \frac{x}{k} & si \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & si \quad x > 4 \end{cases}$$

Calcular:
a) El valor de k para que f(x) sea una función de densidad.
b) La probabilidad de que un recién nacido pese entre 2 y 3,4 kilos.
c) El peso medio de los recién nacidos en esa clínica.

Sol: a) k =6b) 0´63 c) 3´11

5.- El peso de los toros de una determinada ganadería siguen una distribución normal de media 500 kg y desviación típica de 45 kg. Se elige un toro al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso exceda de 540 kg?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea menor de 480 kg?.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté comprendido entre 490 y 510 kg?.

Sol: a) 0'1867 b) 0'33 c) 0'1742

6.- Las tallas de una muestra de 1000 personas siguen una distribución normal de media 1,76 metros y desviación típica 0,8 metros.

a) Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 1,70 metros.
b) Calcula la probabilidad de que una persona elegida el azar tenga una estatura comprendida entre 1,60 y 1,70 metros.
c) ¿Cuántos individuos de la muestra tendrán una estatura no superior a 1,60 metros?

Sol: a) 0,5279 b) 0'0514 c) 421 personas

7.- Las tallas de 800 recién nacidos se distribuyen normalmente con una media de 66 cm y una desviación típica de 5 cm.

a) ¿Qué porcentaje de recién nacidos miden más de 60 cm?.

b) ¿Cuántos recién nacidos cabe esperar con tallas comprendidas entre 65 y 70 cm?.

Sol: a) 88'49% b) 294 niños

8.- Una fresadora produce tornillos de longitudes, medidas en cm., que se distribuyen según una normal N(2; 0,1).Un tornillo no se admite si su longitud es inferior a 1,85cm. o superior a 2,15 cm. Si se examinan 10000 tornillos ¿cuántos serán válidos?.

Sol: 8664 tornillos

9.- Las alturas medias en centímetros de una cierta población se distribuyen según una normal de media 176 y desviación estándar 12. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida entre 170 y 190 centímetros?

Sol: 0´5705

10.- La estatura de los estudiantes de una Universidad sigue una distribución Normal de media 170 cm. y desviación típica 5 cm. Calcular:

a) La probabilidad de que un estudiante mida menos de 162 cm.

b) La probabilidad de que un estudiante mida entre 160 y 170 cm.

c) La probabilidad de que un estudiante mida exactamente 180 cm.

d) Si consideramos al 5 % más alto de los estudiantes como posible candidato para un equipo de baloncesto. ¿Cuál es la estatura mínima que debe tener un estudiante para ser considerado candidato al equipo?.

e) Si sabemos que 1723 estudiantes miden menos de 168 cm.¿ Cuántos estudiantes miden más de 180 cm?

Sol: a) 0´0548 b) 0´4772 c) 0 d) 178´25 e) 114

11.-Una compañía de autobuses conoce que el retraso en la llegada sigue una ley normal, de media 5 minutos y que el 68,26% de los autobuses llega con un retraso comprendido entre los 2 y 8 minutos.

a) ¿Cuál es la desviación típica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue con un retraso de más de 10 minutos?

Sol: a) s = 3 b) 0´0475 c) 0´0475

12.- El tiempo de recuperación de los enfermos de un hospital sigue una distribución N(7,3). Se pide:

i) Probabilidad de que un enfermo esté menos de 5 días en el hospital.

ii) Probabilidad de que para recuperarse necesite entre 9 y 15 días de estancia.

iii) Si en el hospital hay 1000 enfermos, ¿cuántos necesitan estar más de 8 días en el hospital?

Sol: i) 0’2546 ii) 0’2507 iii) »371

13.- En cierto país el C.I. (Coeficiente de inteligencia) se distribuye normalmente, con media 98 y desviación típica 22. Se sabe que un 3 % de la población es deficiente, un 70 % normal, un 22 % muy inteligente y un 5 % son genios. ¿Cuáles son los valores de C.I. que se han tomado como frontera entre las distintas clases de individuos?

Sol: Deficiente hasta » 59, normal hasta »111,
muy inteligente hasta »134, genio a partir de 134.

14.- Dos componentes de un sistema funcionan independientemente, distribuyéndose el rendimiento de la primera componente según una normal de media 6 y desviación típica 1,5, y el de la segunda según una normal de media 43 y desviación típica 3,5. Se sabe que el sistema funciona si el rendimiento de la primera componente está entre 3 y 8 y el de la segunda entre 38 y 48. ¿Cuál es la probabilidad de que funcione el sistema?

Sol: P(funcione el sistema) = 0,7501

15.- La calificación media en un cierto examen fue 6,5 y la desviación típica 1,6.Si el profesor va a calificar con sobresaliente al 10% de la clase¿ a partir de qué nota se consigue?.

Sol: 8’548

16.- Halla la media y desviación típica de un examen en el cual las puntuaciones de 70 y 88 corresponden a calificaciones tipificadas de –0,6 y 1,4.

Sol: media = 75’4 desviación típica = 9

17.- En un test realizado a 1000 alumnos, las puntuaciones se distribuyen normalmente con una media de 100 y desviación típica 6. Calcular :

a) El porcentaje de alumnos con puntuaciones superiores a 110 .

b) El número de alumnos con puntuaciones entre 92 y 105.

c) Supongamos que de la variable anterior conocemos que su media es 100 pero desconocemos su desviación típica. Si se sabe que 877 de esos 1000 alumnos han obtenido puntuaciones inferiores a 129. Calcular la desviación típica.

Sol: a) 4´75% b) 705 alumnos c) $s = 25$

18.-El peso en kg. de los recién nacidos sigue una distribución normal. Se sabe que de cada 2000 niños, tan sólo 6 de ellos pesan más de 5.8 kg. al nacer, mientras que 484 de ellos pesan menos de 2.5 kg. Determinar cuantos de esos 2000 niños se espera que pesen al nacer entre 3 y 4 kg.

Sol: Aproximadamente se trata de una normal N(3´2 ; 0´96)

y unos 760 niños pesarán al nacer entre 3 y 4 kg.

19.- Los litros de gasolina distribuidos cada día por una gasolinera es una variable normal de media 15.000 litros y desviación típica de1.000 litros. Determinar la cantidad diaria que hay que tener dispuesta a la venta para poder satisfacer la demanda del 95% de los días.
Si la gasolinera compra el litro de gasolina a 75 pesetas y lo vende a 125, ¿qué porcentaje de días sus beneficios superarán las 800.000 pesetas?

Sol: 16.645 litros . El porcentaje de días es de 15´87%.

20.- El departamento de personal de una empresa ha hecho un estudio sobre las edades de sus empleados y ha observado que se distribuyen normalmente con una media de 44 años. De un total de 500 empleados hay 17 con más de 55 años. ¿Cuál es la desviación típica?.

Sol: desviación 6'03

21.- Una de las pruebas de acceso a la Universidad para mayores de 25 años consiste en un test con cien preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro posibles respuestas, siendo sólo una de ellas correcta. Para superar esta prueba debe obtenerse, al menos, 30 respuestas correctas.
Si una persona contestase al azar, es decir, eligiese de forma aleatoria una de las cuatro respuestas posibles da cada una de las 100 preguntas:

a) ¿ Cuál sería el nº esperado de respuestas correctas ?
b) ¿ Qué probabilidad tendría de superar la prueba ?

Sol: a) np=25 b) p(x³30)=0´1492

22.- Aproximando con una distribución normal , calcular la probabilidad de que al lanzar una moneda 100 veces , el nº de caras obtenido esté comprendido entre 45 y 55.

Sol: B(100 ; 0´5) p(45 £ x £ 55) = 0´7268

23.- En cierto hospital, las niñas nacidas representan el 54% de los nacimientos. Hallar la probabilidad de que el nº de niños nacidos, de 2500 nacimientos, esté entre 1200 y 1400.

Sol: B(2500 ; 0´54) ¡ ojo, niñas ! P(1200 £ x £ 1400) = 0´0233

24.- El 92% de los alumnos de un instituto presentados a la Selectividad obtienen la calificación de apto. Si en cierta convocatoria se presentan 110 alumnos, calcula la probabilidad de que:

a) aprueben más de 90

b) El número de aprobados esté entre 95 y 105 , ambos inclusive.

Sol: a)= 1 b) 0’9254

25.- En un dado trucado la probabilidad de sacar un seis es doble que la de cualquiera de los restantes valores. Se lanza dicho dado 20 veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga el seis más de 15 veces?

Sol: 0

26.- Un examen consta de 300 preguntas de tipo test, con cuatro posibles respuestas cada una, de las cuales solo una es correcta. Si un opositor que no ha estudiado nada responde al azar, calcula:

a) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen si para ello hay que acertar 200 preguntas o más?

b) ¿Qué probabilidad tiene de contestar correctamente a 150 preguntas o más?

c) ¿Qué probabilidad tiene de contestar correctamente a más de 50 preguntas y menos de 100?

Sol: a) 0 b) 0 c) 0´9994

27.- En un bombo de lotería tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9, y cada vez que hacemos la extracción de una bola la devolvemos al bombo.

a) Si cogemos tres bolas, calcular la probabilidad de que el 0 salga una sola vez.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcular, empleando la ley normal, la probabilidad de que salga el 0 más de 12 veces.

Sol: a) 0’243 b) 0’2033

28.- Juan encesta el 30% de sus tiros a canasta. Juega dos partidos y lanza 20 veces en cada partido. ¿Cuál es la probabilidad de que en cada partido enceste más de 7 canastas?

Razona si esta probabilidad es mayor, menor o igual, que la probabilidad de que entre los dos partidos enceste más de 15 canastas.

Sol: a) 0’2327 b) Es mayor en el primer caso.

29.- La tasa de desempleo en una región económicamente deprimida es el 34 %. Se toma una muestra aleatoria de 50 personas en edad laboral de esa región. Calcular las siguientes probabilidades:

a) Que al menos 10 de esas personas estén desempleadas.
b) Que no haya más de 13 desempleadas.
c) Que haya exactamente 19 personas desempleadas.

Sol: a) 0´9875 b) 0´1492 c) 0´0998

30.- La probabilidad de que un vaso se rompa al lavarlo en un lavavajillas es una milésima. Si a lo largo de un año se lavan 30.000 vasos, ¿cuál es el número esperado de roturas?. ¿Cuál es la probabilidad de que se rompan menos de 20 vasos?, ¿y más de 50?.

Sol: $m = 30$, $P(X < 20) = 0´0274$, $P(X > 50) = 0'0001$

31.- Se sabe que de cada 100 relojes que fabrica una determinada marca 5 tienen algún defecto. Se selecciona un lote de 600 relojes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan menos de 25 defectuosos?
b)¿Cuál es el número esperado de relojes que no tienen defectos?

Sol: a) 0'1515 b) 570

32.- En un cierto país el 30% de sus habitantes tiene sangre tipo 0^+. Si se analiza la sangre de 100 personas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 25 tengan sangre de dicho tipo?.

Sol: 0'8849

D. Problemas de inferencia estadística

1.-Una muestra aleatoria de 100 alumnos que se presentan a las pruebas de Selectividad revela que la media de edad es de 18.7 años. Halla un intervalo de confianza del 90 % para la edad media de todos los estudiantes que se presentan a la prueba, sabiendo que la desviación típica de la edad en la población es 0.8.

Sol: el intervalo para m *es:* $[18.568\,,\ 18.832]$

2.-Se sabe que la desviación típica del peso de los individuos de una población es 6 kilos. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de tomar para que se pueda estimar con un nivel de confianza del 95 % el peso medio en la población con un error inferior a 1 kilo. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.

Sol: el tamaño de la muestra es 138 individuos. Los pasos seguidos son: se calcula por medio de la tabla N(0,1) el valor de $z_{1-\alpha/2}$*, que es 1.96. Sabemos que el error máximo, 1 kilo, es igual a* $1.96\dfrac{6}{\sqrt{n}}$*, y de esa igualdad deducimos el valor de n.*

3.- La cantidad de sustancia S contenida en una dosis de cierta vacuna sigue una distribución normal con una media de 50 unidades. Se ha comprobado que la vacuna inmuniza si la dosis contiene una cantidad de S comprendida entre 46 y 54 unidades. Sabiendo que el 2.5 % de las dosis contiene una cantidad de S superior a 54 unidades,

a) calcula la desviación típica de la distribución de S.
b) ¿Qué probabilidad hay de que un individuo al que se le administra una dosis elegida al azar no quede inmunizado?. Justifica la respuesta.

Sol: a) $s = 2.04$ *b) la probabilidad de que no se inmunice es 0.05*

4.- El consumo de cierto producto sigue una distribución normal con varianza 300. A partir de una muestra de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral igual a 180. Halla un intervalo de confianza al 95 % para la media de consumo.

Sol: intervalo para la media poblacional: $[173.21, 186.79]$

5.- Una muestra al azar de 50 calificaciones de Selectividad nos dio una media de 6.5. Se sabe que la desviación típica de las calificaciones es 1.2.

a) Calcula un intervalo de confianza para estimar la nota media de la población con un nivel de confianza del 95 %

b) ¿Con qué nivel de confianza resulta un intervalo $[6.1, 6.9]$?

Sol: a) $[6.167\,, 6.833]$ *b) al nivel de confianza del 98 %.*

6.-Se sabe que el C.I. de los alumnos de una universidad se distribuye según una ley normal de media 100 y varianza 729. Halla la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un C.I. medio superior a 109.

Sol: la probabilidad es 0´0228, es decir, el 2´28 %.

7.- ¿Cuál es el tamaño de la muestra que hay que extraer de una población normal para estimar la nota media de una asignatura con un error máximo de 0.5 puntos y con un riesgo del 5 %, sabiendo por estudios anteriores que la varianza poblacional es 8.52?

Sol: la muestra debe tener 131 individuos.

8.- Una máquina debe introducir 375 gramos de cereales en cajas de envasado. La cantidad introducida es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media 375 gramos y desviación típica 20 gramos. Para comprobar que el peso medio de cada caja se mantiene en 375 gramos, se toman periódicamente muestras aleatorias de 25 cajas y se pesan sus contenidos. El encargado tiene orden de parar el proceso y ajustar la máquina cada vez que el promedio obtenido sea menor que 365 o mayor que 385 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de tener que detener el proceso cada vez que se toma una muestra?

Sol: 0.0124 = 1´24 %

9.-Una muestra de 100 alumnos de Psicología obtuvieron en un test una media de 10. Se sabe que la varianza de las puntuaciones en ese test es 16. Los límites del intervalo de confianza para la media de la población resultaron ser 9 y 11. a) Averigua a qué nivel de confianza fueron calculados dichos límites. b) ¿Qué límites hubieran resultado si se hubiera calculado el intervalo con un nivel de confianza del 95 %?

Sol: a) NC = $1-\alpha$ *= 0.9876 b) Límite inferior: 9´216. Límite superior: 10´784.*

10.- El diámetro de unos ejes sigue una distribución normal con desviación típica 2 mm. El diámetro medio en una muestra de tamaño 25 es 36 mm. ¿Se puede afirmar con un nivel de significación de 0.01 que la media de la población es 40 mm?

Sol: al nivel del 1 % hay que rechazar la hipótesis de que la media de la población sea 40 mm.

11.- El tiempo necesario para montar una pieza es una variable aleatoria normal con desviación típica de 0.6 minutos. Se toma una muestra aleatoria de 20 piezas, que da un tiempo medio de montaje de 10.2 minutos. ¿Existe alguna razón para creer con un nivel de confianza de 0.95 que el tiempo promedio de montaje es mayor que 10 minutos?. Explica los pasos que has dado para llegar a esa conclusión.

Sol: al nivel del 95 % no hay ninguna razón para creer que el tiempo medio de montaje es mayor que 10 minutos, por tanto hay que aceptar la hipótesis nula. Pasos: se establecen las hipótesis nula y alternativa: $H_0: m \leq 10$ $\quad H_1: m > 10$. *Se trata de un contraste unilateral, por lo que se calcula en la tabla normal* $z_{1-a} = z_{0.95} = 1.65$. *La región de aceptación al nivel dado será* $m + z_{0.95}\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 10.22$. *Como* $\bar{x} = 10.2$ *es menor que 10.22, hay que rechazar* H_1 *y aceptar* H_0 *al nivel de confianza del 95 %.*

12.- El salario medio de una muestra aleatoria de 1600 personas de cierta población es de 859 euros. Se sabe que la desviación típica de los salarios de la población es 120 euros. ¿Se podrá afirmar con un nivel de significación de un 1 % que el salario medio en la población es de 868 euros?. ¿De qué tipo de contraste se trata?

Sol: hay que rechazar la hipótesis nula, es decir, no se puede afirmar que el salario medio de la población sea 868 euros al nivel de significación del 1 %. Se trata de un contraste bilateral, con límites 860.26 y 875.74.

13.-Las hipótesis nula y alternativa sobre el promedio de una población normal con varianza 100 son: $\mathrm{H}_0: m = 30$ y $\mathrm{H}_1: m = 40$. Si extraemos una muestra aleatoria de 25 sujetos, ¿qué valor debe tomar el error de tipo I para que al contrastar esas hipótesis la probabilidad de rechazar H_0 siendo falsa sea 0.99621?. (El contraste es unilateral).

Sol: el error de tipo I es $a = 0.01$

14.-Sean $\mathrm{H}_0: m = 30$ y $\mathrm{H}_1: m = 38$ las hipótesis nula y alternativa de una población normal con varianza de 320. a) Si intentamos poner a prueba ambas hipótesis con una muestra de 20 sujetos y un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál será el error de tipo II en el contraste?. b) Si fijamos el nivel de significación en 0.0668, ¿qué tamaño deberá tener una muestra aleatoria extraída de esa población para que la probabilidad de rechazar H_0 siendo falsa valga 0.6915.

Sol: a) el error de tipo II es 0.3594. *b) el tamaño es de 20 sujetos.*

15.- Los alumnos del último curso de Primaria aumentan su velocidad lectora a lo largo del curso en 50 palabras como promedio. Esta variable se distribuye normalmente en la población, con una desviación típica igual a 12. Se ensaya un nuevo método pedagógico para comparar sus resultados. a) Averigua el tamaño de la muestra adecuada para descubrir una diferencia de ± 3 palabras respecto al método habitual, con un error de tipo I = 0.05 y un error de tipo II = 0.05. b) Si extraída esa muestra se encuentra una media de 53 palabras, ¿se puede decir que la eficacia del nuevo método es significativamente diferente de la del método anterior?.

Sol: a) n = 208 sujetos b) Hay que rechazar la hipótesis nula y aceptar la alternativa ($H_1: m \neq 50$) al nivel de significación del 5 %.

16 .- Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110

Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una ley normal de varianza 25 y media desconocida:

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?
b) Determine el intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional.

Sol: a) N(104; 1'25) b) (101'55; 106'45)

17.- La variable altura de las alumnas que estudian en una escuela de idiomas sigue una distribución normal de media 1'62 m y desviación típica 0'12 m. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra aleatoria de 100 alumnas sea mayor que 1'60 m?

Sol: 0'9515

18.- El estudio de un test de satisfacción de usuario que rellenan todos los demandantes de servicios de una gran empresa revela que la nota media que otorgan es de 5'70 puntos con una desviación típica de 0'5.

Posteriormente, se ha realizado un muestreo a 100 usuarios de la zona de influencia A, y a 49 usuarios de la zona B, obteniéndose puntuaciones medias respectivas de 5'6 y 5'85.

Con una confianza del 95 %, ¿se puede afirmar que las diferencias entre las medias de cada muestra y de la población son debidas al azar, o se puede afirmar que son diferentes la nota media de la población y la de cada muestra?

Formula las hipótesis nula y alternativa.

Define error de tipo I y error de tipo II.

Sol: $H_o : m = 5'7$ $\quad H_1 : m \neq 5'7$ *intervalo de confianza en la zona A:(5'602;5'798).* H_0 *se rechaza para esta zona . Intervalo de confianza en la zona B:(5'563;5'837) .*H_0 *se rechaza también para esta zona.*

"Error de tipo I" consiste en rechazar H_0 *cuando es verdadera.*

"Error de tipo II" consiste en aceptar H_0 *cuando es falsa.*

19.- En una ciudad, el peso de los recién nacidos se ha distribuido según la ley normal de media m = 3100g y desviación s = 150g.

Halla los parámetros de la distribución que siguen las medias de las muestras de tamaño 100.

Sol: N(3100; 15)

20.- Se supone que la estatura de los chicos de 18 años de cierta población sigue una distribución normal de media 162 cm y desviación típica 12cm. Se toma una muestra al azar de 100 de estos chicos encuestados y se calcula la media.

¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 159 y 165 cm?

Sol: 0'9876

21.- Una encuesta realizada sobre 40 aviones comerciales revela que la antigüedad media de éstos es de 13'41 años con una desviación típica muestral de 8'28 años. Se pide:

a)¿Entre qué valores, con un 90 % de confianza, se encuentra la antigüedad media de la flota comercial?

b)Si se quisiera obtener un nivel de confianza del 95% cometiendo el mismo error de estimación que en el apartado anterior y suponiendo también que s = 8'28 años, ¿cuántos elementos deberían componer la muestra?

Sol: a) (11'26; 15'56) b) al menos 57 aviones

22.- Se desea hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros científicos. Para ello, se elige una muestra aleatoria formada por 34 libros y se determina que la media muestral es de 3490 pesetas con una desviación típica de 450 pta.

Halla el intervalo de confianza para el precio medio de los libros científicos al nivel del 99%.

Sol: (3290’1; 3689’1)

23.- Un fabricante de electrodomésticos sabe que la vida media de éstos sigue una distribución normal con media m = 100 meses y desviación típica s = 12 meses.

Determínese el mínimo tamaño muestral que garantiza, con una probabilidad de 0’98, que la vida media de los electrodomésticos en dicha muestra se encuentra entre 90 y 110 meses.

Sol: al menos 8 electrodomésticos

24.- En los últimos tiempos, las ventas medias en un comercio rondaban las 120000 ptas. diarias. Sin embargo, hace unos meses se abrió una superficie comercial cerca del mismo. El establecimiento defiende que las ventas medias se mantienen o, incluso, han aumentado, pero que no han disminuido.

Para contrastar estadísticamente este supuesto se ha seleccionado una muestra de las ventas diarias realizadas después de la apertura de la superficie comercial.

a) Establecer las hipótesis nula y alternativa.
b) ¿Qué nombre recibe la probabilidad de que el establecimiento concluya erróneamente que las ventas medias han disminuido? Explica cómo se denomina y en qué consiste el otro error posible.
c) El establecimiento ha encargado el estudio a un especialista y en su informe afirma textualmente que “el valor obtenido al realizar el contraste es significativo”, pero el establecimiento no entiende el significado de la frase. ¿Significa que el estableci-miento debe concluir que sus ventas medias disminuyeron, o lo contrario?.

Sol: a) H_0 = las ventas no han disminuido H_1 =las ventas han disminuido

b) nivel de significación que es la probabilidad de cometer error de tipoI . El otro error posible “error de tipo II” consiste en aceptar H_0 siendo falsa

c) Puede aceptar H_0 pero debería exigir al especialista el nivel de significación.

25.- La desviación típica de la altura de los habitantes de un país es de 10 cm. Calcular el tamaño mínimo que ha de tener una muestra de habitantes de dicho país para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 1 cm con un nivel de confianza del 99%. ¿Y si el nivel de confianza es del 95%? Explicar los pasos seguidos para obtener las respuestas.

Sol: a) al menos 664 personas b) al menos 385 personas

JUNIO

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Curso 1999-2000

El alumno elegirá una opción de cada uno de estos tres ejercicios

Ejercicio 1

Opción A)

Dado el sistema: $x + y + z = 3$

$x - y + z = 1$

i) Añadir una ecuación tal que el sistema resultante sea incompatible. (3 puntos)

ii) Idem para sistema compatible indeterrninado. (3 puntos)

iii) Idem para sistema compatible determinado. (4 puntos)

Opción B)

El departamento de producción de una empresa recibe un contrato para fabricar contenedores empleando dos clases de material A y B. El material A cuesta 30 pesetas por unidad y el material B tiene un coste de 80 pesetas por unidad. Para cada contenedor puede usarse un máximo de 12 unidades de A y como mínimo 16 unidades de B. Cada unidad de A pesa 4 kilos y cada unidad de B pesa 6 kilos Si el contenedor ha de pesar al menos 120 kilos, ¿Cuál debe ser la composición de dichos materiales para minimizar costes?

i) Planlear el problema. (4 puntos)

ii) Resolución gráfica. (6 puntos)

Ejercicio 2

Opción A)

Determinar la ecuación de la función polinómica que pasa por los puntos (0,1) y (1,1) y tal que:

$$y'' = 6x + 4 \quad \text{(10 puntos)}$$

Opción B)

i) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$y_1 = \sqrt{4 + 2^x} + \text{1n}\,\dfrac{1}{1+x}$ (3 puntos) $\qquad y_2 = \text{sen}^2\,(2x + 1)^3$ (2 puntos)

ii) Aplicando la definición de derivada calcular la derivada de $f(x) = x^2 - 2x$, en $x = 2$. (5 puntos)

Ejercicio 3

Opción A)

Dos compañeros de estudios comparten piso. El primero prepara la comida el 40% de los días y el resto de los días lo hace el segundo. El porcentaje de veces que se le quema la comida al primero es el 5% mientras que el del segundo es el 8%. Calcular la probabilidad de que un día, elegido al azar, la comida esté quemada. (5 puntos) Si cierto día se ha quemado, calcular la probabilidad de que haya cocinado el primero. (5 puntos)

Opción B)

Un tratamiento contra el cáncer produce mejoría en el 80% de los enfermos a los que se les aplica. Se suministra a 5 enfermos.

i) Probabilidad de que los cinco pacientes mejoren. (4 puntos)

ii) Calcular la probabilidad de que al menos tres no experimenten mejoría. (4 puntos)

iii) ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren? (2 puntos)

Soluciones prueba de selectividad de junio

Ejercicio 1

Opción A)

i) Infinitas soluciones. Por ejemplo: x + y + z = 4

ii) Infinitas soluciones. Por ejemplo: x + z = 2 (sumando las dos ecuaciones)

iii) Infinitas soluciones. Por ejemplo: x – 2y + z = 0

Opción B)

i) Función objetivo: F(x, y) = 30 x + 80 y

Restricciones $\begin{cases} 0 \le x \le 12 \\ y \ge 16 \\ 4x + 6y \ge 120 \end{cases}$

ii) Se minimiza el coste para 6 unidades de A y 16 de B.

Ejercicio 2

Opción A)

$y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

Opción B)

i) $y'_1 = \dfrac{2^x \ln 2}{2\sqrt{4 + 2^x}} - \dfrac{1}{1 + x}$ $\qquad y'_2 = 12(2x + 1)^2 \operatorname{sen}(2x + 1)^3 \cos(2x + 1)^3$

ii) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = 2$

Ejercicio 3

Opción A)

a) $\dfrac{17}{250}$ b) $\dfrac{5}{17}$

Opción B)

i) $(0'8)^5$ ii) $\binom{5}{3}(0'2)^3 (0'8)^2 + \binom{5}{4}(0'2)^4 (0'8) + \binom{5}{5}(0'2)^5$ iii) 4

SEPTIEMBRE

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Curso 1999-2000

El alumno elegirá una opción de cada uno de estos tres ejercicios

Ejercicio 1

Opción A)

Una empresa textil fabrica tres modelos de camisetas A, B y C. Los precios de venta de cada una de estas camisetas son 1.000, 2.000 y 3.000 pesetas respectivamente. Una semana vendió 200 camisetas en total y obtuvo unos ingresos de 425.000 pesetas. Si el número de camisetas vendidas del modelo A hubiera sido el del modelo B y el número de camisetas vendidas del modelo B hubiera sido el del A, los ingresos hubieran ascendido a 400.000 pesetas. Hallar el número de camisetas vendidas de cada modelo.

(planteamiento: 5 puntos; resolución 5 puntos)

Opción B)

Un almacenista desea liquidar 2 toneladas de manzanas y 1 tonelada de peras. Para ello lanza dos ofertas, la oferta 1 consiste en un lote de 10 kilos de manzanas y 10 kilos de peras por 750 pesetas, la oferta 2 consiste en 30 kilos de manzanas y 10 de peras por 1.250 pesetas. Se desea ofrecer al menos 20 lotes de la oferta 1 y al menos 10 lotes de la 2. ¿Cuántos lotes de cada oferta ha de ofrecer para maximizar los ingresos (suponiendo que se venden todos)?

i) Plantear el problema. (4 puntos)

ii) Resolución gráfica. (6 puntos)

Ejercicio 2

Opción A)

Calcular las siguientes integrales:

i) $\int xe^{-x^2}\,dx$ (3 puntos) ii) $\int \frac{10}{\sqrt{5x+2}}\,dx$ (3 puntos) iii) $\int \frac{1-2x}{x+1}\,dx$ (4 puntos)

Opción B)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ 2x - 1 & 2 \le x < 5 \\ x + 1 & x \ge 5 \end{cases}$ i) Representarla gráficamente. (5 puntos)

ii) Estudiar su continuidad en R. (5 puntos)

Ejercicio 3

Opción A)

De dos sucesos aleatorios independientes de un experimento se sabe que la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es 1/6 y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 1/3. Calcular la probabilidad de cada uno de estos sucesos. (10 puntos)

Opción B)

La puntuación que obtienen los alumnos de bachillerato en un test psicológico sigue una distribución normal N (150, 30). ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una puntuación:

i) superior a 170? (4 puntos) ii) entre 140 y 160? (4 puntos) iii) igual a 150? (2 puntos)

Soluciones prueba de selectividad de septiembre

Ejercicio 1

Opción A)

50 camisetas del modelo A

75 camisetas del modelo B

75 camisetas del modelo C

Opción B

i) Función objetivo: F (x, y) = 750 x + 1250 y

$$\text{Restricciones}\left|\begin{array}{l} 10x + 30y \le 2000 \\ 10x + 30y \le 1000 \\ x \ge 20 \quad y \ge 10 \end{array}\right.$$

ii) Se maximizan los ingresos con 50 lotes de cada oferta.

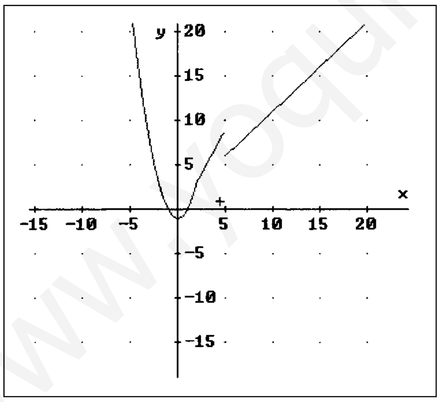
Ejercicio 2

Opción A

i) $\frac{-1}{2}\, e^{-x^2} + k$ ii) $4\sqrt{5x+2} + k$ iii) $-2x + 3\ln|\ x+1\ | + k$

Opción B

i)



ii) Continua en todo R menos en x = 5 (discontinua no evitable de salto 3)

Ejercicio 3

Opción A

a) $p\,(A) = 1/2$ y $p\,(B) = 1/3$ ó $p\,(A) = 1/3$ y $p\,(B) = 1/2$

Opción B

i) 0’2546 ii) 0’2586 iii) 0