

## Análisis

- 1) Halle  $f'(2)$ ,  $g'(4)$  y  $h'(0)$  para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad g(x) = (x^2 + 9)^3; \quad h(x) = L(x^2 + 1). \quad (3 \text{ puntos})$$

- 2) Estudiar y dibujar, basándose en el estudio previo, la gráfica de la función:

$$g(x) = \frac{3-x}{x-2} \quad (5 \text{ puntos})$$

- 3) Sea  $f$  la función definida por: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea derivable.

www.yoquieroaprobar.es

## Soluciones

1) Halle  $f'(2)$ ,  $g'(4)$  y  $h'(0)$  para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad g(x) = (x^2 + 9)^3; \quad h(x) = L(x^2 + 1).$$

Simplemente, aplicando las reglas de derivación, se obtiene:

$$f'(x) = 2x - \frac{32x}{x^4} = 2x - \frac{32}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 4 - \frac{32}{8} = 4 - 4 = 0$$

$$g'(x) = 3(x^2 + 9)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 9)^2 \quad \Rightarrow \quad g'(4) = 24(16 + 9)^2 = 15.000$$

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad h'(0) = \frac{0}{1} = 0$$

2) Estudiar y dibujar, basándose en el estudio previo, la gráfica de la función:

$$g(x) = \frac{3-x}{x-2}$$

a) Dominio:  $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ , ya que 2 anula el denominador, y no se puede dividir entre cero.

b) Par/Impar:  $g(-x) = \frac{3+x}{-x-2} = \frac{3+x}{-(x+2)} = -\frac{3+x}{x+2}$  que no coincide ni con  $g(x)$  ni con  $-g(x)$ . Por tanto, ni es par, ni impar.

c) Intersecciones con los ejes: Si  $x = 0 \Rightarrow y = -3/2$ . Corta a OY en  $(0, -3/2)$ .

Si  $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3-x}{x-2} \Rightarrow 0 = 3-x$  (siempre que la solución no anule el denominador  $x-2$ )  $\Rightarrow x = 3 \Rightarrow$  Corta a OX en  $(3, 0)$ .

d) Monotonía y extremos relativos:  $g'(x) = \frac{-(x-2) - (3-x)}{(x-2)^2} = \frac{-x+2-3+x}{(x-2)^2} =$

$$-\frac{1}{(x-2)^2}$$

- Discontinuidades de  $g$  ó de  $g'$ :  $x = 2$ , que anula el denominador tanto de una como de otra.

- Puntos que anulan  $g'$ : No hay (el numerador nunca se anula).

Dividimos  $\mathbb{R}$  en intervalos por el único punto obtenido, y resulta:

	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'$	-	$\neq$	-
$g$	$\searrow$	$\neq$	$\searrow$

No tiene extremos relativos.

e) Curvatura y puntos de inflexión:  $g''(x) = \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}$

- Discontinuidades de  $g$  ó de  $g''$ :  $x = 2$

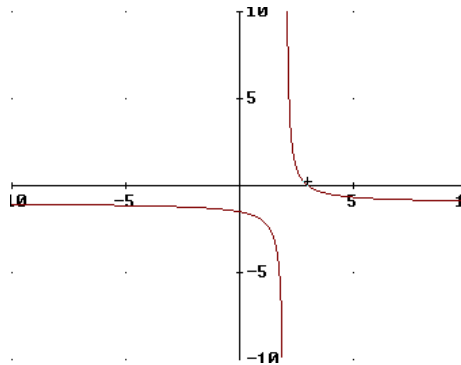
- Puntos que anulan  $g''$ : No hay (el numerador nunca se anula).

Dividimos  $\mathbb{R}$  en intervalos por el único punto obtenido, y resulta:

	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g''$	-	$\neq$	+
$g$	$\cap$	$\neq$	$\cup$

No tiene puntos de inflexión, puesto que  $x = 2$  no pertenece al dominio.

f) Gráfica:



3) Sea  $f$  la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea derivable.

En primer lugar, para ser derivable debe ser continua. Como en las dos zonas en las que se define  $f$  lo hace con expresiones polinómicas, que siempre son continuas, sólo hay que exigirle la continuidad en el punto de separación de ambas zonas de definición, o sea, en  $x = 1$ . Como  $f(1)$  existe, y vale  $4+b$ , y los límites laterales son:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 1) = a+1 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + bx + 3) = 4+b$$

hay que exigir:  $a+1 = 4+b \Rightarrow a = 3+b$

$$\text{Por otra parte, } f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ 2x+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exigimos que  $f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2a = 2+b$ . Sustituyendo aquí  $a = 3+b$ :

$$2(3+b) = 2+b \Rightarrow 6+2b = 2+b \Rightarrow b = -4.$$

Sustituyendo:  $a = 3+b = 3-4 = -1$

Luego  $a = -1$ ,  $b = -4$ .