

□ **Ejemplos:**

1) Sea el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) El siguiente sistema viene dado por su expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vamos a expresarlo mediante sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

3) Sea el siguiente sistema de orden 2x3 expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comprobar si $x = 1$; $y = -1$; $z = 0$ es una solución del sistema.

En la expresión matricial sustituimos la matriz de las incógnitas X por la solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Debemos ver si esta igualdad es verdad o falsa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+0 \\ -1-1+2 \\ 2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La igualdad es cierta} \rightarrow x = 1 ; y = -1 ; z = 0 \text{ es solución.}$$

Veamos otra forma de expresar un sistema en forma matricial: $A \cdot X = B$

Para ello, recordemos la siguiente propiedad del producto de matrices: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$A \cdot X = B \rightarrow (A \cdot X)^t = B^t \rightarrow X^t \cdot A^t = B^t$$

Tenemos, por tanto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \leftrightarrow (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)$$

Sistemas de ecuaciones equivalentes

➤ Definición:

Dos *sistemas* de ecuaciones se llaman *equivalentes* cuando admiten las mismas soluciones

Propiedades de la equivalencia de sistemas

- Primera propiedad: Si en un sistema S hay una ecuación que es combinación lineal de otra u otras ecuaciones, podemos suprimirla y obtenemos otro sistema S_1 que es equivalente a S .

NOTA: Una ecuación es combinación lineal de otra u otras, si se obtiene de ellas al multiplicarlas por un número y sumándolas o restándolas.

- Segunda propiedad: Si en un sistema de ecuaciones lineales se sustituye una ecuación por una combinación lineal de ella misma con otras ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente al primero.

La primera propiedad permite eliminar ecuaciones nulas, iguales y proporcionales.

La segunda propiedad permite ir transformando un sistema en otros equivalentes más fáciles de resolver.

2 SISTEMA DE ELIMINACIÓN DE GAUSS. DISCUSIÓN DE UN SISTEMA

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas se trata de obtener un sistema escalonado equivalente al inicial. Es decir, el método de Gauss consiste en triangular la matriz de los coeficientes.

Se efectúan las siguientes transformaciones para obtenerlo:

- Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
- Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.
- Intercambiar dos ecuaciones entre sí.
- Cambiar el orden de las incógnitas.
- Suprimir una ecuación que:
 - Sea proporcional a otra.
 - Sea combinación lineal de otras ecuaciones.
 - Tenga todos los elementos nulos (coeficientes y término independiente).

□ Ejemplo:

Resuelve aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - y = 3 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Solución: $x = 3, y = -2, z = 0$

Discusión del sistema

A la hora de discutir un sistema escalonado, en el cual todas las ecuaciones son linealmente independientes, se pueden presentar tres situaciones:

- Si el nº de ecuaciones = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
- Si el nº de ecuaciones > nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.
- Si hay una ecuación de la forma $0 \cdot x = b$, siendo $b \neq 0$, el sistema es incompatible.

□ Ejemplos:

$$a) \begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible (3ª ecuación: $0 \cdot x = -1$), por tanto, no hay solución.

$$b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_2:E_2+E_1 \\ E_3:E_3+E_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3:E_3-2E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible indeterminado.

Hay dos ecuaciones l.i., con lo cual, consideramos una de las incógnitas como parámetro y expresamos las restantes en función de dicho parámetro.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3y + z = -2x \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 7x \\ y = 3x \end{cases}$$

Solución: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_2:E_2-2E_1 \\ E_3:E_3-E_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3:6E_2+E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 - 3 = 1 \\ y = 7 - 9 = -2 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } (1, -2, 3)$$

3 SISTEMAS DE CRAMER. REGLA DE CRAMER

➤ Definición:

Se llaman *sistemas de Cramer* aquellos sistemas de ecuaciones lineales que cumplen las siguientes condiciones:

- Tiene el mismo nº de ecuaciones que de incógnitas: $m = n$
- El determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es no nulo: $|A| \neq 0$

Regla de Cramer

Todos los sistemas de Cramer son compatibles determinados y su solución única viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde

- A_i es la matriz que se obtiene a partir de la matriz de los coeficientes, cambiando la columna i por la columna de los términos independientes
- A es la matriz formada por los coeficientes.

Demostración:

Consideramos un sistema de Cramer escrito en forma matricial: $A \cdot X = B$

Al ser un sistema de Cramer se verifica que $|A| \neq 0$ y, por tanto, existe la matriz inversa A^{-1} .

Multiplicando los dos miembros de la ecuación matricial por la izquierda por A^{-1} , queda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos este producto, obtenemos:

$$x_1 = \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}}{|A|}; \quad x_2 = \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2}}{|A|}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn}}{|A|}$$

Cada uno de los numeradores de las incógnitas x_i es el desarrollo del determinante de la matriz A sustituyendo la columna i por la columna de los términos independientes. Es decir:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

□ Ejemplos:

1. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = -2 \\ 2x + y - z = 6 \\ 3x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 3 - 9 + 4 + 2 = 14 \neq 0 \rightarrow \text{Es un sistema de Cramer}$$

Aplicando la regla de Cramer, se obtiene la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{28}{14} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{14}{14} = 1 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-14}{14} = -1$$

2. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Es un sistema de Cramer}$$

Aplicando la regla de Cramer, se obtiene la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{4} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8}{4} = 2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12}{4} = 3$$

3. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Es un sistema de Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-6} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-6} = 0 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-6} = 1$$

□ **Ejemplos:**

1) Clasificar el siguiente sistema y resolver en caso de ser compatible:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 2 \text{ ya que } F_3 = F_1 + F_2 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2 \rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

Consideramos del sistema las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte del menor y consideremos como incógnitas principales aquellas cuyos coeficientes aparecen en el menor:

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ x = 2 - z \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 2-z & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z-2}{-1} = 2-z \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2-z-3+z}{-1} = 1$$

Las infinitas soluciones del sistema son: $x = 2 - z$; $y = 1$; $z = z$, es decir, $(2 - \lambda, 1, \lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2) Clasificar el siguiente sistema y resolver en caso de ser compatible:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x - 3y - 5z = -4 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}; \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0 \text{ ya que } F_3 + F_2 + F_1 = 0 \rightarrow \operatorname{rg} A = 2, \text{ considerando que el menor } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 \neq 0$$

Estudiamos el rango de A^* :

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3+F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rg} A^* = 3$$

Por tanto, el sistema es incompatible.

5 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS: MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Ya hemos visto dos procedimientos de resolución de sistemas: método de Gauss y la regla de Cramer.

El método de la matriz inversa consiste en expresar el sistema en forma matricial $A \cdot X = B$ y despejar la matriz X , siempre que exista su inversa, A^{-1} :

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

□ Ejemplos:

$$1) \text{ Resolver el siguiente sistema: } \begin{cases} -x + y + z = -1 \\ x - 3z = -18 \\ 2x - 5y + 3z = 52 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -5 - 6 - 3 + 15 = 1$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los adjuntos de cada elemento de A^T :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3+5) = -8$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -(3+6) = -9$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(3-1) = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(5-2) = -3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Calculamos la matriz X , solución del sistema:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 3$, $y = -5$, $z = 7$

$$2) \text{ Resolver el siguiente sistema: } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 5 \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^T) = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$

6 DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON PARÁMETROS

En este apartado estudiaremos algunos ejemplos de discusión de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros.

Recuerda que hay dos procedimientos para analizar el nº de soluciones del sistema:

- El teorema de Rouchè-Fröbenius.
- El método de Gauss.

Hay tres métodos de resolución de sistemas lineales compatibles:

- El método de Gauss.
- La regla de Cramer.
- Empleando la matriz inversa.

□ Ejemplos:

1) Sea considera el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2y + z = a \\ (a-2)x + y + 3z = 0 \\ (a-1)y = 1-a \end{array} \right\}$$

a) Estudie el sistema, según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

Consideramos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A \geq 2$$

$$|A| = (a-2) \cdot (a-1) = 0 \text{ si } a = 1, a = 2$$

Por tanto, $\text{rg } A = 2$ si $a = 1, a = 2$.

- Si $a = 1 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A^* = 2 = \text{rg } A \rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

Tenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ -x + y + 3z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ y + 3z = x \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{3-x}{5}; z = \frac{2x-1}{5}$$

Las soluciones son $(5\lambda, 3-\lambda, 2\lambda-1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- Si $a = 2 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A^* \neq \text{rg } A \rightarrow \text{sistema incompatible.}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 1 = -11 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

- Si $a \neq 2, a \neq 1 \rightarrow \text{rg } A^* = \text{rg } A = 3 \rightarrow \text{sistema compatible determinado.}$

$$\left. \begin{array}{l} 2y + z = a \\ (a-2)x + y + 3z = 0 \\ (a-1)y = 1-a \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{1-a}{a-1} = -1 \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z = a \\ (a-2)x + y + 3z = 0 \\ (a-1)y = 1-a \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{1-a}{a-1} = -1$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, obtenemos: $-2 + z = a \rightarrow z = a + 2$

Empleando la 2ª ecuación, calculamos x :

$$(a-2)x - 1 + 3(a+2) = 0 \rightarrow (a-2)x = 1 - 3a - 6 \rightarrow x = \frac{5+3a}{2-a}$$

También se podía aplicar la regla de Cramer:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = (a-2) \cdot (1-a) \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 1 \\ a-2 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & | & 1-a \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1-a & a-1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3a(a-1) + 5(1-a)}{(a-2)(a-1)} = \frac{(3a+5)(1-a)}{(a-2)(a-1)} = \frac{3a+5}{2-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a-2 & 0 & 3 \\ 0 & 1-a & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(a-2)(a-1)}{(a-2)(a-1)} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ a-2 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(a-2)[2(1-a) - a(a-1)]}{(a-2)(a-1)} = -\frac{(-2-a)(a-1)}{a-1} = 2+a$$

2) Dado el número real a , se considera el sistema

$$\begin{cases} x - ay + z = a \\ ax - y + z = 1 \\ -ax - y + z = a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema según los valores de a .

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3=F_2-F_3} \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a(a-1) = 0 \rightarrow a = 1, a = 0$

- Si $a = 0 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A^* \neq \text{rg } A \rightarrow \text{sistema incompatible.}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

- Si $a = 1 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ -1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A^* = \text{rg } A \rightarrow \text{sistema compatible indeterminado.}$

- Si $a = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 4$ (sustituyendo $a = 2$)

Aplicando el método de Gauss para resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

El sistema triangular equivalente que hemos obtenido es:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ x + y = -1 \\ 4x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{6}{4} + z = 2 \rightarrow z = \frac{3}{4} \\ y = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Por tanto la solución del sistema es: $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$

3) Estudiar el sistema para los distintos valores del parámetro "a". Resolver en caso de ser compatible.

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - ay - 3z &= 0 \\ 5x + 2y - z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Al ser un sistema homogéneo el $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$, por tanto, admite la solución trivial $(0, 0, 0)$

$$|A| = (2a + 2 + 45) - (-5a + 3 - 12) = 7a + 56$$

$$|A| = 0 \rightarrow 7a + 56 = 0 \rightarrow a = -8$$

Si $a = -8 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow \text{S.C.I.}$

Si $a \neq -8 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow \text{S.C.D.}$

Resolución para $a = -8$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \leftrightarrow F1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F2=F2-2F1 \\ F3=F3-5F1}} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -19 & 7 \\ 0 & -38 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x + 8y - 3z &= 0 \\ -19y + 7z &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x + 8y = 3z \\ 19y = 7z \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x = 3z - 8y = 3\lambda - \frac{56\lambda}{19} = \frac{\lambda}{19} \\ y = \frac{7\lambda}{19} \end{cases}$$

Solución: $x = \lambda, y = 7\lambda, z = 19\lambda$