CÁLCULO DE LÍMITES

1. Sea la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Calcular, si existe, $\lim_{x\to 1} f(x)$

Solución:

Para que exista el límite debe verificarse que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 1 = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

2. Sea la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Demuestra que no existe $\lim_{x\to 1} f(x)$

Solución:

Para que exista el límite debe verificarse que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} e^{x-1} = e^0 = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x) \to \nexists \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

3. Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 5}{1 + x}$$

Hallar:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x)$

d) $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)$ e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)$ f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Solución:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ b) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = 1$ d) $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x) = +\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x) = -\infty$ f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

4. Hallar h y k sabiendo que se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[kx+h-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right]=0$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[kx+h-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{kx^3+hx^2+kx+h-x^3-1}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(k-1)x^3+hx^2+kx+h-1}{x^2+1}\right]=0$$

Para que el límite valga cero debe verificarse que el grado del numerador sea menor que el del denominador, por tanto, imponemos que el numerador sea un polinomio de grado 1, es decir:

- $k-1=0\rightarrow k=1$
- $h=0$

7. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$ b) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$ c) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-12x+16}{x^3-3x^2+4}$

d) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}$ e) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12}$ f) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x}{2x^2+x-3}$

Solución:

a) $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to3}\frac{(\cancel{x-3})(x^2+3x+9)}{(\cancel{x-3})(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

b) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{(\cancel{x-1})(x-2)}{(\cancel{x-1})(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x-3}=\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-12x+16}{x^3-3x^2+4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to2}\frac{(\cancel{x-2})^2(x+4)}{(\cancel{x-2})^2(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x+1}=\frac{6}{3}=2$

d) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to2}\frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{(\cancel{x-2})x}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x}=\frac{4}{2}=2$

e) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to3}\frac{(\cancel{x-3})(x-3)}{(\cancel{x-3})(x-4)}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x-4}=\frac{0}{-1}=0$

f) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x}{2x^2+x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{x(\cancel{x-1})(x+1)}{(\cancel{x-1})(2x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x+1)}{2x+3}=\frac{2}{5}$

8. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ c) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}$ e) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^2-1}}$ f) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{x}$ h) $\lim_{x\to 5}\frac{2x-10}{\sqrt{x+4}-3}$ i) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-2x+1}}{\sqrt{4x^2-x-3}}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)=4a\sqrt{a}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x-x-1)}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)}=-1$

e) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

f) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{0}{2}=0$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{9-x-9}{x\left(3+\sqrt{x+9}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\left(3+\sqrt{x+9}\right)}=-\frac{1}{6}$

h) $\lim_{x\to 5}\frac{2x-10}{\sqrt{x+4}-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x-10)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{x+4-9}=\lim_{x\to 5}2\left(\sqrt{x+4}+3\right)=12$

i) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-2x+1}}{\sqrt{4x^2-x-3}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x-1)(x^2+x-1)}}{\sqrt{(x-1)(4x+3)}}=\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2+x-1}{4x+3}}=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

9. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{2x+4}{x^2-1}\right)$ b) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$ c) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{4x}{x^2-9}\right)$

d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ e) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2-6x}\right)$ f) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$

Solución:

a) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{2x+4}{x^2-1}\right) = \infty-\infty = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+2-2x-4}{x^2-1} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right) = \infty-\infty = \lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{4x}{x^2-9}\right) = \infty-\infty = \lim_{x\to 3}\frac{x+3-4x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{6}$

d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \infty-\infty = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = 0$

e) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2-6x}\right) = \infty-\infty = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-9-x^2+6x}{\left(\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-6x}\right)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{6x-9}{\left(\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-6x}\right)} = 3$

f) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right) = \infty-\infty = \lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2+x+1-x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}} =$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{2}$$

10. Hallar a para que $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{ax^2-18}$ sea finito.

Solución:

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{ax^2-18} = \frac{0}{9a-18} \rightarrow 9a-18=0 \rightarrow a=2$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x^2-18} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{2(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-1}{2(x+3)} = \frac{1}{6}$

11. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\log\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{2x}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{x^2}$

d) $\lim_{x\to0}(ax+1)^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{x}$ f) $\lim_{x\to0}(\operatorname{sen}x+1)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

Solución:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\log\left(1+\frac{3}{x}\right)\right] = 0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3x}{3}}\right] = \log e^3 = 3$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{2x} = e^{-2}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}-1\right)\cdot 2x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3}{3x+4}\right)2x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x}{3x-1}\right) = -2$$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{x^2} = e^{-3}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}-1\right)\cdot x^2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3}{x^2+4}\right)\cdot x^2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2}{x^2+4}\right) = -3$$

d) $\lim_{x\to0}(ax+1)^{\frac{1}{x}} = e^{a}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x) = \lim_{x\to+\infty}(ax+1-1)\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax}{x}\right) = a$$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{x} = e^{\frac{1}{a}}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{ax}-1\right)\cdot x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{ax}\right) = \frac{1}{a}$$

f) $\lim_{x\to0}(\operatorname{sen}x+1)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}} = e$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1+\operatorname{sen}x-1)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}\right) = 1$$