

**Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)**  
**Abril 2012**

---

---

**Problema 1** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

se pide:

1. Estudia su continuidad en los puntos de abscisa  $x = -1$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$ .
2. Representala gráficamente de forma aproximada.

**Solución:**

1. Continuidad en  $x = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x) = 2$$
$$f(-1) = 2$$

En  $x = -1$  la función es continua.

Continuidad en  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3) = -2$$

$$f(1) = \text{no existe}$$

En  $x = 1$  hay una discontinuidad evitable (agujero).

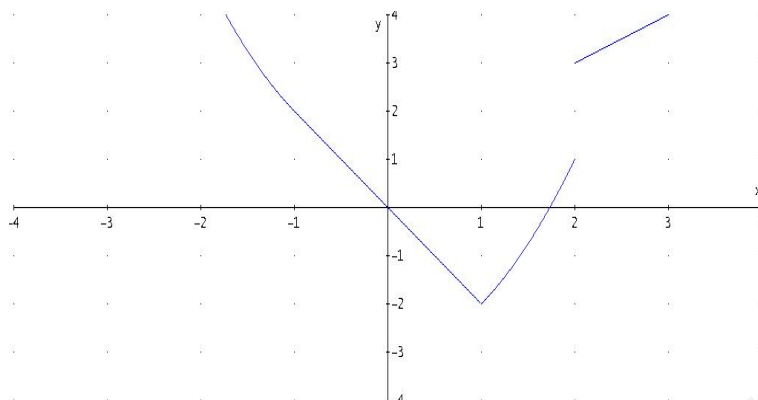
Continuidad en  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3$$

En  $x = 2$  hay una discontinuidad no evitable (salto).

2. Gráficamente:



**Problema 2** Encontrar el valor de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 - 3bx + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable.

**Solución:**

Continuidad en  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 - 3bx + 2) = a - 3b + 2$$

$$2a - b + 1 = a - 3b + 2 \implies a + 2b - 1 = 0$$

Derivabilidad en  $x = 1$ :

$$f(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si } x \leq 1 \\ 2ax - 3b & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(1^-) = 4a - b \\ f'(1^+) = 2a - 3b \end{cases} \implies 4a - b = 2a - 3b \implies a + b = 0$$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

**Problema 3** Calcular los números reales  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , sabiendo que esta función pasa por el punto  $(0, 4)$  y tiene un extremo en el punto  $(1, 5)$ .

**Solución:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \implies c = 4 \\ f(1) = 5 \implies a + b + c = 5 \\ f'(1) = 0 \implies 2a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4$$

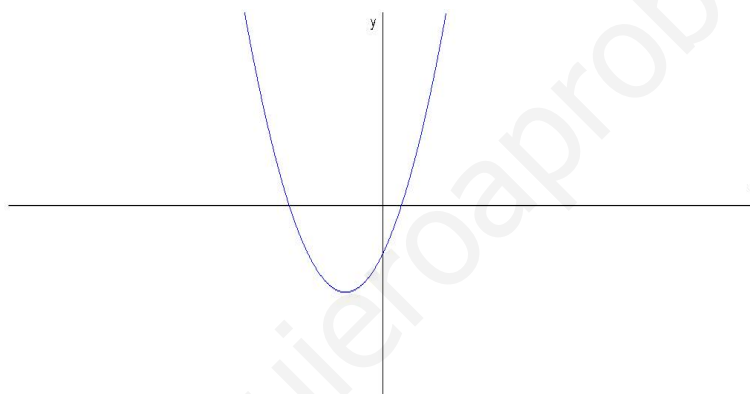
**Problema 4** Analizar gráficamente la continuidad y la derivabilidad de la función  $f(x) = |x^2 + 4x - 5|$

**Solución:**

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + 4x - 5) & \text{si } x^2 + 4x - 5 \leq 0 \\ x^2 + 4x - 5 & \text{si } x^2 + 4x - 5 > 0 \end{cases}$$

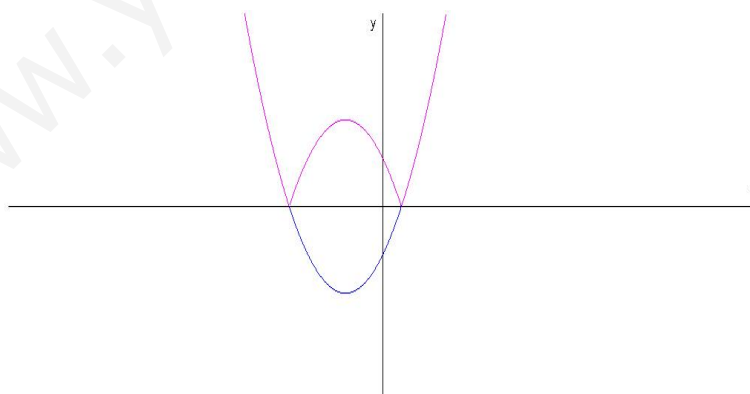
Dibujamos la gráfica de la función auxiliar  $g(x) = x^2 + 4x - 5$ :

Esta función corta a los ejes en los puntos  $(0, -5)$ ,  $(-5, 0)$  y  $(1, 0)$ . Y tiene un mínimo en  $(-2, -9)$



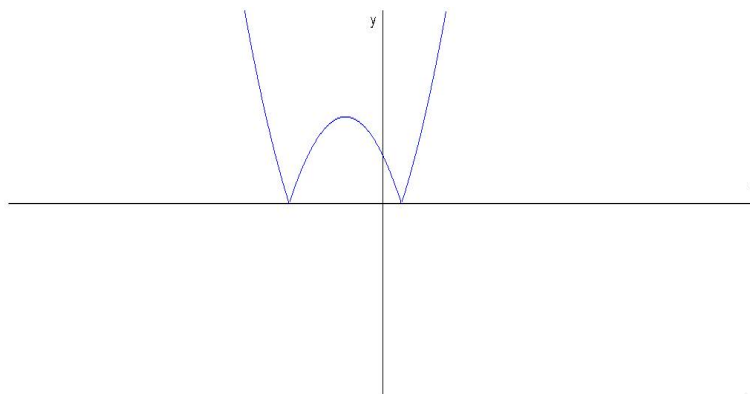
La función  $f(x) = |g(x)|$  convertirá la parte negativa de  $g(x)$  en positiva:

Esta función corta a los ejes en los puntos  $(0, 5)$ ,  $(-5, 0)$  y  $(1, 0)$ . Y tiene



un máximo en  $(-2, 9)$

En conclusión:

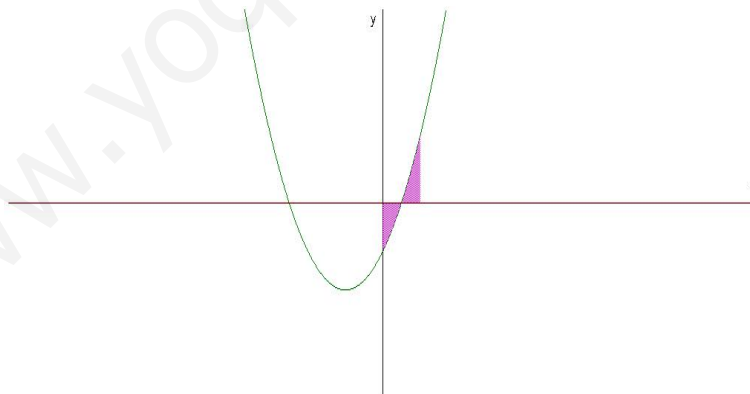


$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq -5 \\ -g(x) & \text{si } -5 < x \leq 1 \\ g(x) & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 4x - 5 & \text{si } x \leq -5 \\ -(x^2 + 4x - 5) & \text{si } -5 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x - 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

A la vista de la gráfica está claro que que la función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y derivable en  $\mathbb{R} - \{-5, 1\}$ . La función no es derivable en  $x = -5$  y en  $x = 1$  porque en ellos podríamos trazar infinitas tangentes (hay picos).

**Problema 5** Calcular el área encerrada por la gráfica de  $f(x) = x^2 + 4x - 5$  el eje  $OX$  y las rectas  $x = 0$  y  $x = 2$

**Solución:**



$$S_1 = \int_0^1 (x^2 + 4x - 5) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_0^1 = -\frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^2 + 4x - 5) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_1^2 = -\frac{10}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{18}{3} = 6 \text{ u}^2$$

[www.yoquieroaprobar.es](http://www.yoquieroaprobar.es)