

# Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Febrero 2015

---

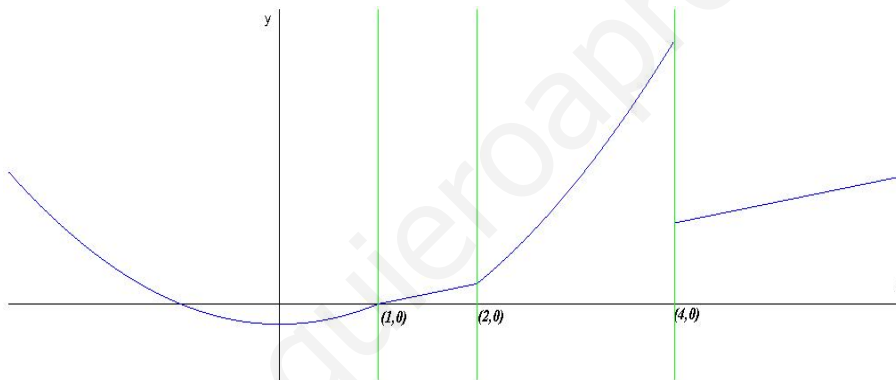
---

**Problema 1** Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } 2 < x < 4 \\ x & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

en los puntos  $x = 1$ ,  $x = 2$  y en  $x = 4$ . Representarla gráficamente.

**Solución:**



En  $x = 1$  es continua, en  $x = 2$  hay una discontinuidad evitable (agujero), y en  $x = 3$  es discontinua no evitable (salto).

**Problema 2** Calcular  $a$  y  $b$  para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3bx^2 - 3ax + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en  $x = 1$ .

**Solución:**

Continuidad en  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3bx^2 - 3ax + 2) = 3b - 3a + 2$$

$$2a - b + 1 = 3b - 3a + 2 \implies 5a - 4b = 1$$

Derivabilidad en  $x = 1$ :

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si } x < 1 \\ 6bx - 3a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \quad f'(1^+) = 6b - 3a \implies 4a - b = 6b - 3a \implies a - b = 0$$

$$\begin{cases} 5a - 4b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

**Problema 3** Dada la función  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$ , determina

1. Calcula sus asíntotas
2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

**Solución:**

1. Asíntotas:

- Verticales: en  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[ \frac{9}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[ \frac{9}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \infty$$

- Oblicuas:  $y = mx + n \implies y = x - 4$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x-1)^2}{x+2} - x \right) = -4$$

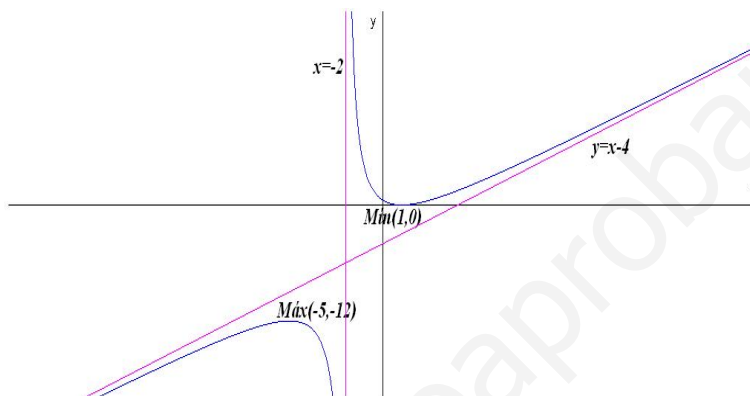
2. Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}, \quad f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2} = 0 \implies x = 1, \quad x = -5$$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo  $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$  y decrece en el intervalo  $(-5, -2) \cup (-2, 1)$

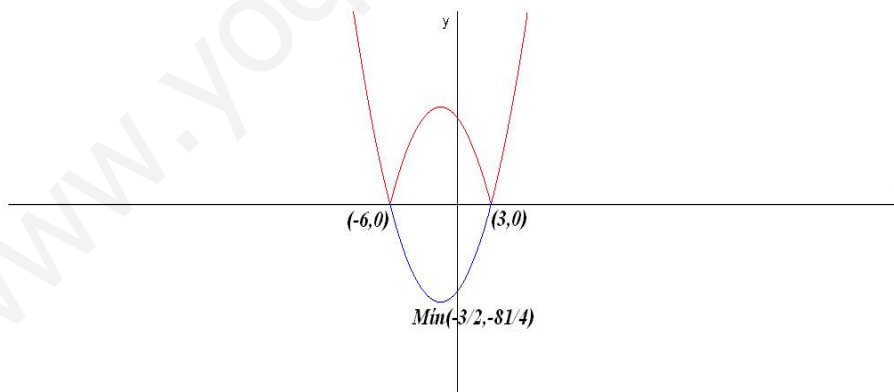
La función tiene un máximo en el punto  $(-5, -12)$  y un mínimo en el punto  $(1, 0)$ .



**Problema 4** Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = |x^2 + 3x - 18|$  y representarla gráficamente.

**Solución:**

Hacemos  $g(x) = x^2 + 3x - 18 \implies g'(x) = 2x + 3 = 0 \implies x = -3/2$ :



$x$	$y$
0	-18
-6	0
3	0
$-3/2$	$-81/4$

$g''(x) = 2 \implies g''\left(-\frac{3}{2}\right) > 0 \implies$  por lo que hay un mínimo en el punto  $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{81}{4}\right)$ . La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto:  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{81}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 18 & \text{si } x \leq -6 \\ -(x^2 + 3x - 18) & \text{si } -6 < x \leq 3 \\ x^2 + 3x - 18 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Continuidad en  $x = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow -6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6^-} (x^2 + 3x - 18) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6^+} (-x^2 - 3x + 18) = 0$$

$$f(-6) = 0$$

Y  $f$  es continua en  $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 - 3x + 18) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + 3x - 18) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq -6 \\ -2x - 3 & \text{si } -6 < x \leq 3 \\ 2x + 3 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en  $x = -6$ :  $f'(-6^-) = -9$  y  $f'(-6^+) = 9$ , luego no es derivable en  $x = -6$ .

Derivabilidad en  $x = 3$ :  $f'(3^-) = -9$  y  $f'(3^+) = 9$ , luego no es derivable en  $x = 3$ .

Resumiendo: La función es continua en  $R$  y derivable en  $R - \{-6, 3\}$ .

**Problema 5** Calcular los números reales  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la función  $f(x) = 2ax^2 - 3bx + c$ , sabiendo que esta función pasa por el punto  $(0, 1)$  y tiene un extremo en el punto  $(2, 4)$ .

**Solución:**

$$f(x) = 2ax^2 - 3bx + c, \quad f'(x) = 4ax - 3b$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \implies c = 1 \\ f(2) = 4 \implies 8a - 6b + c = 4 \\ f'(2) = 0 \implies 8a - 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -3/8 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \implies f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$$