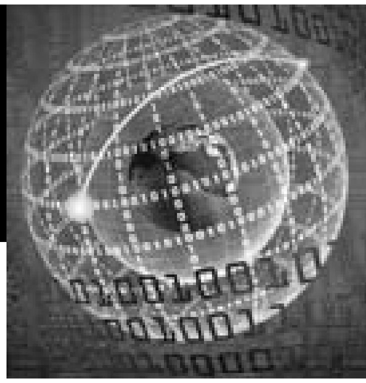
# 2 Matrices



## 1. Tipos de matrices

### Piensa y calcula

Escribe en forma de tabla el siguiente enunciado: «Una familia gasta en enero 400 € en comida y 150 € en vestir; en febrero, 500 € en comida y 100 € en vestir; y en marzo, 300 € en comida y 200 € en vestir».

**Solución:**

| | Enero | Febrero | Marzo |
|---|---|---|---|
| **Comida** | 400 | 500 | 300 |
| **Vestir** | 150 | 100 | 200 |



### Aplica la teoría

**1.** Escribe una matriz fila de dimensión $1 \times 4$

**Solución:**

$$A = (1, -5, 0, 7)$$

**2.** Escribe una matriz columna de dimensión $2 \times 1$

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

**3.** Escribe una matriz cuadrada de orden 3, y marca la diagonal principal.

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 6 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

**4.** Completa la siguiente matriz para que sea simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \ldots & 4 & -5 \\ \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

**5.** Halla el valor de a, b, c, d, e y f para que la siguiente matriz sea antisimétrica o hemisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & d & e \\ 0 & -7 & f \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$a = d = f = 0$,

$b = -5, c = 0, e = 7$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

**6.** Escribe una matriz nula de dimensión $2 \times 3$

**Solución:**

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**7.** Escribe una matriz diagonal de orden 2

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

**8.** Escribe una matriz escalar de orden 3 en la que el elemento $a_{22} = -6$

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

**9.** Escribe una matriz unidad de orden 3

**Solución:**

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**10.** Escribe una matriz triangular superior de orden 2 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$A^t$ es una matriz triangular inferior.

**11.** Escribe una matriz triangular inferior de orden 3 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$A^t$ es una matriz triangular superior.

**12.** Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 4x - 7y - z = 9 \end{cases}$$

a) escribe la matriz C de los coeficientes de las incógnitas. ¿De qué dimensión es?

b) escribe una matriz columna X con las incógnitas. ¿De qué dimensión es?

c) escribe una matriz columna B con los términos independientes. ¿De qué dimensión es?

**Solución:**

a) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ es de dimensión $2 \times 3$

b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es de dimensión $3 \times 1$

c) $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ es de dimensión $2 \times 1$



## 2. Operaciones con matrices

### Piensa y calcula

Halla mentalmente el producto escalar de los siguientes vectores: a) $(3, 4)\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; b) $(2, -3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Solución:**

a) $15 + 24 = 39$

b) $6 - 6 = 0$

### Aplica la teoría

**13.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) A + B   b) A – B   c) 5A   d) 2A – 3B

**Solución:**

a) $A + B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

c) $5A = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$

d) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 23 & -30 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$

**14.** Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y de los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar:

a) A · B   b) B · A

**Solución:**

a) $A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 26 & 8 \end{pmatrix}$$

b) $B_{3\times 2} \cdot A_{2\times 3}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$B_{3\times 2} \cdot A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -7 & -13 & 12 \\ 9 & 1 & -4 \\ -25 & -15 & 20 \end{pmatrix}$$

**15.** Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$. Del resultado obtenido, ¿qué propiedad muy elemental se ha probado que no se verifica?

**Solución:**

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -4 & 47 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 27 & 19 \end{pmatrix}$

No se verifica la propiedad conmutativa del producto.

**16.** Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz B tal que $A \cdot B = O_{2\times 2}$, con la condición de que B no sea la matriz nula de dimensión $2 \times 2$

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ 2b + 4d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -2c \\ b = -2d \end{array}\right\} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

La condición que se debe verificar es que la 1ª fila sea el doble de la 2ª cambiada de signo.

Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

# 3. Potencia de matrices y resolución de sistemas de matrices

## Piensa y calcula

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^2$. ¿Qué matriz se obtiene?

**Solución:**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

Se obtiene la matriz identidad de orden 2

## Aplica la teoría

**17.** Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $A^2$ y $A^3$

**Solución:**

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

**18.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^{183}$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= I_{3\times 3}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, I

$$A^{183} = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**19.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^k$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**20.** Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

calcula $A^{250}$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2 \times 2}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, I

$$A^{250} = I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**21.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^n$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

**22.** Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ -9 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

# 4. Aplicaciones de las matrices a la resolución de problemas

## Piensa y calcula

Una empresa de electrodomésticos tiene tres fábricas: una en Madrid, otra en Málaga y otra en Vigo. La producción semanal viene dada por la siguiente matriz:

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Frigoríficos} \\ \text{Lavadoras} \\ \text{Lavaplatos} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Madrid} & \text{Málaga} & \text{Vigo} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 140 & 130 \\ 175 & 155 & 125 \\ 160 & 140 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Interpreta el elemento $a_{12}$ de la matriz **A**
b) Interpreta el elemento $a_{21}$ de la matriz **A**
c) Interpreta el elemento $a_{33}$ de la matriz **A**

**Solución:**

a) El elemento $a_{12}$, que es 140, indica el número de frigoríficos que se fabrican en Málaga.
b) El elemento $a_{21}$, que es 175, indica el número de lavadoras que se fabrican en Madrid.
c) El elemento $a_{33}$, que es 100, indica el número de lavaplatos que se fabrican en Vigo.

## Aplica la teoría

**23.** Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz A. La evolución de los precios de los años 2000 al 2003 viene reflejada en la matriz B, expresada en céntimos de euro.

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{pan} & \text{agua} & \text{leche} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{pan} \\ \text{agua} \\ \text{leche} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2000 & 2001 & 2002 & 2003 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Halla, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indica qué información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento $c_{34}$ de la matriz producto?

**Solución:**

a)
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 106\,150 & 111\,300 & 113\,250 & 122\,750 \\ 108\,580 & 113\,940 & 115\,800 & 125\,450 \\ 73\,000 & 76\,200 & 78\,000 & 84\,500 \end{pmatrix}$$

Cada valor del producto proporciona los gastos de cada familia en pan, agua y leche en cada uno de los años 2000, 2001, 2002, 2003

El producto $B_{3 \times 4} \cdot A_{3 \times 3}$ no se puede realizar porque el número de columnas de B no coincide con el de filas de A

b) El elemento $c_{34}$ de la matriz producto es el consumo de la familia 3, $F_3$, durante el año 2003, que son 845 €, ya que todos los valores están en céntimos de euro.

**24.** Un constructor puede adquirir ladrillos, tejas, madera y cemento de tres proveedores: P, Q y R. Los precios de cada proveedor por paquete de materiales vienen dados en miles de euros por la matriz:

$$\begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & T & M & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 8 \\ 7 & 14 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

El constructor tiene que comenzar tres obras. Necesita:

a) Primera obra: 24 paquetes de ladrillo, 5 de tejas, 12 de madera y 18 de cemento.

b) Segunda obra: 20 paquetes de ladrillo, 7 de tejas, 15 de madera y 20 de cemento.

c) Tercera obra: 20 paquetes de ladrillo, 4 de tejas, 15 de madera y 15 de cemento.

El constructor quiere adquirir todos los materiales de cada obra al mismo proveedor. ¿Qué proveedor es el más económico para cada obra?

**Solución:**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 8 \\ 7 & 14 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & 20 & 20 \\ 5 & 7 & 4 \\ 12 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 437 & 461 & 392 \\ 432 & 469 & 393 \\ 436 & 468 & 391 \end{pmatrix}$$

Debe elegir:

Para la primera obra, el proveedor Q

Para la segunda obra, el proveedor P

Para la tercera obra, el proveedor R

## Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

**1** En una matriz hemisimétrica o antisimétrica, los elementos de la diagonal principal:

- ☐ son todos unos.
- ☐ pueden ser cualesquiera.
- ☐ son unos cero y otros uno.
- ☒ son todos cero.

**2** Para poder multiplicar dos matrices:

- ☐ la primera ha de tener tantas filas como columnas la segunda.
- ☒ la primera ha de tener tantas columnas como filas la segunda.
- ☐ tienen que ser cuadradas.
- ☐ dos matrices se pueden multiplicar siempre.

**3** Sean A y B matrices tales que se pueda multiplicar $A \cdot B$ y $B \cdot A$

- ☒ Unas veces $A \cdot B = B \cdot A$ y otras $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ☐ Siempre $A \cdot B = B \cdot A$
- ☐ Siempre $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ☐ No es cierta ninguna de las anteriores.

**4** Sean A y B matrices tales que $A \cdot B = O$, siendo O la matriz nula.

- ☐ Siempre $A = B = O$
- ☐ Al menos una de las dos $A = O$, o bien $B = O$
- ☒ Puede ser $A \neq O$ y $B \neq O$
- ☐ No es cierta ninguna de las anteriores.

**5** Sean A, B y C matrices tal que $A \cdot B = A \cdot C$

- ☐ Siempre $B = C$
- ☒ Unas veces $B = C$, y otras, $B \neq C$
- ☐ Nunca $B = C$
- ☐ No es cierta ninguna de las anteriores.

**6** Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Calcula $A^2$

- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**7** Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Calcula $A^3$

- ☐ $\begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -1 & -17 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -29 & 17 \\ 1 & -23 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**8** Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Halla los números reales $\alpha$ y $\beta$ para los que se verifica $(I + A)^3 = \alpha \cdot I + \beta \cdot A$

- ☐ $\alpha = 2, \beta = -2$
- ☐ $\alpha = 0, \beta = 0$
- ☐ $\alpha = 3, \beta = 5$
- ☒ $\alpha = -2, \beta = 2$

**9** Halla todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

- ☒ $a = 0, b = 0; a = 0, b = 1; a = 1, b = 0$
- ☐ $a = 1, b = 1$
- ☐ $a = -1, b = -1; a = 1, b = 2$
- ☐ $a = 3, b = 5$

**10** Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula $M = A + A^2 + \ldots + A^{10}$

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

# Ejercicios y problemas

## 1. Tipos de matrices

**25.** Escribe una matriz fila de dimensión $1 \times 3$

**Solución:**

$$A = (2 \quad -8 \quad -9)$$

**26.** Escribe una matriz columna de dimensión $3 \times 1$

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**27.** Escribe una matriz cuadrada de orden 2 y marca la diagonal principal.

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**28.** Halla el valor de **a, b, c** para que la siguiente matriz sea simétrica:

$$\begin{pmatrix} 3 & a & b \\ -2 & -7 & c \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$a = -2, b = 0, c = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**29.** Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica o hemisimétrica:

$$\begin{pmatrix} \dots & 5 & -1 \\ \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**30.** Escribe una matriz nula de dimensión $3 \times 2$

**Solución:**

$$O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**31.** Escribe una matriz diagonal de orden 3

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

**32.** Escribe una matriz escalar de orden 2 en la que el elemento $a_{11} = 5$

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**33.** Escribe una matriz unidad de orden 4

**Solución:**

$$I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**34.** Escribe una matriz triangular superior de orden 3 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$A^t$ es una matriz triangular inferior.

**35.** Escribe una matriz triangular inferior de orden 2 y su traspuesta. ¿Cómo es la traspuesta?

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$A^t$ es una matriz triangular superior.

**36.** Dado el sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 7y + 6z &= 8 \\ z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

a) escribe la matriz C de los coeficientes de las incógnitas. ¿De qué dimensión es? ¿De qué tipo es?

b) escribe una matriz columna X con las incógnitas. ¿De qué dimensión es?

c) escribe una matriz columna B con los términos independientes. ¿De qué dimensión es?

**Solución:**

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es de dimensión $3 \times 3$

Es una matriz triangular superior.

b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es de dimensión $3 \times 1$

c) $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ es de dimensión $3 \times 1$

## 2. Operaciones con matrices

**37.** Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) A + B b) A – B c) – 3A d) – 5A + 2B

**Solución:**

a) $A + B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A - B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

c) $-3A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 0 & -3 \\ 3 & -15 \end{pmatrix}$ d) $-5A + 2B = \begin{pmatrix} -22 & 15 \\ -2 & 3 \\ 9 & -31 \end{pmatrix}$

**38.** Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla la matriz opuesta –A y comprueba que –A + A es la matriz nula de dimensión 2 × 2

**Solución:**

$-A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$-A + A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**39.** Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y respecto a los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar:

a) A · B b) B · A

**Solución:**

a) $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -9 & 6 & -7 \\ -30 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

b) $B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 2}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ -12 & 14 \end{pmatrix}$

**40.** Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula A · C y B · C. Del resultado obtenido ¿qué propiedad muy elemental se ha probado que no se verifica?

**Solución:**

$A \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}$ $B \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}$

El producto de matrices no es simplificable:

Si A · C = B · C, no se deduce que A = B

**41.** Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz B, tal que $B \cdot A = O_{2\times 2}$, con la condición de que B no sea la matriz nula de dimensión 2 × 2

**Solución:**

Hay muchas soluciones, por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La condición que se debe verificar es que la 1ª columna sea el doble de la 2ª

## 3. Potencias de matrices y resolución de sistemas de matrices

**42.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^2$

**Solución:**

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

**43.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^{83}$

**Solución:**

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, I

$$A^{83} = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**44.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

calcula $A^n$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

**45.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula $A^{2\,004}$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3\times 3}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, I

$$A^{2\,004} = I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**46.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^k$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**47.** Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 13 \\ 11 & -14 \end{pmatrix} \qquad A - 3B = \begin{pmatrix} -18 & 8 \\ -5 & -25 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

## 4. Aplicaciones de las matrices a la resolución de problemas

**48.** En un centro escolar, el 80% de los alumnos de 4° de ESO pasan a Bachillerato, el 70% de los alumnos de 1° de Bachillerato pasa a 2°, el 65% de los alumnos de 2° aprueban el curso. Repiten curso el 20% de los alumnos de 1° y el 30% de los alumnos de 2°. En este centro no se admiten alumnos nuevos para Bachillerato y todos los que aprueban el curso pasan al curso siguiente.

a) Escribe la matriz de dimensión $3 \times 3$ que muestra la evolución entre cursos.

b) En un cierto curso había 150 alumnos en 4° de ESO, 110 alumnos en 1° de Bachillerato y 100 alumnos en 2° de bachillerato. ¿Cuál será la distribución de alumnos en el curso siguiente?

**Solución:**

a) $$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}65 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 150 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142 \\ 107 \\ 65 \end{pmatrix}$$

**49.** Un industrial produce dos tipos de tornillos: planos (P) y de estrella (E). De cada tipo hace tres modelos: A, B y C. La siguiente matriz da la producción semanal de tornillos:

$$\begin{array}{c} \\ P \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2\,000 & 2\,500 & 3\,000 \\ 2\,500 & 3\,500 & 4\,000 \end{pmatrix} \end{array}$$

El porcentaje de tornillos defectuosos del tipo A es de un 5%, del tipo B es de un 4% y del tipo C es de un 2%. Calcula el número de tornillos planos y de estrella que no sean defectuosos.

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} 2\,000 & 2\,500 & 3\,000 \\ 2\,500 & 3\,500 & 4\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}96 \\ 0{,}98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,240 \\ 9\,655 \end{pmatrix}$$

Tornillos planos no defectuosos: 7 240

Tornillos de estrella no defectuosos: 9 655

## Para ampliar

**50.** Sean los vectores del plano $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}(3, 2)$ y $\mathbf{v}(-2, 5)$. Halla la matriz correspondiente. ¿De qué dimensión es?

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es de dimensión $2 \times 2$

**51.** Sean los vectores del espacio $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(1, 2, 3)$, $\mathbf{v}(5, -2, 0)$ y $\mathbf{w}(-7, 9, 4)$. Halla la matriz correspondiente. ¿De qué dimensión es?

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ -7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Es de dimensión $3 \times 3$

**52.** Sean las matrices:

$$A = (2 \quad 3 \quad -5) \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y respecto de los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

**Solución:**

a) $A_{1 \times 3} \cdot B_{3 \times 1}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$A_{1 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = (-30)$$

b) $B_{3 \times 1} \cdot A_{1 \times 3}$

Se pueden multiplicar porque el número de columnas de la 1ª coincide con el número de filas de la 2ª

$$B_{3 \times 1} \cdot A_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -20 \\ -2 & -3 & 5 \\ 14 & 21 & -35 \end{pmatrix}$$

**53.** Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

**Solución:**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -23 & 1 \\ -3 & 13 \end{pmatrix} \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

**54.** Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Expresa $M^3$ como combinación lineal de M e I

**Solución:**

$M^2 - 2M = 3I$

$M^2 = 3I + 2M$

$M^3 = (3I + 2M)M$

$M^3 = 3M + 2M^2$

$M^3 = 3M + 2(3I + 2M)$

$M^3 = 3M + 6I + 4M$

$M^3 = 6I + 7M$

**55.** Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas (esto es, de dimensión $3 \times 4$) y C una matriz $2 \times 3$. ¿Cuántas filas y columnas tiene B sabiendo que existe la matriz $A \cdot B \cdot C$?, ¿qué dimensión tiene $A \cdot B \cdot C$?

**Solución:**

$A_{3 \times 4} \cdot B_{n \times p} \cdot C_{2 \times 3}$

B ha de tener tantas filas como columnas tenga A, y el mismo número de columnas que filas tenga C; por tanto, n = 4 filas y p = 2 columnas.

El resultado $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2} \cdot C_{2 \times 3}$ tiene tantas filas como A y tantas columnas como C; luego es de dimensión $3 \times 3$

**56.** Sea D una matriz tal que al multiplicarla por su traspuesta da una matriz de dimensión $1 \times 1$ y el producto de la traspuesta de D por D es $3 \times 3$. ¿Cuántas filas y columnas tiene D?

**Solución:**

$D_{n \times p} \cdot D^t_{p \times n} = M_{n \times n}$ Como el resultado es de dimensión $1 \times 1$, n = 1

$D^t_{p \times n} \cdot D_{n \times p} = N_{p \times p}$ Como el resultado es de dimensión $3 \times 3$, p = 3

D tiene una fila y tres columnas.

**57.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $A^k$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

**58.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcula $A^k$

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene: $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$

**59.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^k$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k/7 & 1 & 0 \\ k/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**60.** Una empresa produce tres tipos de artículos, A, B y C. Los precios de coste por unidad son 30 €, 46 € y 75 €, respectivamente. Los correspondientes precios de venta de una unidad de cada artículo son 50 €, 80 € y 150 €, respectivamente. El número de unidades vendidas anualmente es de 2 000, 1 500 y 800, respectivamente.

Halla:

a) la matriz fila de costes por unidad.
b) la matriz fila de ventas por unidad.
c) la matriz fila de beneficios por unidad.
d) la matriz columna de unidades vendidas.
e) el beneficio obtenido.

**Solución:**

a) $C = \begin{pmatrix} 30 & 46 & 75 \end{pmatrix}$
b) $V = \begin{pmatrix} 50 & 80 & 150 \end{pmatrix}$
c) $B = V - C = \begin{pmatrix} 20 & 34 & 75 \end{pmatrix}$
d) $U = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,500 \\ 800 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 20 & 34 & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,500 \\ 800 \end{pmatrix} = (151\,000)$

El beneficio obtenido es de 151 000 €

**61.** Una fábrica produce tres tipos de productos, A, B y C, que distribuye a cuatro clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente, 3 unidades de A, 8 de B y ninguna de C; el tercer cliente no compró nada y el cuarto cliente compró 6 de A, 7 de B y 1 de C.

En el mes de febrero, el primer cliente y el segundo duplicaron el número de unidades que habían comprado en enero; el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo, y el cuarto cliente no hizo pedido alguno.

a) Construye la matriz correspondiente a las ventas de enero.
b) Construye la matriz correspondiente a las ventas de febrero.
c) Halla la matriz correspondiente a las ventas de enero y febrero.
d) Si los precios de los artículos son 100 €, 80 € y 90 €, respectivamente, calcula lo que factura la fábrica por sus pedidos en los meses de enero y febrero.

**Solución:**

a) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,440 \\ 2\,820 \\ 1\,080 \\ 1\,250 \end{pmatrix}$

## Problemas

**62.** Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz $(A - 2I)^2$

**Solución:**

$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

**63.** Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula $A^tA$ y $AA^t$, donde $A^t$ denota la matriz traspuesta de A

**Solución:**

$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

**64.** Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (t indica traspuesta)

**Solución:**

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

**65.** Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^k$

**Solución:**

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

**66.** Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

calcula $A^k$

**Solución:**

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 3^2 & 3^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 \end{pmatrix}$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}$$

**67.** Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

calcula $A^k$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

**68.** Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y sea I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3, comprueba que:

$$A^2 - A - 2I = O$$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^2 - A - 2I = 0$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**69.** Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula $A^{86}$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A es cíclica de orden 3

$$\begin{array}{r|l} 86 & 3 \\ \hline 26 & 28 \\ \mathbf{2} & \end{array}$$

$$A^{86} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**70.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

halla $A^{200}$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

A es una matriz cíclica de orden 2; por tanto, las potencias impares dan A, y las pares, $I_{2\times 2}$

Por tanto: $A^{200} = A^2 = I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**71.** En un centro se imparten los cursos 1°, 2° y 3° de ciertas enseñanzas. Los profesores tienen asignado semanalmente un número de horas de clase, tutorías y guardias que deben cubrir de acuerdo con la siguiente matriz:

$$M = \begin{array}{c} \\ 1° \\ 2° \\ 3° \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{clase} & \text{guardias} & \text{tutorías} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

El centro paga cada hora de clase a 12 €, cada hora de guardia a 3 € y cada hora de tutoría a 6 €, según el vector:

$$C = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El centro dispone de 5 profesores para primer curso, 4 para segundo y 6 para tercero, representados por el vector:

$$P = (5 \quad 4 \quad 6)$$

Calcula cada uno de los siguientes productos de matrices e interpreta los resultados.

a) PM  b) MC  c) PMC

**Solución:**

a) $PM = (5 \quad 4 \quad 6)\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (304 \quad 55 \quad 47)$

Son el número de horas totales de clase, guardias y tutorías.

b) $MC = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 273 \\ 264 \\ 279 \end{pmatrix}$

Es lo que le cuesta al colegio la enseñanza de cada uno de los cursos.

c) $PMC = (5 \quad 4 \quad 6)\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 4\,095$

Es lo que le cuesta en total la enseñanza al colegio.

**72.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula: $A^2 - 4A + 4I_3$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3 \times 3}$$

**73.** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

Se multiplica la 1ª ecuación por 2 y se le resta la 2ª; se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

Se sustituye el valor obtenido de A en la 1ª ecuación y se despeja B; se obtiene:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

**74.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcula $3AA^t - 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2

**Solución:**

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3AA^t = 3\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3AA^t - 2I = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

**75.** Una fábrica produce dos modelos de acumuladores de calor, G y P, en tres terminaciones: normal, lujo y especial. Del modelo G, produce 500 unidades normales, 300 unidades de lujo y 200 especiales. Del modelo P, produce 400 unidades normales, 200 unidades de lujo y 100 especiales. La terminación normal necesita 20 horas de fabricación de piezas y 1,5 horas de montaje. La terminación de lujo necesita 25 horas de fabricación y 2 horas de montaje, y la terminación especial necesita 30 horas de fabricación y 2,5 horas de montaje.

a) Representa en dos matrices la información dada.

b) Escribe una matriz que exprese las horas de fabricación y de montaje empleadas para cada uno de los modelos.

c) Si cada hora de fabricación se paga a 15 € y cada hora de montaje a 18 €, escribe una matriz que exprese el coste total de los acumuladores G y P

**Solución:**

a)
$$\begin{array}{c} \\ G \\ P \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Normal} & \text{Lujo} & \text{Especial} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 400 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ \text{Normal} \\ \text{Lujo} \\ \text{Especial} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Fabricación} & \text{Montaje} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 1{,}5 \\ 25 & 2 \\ 30 & 2{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 400 & 200 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 & 1{,}5 \\ 25 & 2 \\ 30 & 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23\,500 & 1\,850 \\ 16\,000 & 1\,250 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 23\,500 & 1\,850 \\ 16\,000 & 1\,250 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 385\,800 \\ 262\,500 \end{pmatrix}$$

**76.** Una fábrica de muebles hace mesas (M), sillas (S), y armarios (A), y cada uno de ellos en tres modelos: económico (E), normal (N) y lujo (L). Cada mes produce de mesas, 50 E, 40 N y 30 L; de sillas, 200 E, 150 N y 100 L; de armarios, 40 E, 30 N y 20 L.

a) Representa esta información en una matriz.

b) Calcula la matriz que da la producción de un año.

**Solución:**

a)
$$\begin{array}{l} \\ \text{Mesas} \\ \text{Sillas} \\ \text{Armarios} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & N & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 200 & 150 & 100 \\ 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)
$$12\begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 200 & 150 & 100 \\ 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 480 & 360 \\ 2\,400 & 1\,800 & 1\,200 \\ 480 & 360 & 240 \end{pmatrix}$$

## Para profundizar

**77.** Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz B tal que $A + B = AA^T$

**Solución:**

$A + B = AA^T$

$B = AA^T - A$

$B = A(A^T - I)$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**78.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^k$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

Si k es par: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si k es impar: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**79.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula $A^k$

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^3 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

Si k es par: $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$

Si k es impar: $A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^k \\ 0 & 2^k & 0 \\ 2^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**80.** Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Siendo I la matriz identidad $3 \times 3$ y O la matriz nula $3 \times 3$, prueba que $A^3 + I = O$

b) Calcula $A^{10}$

**Solución:**

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3 \times 3}$$

b) Si $A^3 + I_{3 \times 3} = O \Rightarrow A^3 = -I_{3 \times 3} \Rightarrow A^6 = I_{3 \times 3}$

A es cíclica de período 6

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \hline \mathbf{4} & 1 \end{array}$$

$$A^{10} = A^4 = A^3 \cdot A = -I_{3\times 3} \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

**81.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

halla el valor de **a** para que se cumpla la igualdad:

$$A^2 + 2A + I = O$$

siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3

**Solución:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

**82.** Resuelve el sistema matricial:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

Se multiplica la 1ª ecuación por 2, la 2ª por –3 y se suman. Se obtiene:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se sustituye el valor obtenido de X en la 1ª ecuación y se despeja Y. Se obtiene:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

## Paso a paso

**83.** Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

halla:

$$A + B;\ A - B;\ 2A - 3B;\ A \cdot B^t$$

**Solución:**
Resuelto en el libro del alumnado.

**84.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula $A^2$, $A^3$, $A^{257}$

**Solución:**
Resuelto en el libro del alumnado.

**85.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^k$

**Solución:**
Resuelto en el libro del alumnado.

**86.** **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**



## Practica

**87.** Calcula A · B, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

Ejercicio 87

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 6 & 9 \\ 35 & 12 & 19 \\ 57 & 18 & 29 \\ 79 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

**88.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

calcula A · B, B · A y comprueba que el producto de matrices no es conmutativo.

**Solución:**

Ejercicio 88

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$; por tanto, el producto de matrices no es conmutativo.

**89.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

comprueba que $A \cdot B = A \cdot C$ y, sin embargo, $B \neq C$

**Solución:**

Ejercicio 89

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

$A \cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = A \cdot C$ y, sin embargo, $B \neq C$

**90.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

comprueba que $A \cdot B = O_{2 \times 2}$ y, sin embargo, $A \neq O_{2 \times 2}$ y $B \neq O_{2 \times 2}$

**Solución:**

Ejercicio 90

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A \neq O_{2 \times 2}$ y $B \neq O_{2 \times 2}$

**91.** Calcula $A^k$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

Ejercicio 91

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por recurrencia :

$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**92.** Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A + B$  b) $A - B$
c) $2A - 3B$  d) $A^t \cdot B$

**Solución:**

Ejercicio 92

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$A + B \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A - B \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

$2A - 3B \rightarrow \begin{pmatrix} 23 & -30 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$

$A^T \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} -23 & 8 \\ 1 & -24 \end{pmatrix}$

**93.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula: $A^2$, $A^3$, $A^4$ y $A^{183}$

**Solución:**

Ejercicio 93

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{183} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**94.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula:

$$A^2 - 4A + 4I$$

**Solución:**

Ejercicio 94

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**95.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^n$

**Solución:**

Ejercicio 95

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$