1 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

1.1. Definiciones

Se dice que una ***función*** f es ***creciente*** en un punto x_0 si para cualquier punto x de un entorno de x_0, $(x - x_0, x + x_0)$ se verifica:

- Si $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$
- Si $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

Se dice que una ***función*** f es ***decreciente*** en un punto x_0 si para cualquier punto x de un entorno de x_0, $(x - x_0, x + x_0)$ se verifica:

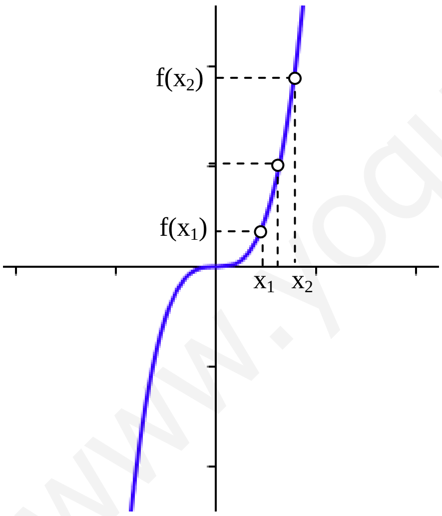
- Si $x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$
- Si $x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

Una función es ***creciente*** **en un *intervalo*** [a,b] si dados dos puntos cualesquiera del intervalo, x_1, x_2, $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$

Una función es ***decreciente*** **en un *intervalo*** [a,b] si dados dos puntos cualesquiera del intervalo, x_1, x_2, $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$

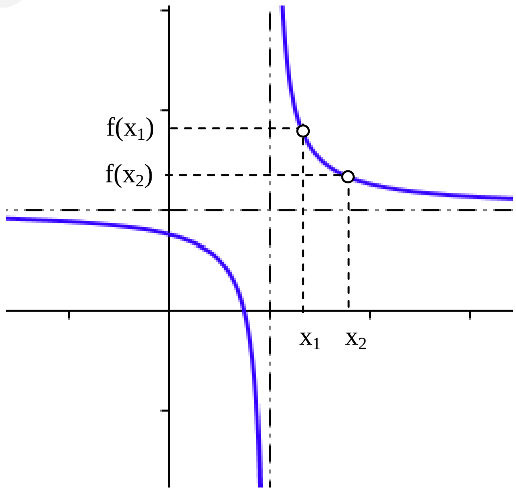
Ejemplos

a) $f(x) = x^3$ creciente



$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2 = \dfrac{2x-3}{x-2}$ decreciente



$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

1.2. Criterios de crecimiento y decrecimiento de una función

Sea f una función continua en [a,b] y derivable en (a,b):

- Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces *f(x) es **creciente** en (a , b)*
- Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces *f(x) es **decreciente** en (a , b)*
- Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b), entonces *f(x) es **constante** en (a , b)*

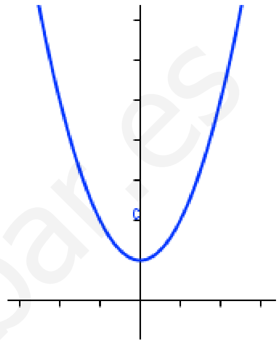
1.3. Cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para determinar los intervalos de crecimiento de una función:

- Hallar los puntos donde f¨(x) = 0 o no esté definida la derivada primera.
- Estos puntos dividen el dominio de definición de f en intervalos, en los cuales estudiaremos el signo de la derivada primera.

Ejemplos

1. *Estudiar el crecimiento y decrecimiento de* $f(x) = x^2 + 1$

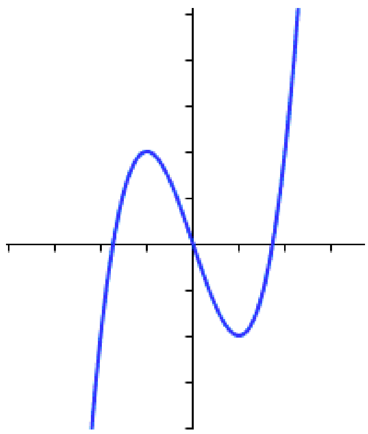


$f´(x) = 2x \Rightarrow f´(x) = 0$ si $x = 0$

Estudiamos el signo de la derivada primera en los intervalos:

- Si $x > 0 \Rightarrow f´(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- Si $x < 0 \Rightarrow f´(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente

2. *Estudiar el crecimiento y decrecimiento de* $f(x) = x^3 – 3x$

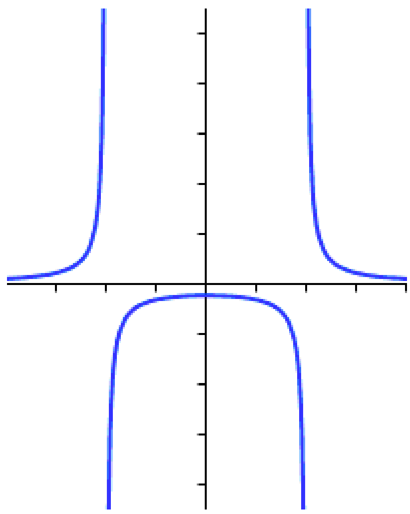


$f´(x) = 3x^2 – 3 = 3(x – 1)(x + 1) \Rightarrow f´(x) = 0$ si $x = -1, x = 1$

Estudiamos el signo de la derivada primera en los intervalos:

- $x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0, x – 1 < 0 \Rightarrow f´(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- $-1 < x < 1 \Rightarrow x + 1 > 0, x – 1 < 0 \Rightarrow f´(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente
- $x > 1 \Rightarrow x + 1 > 0, x – 1 > 0 \Rightarrow f´(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente

3. *Estudiar el crecimiento y decrecimiento de* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$



$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f´(x) = 0$ si $x = 0$

Además f´ no está definida para x = 2, x= -2:

Estudiamos el signo de la derivada primera en los intervalos:

- $x < -2 \Rightarrow -2x > 0, (x^2 – 4)^2 > 0 \Rightarrow f´(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- $-2 < x < 0 \Rightarrow -2x > 0, (x2 – 4)^2 > 0 \Rightarrow f´(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- $0 < x < 2 \Rightarrow -2x < 0, (x2 – 4)^2 > 0 \Rightarrow f´(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente
- $x > 2 \Rightarrow -2x < 0, (x2 – 4)^2 > 0 \Rightarrow f´(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente

2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

2.1. Definiciones

Se dice que la función f tiene un ***máximo relativo*** en x_0 si para cualquier punto x de un entorno de x_0 se verifica que $f(x) \le f(x_0)$

Se dice que la función f tiene un ***mínimo relativo*** en x_0 si para cualquier punto x de un entorno de x_0 se verifica que $f(x) \ge f(x_0)$

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b] alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^2$

Para cualquier valor x real se verifica que $x^2 \ge 0$, por tanto, la función alcanza un mínimo en x = 0

2.2. Condición necesaria de extremo relativo

Si f es derivable en x_0 y tiene un extremo relativo en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.

Es decir la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ en que presenta un extremo relativo es horizontal.

Demostración

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si f tiene un máximo relativo en x_0, se verifica:

- Si $x > x_0 \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \Rightarrow f'(x_0) \le 0$
- Si $x < x_0 \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \Rightarrow f'(x_0) \ge 0$

$\rightarrow$ Por tanto, $f'(x_0) = 0$

Del mismo modo se demuestra si f tiene un mínimo relativo en x_0

Observaciones:

a) Si $f'(x_0) = 0$ no implica x_0 sea un extremo relativo de f.

Ejemplo:

$f(x) = x^3$ es una función estrictamente creciente con lo cual no tiene extremos relativos.

Sin embargo $f'(x) = 3x^2$ se anula para x = 0

b) Puede existir extremo relativo en puntos donde no exista la derivada primera.

Ejemplo:

$f(x) = |x|$ no es derivable en x = 0 ($f'_+(0) = 1; f'_-(0) = -1 \rightarrow$ No existe $f'(0)$)

Sin embargo $|x| \ge 0$ para cualquier valor x real, por tanto, f tiene un mínimo en x = 0

2.3. Condiciones suficientes de extremo relativo

2.3.1. *Criterio de variación de la función*

- f tiene un máximo relativo en x_0 si se cumple $f(x) < f(x_0)$ para cualquier valor x de un entorno de x_0.
- f tiene un mínimo relativo en x_0 si se cumple $f(x) > f(x_0)$ para cualquier valor x de un entorno de x_0.

Ejemplo:

$f(x) = x^2$ es una función que tiene un mínimo en x = 0 ya que $x^2 \geq 0$ para cualquier valor x real.

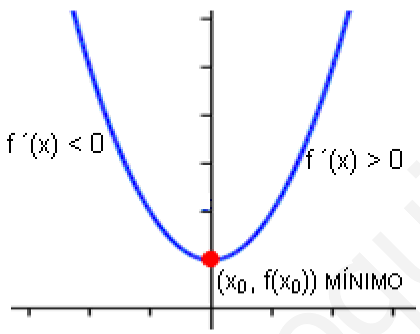
$f(x) = 1 - x^2$ es una función que tiene un máximo en x = 0 ya que:

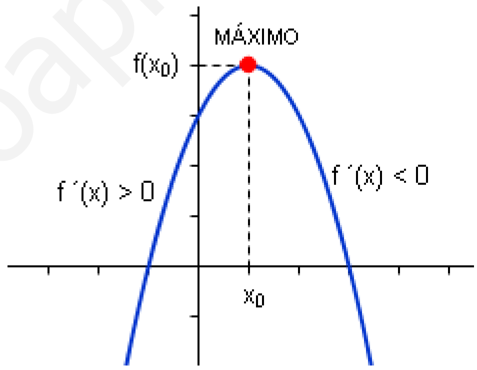
$x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 = f(0)$ para cualquier valor x real

2.3.2. *Criterio de variación de la primera derivada*

Sea f una función continua en [a,b] y derivable en (a,b), excepto acaso para un punto $x_0 \in (a,b)$:

- Si $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para $x > x_0 \Rightarrow$ f tiene un máximo relativo en x_0.
- Si $f'(x) < 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) > 0$ para $x > x_0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en x_0.





2.3.3. *Criterio de variación de la derivada segunda*

Si $f'(x_0) = 0$ para $x_0 \in (a,b)$, donde f está definida.

- Si $f''(x_0) > 0$, entonces f(x) tiene un mínimo relativo en x_0.
- Si $f''(x_0) < 0$, entonces f(x) tiene un máximo relativo en x_0.

Demostración

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$, ya que $f'(x_0) = 0$

- Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x < x_0 \to f'(x) > 0 \\ \text{si } x < x_0 \to f'(x) < 0 \end{cases}$

  La función pasa de creciente a decreciente, entonces f(x) tiene un máximo relativo en x_0.

- Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x < x_0 \to f'(x) < 0 \\ \text{si } x < x_0 \to f'(x) > 0 \end{cases}$

  La función pasa de decreciente a creciente, entonces f(x) tiene un mínimo relativo en x_0.

2.4. Cálculo de los extremos relativos de una función

Los extremos relativos de una función f(x) sólo pueden encontrarse entre:

1. Los puntos singulares o críticos, es decir, los puntos donde la primera derivada es nula.
2. Los puntos donde f no es derivable.

Ejemplos

1. *Determinar los extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2$*

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

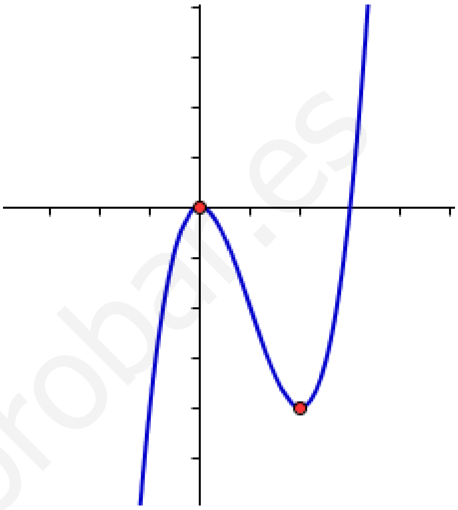
- $x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f creciente
- $0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f decreciente
- $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f creciente

En x = 0 tiene un máximo y en x = 2 un mínimo.

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ f alcanza un máximo en x = 0

$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow$ f alcanza un mínimo en x = 0

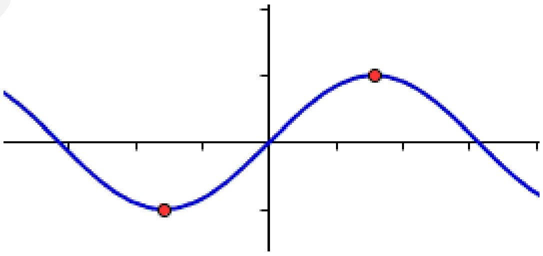


2. *Determinar los extremos relativos de f(x) = sen x*

Para cualquier valor x, se verifica $-1 \le x \le 1$

Por tanto, la función tiene:

- Mínimo en $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{R}$
- Máximo en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{R}$



3. *Determinar los extremos relativos de f(x) = | x – 1|*

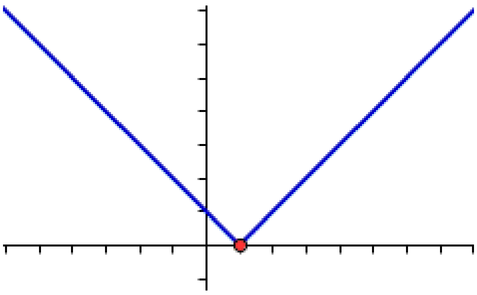
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \ge 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

f no es derivable en x = 1

Para cualquier valor de x, $|x - 1| \ge 0 \Rightarrow |x - 1| \ge 0$

$f(x) = 0$ si $|x - 1| = 0 \Rightarrow x = 1$

La función tiene un mínimo en x = 1



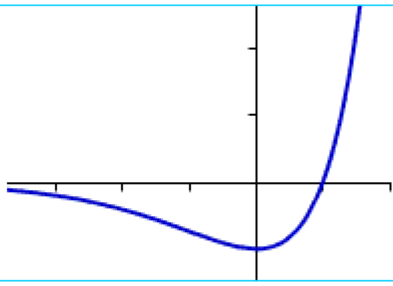
4. *Determinar los extremos relativos de $f(x) = (x - 1)\, e^x$*

$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = x\, e^x$

$f'(x) = 0$ si $x = 0$

$f''(x) = e^x + x\, e^x = (x + 1)\, e^x$

$f''(0) = e^0 = 1 \Rightarrow$ f tiene un mínimo en x = 0



3 CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN

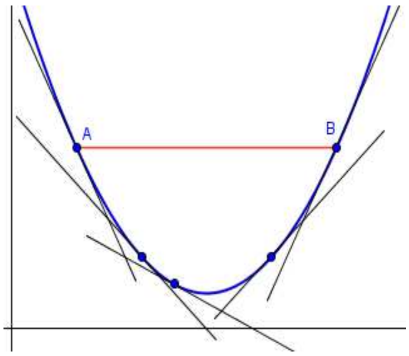
3.1. Definiciones

Diremos que una función f derivable es **convexa** en un punto x_0 si existe un arco de la curva por encima de la recta tangente a la curva y = f(x) en x_0.

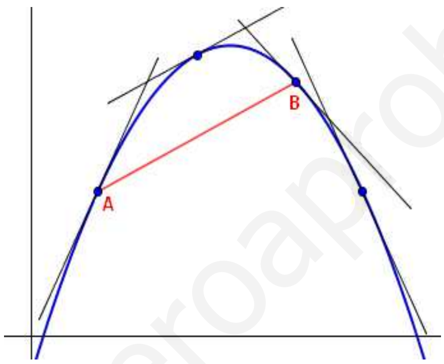
Diremos que una función f derivable es **cóncava** en un punto x_0 si existe un arco de la curva por debajo de la recta tangente a la curva y = f(x) en x_0.

Un función f(x) es cóncava (convexa) en un intervalo [a,b] cuando lo es en cada uno de sus puntos, o bien, cuando el segmento que une los puntos A(a,f(a)) y B(b,f(b)) queda por encima (por debajo) del arco de curva correspondiente AB.

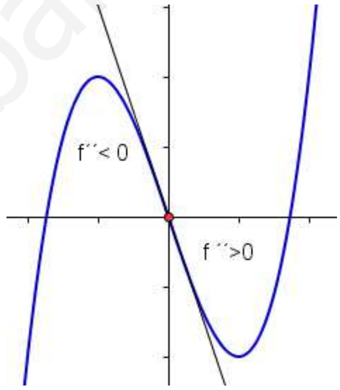
Cuando en un punto (a,f(a)) la función cambia de concavidad se tiene un ***punto de inflexión*** y la recta tangente en dicho punto, si existe, atraviesa la curva.



CÓNCAVA



CONVEXA



PUNTO DE INFLEXIÓN

3.2. Criterios de concavidad y convexidad

Sea f una función derivable en (a,b) tal que existe la derivada segunda en x_0:

a) $f''(x_0) < 0$, entonces f es convexa en x_0

b) $f''(x_0) > 0$, entonces f es cóncava en x_0

c) $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

Si f es cóncava en $x_0 \Rightarrow f'$ es creciente en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) > 0$

Si f es convexa en $x_0 \Rightarrow f'$ es decreciente en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) < 0$

Si f tiene un punto de inflexión en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

***Observaciones*:**

1.- Si $f''(x_0) = 0$ no garantiza que f tenga un punto de inflexión en x_0.

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^4$

$f''(x) = 12x^2$ nula en x = 0

Sin embargo, (0,0) no es un punto de inflexión ya que no hay cambio de concavidad ($f''(x) > 0$ para cualquier valor de x).

2.- Una función puede presentar cambios de concavidad y no tener ningún punto de inflexión.

Ejemplo

Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

$f''(x)=\dfrac{30x^2+40}{(x^2-4)^3}\neq 0$ para cualquier valor de x, con lo cual no tiene punto de inflexión.

Sin embargo, se tiene que:

- Si $-2 < x < 2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f cóncava
- Si $x > 2$ ó $x < -2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f convexa

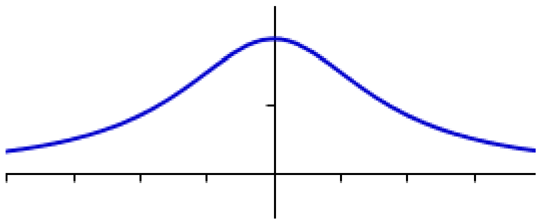
3.- Para que exista punto de inflexión en x_0 es necesario que exista $f(x_0)$ y la función cambie de concavidad en x_0.

3.3. Cálculo de los intervalos de concavidad y convexidad

- Hallar los puntos donde $f''(x) = 0$ o no esté definida la derivada segunda.
- Estos puntos definen los intervalos en los que f´´ tiene signo constante.
- Tomando un punto de cada intervalo determinamos el signo de f´´ en cada intervalo.

Ejemplos

1. *Estudia la curvatura de la función* $f(x)=\dfrac{6}{x^2+3}$

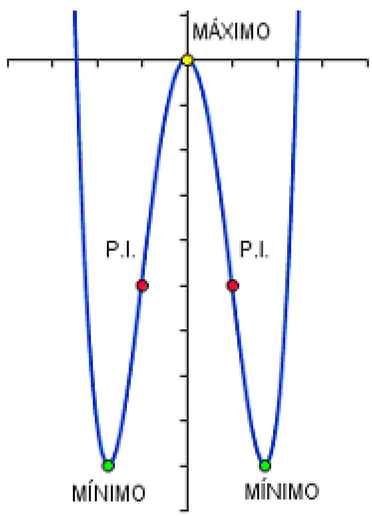


$f'(x)=\dfrac{-12x}{(x^2+3)^2} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$

$f''(x) = 0$ si $x = -1$, $x = 1$

- f es convexa para $x < -1$ y $x > 1$
- f es cóncava para $-1 < x < 1$

2. *Estudiar el crecimiento, extremos relativos, curvatura y los puntos de inflexión de* $f(x) = x^4 - 6x^2$



$f'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$

- f creciente para $-\sqrt{3} < x < 0$ y $x > \sqrt{3}$
- f decreciente para $x < -\sqrt{3}$ y $0 < x < \sqrt{3}$
- Máximo: (0,0)
- Mínimos: $(-\sqrt{3},-9)$; $(\sqrt{3},-9)$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1) \Rightarrow f''(x) = 0$ si $x = \pm 1$

- f es convexa para $x < -1$ y $x > 1$
- f es cóncava para $-1 < x < 1$
- Puntos de inflexión: (1,-5), (-1, -5)

4 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Los máximos y mínimos se aplican no sólo en la resolución de problemas puramente matemáticos, sino también en otras áreas en los que se trata de optimizar una función, es decir, encontrar los valores de ciertas variables para que una determinada magnitud tenga el valor óptimo (máximo o mínimo).

Por ejemplo, una fábrica quiere enlatar conservas en botes de 1 litro de capacidad, de forma que las dimensiones del bote resulte lo más barato posible.

Estos problemas de optimización se resuelven del siguiente modo:

1) Si M es la magnitud que se desea optimizar, se expresa M en función de las variables que la definen.

2) Estas variables se definen en función de una de ellas (los datos del problema permiten hacerlo)

3) Una vez que la magnitud M queda expresada en términos de una sola variable, se hallan los máximos y mínimos por los métodos expuestos en los apartados anteriores.

Ejemplos

1. *Hallar un número positivo cuya suma con su inverso sea mínima.*

Llamamos x a dicho número, su inverso es $\frac{1}{x}$ y la suma de ambos: $x+\frac{1}{x}$

El problema quiere que minimicemos dicha suma.

Definimos la función $f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$ de la que hallaremos un mínimo.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-1\cdot(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Imponemos que $f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1$

$$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-2x\cdot(x^2-1)}{x^4}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}\Rightarrow f''(1)=2>0 \quad y \quad f''(-1)=-2<0$$

Por tanto, el mínimo se alcanza en x = 1 $\rightarrow$ El número pedido es el 1.

2. *De todos los rectángulos de área 16m², ¿qué dimensiones tiene el de menor perímetro?*

Sea x = base e y = altura del rectángulo

Sea A el área de dicho rectángulo: $A = xy = 16 \Rightarrow y=\frac{16}{x}$

Perímetro del rectángulo: $P = 2x + 2y = 2x+2\cdot\frac{16}{x}=2x+\frac{32}{x}=\frac{2x^2+32}{x} \rightarrow P=\frac{2x^2+32}{x}$

Derivando: $P'=\frac{4x\cdot x-\left(2x^2-32\right)}{x^2}=\frac{2x^2-32}{x^2}=\frac{2\left(x^2-16\right)}{x^2}$

Imponemos que $P' = 0 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$ (descartamos el valor negativo) $\rightarrow x = 4$

$P' > 0$ si $x \in (-\infty, -4) \cup (4,+\infty)$, $P' < 0$ si $x \in (-4, 4)$

El mínimo se alcanza en x = 4 m $\rightarrow$ y = 4 m

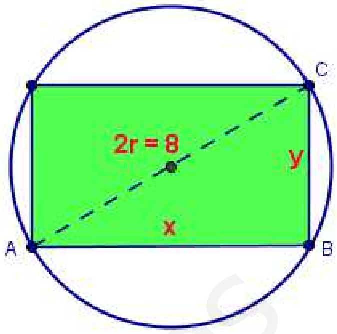
El rectángulo de menor perímetro es el cuadrado de lado 4 m.

3. *Dado un círculo de radio 4 dm, inscribir en él un rectángulo de área máxima.*

Área = f(x) = x · y, siendo x la base e y la altura del rectángulo.

El triángulo ABC es rectángulo, por tanto, se verifica:

$8^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$



Por tanto, el área queda expresado en función de x:

$f(x) = x \cdot \sqrt{64 - x^2}$. Derivamos:

$$f'(x) = \sqrt{64 - x^2} + x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{64 - x^2}} = \frac{64 - 2x^2}{\sqrt{64 - x^2}}$$

Imponemos que $f'(x) = 0 \to 64 - 2x^2 = 2(32 - x^2) = 0 \to x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (descarto la raíz negativa)

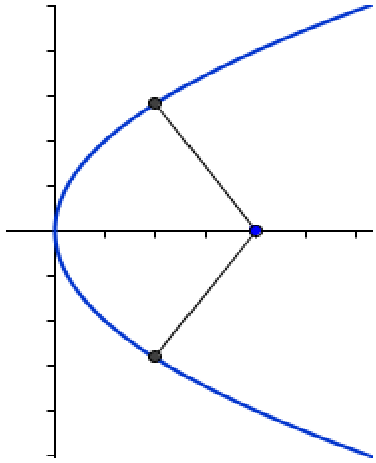
f es creciente para $0 < x < 4\sqrt{2}$ y decreciente para $x > 4\sqrt{2}$

Por tanto, f tiene un máximo en $x = 4\sqrt{2}$

4. *Calcular las coordenadas de los puntos de la parábola $y^2 = 4x$, tales que sus distancias al punto A(4,0) sean mínimas.*

Cualquier punto de la curva tiene como coordenadas:

$P\left(x, 2\sqrt{x}\right)$ ó $Q\left(x, -2\sqrt{x}\right)$



La distancia de estos puntos a A viene dada por:

$$D(P,A) = \sqrt{(x-4)^2 + (2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

$$D(Q,A) = \sqrt{(x-4)^2 + (-2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Definimos la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}}$$

$f'(x) = 0$ si $x = 2 \Rightarrow P\left(2, 2\sqrt{2}\right)$ ó $Q\left(2, -2\sqrt{2}\right)$

5. *Un granjero dispone de 60 m de valla. Con ella y, aprovechando un muro de piedra que existe en su propiedad, quiere construir un corral rectangular adosado al muro de la mayor superficie posible. Calcular las dimensiones del corral.*

Sea A el área del corral: A = x · y, siendo x el largo e y el ancho del corral.

Como se dispone de 60 m de valla: $x + 2y = 60 \Rightarrow x = 60 - 2y$

Por tanto $A = (60 - 2y) \cdot y = 60y - 2y^2$

$A' = 60 - 4y \Rightarrow A' = 0$ si $y = 15$ m $\Rightarrow x = 60 - 30 = 30$ m

$A'' = -4 < 0 \Rightarrow y = 15$ máximo.

Las dimensiones de la parcela son 15 m x 30 m = 450 m^2

6. *Tomando una cuerda de longitud 100 cm. ¿Cuál es el triángulo isósceles de mayor área?*

Perímetro = 100 $\rightarrow$ 2x + 2y = 100 $\rightarrow$ y = 50 – x

Área triángulo: A = x · h

Aplicando Pitágoras:

$x^2 + h^2 = y^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(50-x)^2 - x^2} = \sqrt{2500 - 100x}$

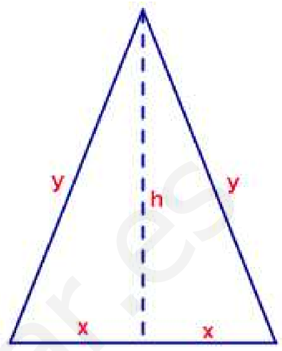
Por tanto el área es: $A = x\sqrt{2500-100x}$

$$A' = \sqrt{2500-100x} + x\frac{\cancel{-100}\,50}{\cancel{2}\sqrt{2500-100x}} = \frac{2500-100x-50x}{\sqrt{2500-100x}} = \frac{2500-150x}{\sqrt{2500-100x}}$$

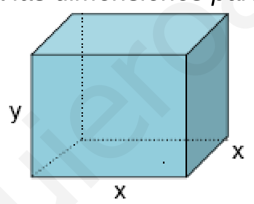
A´= 0 si 2500 – 150 x = 0 $\rightarrow$ 50 – 3x = 0 $\rightarrow$ $x = \frac{2500}{150} = \frac{50}{3}$

A´> 0 si x < $\frac{50}{3}$ y A´> 0 si x < $\frac{50}{3}$ $\rightarrow x = \frac{50}{3}$ es un máximo.

Por tanto, Base: $2x = \frac{100}{3} \Rightarrow y = 50 - \frac{50}{3} = \frac{100}{3}$



7. *Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. La superficie total que hay que recubrir es de 192 m2. Calcula las dimensiones para que su volumen sea máximo.*



La función que debemos maximizar es $V = x^2 \cdot y$ depende de dos variables.

Se ha de encontrar una relación entre ellas, utilizando el dato del área de la piscina:

$A = x^2 + 4xy \rightarrow 192 = x^2 + 4xy \rightarrow y = \frac{192 - x^2}{4x}$

Sustituyendo en la expresión del volumen:

$$V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot \left(\frac{192-x^2}{4x}\right) = \frac{192 - x^3}{4} \rightarrow V(x) = \frac{192 - x^3}{4}$$

Derivando e igualando a cero:

$V´(x) = \frac{192 - 3x^2}{4} \rightarrow 192 - 3x^2 = 0 \rightarrow 64 = x^2 \rightarrow x = 8$ (descartamos la solución negativa)

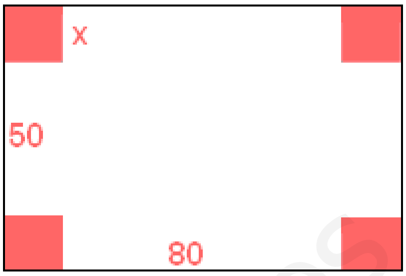
Veamos que x = 8 es un máximo empleando el criterio de la segunda derivada:

$V´´(x) = \frac{-6x}{4} = -\frac{3}{2}x \rightarrow$ Para x = 8, V´´ (x) = -12 < 0 $\rightarrow$ x = 8 máximo.

Si $x = 8 \rightarrow y = \frac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = \frac{192-64}{32} = \frac{128}{32} = 4$

La altura de la piscina debe ser de 4m y la base cuadrada debe medir 8 m.

8. *Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.*



Las dimensiones de la caja son:

Largo: 80 – 2x, Ancho: 50 – 2x, Alto: x

Por tanto, su volumen es:

$V = (80 - 2x)\cdot(50 - 2x)\cdot x = 4x^3 - 260\,x^2 + 4000x$

Derivando: $V' = 12\,x^2 - 520\,x + 4000$

Imponemos que $V' = 0 \Rightarrow 12x^2 - 520\,x + 4000 = 0 \rightarrow 3x^2 - 130\,x + 1000 = 0 \rightarrow x = \dfrac{130 \pm 70}{6} \rightarrow x = 10$

Calculamos la segunda derivada: $V'' = 24x - 520$

$V''(10) = 24 \cdot 10 - 520 < 0 \rightarrow x = 10$ es un máximo

Luego x = 10 cm

9. *Se desea envasar cierto producto en botes cilíndricos de un litro de capacidad, construidos con chapa metálica. Con el fin de ahorrar chapa se quiere dar al cilindro las dimensiones necesarias para que su superficie sea la menos posible. ¿Qué dimensiones son éstas?*

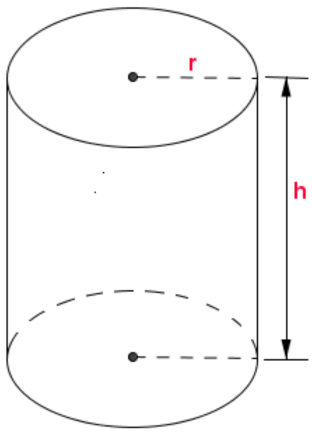
Se pretende que el área total del cilindro sea mínima.

Área del cilindro: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Como el cilindro debe tener un litro de volumen:

$$V = \pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Luego, el área quedaría expresado en función del radio:



$$A(r) = 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2 \Rightarrow A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

$$A'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = \frac{-2 + 4\pi r^3}{r^2}$$

Imponemos que $A'(r) = 0$:

$$\text{Si } -2 + 4\pi r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{2}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ dm}$$

$$A'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r \rightarrow A''(r) = \frac{4}{r^3} + 4\pi$$

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = \frac{4}{\frac{1}{2\pi}} + 4\pi = 12\pi > 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ mínimo}$$

$$\text{Si } r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3}{4\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ dm}$$

5 REGLA DE L´ HOPITAL

Vamos a ver un método para el cálculo de límites con ayuda de la derivada.

Regla de L´Höpital

Sean f(x) y g(x) dos funciones derivables en un intervalo (a,b) y tal que g´(x) no se anula en (a,b)

a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ y existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, entonces existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y además:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, entonces existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y además:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty} x e^x=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-4}{2x}=0$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$

Se puede aplicar la regla varias veces hasta que se resuelva la indeterminación.

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3+2x^2}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2+4x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{6x+4}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen} x}=\frac{0}{2}=0$

Observación

1) También se puede aplicar la regla cuando $x \to \pm\infty$

2) Si no existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, no se puede afirmar nada sobre $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ y $g(x) = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\left[2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right] = -\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$, que no existe.

Sin embargo, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$ ya que $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le 1$

5.1. Reducción de la indeterminación $0\cdot\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$ (válido si g no se anula en un entorno de a)

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\frac{2+x}{x}\right) = \infty\cdot 0$

Pasamos a la indeterminación $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2+x}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+x) - \ln x}{\frac{1}{x}}$$

Aplicando L´Höpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+x) - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x(x+2)} = 2$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg} x = 0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 0$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1-x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{(x+1)x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x+1)}=1$$

5.2. Reducción de la indeterminación $0^0, 1^\infty, \infty^0$

Dado un límite del tipo $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, tomamos logaritmo:

$$\ln f(x)^{g(x)} = g(x)\cdot\ln f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\operatorname{sen}x}\ln\cos x=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}}{\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}=e^0=1$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 \rightarrow \lim_{x\to 0} x^x=e^0=1$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen}x}$

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{-x}=-\infty \rightarrow \lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen}x}=e^{-\infty}=0$$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=1^\infty$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\cdot\ln\left(\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \rightarrow \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{2}}$$