GLOBAL ÁLGEBRA Febrero 2010

1. Sean A, B, C y X matrices cualesquiera que verifican AXB=C
   a. Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es –1 y el C es 6, calcula el determinante de las matrices X y 2X. (1 punto)
   b. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ calcula la matriz X. (1,5 p)

2. a. Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (1 punto)

   b. Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1\\ y+z=-2\\ x+z=3\end{array}\right\}$$ (1,5 puntos)

3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a-1\\ 2x+y+az=a\\ x+ay+z=1\end{array}\right\}$$

   a. Discútelo según los valores del parámetro a. (1,5 puntos)
   b. Resuélvelo en el caso a = 2. (1 punto)

4. Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0\\ (a+1)y+2z=y\\ x-2y+(2-a)z=2z\end{array}\right\}$$ (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

1. Sean A, B, C y X matrices cualesquiera que verifican AXB=C
   a. Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el C es 6, calcula el determinante de las matrices X y 2X.

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow |X| = \left|A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}\right| = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{-1} = -2$$

$$|2X| = 2^3 \cdot |X| = -16$$

   b. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X.

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1};\ |A| = -2;\quad |B| = -3 + 4 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};\quad B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

2. a. Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1 + 1 = 2$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b. Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{2}{2}-\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}-\frac{2}{2}+\frac{3}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=0 \end{cases}$$

3. a. Discútelo según los valores del parámetro a

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}; \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=-a^2+3a-2 \rightarrow -a^2+3a-2=0 \rightarrow a=\left\langle \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}\right.$$

Para a = 1, r(A) = 2, $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \neq 0$; r(A*) = 3

El sistema es INCOMPATIBLE

Para a = 2, r(A) = 2, $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, r(A*) = 2

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO

Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$, r(A) = 3, r(A*) = 3 sistema COMP. DETERMINADO

b. Resuélvelo en el caso a = 2 (COMPATIBLE INDETERMINADO)

Para a = 2, r(A) = 2, r(A*) = 2 con $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que nos quedamos con las dos primeras ecuaciones, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y=1-z \\ 2x+y=2-2z \end{array}\right\} \rightarrow x=1-z; \quad 1-z+y=1-z \rightarrow SOL \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

4. Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ (a+1)y+2z=y \\ x-2y+(2-a)z=2z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ ay+2z=0 \\ x-2y-az=0 \end{array}\right\} \to A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}$$

Sistema homogéneo, luego r(A) = r(A*) siempre, estudiemos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to r(A) \geq 2;\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = 0 \to a = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array} \right.$$

Para $a=2 \to r(A)=2$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+z=-y \\ 2z=-2y \end{array}\right\} \to z=-y;\ x=0 \to \text{Solución: } \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$$

Para $a=-3 \to r(A)=2$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ -3y+2z=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+z=-y \\ 2z=-3y \end{array}\right\} \to z=-\frac{3}{2}y;\ x=-y-\frac{3}{2}y=-\frac{5}{2}y \to \text{Solución: } \begin{cases} x=-\frac{5}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

Para $a \neq 2$ y $a \neq -3 \to r(A)=3$, sistema Compatible determinado, sólo tiene la solución trivial (0,0,0)