Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Abril 2010

Problema 1 calcular a y b de manera que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^3 - 3ax^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

- f continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - 2bx + 1) = 3a - 2b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^3 - 3ax^2 + x + 1) = b - 3a + 2$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) \Longrightarrow 3a - 2b + 1 = b - 3a + 2 \Longrightarrow 6a - 3b - 1 = 0$$

- f derivable en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 3bx^2 - 6ax + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 6a - 2b \\ f'(1^+) = 3b - 6a + 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow 6a - 2b = 3b - 6a + 1 \Longrightarrow 12a - 5b - 1 = 0$$

- En conclusión:

$$\begin{cases} 6a - 3b - 1 = 0 \\ 12a - 5b - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1/3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Problema 2 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x}$, determina

1. Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
2. Las asíntotas.
3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
4. Máximos y mínimos relativos.
5. Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Solución:

1. $Dom(f) = R - \{0\}$. Los puntos de corte serán los siguientes:

   Si $x = 0 \Longrightarrow$ no hay y si $f(x) = 0 \Longrightarrow$ $(4, 0)$ y $(-4, 0)$.

2. Asíntotas:

   - Verticales: Las únicas posibles son $x = 0$

     $$\lim_{x \longrightarrow 0^-} x^2 - 16x = \left[\frac{-16}{0^-}\right] = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow 0^+} x^2 - 16x = \left[\frac{-16}{0^+}\right] = -\infty$$

   - Horizontales: No hay

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 16}{x} = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx + n$:

     $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 16}{x^2} = 1$$

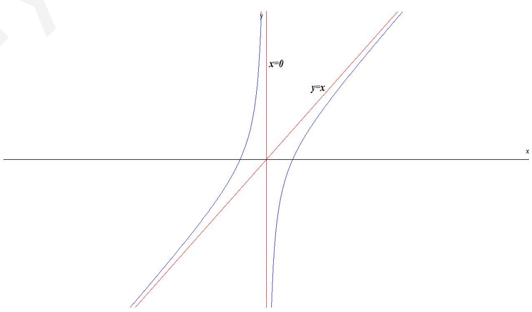
     $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(x^2 - 16x - x\right) = 0$$

     $$y = x$$

3. Monotonía: $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 16)}{x^2} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay ni Máximos ni Mínimos, la función es siempre positiva y por tanto es creciente en todo el dominio de la función.

4. Máximos y mínimos relativos: No hay

5. Representación gráfica:



Problema 3 Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = 2x + 3$.

Solución:

- Calculamos los puntos de corte de ambas funciones:

  $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2+3x+1 = 2x+3 \Longrightarrow x^2+x-2 = 0 \Longrightarrow x = -2, \;\; x = 1$

  Los límites de integración serán los extremos del intevalo $[-2, 1]$.

- Calculamos la integral indefinida de $f(x) - g(x)$:

$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 + x - 2)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$

- Calculamos:

$$S = \int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\, dx = H(1) - H(-2) = -\frac{9}{2}$$

- El área será:

$$\acute{A}rea = |S| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\ u^2$$