

NOMBRE: _____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz, y el bolígrafo debe ser de tinta indeleble. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto o la anulación en caso de usar tinta corregible.

EN LA PREGUNTA 4 HAY QUE OBTENER, AL MENOS 1,8 PUNTOS. EN CASO CONTRARIO, LA CALIFICACIÓN MÁXIMA ES DE 4,4

1) Calcular los siguientes límites: (2 puntos)

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x - 1}}{1 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x - 1}}{1 - x}$

2) Calcular las asíntotas de $f(x) = \frac{-2x^3 - 3x}{1 - x^2}$ (2,5 puntos)

3) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{3x^2-3}{x(x-1)} & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

4) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: (2,5 puntos)

a) $f(x) = \frac{2(3x+1)^2}{3x-1}$

b) $g(x) = (x^2 - x + 1) e^{5x}$

c) $h(x) = 3 \sqrt[3]{2(5x^2 - 1)^2}$

d) $j(x) = \ln \left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}} \right)$

SOLUCIONES

1) Calcular los siguientes límites: (2 puntos)

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x} - 1}{1 - x}$

Cuando se obtiene indeterminación ∞/∞ y tenemos polinomios o raíces o potencias de polinomios, podemos sustituir tales expresiones por sólo su término de mayor grado, tanto en numerador como en denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x} - 1}{1 - x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-2) = \boxed{-2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x} - 1}{1 - x}$

Al obtener $0/0$ y aparecer raíces dentro de restas, multiplicamos y dividimos por los conjugados de dichas restas, para obtener polinomios que podamos factorizar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x} - 1}{1 - x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x} - 1}{1 - x} \cdot \frac{\sqrt{4x^2 - 3x} + 1}{\sqrt{4x^2 - 3x} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 3x - 1}{(1 - x)(\sqrt{4x^2 - 3x} + 1)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \end{aligned}$$

Factorizamos, por Ruffini los polinomios $4x^2 - 3x - 1$ y $-x + 1$:

1	4	-3	-1
	4	1	0

1	-1	1
	-1	0

Por tanto, el límite es:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x + 1)(x - 1)}{-(x - 1)(\sqrt{4x^2 - 3x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x + 1}{-(\sqrt{4x^2 - 3x} + 1)} = \frac{5}{-(1 + 1)} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

2) Calcular las asíntotas de $f(x) = \frac{-2x^3 - 3x}{1 - x^2}$ (2,5 puntos)

En primer lugar, su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, porque estos valores que quitamos son los que anulan el denominador.

• Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x^3 - 3x}{1 - x^2} = \left(\frac{2 + 3}{0} \right) = \infty \Rightarrow \text{la recta } \boxed{x = -1 \text{ es asíntota vertical.}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^3 - 3x}{1 - x^2} = \left(\frac{-2 - 3}{0} \right) = \infty \Rightarrow \text{la recta } \boxed{x = 1 \text{ es asíntota vertical.}}$$

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 3x}{1 - x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene a.horiz.}}$$

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 3x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 3x}{(1 - x^2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 3x}{x - x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3}{-x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^3 - 3x}{1 - x^2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 3x - 2x(1 - x^2)}{1 - x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 3x - 2x + 2x^3}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{1 - x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$$

Por tanto, la recta $y = 2x$ es asíntota oblicua.

- 3) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{3x^2-3}{x(x-1)} & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

- $(-\infty, -1)$: f coincide con $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$. Las funciones elementales son continuas en su dominio, y el de ésta es $\mathbb{R} - \{1\}$. O sea, que tiene, únicamente, una discontinuidad en $x = 1 \notin (-\infty, -1) \Rightarrow f$ es continua en $(-\infty, -1)$.
- $(-1, +\infty)$: f coincide con $h(x) = \frac{3x^2-3}{x(x-1)}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Ambos valores están en el intervalo estudiado, luego son, también, discontinuidades de f . Clasifiquémoslas:

○ $x = 0$: 1) No existe $f(0)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2-3}{x(x-1)} = \left(\frac{-3}{0^+} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2-3}{x(x-1)} = \left(\frac{-3}{0^-} \right) = +\infty \Rightarrow$ En $x = 0$ hay disc. asíntótica de salto infinito.

○ $x = 1$: 1) No existe $f(1)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-3}{x(x-1)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2-1)}{x(x-1)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+1)}{x} = 6 \Rightarrow$ En $x = 1$ hay disc. evitable.

- $x = -1$: 1) $\exists f(-1) = \frac{0}{2} = 0$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$;
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2-3}{x(x-1)} = 0 \Rightarrow$ En $x = -1$ hay disc. de salto finito.

En suma, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, con discontinuidades de salto finito en $x = -1$, asíntótica de salto infinito en $x = 0$ y evitable en $x = 1$.

- 4) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: (2,5 puntos)

a) $f(x) = \frac{2(3x+1)^2}{3x-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(3x+1)3(3x-1) - 2(3x+1)^2 \cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{(3x+1)[12(3x-1) - 6(3x+1)]}{(3x-1)^2} = \\ &= \frac{(3x+1)(36x-12-18x-6)}{(3x-1)^2} = \frac{(3x+1)(18x-18)}{(3x-1)^2} = \frac{18(3x+1)(x-1)}{(3x-1)^2} = \\ &= \frac{18(3x^2 - 3x + x - 1)}{(3x-1)^2} = \frac{18(3x^2 - 2x - 1)}{(3x-1)^2} \end{aligned}$$

b) $g(x) = (x^2 - x + 1)e^{5x}$
 $g'(x) = (2x - 1)e^{5x} + 5(x^2 - x + 1)e^{5x} = e^{5x}(2x - 1 + 5x^2 - 5x + 5) =$
 $= e^{5x}(5x^2 - 3x + 4)$

c) $h(x) = 3 \sqrt[3]{2(5x^2 - 1)^2}$
 $h'(x) = 3 \frac{2 \cdot 2(5x^2 - 1) \cdot 10x}{3 \sqrt[3]{[2(5x^2 - 1)^2]^2}} = \frac{40x(5x^2 - 1)}{\sqrt[3]{4(5x^2 - 1)^4}} = \frac{40x(5x^2 - 1)}{\sqrt[3]{4(5x^2 - 1)^3(5x^2 - 1)}} =$
 $\frac{40x(5x^2 - 1)}{(5x^2 - 1) \sqrt[3]{4(5x^2 - 1)}} = \frac{40x}{\sqrt[3]{4(5x^2 - 1)}}$

d) $j(x) = \ln \left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}} \right)$

Simplificamos antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos:

$$\begin{aligned} j(x) &= \ln \left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}} \right) = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{(5x-3)^3}{2x^4} \right) = \frac{1}{5} [\ln(5x-3)^3 - \ln(2x^4)] = \\ &= \frac{1}{5} [3 \ln(5x-3) - (\ln(2) + \ln(x^4))] = \frac{1}{5} [3 \ln(5x-3) - \ln(2) - 4 \ln(x)] \end{aligned}$$

Y derivamos:

$$j'(x) = \frac{1}{5} \left[3 \frac{5}{5x-3} - 0 - 4 \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{5} \frac{3 \cdot 5}{5x-3} - \frac{1}{5} \frac{4}{x} = \frac{3}{5x-3} - \frac{4}{5x}$$

NOMBRE: _____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz, y el bolígrafo debe ser de tinta permanente. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto o la anulación** en caso de usar tinta corregible.

EN LA PREGUNTA 4 HAY QUE OBTENER, AL MENOS 1,4 PUNTOS. EN CASO CONTRARIO, LA CALIFICACIÓN MÁXIMA ES DE 4,4

- 1) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{8x^2 + ax - 6}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- a) Hallar a para que la función sea continua en todo su dominio, si es posible. (1,5 puntos)
- b) Calcular las asíntotas para $a = -9$. (1 punto)
- c) Estudiar su monotonía y extremos relativos para $a = -9$. (1,5 puntos)
- d) Calcular su tangente en $x = 3$ para $a = -9$. (1 punto)
- 2) Calcular los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, con $0 \leq x \leq 5$. (1,5 pts)
- 3) Calcular a y b para que la siguiente función tenga un punto de inflexión en $(1, 2)$:
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ (1,5 puntos)
- 4) Derivar y simplificar: (2 puntos)
- a) $f(x) = \frac{2(3x+1)}{(3x-1)^2}$
- b) $g(x) = (x^2 - 2x + 1) e^{5x^2}$
- c) $h(x) = 3 \sqrt[3]{5x^2 - 1}$
- d) $j(x) = \ln \left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}} \right)$

SOLUCIONES

$$1) \text{ Sea la función } f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{8x^2 + ax - 6}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Hallar a para que la función sea continua en todo su dominio, si es posible.

(1,5 puntos)

- [0, 2): f es continua porque está definida mediante una función polinómica: $y = x^2 + x + 2$, que son continuas en todos los puntos de \mathbb{R} .
- (2, +∞): f está definida en este intervalo mediante una función racional. Como las funciones elementales son continuas en su dominio, y el de ésta está constituido por todos los números reales salvo $x = 1$, dado que este valor no está en el intervalo que estudiamos, f es continua en todo él.
- $x = 2$: Estudiamos este valor por separado porque los puntos de conexión de definiciones en una función definida a trozos hay que estudiarlos siempre aparte.

$$1) \exists f(2) = 4 + 2 + 2 = 8; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + x + 2) = 8;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{8x^2 + ax - 6}{x-1} \right) = \frac{32 + 2a - 6}{2-1} = 26 + 2a$$

Para ser continua también aquí, estos resultados deben coincidir. Luego:

$$26 + 2a = 8 \Rightarrow 2a = -18 \Rightarrow a = -9$$

Por tanto, f es continua en $[0, +\infty)$ si y sólo si $a = -9$.

b) Calcular las asíntotas para $a = -9$.

(1 punto)

La función queda así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{8x^2 - 9x - 6}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Verticales: Sólo puede tenerla en puntos de discontinuidad o en los extremos del dominio. Como no tiene discontinuidades y en $x = 0$, extremo donde se inicia el dominio, la función tiene expresión polinómica, **no tiene asíntotas verticales**.
- Horizontales: La variable x no puede tender a $-\infty$. Por tanto, sólo estudiamos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 9x - 6}{x-1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8x = +\infty$$

Por tanto, **no tiene asíntotas horizontales**.

- Oblicuas: Igualmente, sólo puede tenerlas si $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 9x - 6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 9x - 6}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 9x - 6}{x^2 - x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2}{x^2} = 8$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x^2 - 9x - 6}{x-1} - 8x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 9x - 6 - 8x(x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 9x - 6 - 8x^2 + 8x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 6}{x - 1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Por tanto, la recta $y = 8x - 1$ es asíntota horizontal si $x \rightarrow +\infty$.

c) Estudiar su monotonía y extremos relativos para $a = -9$. (1,5 puntos)

Derivamos la función, de la que ya sabemos que no tiene discontinuidades en su dominio. Teniendo en cuenta que en intervalos abiertos puede derivarse directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{(16x-9)(x-1) - (8x^2-9x-6)}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{16x^2 - 16x - 9x + 9 - 8x^2 + 9x + 6}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{8x^2 - 16x + 15}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Y como $f'(2^-) = 4 + 1 = 5$ y $f'(2^+) = \frac{32 - 32 + 15}{1} = 15 \Rightarrow$ No es derivable en $x = 2$, porque no coinciden las derivadas laterales. Por tanto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{8x^2 - 16x + 15}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Monotonía y extremos relativos

- Discontinuidades de f : No tiene.
- Discontinuidades de f' : $x = 1$ no es discontinuidad, porque no es mayor que 2. Sólo lo es $x = 2$, donde no existe f' .
- $f'(x) = 0$:
 - $0 < x < 2$: $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2$. Pero este valor no es válido, puesto que no está entre 0 y 2.
 - $x \geq 2$: $\frac{8x^2 - 16x + 15}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 16x + 15 = 0$, siendo $x \neq 1$, para no

anular el denominador $\Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 480}}{16}$, que no tiene solución.

Por tanto, el cuadro de monotonía es:

	(0, 2)	2	(2, +∞)
f'	+	\nexists	+
f	\nearrow	P.A.	\nearrow

No tiene extremos relativos, pero $x = 2$ es un punto anguloso, porque la función es continua en él pero las derivadas laterales no coinciden.

d) Calcular su tangente en $x = 3$ para $a = -9$. (1 punto)

Alrededor de $x = 3$, $f(x) = \frac{8x^2 - 9x - 6}{x - 1}$. Trabajamos sólo con esta fórmula.

- Punto de tangencia: Como $f(3) = \frac{72 - 27 - 6}{2} = \frac{39}{2}$, es: $(3, 39/2)$.

- Pendiente de la tangente: $f'(x) = \frac{8x^2 - 16x + 15}{(x-1)^2} \Rightarrow m = f'(3) = \frac{39}{4}$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y - \frac{39}{2} = \frac{39}{4}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{39}{4}x - \frac{117}{4} + \frac{39}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{39}{4}x - \frac{39}{4}}$$

2) Calcular los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, con $0 \leq x \leq 5$. (1,5 ptos)

Comenzamos con $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

- Extremos del dominio: $x = 0$; $x = 5$.
- Discontinuidades de f : No hay (es polinómica).
- Discontinuidades de f' : No hay (es polinómica).

- $f'(x) = 0$: $3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} = 1 \\ = 3 \end{cases}$, ambas válidas (están entre 0 y 5).

Estudiamos las imágenes (no límites, en este caso) en los puntos resultantes:

- $x = 0$: $f(0) = 0$.
- $x = 1$: $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$.
- $x = 3$: $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$.
- $x = 5$: $f(5) = 125 - 6 \cdot 25 + 45 = 20$.

Máximo absoluto: 20, que se alcanza para $x = 5$.
Mínimo absoluto: 0, que se alcanza para $x = 0$ y para $x = 3$.

3) Calcular a y b para que la siguiente función tenga un punto de inflexión en $(1, 2)$:
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ (1,5 puntos)

Como:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; f''(x) = 6x + 2a; f'''(x) = 6$$

Para que f tenga un punto de inflexión en $x = 1$, bastará con que:

$$f''(1) = 0 \text{ y que } f'''(1) \neq 0$$

Es decir:

$$6 + 2a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -3} \text{ y que } \boxed{6 \neq 0}, \text{ que se cumple.}$$

Además, las coordenadas del punto de inflexión son $(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2$:

$$1 + a + b - 2 = 2 \Leftrightarrow \boxed{a + b = 3}$$

Sustituyendo el valor de a : $-3 + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 6}$.

Por tanto: $\boxed{a = -3 \text{ y } b = 6}$.

4) Derivar y simplificar: (2 puntos)

a) $f(x) = \frac{2(3x+1)}{(3x-1)^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \frac{3x+1}{(3x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = 2 \frac{3(3x-1)^2 - 2(3x-1)3(3x+1)}{(3x-1)^4} = \\ &= 2 \frac{(3x-1)[3(3x-1) - 6(3x+1)]}{(3x-1)^4} = 2 \frac{9x-3-18x-6}{(3x-1)^3} = \boxed{2 \frac{-9x-9}{(3x-1)^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x) &= (x^2 - 2x + 1) e^{5x^2} \\ g'(x) &= (2x - 2) e^{5x^2} + (x^2 - 2x + 1) 10x e^{5x^2} = e^{5x^2} (2x - 2 + 10x^3 - 20x^2 + 10x) = \\ &= \boxed{e^{5x^2} (10x^3 - 20x^2 + 12x - 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h(x) &= 3 \sqrt[3]{5x^2 - 1} \\ h'(x) &= 3 \frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2 - 1)^2}} = \boxed{\frac{10x}{\sqrt[3]{(5x^2 - 1)^2}}} = \frac{10x}{\sqrt[3]{(5x^2 - 1)^2}} \frac{\sqrt[3]{5x^2 - 1}}{\sqrt[3]{5x^2 - 1}} = \frac{10x \sqrt[3]{5x^2 - 1}}{\sqrt[3]{(5x^2 - 1)^3}} = \\ &= \boxed{\frac{10x \sqrt[3]{5x^2 - 1}}{5x^2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\text{d) } j(x) = \ln \left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}} \right)$$

Simplificamos antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos:

$$\begin{aligned} j(x) &= \ln \left(\sqrt[5]{\frac{(5x-3)^3}{2x^4}} \right) = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{(5x-3)^3}{2x^4} \right) = \frac{1}{5} [\ln(5x-3)^3 - \ln(2x^4)] = \\ &= \frac{1}{5} [3\ln(5x-3) - (\ln(2) + \ln(x^4))] = \frac{1}{5} [3\ln(5x-3) - \ln(2) - 4\ln(x)] \end{aligned}$$

Y derivamos:

$$j'(x) = \frac{1}{5} \left[3 \frac{5}{5x-3} - 0 - 4 \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{5} \frac{3 \cdot 5}{5x-3} - \frac{1}{5} \frac{4}{x} = \boxed{\frac{3}{5x-3} - \frac{4}{5x}}$$