CÁLCULO DE LÍMITES

1. Se define la función signo(x) como:

$$f(x) = \text{signo}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Solución:

Calculamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-1) = -1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \to \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, siendo la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ 5 + \dfrac{x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \to \begin{cases} 4 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ 6 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 6 = 6 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \to \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-2} = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (3x - 5) = -2 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -2 \to \lim_{x\to 1} f(x) = -2$$

4. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \geq -2 \\ \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Demuestra que no existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} (2x+3) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{5}{4} \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \to \nexists \lim\limits_{x\to -2} f(x)$$

5. Hallar los límites laterales en x = 1, en las siguientes funciones:

a) f(x) = E(x), siendo E(x) la función parte entera de x

b) f(x) = D(x), siendo D(x) la función parte decimal: D(x) = x – E(x)

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} E(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} E(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \to \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} D(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} D(x) = 1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \to \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$$

6. Calcular el valor de m para que exista $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+mx-1 & \text{si } x \geq -2 \\ 2x+5 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} (2x+5) = 1 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \left(x^2+mx-1\right) = 3-2m \end{array}\right\} \to 3-2m = 1 \to m = 1$$

7. Hallar m para que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+mx-6}{x^2-4}$ sea finito.

Solución:

$$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+mx-6}{x^2-4} = \frac{4+2m-6}{0}$$

Imponemos que 4 + 2m – 6 = 0 → m = 1

8. Sobre la función $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{3x^3-3x^2+mx-2}$ se sabe que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\dfrac{3}{7}$, calcular:

a) El valor de m

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\dfrac{3}{7} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{-6}{10+2m}=-\dfrac{3}{7} \to m=2$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\dfrac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-3x-4)}{(x-1)(3x^2+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x-4}{3x^2+2}=-\frac{6}{5}$$

9. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-4x^3+2x-1}{3x^2-2x+9}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-x^3-4x}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-6x+5}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2-x}{x+1}-\dfrac{2x^2}{x-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{3x+1}-\dfrac{x^3-x^2+1}{3x^2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x+2}\cdot\dfrac{x^2+5x}{4x^4+2x+3}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+1}{x-1}:\dfrac{x^2+5}{x^2-1}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^3-27}{3x-9}}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x}+5x}{4x+6\sqrt{x}}$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-x\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}-3}$

n) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-2x}$

o) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-x}{x-2}$

p) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

q) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^3+3x+1}}$

r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[6]{x^3+x^2}}$

r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$

s) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4x^3 + 2x - 1}{3x^2 - 2x + 9} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Dividimos por x^3:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x^3 + 2x - 1}{3x^2 - 2x + 9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{9}{x^3}} = \frac{-4}{0} = -\infty$$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \dfrac{0}{0}$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)(x^2 + x + 2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x^2 + x + 2)}{x + 2} = \frac{20}{4} = 5$$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{0}{0}$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x+3} = -4$$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{0}{0}$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x+5}{x-1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - x}{x + 1} - \dfrac{2x^2}{x - 1} \right) = \infty - \infty$

Efectuamos la resta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x + 1} - \frac{2x^2}{x - 1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 2x^2 + x - 2x^3 - 2x^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por x^2:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = -5$$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{3x+1}-\frac{x^3-x^2+1}{3x^2}\right)=\infty-\infty$

Efectuamos la resta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{3x+1}-\frac{x^3-x^2+1}{3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-3x^2-3x^4+3x^3-3x-x^3+x^2-1}{3x^2(3x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2-3x-1}{9x^3+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por x^3:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2-3x-1}{9x^3+3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{9+\frac{3}{x}}=\frac{2}{9}$$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x+1}{5x+2}\cdot\frac{x^2+5x}{4x^4+2x+3}=\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x+1}{5x+2}\cdot\frac{x^2+5x}{4x^4+2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5}{20x^5}=\frac{3}{20}$$

h) $\lim_{x\to1}\left(\frac{3x+1}{x-1}:\frac{x^2+5}{x^2-1}\right)=\frac{\infty}{\infty}$

Efectuamos el cociente:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3x+1}{x-1}:\frac{x^2+5}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(3x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+5)}=\lim_{x\to1}\frac{(3x+1)(x+1)}{x^2+5}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

i) $\lim_{x\to3}\sqrt{\frac{x^3-27}{3x-9}}=\frac{0}{0}$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x\to3}\sqrt{\frac{x^3-27}{3x-9}}=\lim_{x\to3}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{3(x-3)}}=\lim_{x\to3}\sqrt{\frac{x^2+3x+9}{3}}=\sqrt{9}=3$$

j) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+x}+5x}{4x+6\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}$

Dividiendo por x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+5}{4+\frac{6}{\sqrt{x}}}=\frac{3+5}{4}=2$$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-x\right)=\infty-\infty$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x-3-x^2}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{5}{2}$$

l) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{0}{0}$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}$$

m) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}-3}=\frac{0}{0}$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim_{x\to4}\frac{(x^2-16)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2x+1-9}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2}=\frac{48}{2}=24$$

n) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-2x}=\frac{0}{0}$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{x+7-9}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{1}{12}$$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$

Dividiendo por x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1}{1-\frac{2}{x}}=\frac{2-1}{1}=1$$

p) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{0}{0}$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{4}$$

q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^3+3x+1}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^3+3x+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x^3+x^2}}{\sqrt{x^3+3x+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}} = \sqrt{2}$$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[6]{x^3+x^2}} = \dfrac{0}{0}$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)}}{\sqrt[6]{x^2(x+1)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[6]{x+1}} = -1$$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{0}{0}$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)} = 0$$

s) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}} = \dfrac{0}{0}$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+5-4)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}\right)}{(x+2-2x-3)\left(\sqrt{x+5}+2\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}\right)}{-\left(\sqrt{x+5}+2\right)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$