

CURSO 2012-13 2º BACHILLERATO

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: ÁLGEBRA

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro k :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 3 \\ kx + 10y + 4z &= 11 \end{aligned} \quad (3 \text{ puntos})$$

- Discútase el sistema según los valores del parámetro k.
- Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones
- Resuélvase el sistema para $k = 0$

EJERCICIO 2 Se consideran las matrices: (3 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcúlense a y b para que se verifique $AB = BA$
- Calcúlense c y d para que se verifique $A^2 + cA + dI = O$

EJERCICIO 3 Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2,5 puntos)

- Halla para qué valores de x A tiene inversa.
- Calcula la inversa para $x = 2$

EJERCICIO 5 Si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula $\begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3a + 7 & 3b + 7 & 3c + 7 \end{vmatrix}$ (1,5 puntos)

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 Discute el siguiente sistema homogéneo en función del parámetro a y resuélvelo para $a = 2$. (1,5 + 1 puntos)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ ax + 2z &= 0 \\ 2x - y + az &= 0 \end{aligned}$$

EJERCICIO 2 Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ que satisfacen la ecuación $X^2 = 2X$ (2 puntos)

EJERCICIO 3 ¿Para qué valores de a se anula este determinante? (2,5 puntos)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 4 Plantea mediante una ecuación matricial: (1 punto)

Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa del tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa del tipo B necesita 15 horas de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa puede disponer de 270 horas de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo se pueden hacer?

EJERCICIO 5 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

SOLUCIONES OPCIÓN A

EJERCICIO 1

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{pmatrix} = 14 - 2k = 0 \text{ si } k = 7$$

$$\text{Para } k = 7, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \text{ luego } \text{ran}A = 2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 10 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

Tenemos $\text{ran}A' = 2$

DISCUSIÓN:

Si $k \neq 7, \text{ran}A = \text{ran}A' = n^\circ \text{ incógnitas} = 3$ SCD

Si $k = 7, \text{ran}A = \text{ran}A' = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$ SCI

b) Hacemos $k = 7$ y nos quedamos con las dos primeras ecuaciones con las que hallamos $\text{ran}A$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 - z \\ 2x + 3y = 3 - z \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ 3-z & 3 \end{vmatrix}}{1} = 3 - 2z \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 2 & 3-z \end{vmatrix}}{1} = z - 1$$

c) Hacemos $k = 0$ $\det A = 14$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{14} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1}{2} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 11 \end{vmatrix}}{14} = \frac{3}{2}$$

EJERCICIO 2

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a+b \end{pmatrix} \quad a = 0 \quad b = 2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 + cA + dI = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 1+c & 1+c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 1+c & 1+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad d = 0 \quad 1+c = 1 \quad c = 0$$

EJERCICIO 3

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x = 0 \text{ Para } x \neq 0 \text{ } A \text{ tiene inversa}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2x & 2y & 2z \\ 3a+7 & 3b+7 & 3c+7 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \left(3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot (-5) = -10$$

SOLUCIONES OPCIÓN B

EJERCICIO 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = 0 \quad \{a = -3\}, \{a = 2\}$$

$$a = -3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$a = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$\text{Ran}A' = \text{Ran}A$ por ser un sistema homogéneo

DISCUSIÓN

$a \neq 2, -3$ $\text{Ran}A = \text{Ran}A' = 3 = n^\circ$ incógnitas SCD (Solución trivial)

$a = 2, -3$ $\text{Ran}A = \text{Ran}A' = 2$ SCI

Solución para $a = 2$

$$\begin{aligned} x + y + z = 0 &\Rightarrow x + y = -z & x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -2z & 0 \end{vmatrix}}{-2} = -z & y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -2z \end{vmatrix}}{-2} = 0 \\ 2x + 2z = 0 &\Rightarrow 2x = -2z \end{aligned}$$

EJERCICIO 2

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ba + cb & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$$a^2 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0, 2$$

$$c^2 = 2c \Rightarrow c^2 - 2c = 0 \Rightarrow c = 0, 2$$

$$a = c = 0 \quad b \cdot 0 + 0 \cdot b = 2b \Rightarrow b = 0$$

$$a = 0 \quad c = 2 \Rightarrow b \cdot 0 + 2b = 2b \Rightarrow b \text{ cualquier valor}$$

$$a = 2 \quad c = 0 \Rightarrow b \cdot 2 + 0 = 2b \Rightarrow b \text{ cualquier valor}$$

$$a = 2 \quad c = 2 \Rightarrow 2b + 2b = 4b \Rightarrow b = 0$$

EJERCICIO 3

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{matrix} \text{Igual} \\ F2 - F1 \\ \text{Igual} \\ F4 - F1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\text{desarrollamos por } F4) \\ & = (-2) \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-4 + 6a + 8a + 6) = 0 \quad a = -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

$x =$ casas tipo A $y =$ casas tipo B $z =$ casas tipo C

ALBAÑILERÍA $10x + 15y + 20z = 270$

FONTANERÍA $2x + 4y + 6z = 68$

ELECTRICISTA $2x + 3y + 5z = 58$

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 68 \\ 58 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} \text{ Calculamos } A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, |A| = 1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$