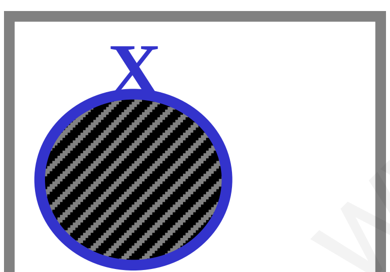
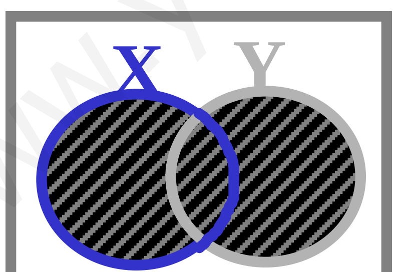
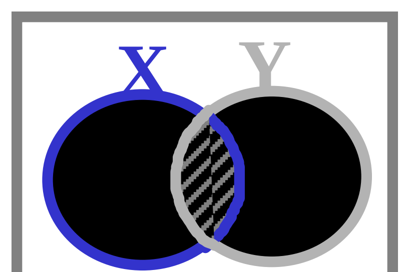
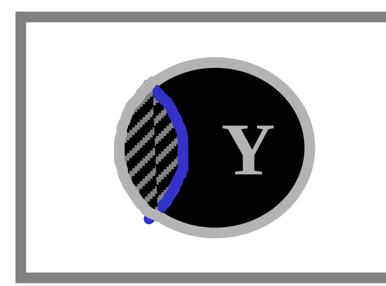
3. Probabilidad condicionada

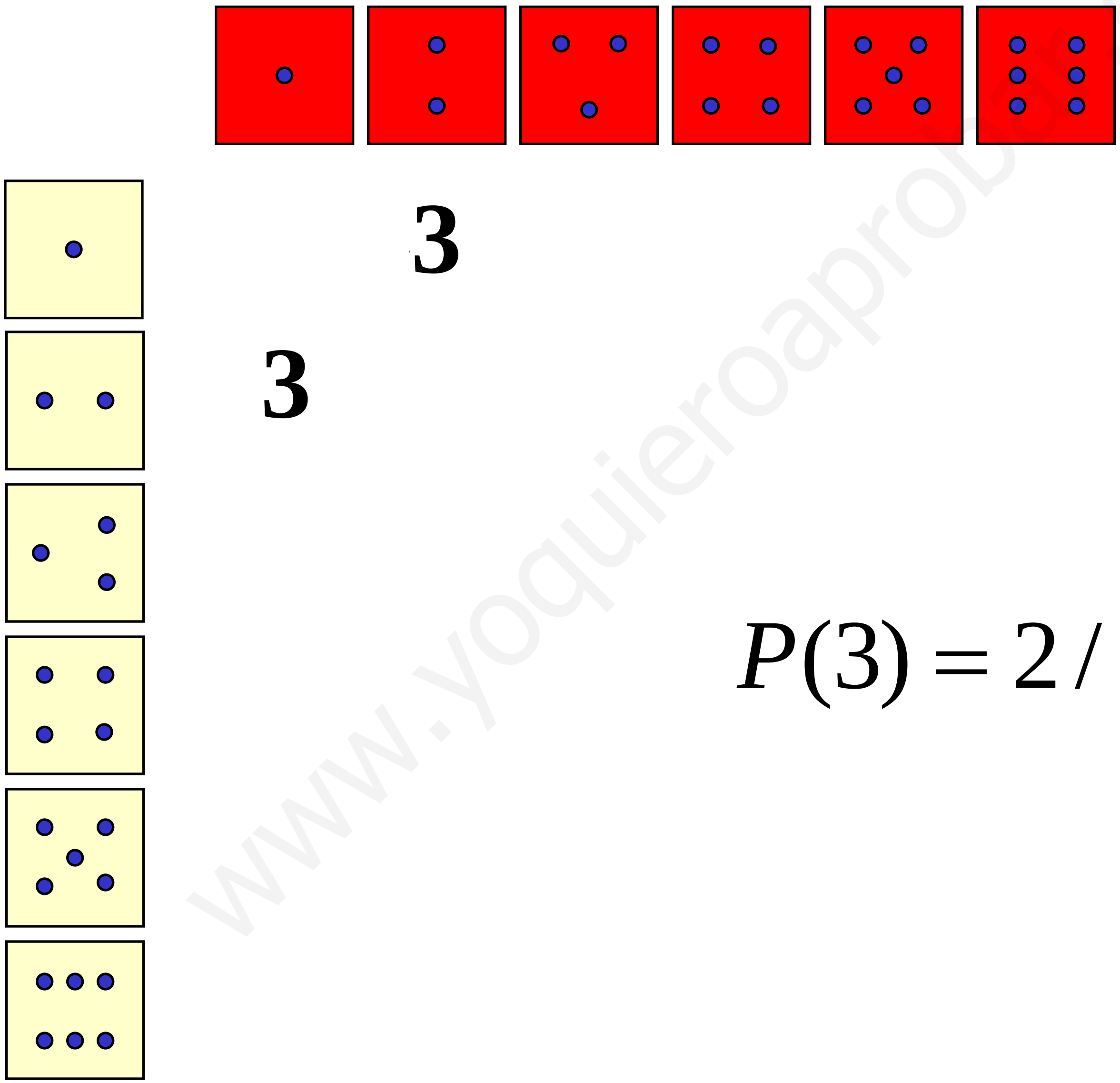
[...] Quiero decir, para empezar: ¿a quién le importa si saco una bola blanca o una bola negra de una urna? Y segundo: si tan preocupado estás por el color de la bola que sacas, no lo dejes en manos del azar: ¡mira en la maldita urna y saca la bola del color que quieras!

Stephanie Plum, después (suponemos) de pasar por un curso de probabilidad y estadística.

Cuatro “tipos” de probabilidad

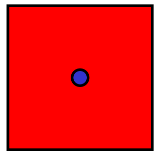
Marginal	Unión	Conjunta	Condicional
$P(X)$ La probabilidad de que ocurra **X**	$P(X \cup Y)$ La probabilidad de que ocurra **X o Y**	$P(X \cap Y)$ La probabilidad de que ocurra **X e Y**	$P(X \vert Y)$ La probabilidad de que ocurra **X sabiendo que ha ocurrido Y**
			

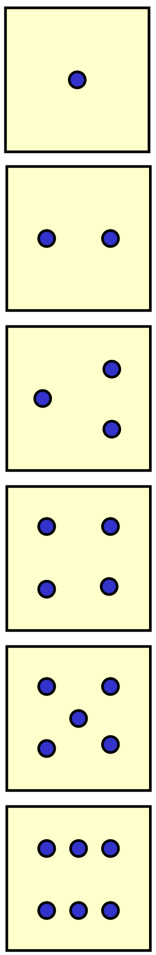
Lanzamos dos dados, uno rojo y otro blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que sumen 3?



$$P(3) = 2/36$$

Supongamos que hemos lanzado ya el dado rojo y ha salido un 1. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que sumen 3?





3

$$P(de\ suma\ 3 \mid dado\ \ rojo\ 1) = 1/6$$

	sexo	edad
B.R	H	18
C.C	M	19
C.G	H	19
G.P	M	20
M.P	M	21
J.L	H	20
L.A.	M	21
N.D	M	21
V.C	H	22
V.F.	H	19
L.L.	H	18
J.N.	M	21
J.P.	M	21
U.P	M	18

Sucesos

A = ser hombre (H)

B = edad< 20

	A	A^c
B	4	2
B^c	2	6

Probabilidades

$P(A) = 6/14 = 0.43$

$P(B) = 6/14 = 0.43$

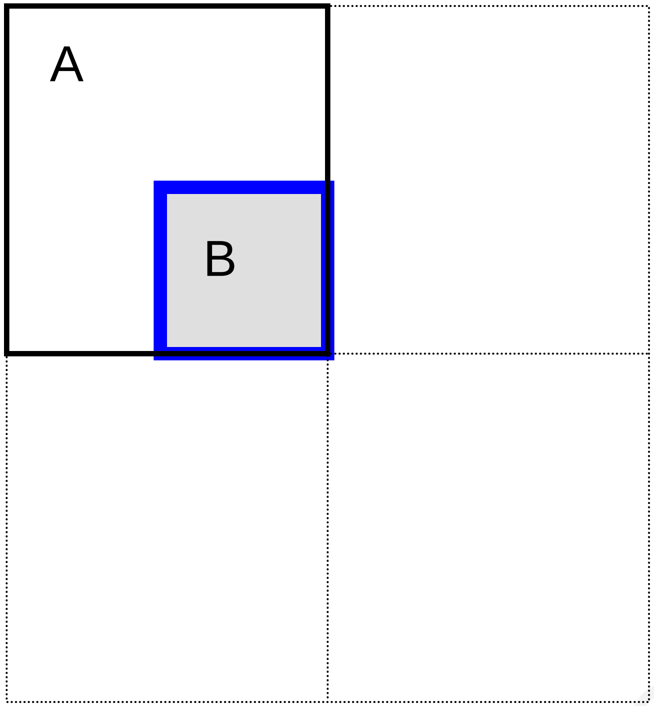
$P(A \cap B) = 4/14 = 0.29$

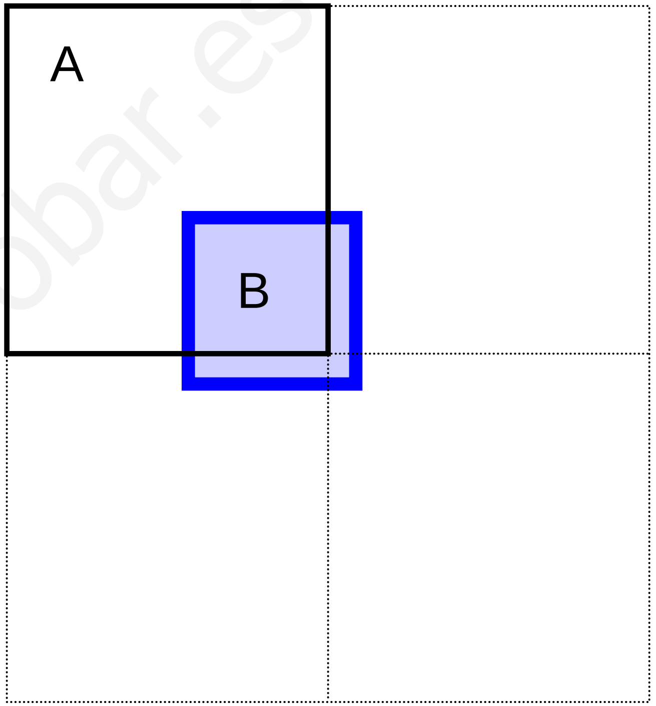
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$6/14 + 6/14 - 4/14 = 0.43 + 0.43 - 0.29 = 0.57$

$P(A \mid B) = 4/6 = 0.67$

Intuir la probabilidad condicionada





P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A ∩ B) = 0,10

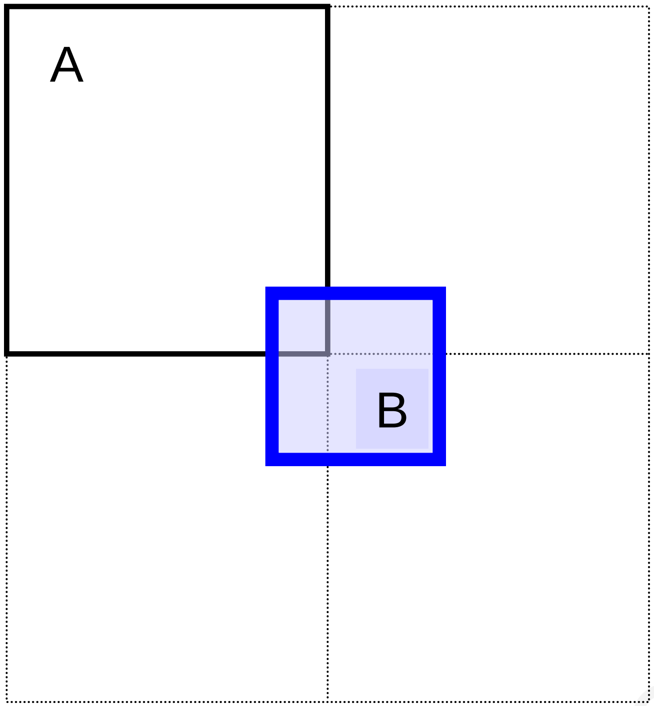
P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A ∩ B) = 0,08

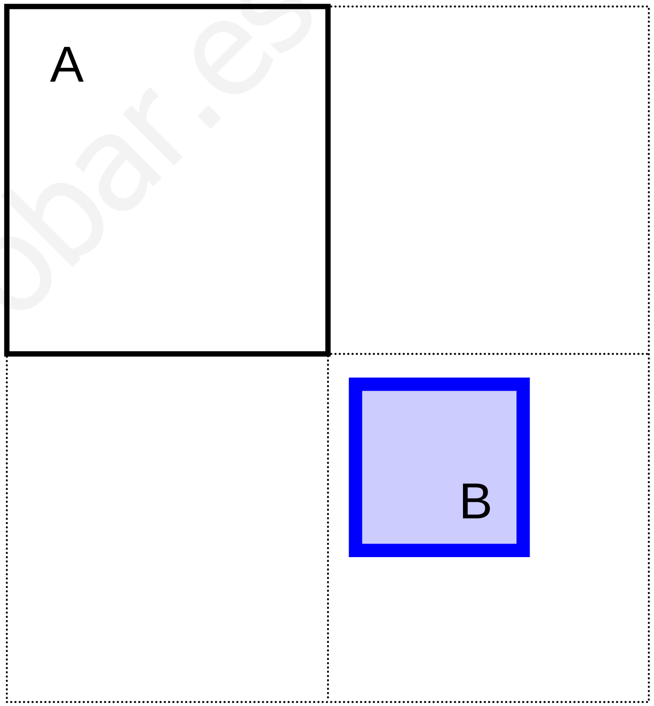
¿Probabilidad de A sabiendo que ha pasado B?

P(A|B)=1

P(A|B)=0,8

Intuir la probabilidad condicionada





$P(A) = 0{,}25$
$P(B) = 0{,}10$
$P(A \cap B) = 0{,}005$

$P(A) = 0{,}25$
$P(B) = 0{,}10$
$P(A \cap B) = 0$

¿Probabilidad de A sabiendo que ha pasado B?

P(A|B)=0,05

P(A|B)=0

Probabilidad condicionada

Se llama probabilidad de A condicionada a B o probabilidad de un suceso A sabiendo que se ha producido un suceso B a:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilidad condicionada

Una vez A ha ocurrido, ya es seguro:

$$P(A|A)=\frac{P(A\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

Cuando A y B son excluyentes, una vez ha ocurrido A, B es imposible:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0$$

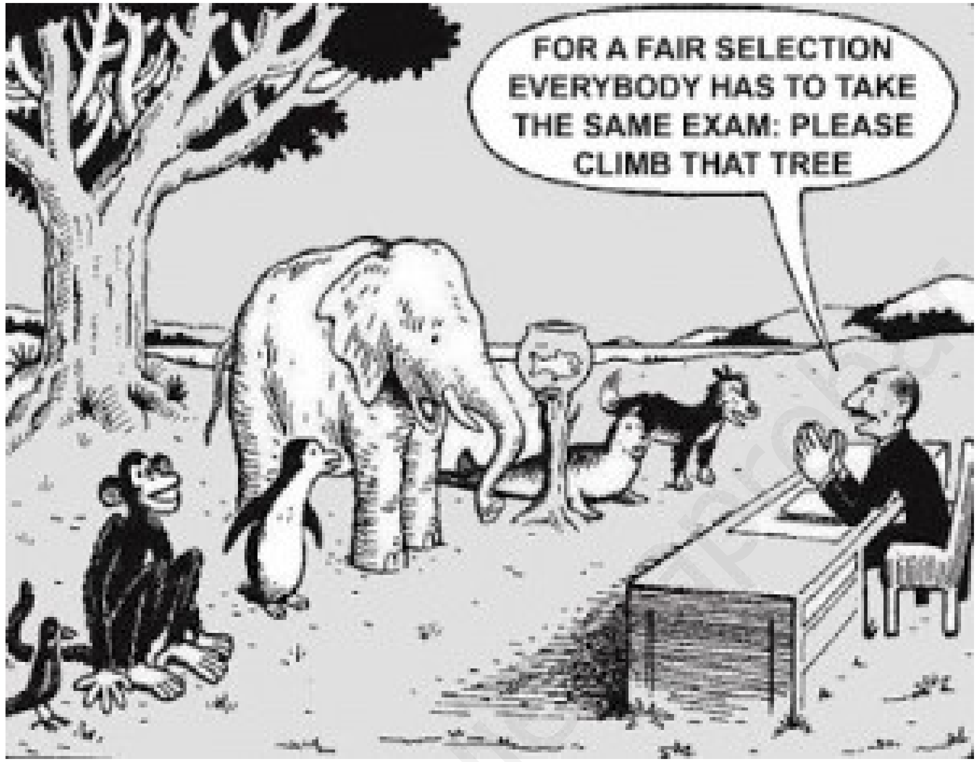
¿Cuál es la probabilidad de que una carta escogida al azar sea un as sabiendo que es roja?

Palo	Color		Total
	Rojo	Negro	
As	2	2	4
No-As	24	24	48
Total	26	26	52

Espacio restringido

$$P(As \mid Rojo) = \frac{P(As \cap Rojo)}{P(Rojo)} = \frac{2/52}{26/52} = \frac{2}{26}$$

¿Y la probabilidad de que una carta escogida al azar sea roja sabiendo que es un as?



la distinción entre $P(A|B)$ y $P(B|A)$ es muy importante y necesita reconocerse perfectamente. Veamos dos ejemplos que nos van a permitir enfatizar la diferencia entre ambas probabilidades. El primero es un ejemplo clásico pero muy clarificador : sea S el suceso *tengo dos brazos y dos piernas* y sea R el suceso *soy un mono*. Obviamente, $P(S|R) = 1$, mientras que $P(R|S) \neq 1$. La primera probabilidad es equivalente a afirmar que *si soy un mono entonces tengo dos brazos y dos piernas*, mientras que la segunda es equivalente a *si tengo dos brazos y dos piernas, no tengo porqué ser un mono.*

Independencia

Los sucesos *A* y *B* serán independientes si la ocurrencia de *B* no influye en la probabilidad de *A* y al revés. Es decir, si:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|A) = P(B)$$

Como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Entonces: $$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Independencia

Vamos a verificar la independencia de los dados.

Sea A = dado rojo sale 1 y B = dado blanco sale 1.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}=P(A)$$

Sea C = suma de los dos dados es 3. ¿Afecta A = que el dado rojo salga 1 a la probabilidad de C?

$$P(C|A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\neq P(C)=\frac{2}{36}$$

Ejercicio 16. Se extrae una carta de una baraja de 40 cartas. Comprobar cuales de los siguientes pares de sucesos son independientes:

a). $A = \{rey\} \quad B = \{espadas\}$

b). $A = \{figuras\} \quad B = \{espadas\}$

c). $A = \{rey\} \quad B = \{figuras\}$

a). Sean $A = \{rey\} \quad B = \{espadas\}$, son independientes pues,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{10} = P(A) = \frac{1}{10}$$

b). Sean $A = \{figuras\} \quad B = \{espadas\}$, son independientes pues,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{10} = P(A) = \frac{12}{40}$$

c). Sean $A = \{rey\} \quad B = \{figuras\}$, no son independientes pues,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4}{12} \neq P(A) = \frac{4}{40}$$

Independencia de *m* sucesos

Similarmente, m sucesos A_1...., A_m se llaman independientes si:

$$P(A_1 \cap ... \cap A_m) = P(A_1) \cdot ... \cdot P(A_m)$$

y además para cada posible subconjunto de k sucesos:

$$P(A_{j+1} \cap ... \cap A_{j+k}) = P(A_{j+1}) \cdot ... \cdot P(A_{j+k})$$

donde $j+k < m$.

De modo que, p. ej. tres sucesos A, B y C son independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Una caja contiene 10 bolas, 3 son rojas. Escogemos dos bolas al azar. Encuentra la probabilidad de que ninguna de ellas sea roja: (a) con reemplazo y (b) sin reemplazo.

Consideremos los sucesos:

A: Primera bola no-roja
B: Segunda bola no-roja

$P(A) = 7/10$

*Si el **muestreo** es **con reemplazo**, la situación para la segunda elección es idéntica que para la primera, y* $P(B) = 7/10$.
Los sucesos son independientes y la respuesta es:
$P(A \cap \mathrm{B}) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49$
*Si es **sin reemplazo**, hemos de tener en cuenta que una vez extraída la primera bola, quedan solo 9 y 3 deben ser rojas.*
Así: $P(B|A) = 6/9 = 2/3$. En este caso la respuesta es:
$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = (7/10) \cdot (2/3) \approx 0.47$

Tres caballos A, B y C participan en una carrera. El suceso "A vence a B" se designa por AB, el suceso "A vence a B, el cual vence a C" como ABC, y así sucesivamente. Se sabe que $P(AB) = 2/3$, $P(AC) = 2/3$ y $P(BC) = 1/2$. Además $P(ABC) = P(ACB)$, $P(BAC) = P(BCA)$ y $P(CAB) = P(CBA)$. Calcular $P(A \text{ venza})$, $P(B \text{ venza})$, $P(C \text{ venza})$. ¿Son AB, AC y CB independientes?

Solución

En este problema se asume que no existen los empates. Por ello, los sucesos elementales son las permutaciones de las letras A, B y C, y un simple espacio muestral es:

$$\Omega = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\} \, ; |\Omega| = 3! = 6$$

Dicho espacio tiene $|\Omega| = 3! = 6$ elementos, pero no es necesariamente equiprobable. Además:

$$\begin{aligned} AB &= \{ABC, ACB, CAB\} \\ AC &= \{ABC, ACB, BAC\} \\ BC &= \{ABC, BAC, BCA\} \, . \end{aligned}$$

Denotemos las probabilidades de los sucesos elementales:

$$P(\{ABC\}) = P(\{ACB\}) = p_1, P(\{BAC\}) = P(\{BCA\}) = p_2,$$
$$P(\{CAB\}) = P(\{CBA\}) = p_3.$$

y resolvamos:

$$\left.\begin{array}{l} P(AB) = 2/3 \Rightarrow 2 \cdot p_1 + p_3 = 2/3 \\ P(AC) = 2/3 \Rightarrow 2 \cdot p_1 + p_2 = 2/3 \\ P(BC) = 1/2 \Rightarrow p_1 + 2 \cdot p_2 = 1/2 \end{array}\right\}$$

Se obtiene así que $p_1 = 5/18, p_2 = 1/9$ y $p_3 = 1/9$. Por tanto, las probabilidades que pide el problema son:

$$P(A \text{ venza}) = P(\{ABC\}) + P(\{ACB\}) = 2 \cdot p_1 = 5/9$$
$$P(B \text{ venza}) = P(\{BAC\}) + P(\{BCA\}) = 2 \cdot p_2 = 2/9$$
$$P(C \text{ venza}) = P(\{CAB\}) + P(\{CBA\}) = 2 \cdot p_3 = 2/9.$$

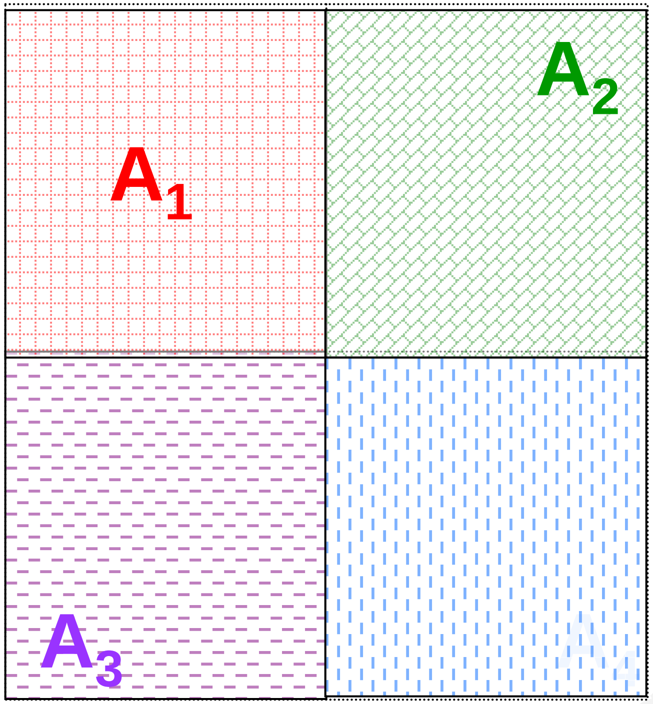
Por último, para ver si AB, AC y CB son independientes, calculemos:

$$P(AB \cap AC) = P(\{ABC, ACB\}) = P(\{ABC\}) + P(\{ACB\}) = \frac{5}{9}$$

$$P(AB) \cdot P(AC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Dado que $P(AB \cap AC) \neq P(AB) \cdot P(AC)$, se concluye que no son independientes.

Sistema exhaustivo y excluyente de sucesos

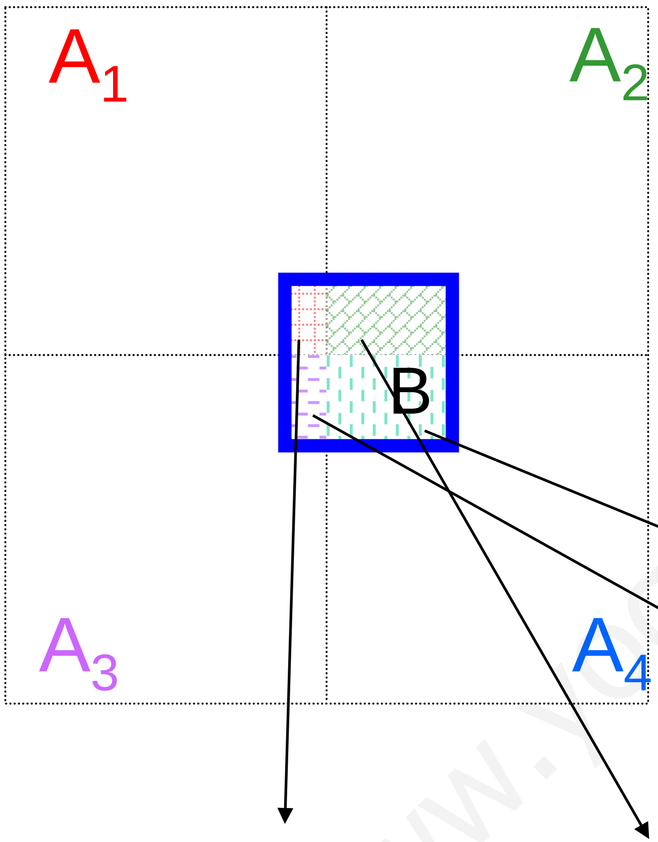


Se trata de una colección de sucesos A_1, A_2, A_3, A_4…
tales que la unión de todos ellos forman el espacio muestral, y sus intersecciones son disjuntas.

Divide y vencerás: Todo suceso B, puede ser descompuesto en componentes de dicho sistema.

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)$$

Teorema de la probabilidad total



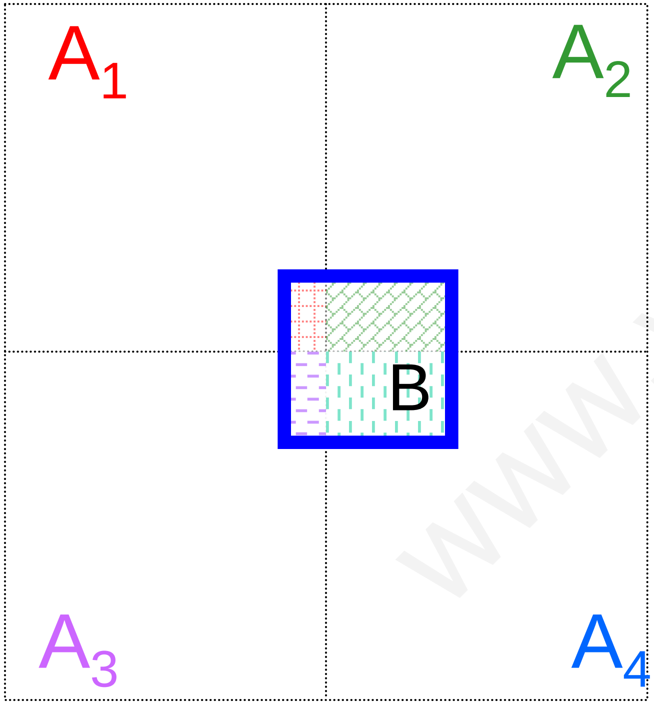
Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces podemos calcular la probabilidad de B como la suma:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4)$$

$$\boxed{P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + P(B|A_4)P(A_4)}$$

La ley de probabilidad total

Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son una partición de E, es decir que los sucesos son mútuamente excluyentes entre sí ($A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo par) y su unión es E entonces:



$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

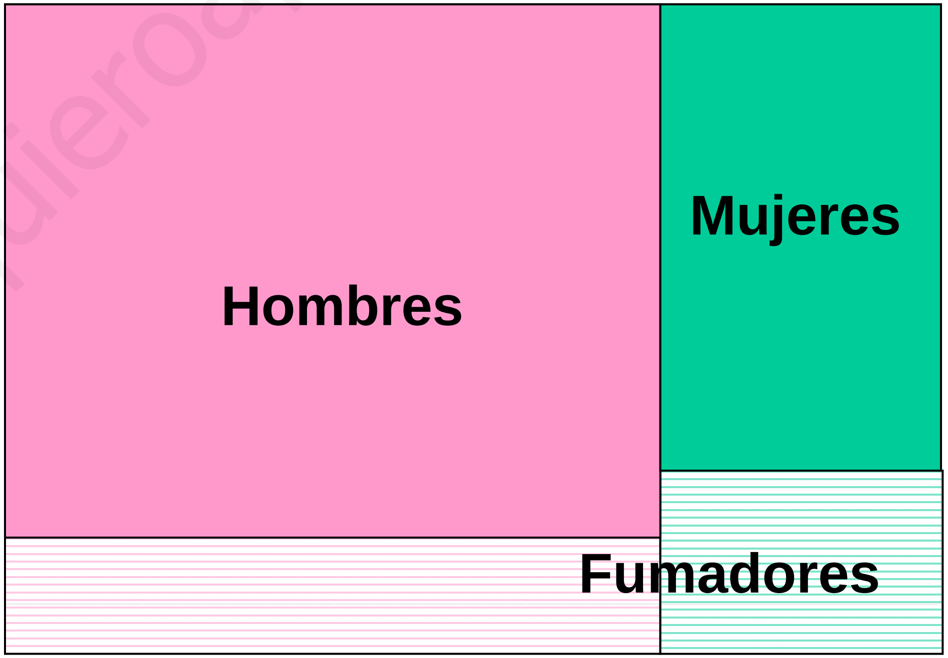
$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

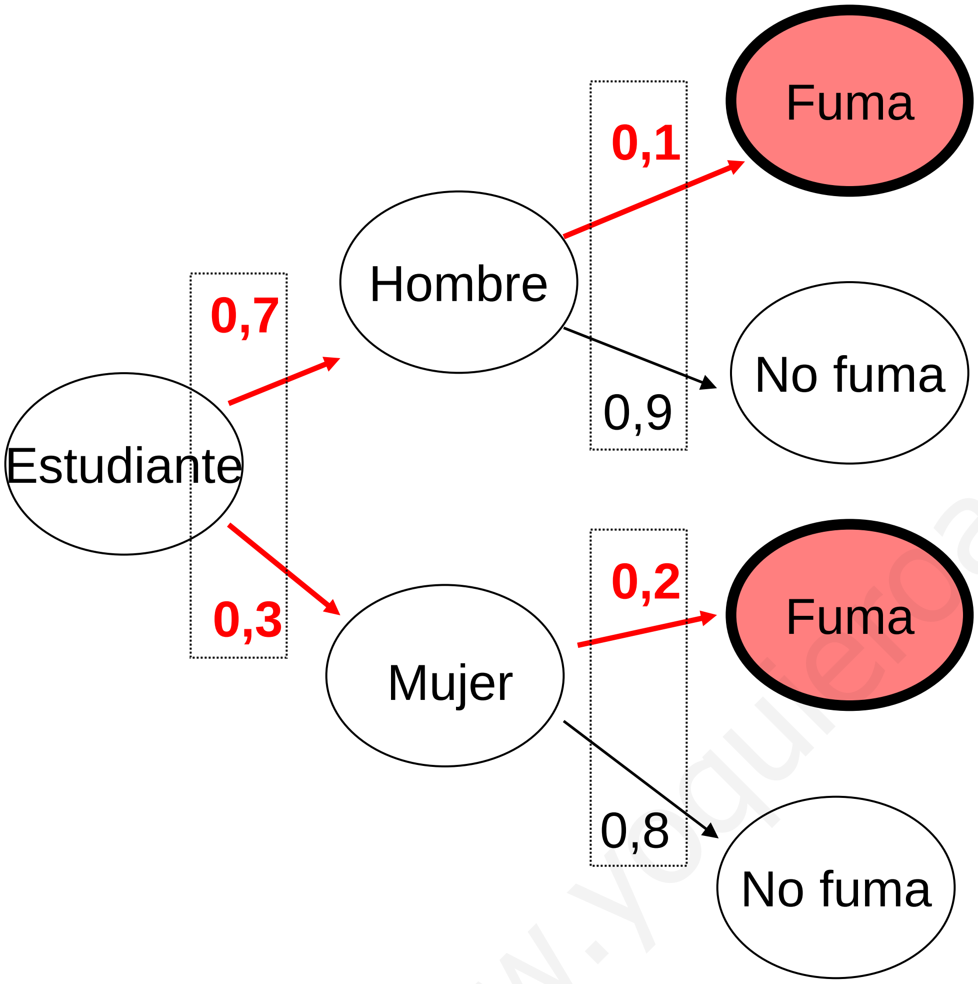
Ejemplo: En este aula el 70% de los alumnos son hombres. De ellos el 10% son fumadores. El 20% de las mujeres son fumadoras.

- *¿Qué porcentaje de fumadores hay en total?*

Podemos aplicar la ley de la probabilidad total:

Hombres y mujeres forman un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos.



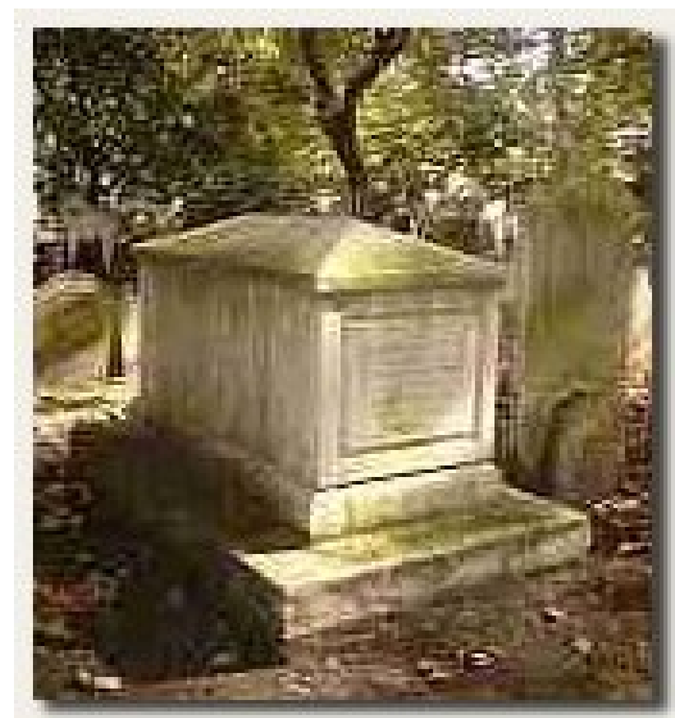


$$P(F) = P(F \cap H) + P(F \cap M) = P(F|H)\ P(H) + P(F|M)\ P(M)$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}13$$

Thomas Bayes nació en Londres, Inglaterra. Su padre fue ministro presbiteriano. Posiblemente De Moivre fue su maestro particular, pues se sabe que por aquel entonces ejercía como profesor en Londres.

Bayes fue ordenado ministro presbiteriano y muere en 1761. Sus restos descansan en el cementerio londinense de Bunhill Fields. La traducción de la inscripción en su tumba es:

"Reverendo Thomas Bayes. Hijo de los conocidos Joshua y Ann Bayes. 7 de abril de 1761. En reconocimiento al importante trabajo que realizó Thomas Bayes en probabilidad. Su tumba fue restaurada en 1969 con donativos de estadísticos de todo el mundo".



La interpretación bayesiana

- Consideremos el siguiente problema:

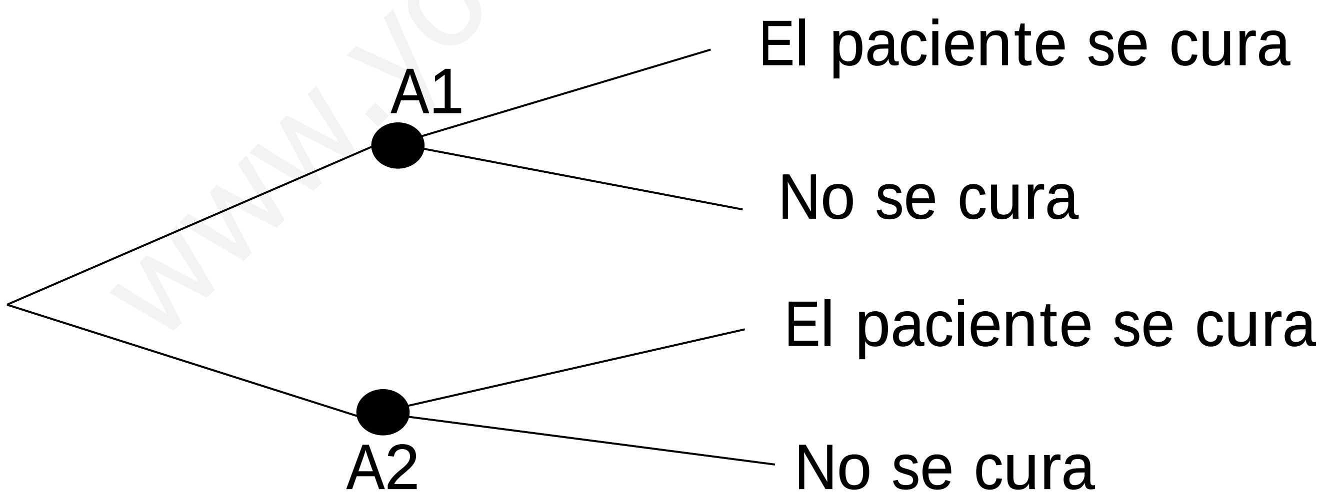
- Un laboratorio ha descubierto un medicamento que piensan que es eficaz con una determinada probabilidad.
- Para experimentar su eficacia, se suministra a un grupo de pacientes. Un paciente lo toma y se cura. ¿Qué podemos decir sobre la eficacia del medicamento?
- NO podemos inferir solo por esto que el medicamento sea efectivo, puesto que la causa de que el paciente se haya curado podría haber sido otra.
- Sin embargo, parece lógico pensar que si un amplio número de pacientes se cura, nuestra creencia sobre la probabilidad de que el medicamento sea efectivo va a ser más elevada.
- Entonces:¿Cómo podríamos ‘adaptar’ nuestra probabilidad de partida sobre la eficacia del medicamento de manera que podamos incorporar la nueva información?

- El **teorema de Bayes** permite realizar este cálculo:
  - A la probabilidad inicial sobre la eficacia del medicamento se la denomina **probabilidad a priori.**
  - Una vez realizado el experimento, la fórmula del teorema de Bayes incorpora la información que se obtenido del experimento y se recalcula la probabilidad inicial. A esta segunda probabilidad se le denomina **probabilidad a posteriori.**
  - En definitiva, se trata de calcular una probabilidad condicional, donde la condición es el resultado del experimento que se puede observar.

– En el ejemplo anterior:

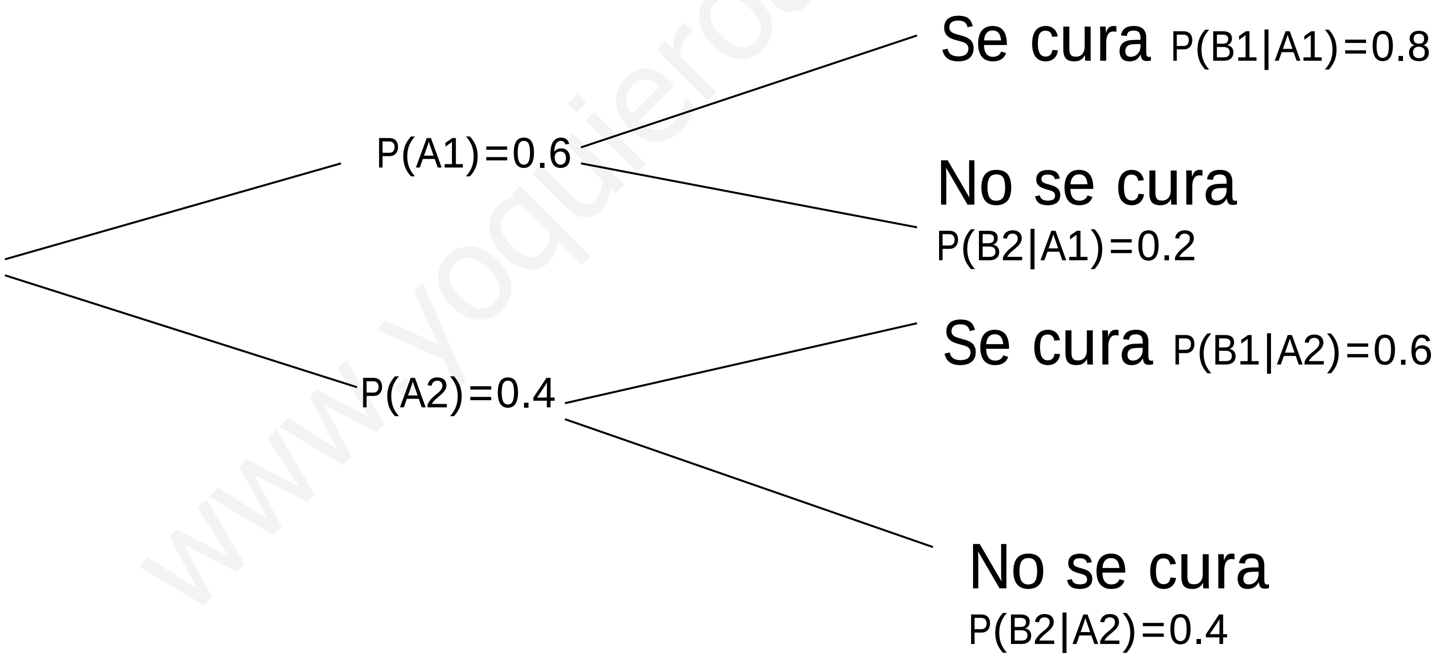
Podemos interpretar que el ejemplo anterior hay dos etapas. En la primera, pueden ocurrir los sucesos A1: que la medicina sea efectiva o A2: que no lo sea. En la segunda, se aplica a un paciente y puede ocurrir que B1: se cure o B2: no se cure. Observa que

- SOLO observamos el resultado de la segunda etapa
- Lo que ocurre en esta segunda etapa depende del resultado de la primera



– Supongamos que al tomar la medicina un paciente se cura, ¿cuál es la **probabilidad a posteriori** de que la medicina sea realmente eficaz?

– Es decir ¿cuánto vale P(A1|B1)?



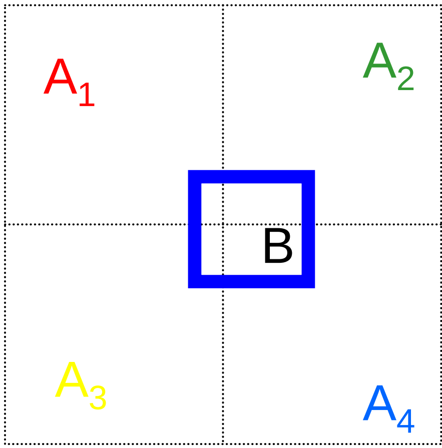
suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 119-124

Azar y probabilidad

En este panorama, la serie *Numb3rs* es una honrosa excepción, aunque haya una crítica que hacerle. En ella abundan las referencias a la probabilidad, explicando por encima qué ideas son la que el genio Charlie ha aplicado para llegar a sus conclusiones. Pero no se entra en datos ni en detalles, resultando imposible analizar el razonamiento (con la excepción del Problema de Monty Hall[8]). Se usan recursos correctos pero algo elevados y, al no ser explicados, quedan muy lejos del público, cual arcanos adivinatorios. Sirva como ejemplo la interesante escena enlazada, donde se alude a probabilidades a posteriori (análisis bayesiano).

Enlace: http://vimeo.com/26770342

Teorema de Bayes



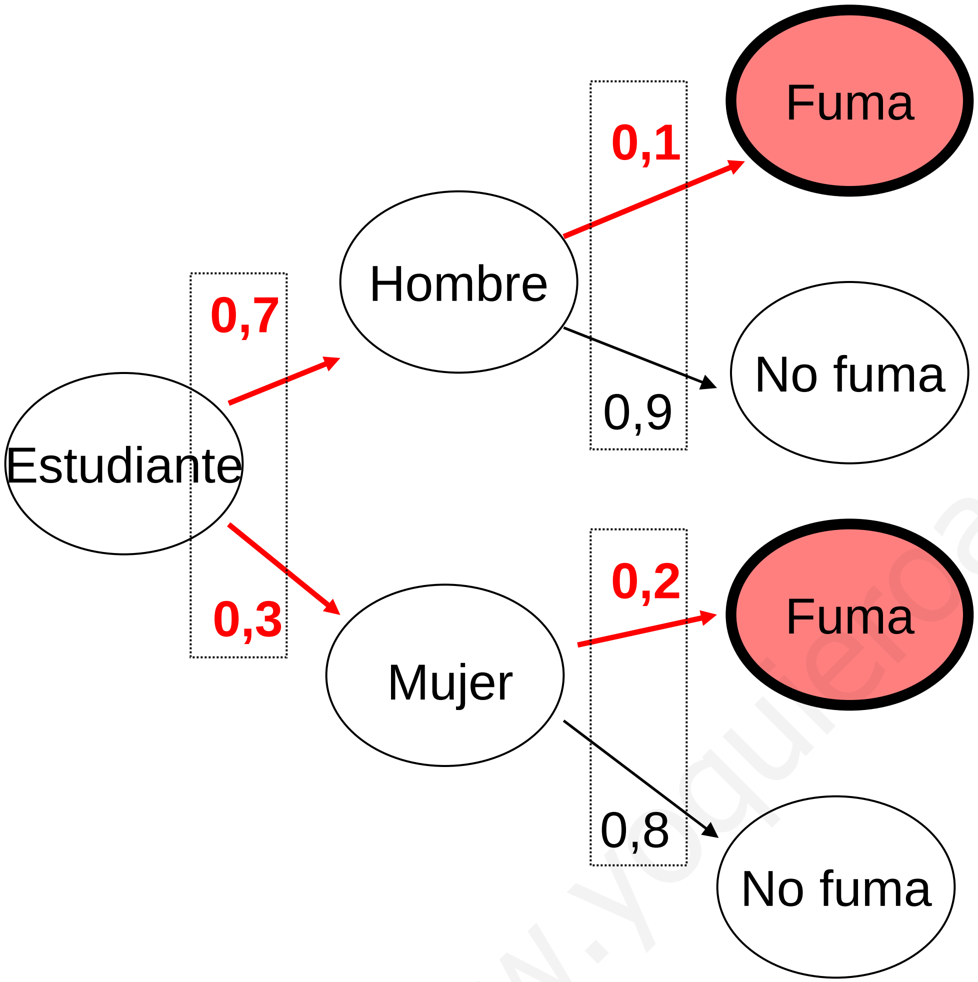
Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los n componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

…si ocurre B, podemos calcular la probabilidad (*a posteriori*) de ocurrencia de cada A_i, (i = 1, 2, ... , n):

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}}$$

donde P(B) se puede calcular usando el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$



En el problema anterior: Se elige a un individuo al azar y resulta fumador. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

$P(M) = 0{,}3,\ P(F) = 0{,}13$

$P(M|F) = P(F \cap M)/P(F) = P(F|M)\ P(M)\ /\ P(F) =$

$0{,}2 \cdot 0{,}3\ /\ 0{,}13 = 0{,}46$

«Una elaboración interesante a partir del concepto de probabilidad condicionada es el conocido teorema de Bayes. Supongamos que el **0.5% de la población padece verdaderamente cáncer**. Supongamos que haya un análisis para detectar el cáncer con una **fiabilidad del 98%**. Si se hacen **10.000 pruebas**, tendremos 49 análisis positivos de las personas con cáncer de 50, del resto habrá 199 análisis falsos positivos, la probabilidad condicional de padecer cáncer sabiendo que se ha dado positivo es sólo 49/248, ¡aproximadamente un 20%!»

10.000 pruebas

0.5% **95.5%**

50: enfermas 9950: no enfermas

98% **2%** **2%** **98%**

49 positivos 1 falso-negativo 199 falsos-positivos 9751: negativos

p(cáncer | positivo) = 49 / (49+199) = 0.197...

Ejercicio 27. Alarma Falsa. En cierto lugar se ha instalado un dispositivo de alarma. Si hay peligro, el dispositivo se pone en funcionamiento el 99 % de las ocasiones. Por otra parte, la probabilidad de que se dispare la alarma espontáneamente es del 0,5 %, y la probabilidad de que una noche haya un intento de robo es 0,1 %. Si una noche determinada se oye la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que sea falsa (no haya peligro)?

Ejercicio 27. Sea R el suceso "hay peligro" y A el suceso "suena la alarma". Los datos son

$$P(A|R) = 0{,}99 \quad P(A|\overline{R}) = 0{,}005 \quad P(R) = 0{,}001$$

Se pide

$$\begin{aligned} P(\overline{R}|A) &= \frac{P(A|\overline{R}) \cdot P(\overline{R})}{p(A|R) \cdot P(R) + p(A|\overline{R}) \cdot P(\overline{R})} \\ &= \frac{0{,}005 \cdot 0{,}999}{0{,}99 \cdot 0{,}001 + 0{,}005 \cdot 0{,}999} = 0{,}83 \end{aligned}$$

Es decir, una alarma de alta eficacia con un índice de peligrosidad por noche del 0,001 lleva a que la mayoría de los avisos de las alarmas sean falsas.

Ejercicio 26. Supongamos que tenemos 10 urnas: 5 de ellas son de tipo U_1 y contienen 3 blancas y 3 negras, 3 de ellas son de tipo U_2 y contienen 4 blancas y 2 negras, y el resto son de tipo U_3 y contienen 1 blanca y 5 negras. Se pide:

a). Probabilidad de que una bola extraída al azar de una de las 10 urnas sea blanca.

b). Probabilidad de que habiendo salido una bola negra, proceda de una urna del tipo U_2.

c). Sabiendo que ha salido una bola negra, ¿de qué tipo de urna es más probable que haya salido?

Ejercicio 26. Sea U_i el suceso se elige la urna de tipo U_i, B el suceso se extrae bola blanca y N el suceso se extrae bola negra

a).

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|U_1)\cdot P(U_1) + P(B|U_2)\cdot P(U_2) + P(B|U_3)\cdot P(U_3) \\ &= \frac{3}{6}\cdot\frac{5}{10} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{10} = \frac{29}{60} \end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned} P(U_2|N) &= \frac{P(N|U_2)P(U_2)}{P(N|U_1)P(U_1) + P(N|U_2)P(U_2) + P(N|U_3)P(U_3)} \\ &= \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{10} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10} + \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{10}} = \frac{6}{31} \end{aligned}$$

c). Análogamente se tiene

$$P(U_1|N) = \frac{15}{31} \qquad P(U_3|N) = \frac{10}{31}$$

luego es más probable que haya salido de la urna de tipo U_1.

Ejemplo: Pruebas diagnósticas

Las pruebas o tests de diagnóstico se evalúan con anterioridad sobre dos grupos de individuos: sanos y enfermos. De modo frecuentista se estima:

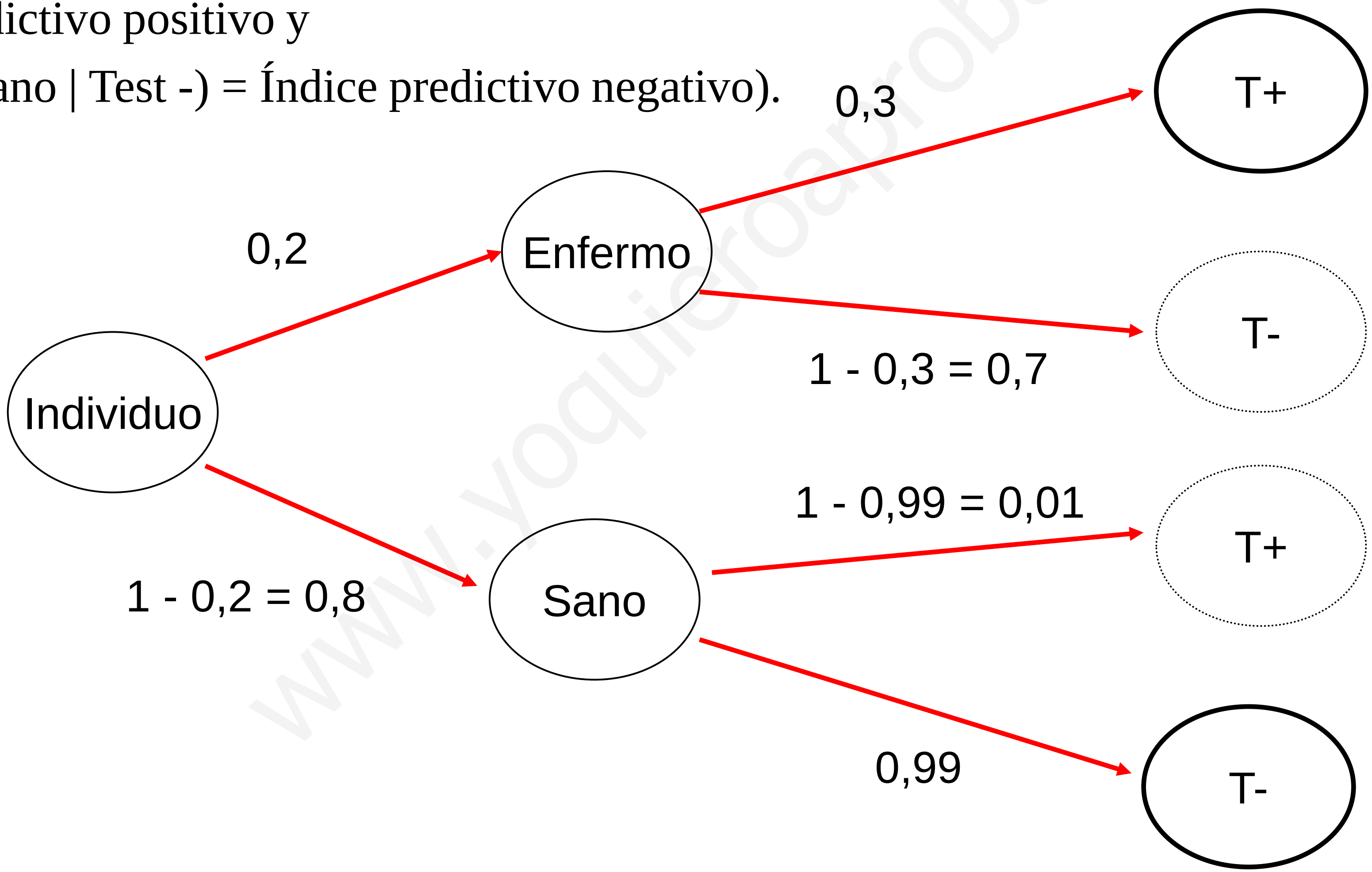
- Sensibilidad (verdaderos +) = Tasa de acierto sobre enfermos.
- Especificidad (verdaderos -) = Tasa de acierto sobre sanos.

A partir de lo anterior y usando el teorema de Bayes, podemos calcular las probabilidades *a posteriori* (en función de los resultados del test) de los llamados índices predictivos:

- P(Enfermo | Test +) = Índice predictivo positivo
- P(Sano | Test -) = Índice predictivo negativo

La diabetes afecta al 20% de los individuos que acuden a una consulta. La presencia de glucosuria se usa como indicador de diabetes. Su sensibilidad (la tasa de aciertos sobre enfermos) es de 0,3 y la especificidad (tasa de aciertos sobre sanos) de 0,99. Calcular los índices predictivos (P(Enfermo | Test +) = Índice predictivo positivo y

P(Sano | Test -) = Índice predictivo negativo).

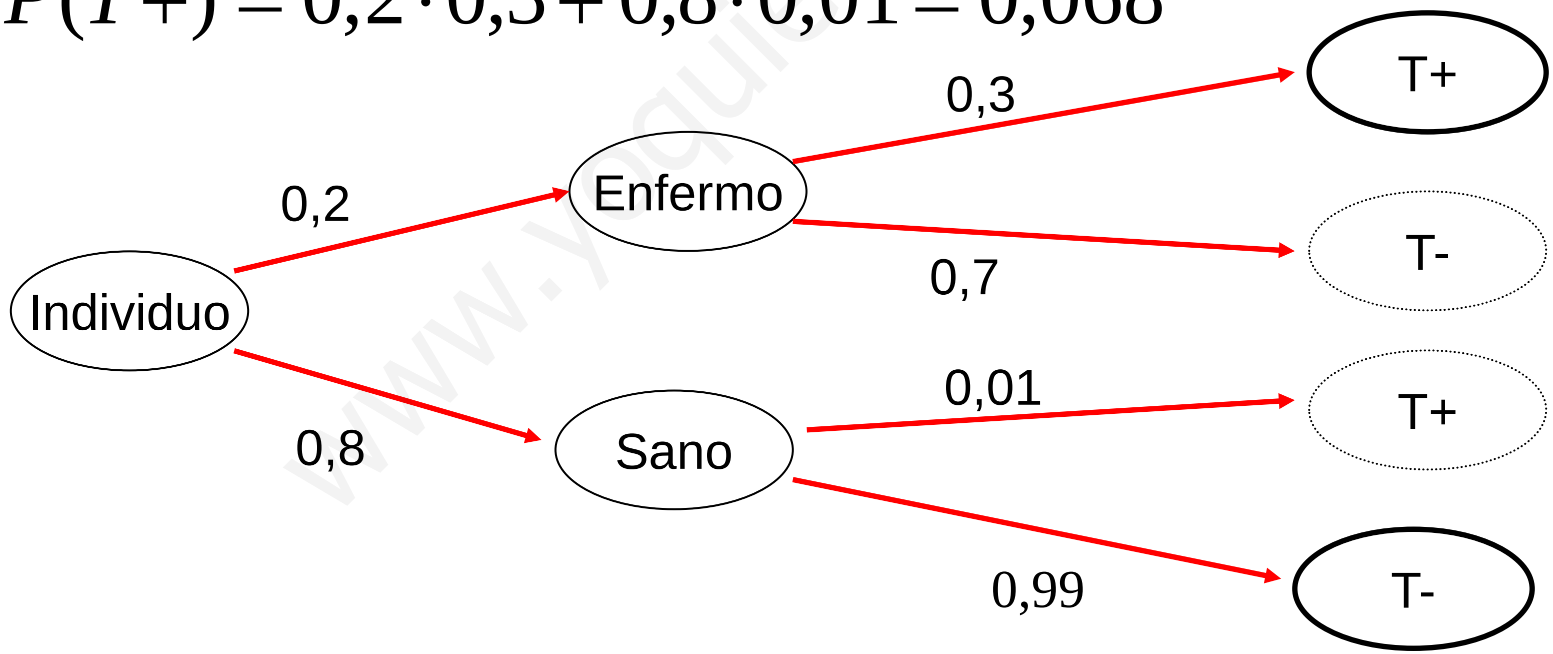


Los índices predictivos son: la probabilidad de que, sabiendo que el test sea positivo, el paciente sea diabético y la probabilidad de que, sabiendo que el test es negativo, el paciente está sano.

$$P(Enf \mid T+) = \frac{P(Enf \cap T+)}{P(T+)} = \frac{0{,}06}{0{,}068} = 0{,}88$$

$$P(Enf \cap T+) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$$

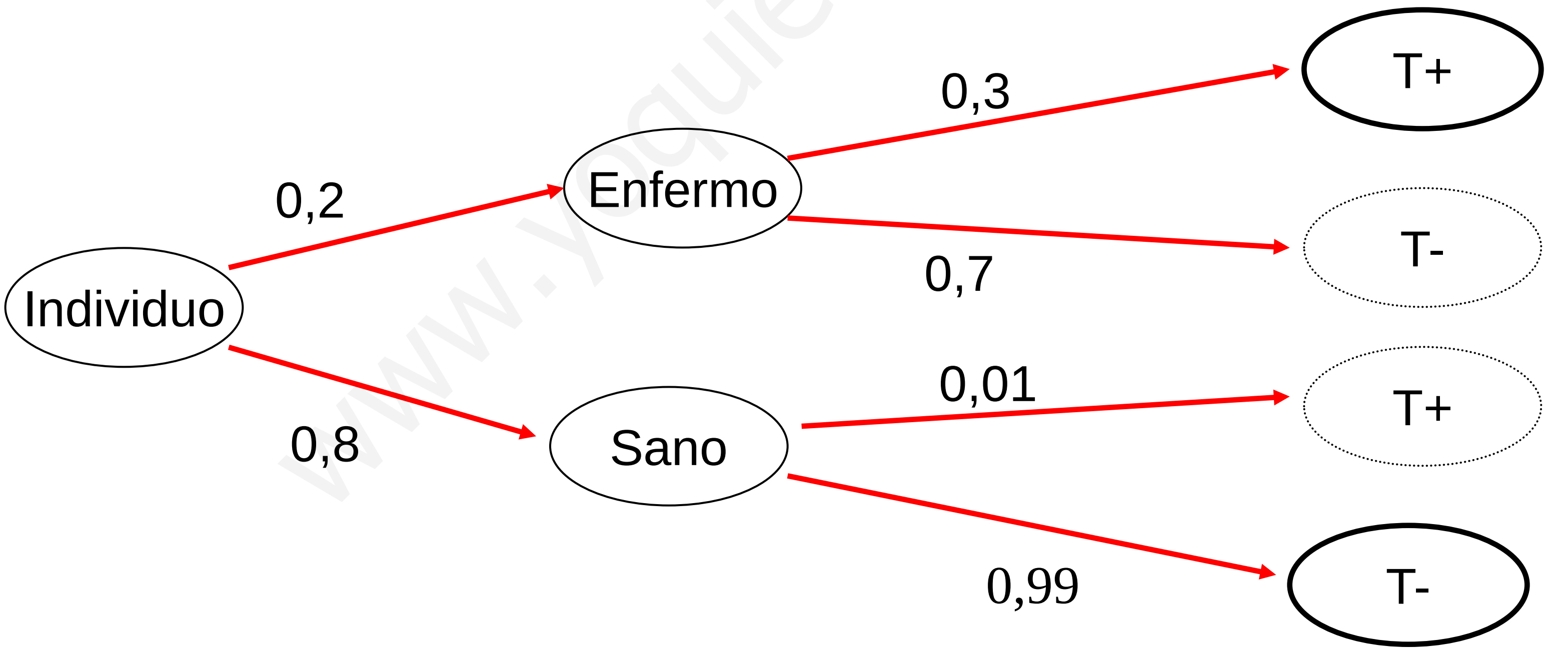
$$P(T+) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}01 = 0{,}068$$



$$P(Sano \mid T-) = \frac{P(Sano \cap T-)}{P(T-)} =$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}99}{0{,}8 \cdot 0{,}99 + 0{,}2 \cdot 0{,}7} = 0{,}85$$

La palabra «azar» procede del árabe "al zhar", nombre con el que se designaban los dados por la flor de azahar que llevaban en sus caras.



Observaciones

- En el ejemplo anterior, al llegar un individuo a la consulta tenemos una idea *a priori* sobre la probabilidad de que tenga una enfermedad.

- A continuación se le pasa una prueba diagnóstica que nos aportará nueva información: Presenta glucosuria o no.

- En función del resultado tenemos una nueva idea (*a posteriori*) sobre la probabilidad de que esté enfermo.
  - Nuestra opinión a priori ha sido modificada por el resultado de un experimento.

-¿Qué probabilidad tengo de estar enfermo?

- En principio un 20%. Le haremos unas pruebas.

- Presenta glucosuria. La probabilidad ahora es del 88%.

La probabilidad de que una mujer con edad comprendida entre los 40-50 tenga cáncer de mama es 0.8%. Si una mujer tiene cáncer de mama, la probabilidad de positivo en test = 90%. Si una mujer no tiene cáncer de mama, la probabilidad de positivo en test = 7%. Supongamos que una paciente da positivo en un test. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cáncer de mama?

$$P(\text{enf}) = 0.008, \quad P(\text{no enf}) = 0.992, \; P(\text{pos} \mid \text{enf}) = 0.90, \quad P(\text{pos} \mid \text{no enf}) = 0.07$$

$$P(\text{enf} \mid \text{pos}) = \frac{P(\text{enf})P(\text{pos} \mid \text{enf})}{P(\text{enf})P(\text{pos} \mid \text{enf}) + P(\text{no enf})P(\text{pos} \mid \text{no enf})} = 0.09$$

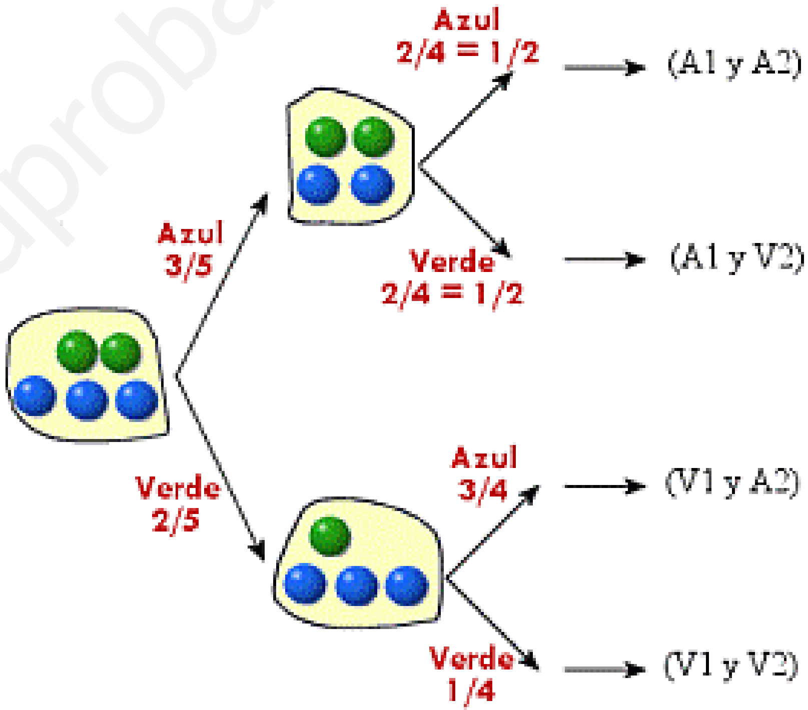
1000 mujeres

8: enfermas — 992: no enfermas

7: positivos — 1: negativo — 69: positivos — 923: negativos

p(enferma | positivo) = 7 / (7+69) = 0.09

En una urna hay 5 bolas, 3 azules y 2 verdes. Se saca una bola de la urna y sin mirarla, se guarda. A continuación se vuelve a sacar otra bola que es verde. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera haya sido verde?
(b) Y si la segunda hubiera sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea verde? (c) ¿Y azul? Nota: Realiza un árbol de sucesos. Llama (A1 y A2), al suceso "sacar azul la primera bola y azul la segunda" y análogamente los restantes: (A1 y V2), (V1 y A2), (V1 y V2).



<u>Probabilidad de que la primera haya sido verde</u>
(en el supuesto que la segunda ha sido verde)
Aplicamos el teorema de Bayes y resulta:

$$p\left(V1/V2\right)=\frac{p(V1 \text{ y } V2)}{p(V2)}=\frac{p(V1 \text{ y } V2)}{p(A1 \text{ y } V2)+p(V1 \text{ y } V2)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$$

<u>Probabilidad de que la primera haya sido verde</u> (en el supuesto que la segunda ha sido azul)Aplicamos el teorema de Bayes y resulta:

$$p\left(V1/A2\right)=\frac{p(V1 \text{ y } A2)}{p(A2)}=\frac{p(V1 \text{ y } A2)}{p(A1 \text{ y } A2)+p(V1 \text{ y } A2)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$$

<u>Probabilidad de que la primera haya sido azul</u>
(en el supuesto que la segunda ha sido azul)
Aplicamos el teorema de Bayes y resulta:

$$p\left(A1/A2\right)=\frac{p(A1 \text{ y } A2)}{p(A2)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

Supongamos que la incidencia del consumo de drogas en la población es del 5%. Hacemos una prueba de drogas, que tiene una fiabilidad del 95%, a un sujeto escogido al azar y el resultado es positivo.
¿Cuál es la probabilidad de que consuma drogas?

$$P(positivo) = \frac{95}{100}\frac{5}{100} + \frac{5}{100}\frac{95}{100} = \frac{95}{1000}$$

$$P(drogadicto \mid positivo) = \frac{P(drogadicto \cap positivo)}{P(positivo)} =$$

$$\frac{\frac{5}{100}\frac{95}{100}}{\frac{95}{1000}} = 0,5$$

7] Una urna contiene cinco dados con sus caras de color blanco o rojo. El dado número i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ tiene i de sus caras blancas y el resto rojas. Se selecciona al azar un dado de la urna, se lanza y sale cara roja. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado sea el i?

Solución

Representemos un suceso elemental como $w = (w_1, w_2)$, donde w_1 es el número de caras blancas del dado (y por tanto el número del dado), y w_2 es el color que se obtiene al lanzar el dado. Así:

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2) : w_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, w_2 \in \{B, R\}\}.$$

Este espacio muestral no es equiprobable, pues $P(\{(1, R)\}) \neq P(\{(5, R)\})$.

La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(w_1 = i | w_2 = R) &= \frac{P(w_1 = i \cap w_2 = R)}{P(w_2 = R)} \\ &= \frac{P(w_2 = R | w_1 = i) \cdot P(w_1 = i)}{\sum_{j=1}^{5} P(w_2 = R | w_1 = j) \cdot P(w_1 = j)} = \\ &= \frac{\frac{6-i}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\sum_{j=1}^{5} \frac{6-j}{6} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{6-i}{6}}{5 - \frac{1}{6} \cdot \sum_{j=1}^{5} j} = \frac{\frac{6-i}{6}}{5 - \frac{1}{6} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2}} \\ &= \frac{\frac{6-i}{6}}{\frac{5}{2}} = \frac{6-i}{15}, i = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

4.2 Encuesta sobre cuestiones delicadas

Es bien conocida la reticencia de la gente a contestar cualquier encuesta, reticencia que se convierte en clara desconfianza y rechazo si el cuestionario aborda lo que podríamos denominar *temas delicados*: situación económica, creencias religiosas, afinidades políticas, costumbres sexuales, consumo de estupefacientes, ... El rechazo y la desconfianza están casi siempre basados en la creencia de una no suficiente garantía de anonimato. Es comprensible, por tanto, el afán de los especialistas en convencer a los encuestados de que el anonimato es absoluto. El teorema de la probabililidad total puede ayudar a ello.

Supongamos que un sociólogo está interesado en conocer el consumo de drogas entre los estudiantes de un Instituto de Bachillerato. Elige 100 estudiantes al azar y para garantizar la confidencialidad de las respuestas, que sin duda redundará en un resultado más fiable, diseña una estrategia consistente en que cada estudiante extrae al azar un bola de un saco o urna que contiene 100 bolas numeradas del 1 al 100, conservándola sin que nadie la vea,

- si el número de la bola elegida está entre el *1* y el *70*, contesta a la pregunta *¿has consumido drogas alguna vez?*,

- si el número de la bola elegida está entre el *71* y el *100*, contesta a la pregunta *¿es par la última cifra de tu DNI?*.

En ambos casos la respuesta se escribe sobre un trozo de papel sin indicar, lógicamente, a cuál de las dos preguntas se está contestando.

Realizado el proceso, las respuestas afirmativas han sido 25 y para estimar la proporción de los que alguna vez han consumido droga aplicamos (6),

$$
\begin{aligned}
P(si) &= P(si|pregunta\ delicada)P(pregunta\ delicada)+ \\
&\quad P(si|pregunta\ intrascendente)P(pregunta\ intrascendente)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo,

$$0.25 = P(si|pregunta\ delicada) \times 0.7 + 0.5 \times 0.3,$$

y despejando,

$$P(si|pregunta\ delicada) = \frac{0.25 - 0.15}{0.7} \approx 0.14$$

Es obvio que $P(pregunta\ intrascendente)$ ha de ser conocida muy aproximadamente, como en el caso de la terminaciones del DNI, que por mitades deben de ser pares o impares.

El Teorema de Bayes se aplica con frecuencia en problemas de paternidad para obtener la evidencia, en términos de probabilidad, que de la misma dan las pruebas. Pero su uso puede ser perverso como muestra el ejemplo que sigue.

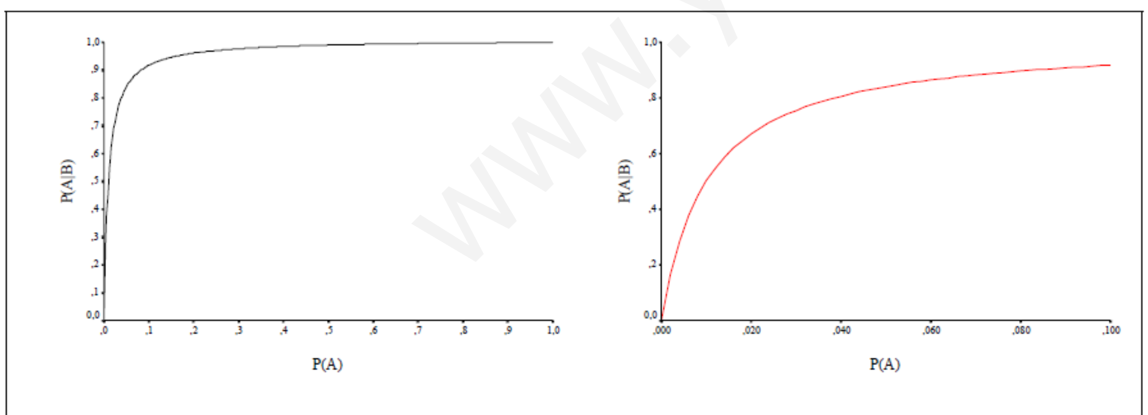
5.2 Padre a cara o cruz

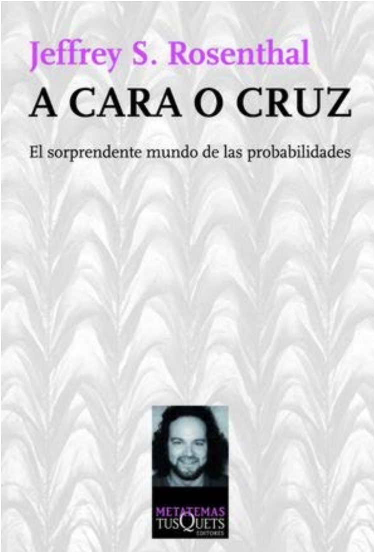
Un hombre fue acusado en un caso de paternidad sobre la base de un marcador genético cuya frecuencia en la población adulta es del 1% y que se transmite con probabilidad 1 de padres a hijos. Tanto el presunto padre como el niño causante del litigio poseían el citado marcador, por lo que el fiscal del caso planteó la conveniencia de obtener *la probabilidad de que el acusado fuera el padre dado que el niño tenía el marcador*. Si $A = \{$*el acusado es el padre*$\}$ y $B = \{$*el niño tiene el marcador*$\}$, la probabilidad se obtuvo aplicando Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}.$$

Es evidente que, de acuerdo con lo dicho anteriormente, $P(B|A) = 1$ y $P(B|A^c) = 0.01$. En cuanto a $P(A)$ y $P(A^c)$ se estimó conveniente que ambas eran iguales a 0.5, valor que trataba de reflejar el desconocimiento que de la posible paternidad se tenía y, puesto que podía ser o no ser el padre, lo lógico parecía asignar igual probabilidad a ambos supuestos. El resultado no pudo ser más concluyente en contra del acusado, porque $P(A|B) \approx 0.99$.

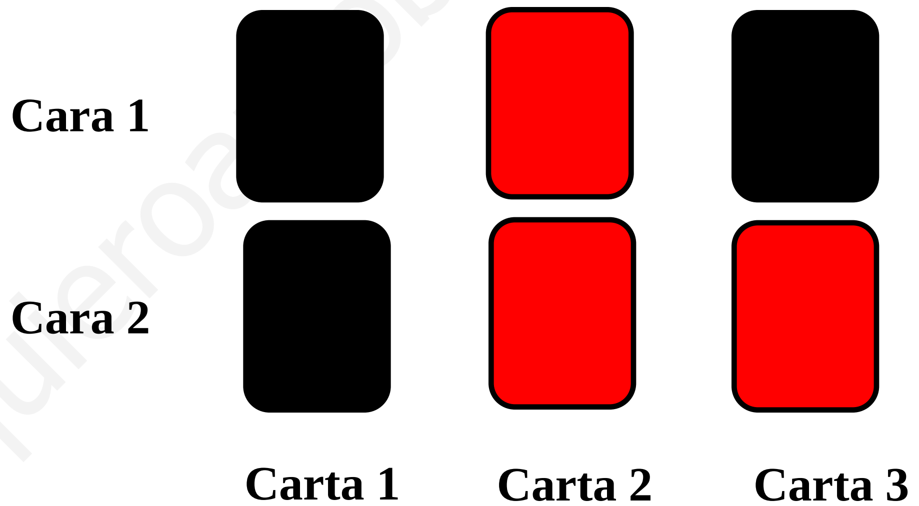
El defensor recurrió y basó su recurso en la asignación de probabilidades a A y A^c. Llevada a sus últimas consecuencias, dijo el defensor, semejante asignación de probabilidades equivalía a declarar padre a cualquier adulto por el procedimiento de *cara* o *cruz*. Una vez más, proseguía el defensor, se confundía ignorancia con equiprobabilidad. Para rematar su discurso obtuvo $P(A|B)$ para distintos valores de $P(A)$ que nosotros hemos representado en las gráficas de la figura 3. La gráfica de la derecha es un detalle de la gráfica de la izquierda para valores de $P(A)$ entre 0 y 0.1 y pone en evidencia la importancia crucial que la elección de $P(A)$ tiene, observándose que valores bajos, y nada hay en contra de que sean posibles, dan lugar a valores de $P(A|B)$ que difícilmente condenan a cualquiera.



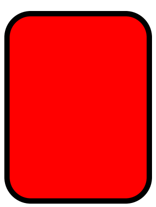


"En el fondo la teoría de la probabilidad es sólo sentido común expresado con números".
Pierre Simon de Laplace

El juego de las tres cartas

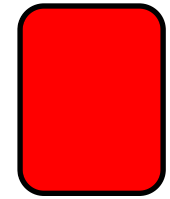


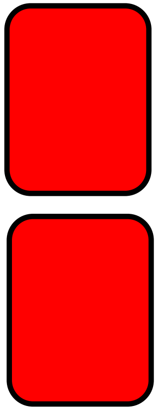
Escogemos una carta al azar.
Supongamos que es:



No es NN. Luego es: RN o RR.
Luego hay una probabilidad de ½ de que la otra cara sea N y de ½ de que sea R. ¿No?

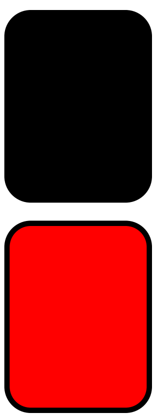
Originalmente las tres cartas tenían la misma probabilidad de ser escogidas: 1/3.
Pero ahora tenemos una nueva información: uno de los lados es R.





Siempre sería R.

Carta 2

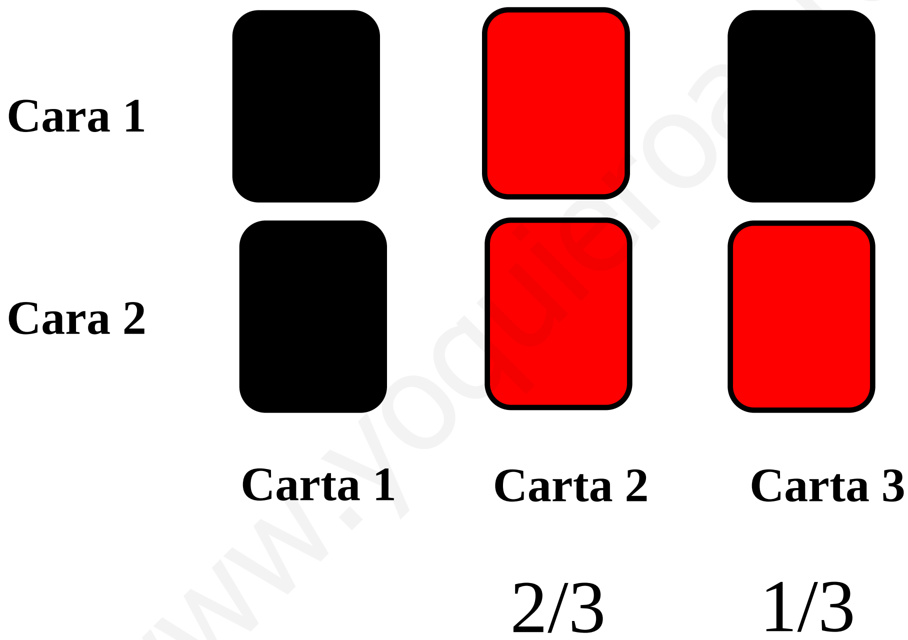


Sería R la mitad de las veces.

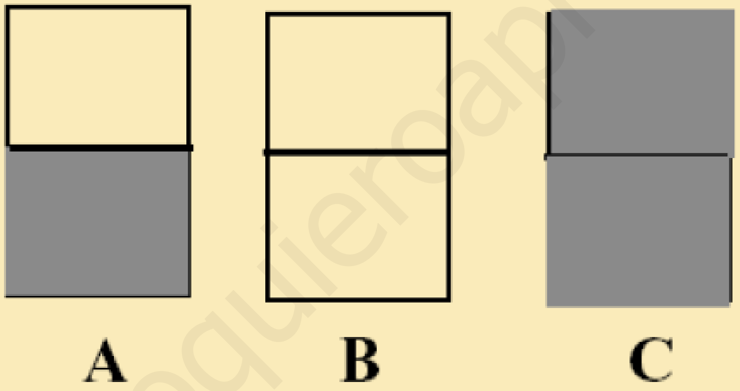
Carta 3

La probabilidad de que sea RR es 2/3.

Otra manera de verlo. Escogemos una cara al azar. Todas tienen la misma probabilidad 1/6. Sale R, luego tiene que ser una de las tres caras R, cada una con la misma probabilidad 1/3. Pero dos casos R pertenecen a la misma carta:



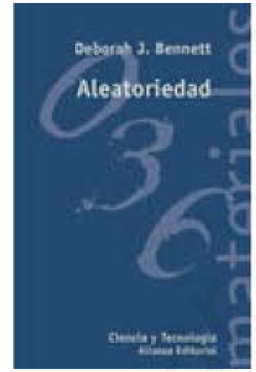
Ejercicio 30. Considérese tres cartas: una con las dos caras negras, otra con ambas caras blancas y la tercera con una blanca y la otra negra. Se elige una carta al azar y se coloca sobre la mesa. La cara superior resulta negra, ¿cuál es la probabilidad de que la cara oculta sea blanca?



$$P(C_3|N) = \frac{P(N|C_3)\cdot P(C_3)}{p(N|C_1)\cdot P(C_1) + p(N|C_2)\cdot P(C_2) + p(N|C_3)\cdot p(C_3)}$$

$$P(C_3|N) = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Si una familia tiene dos hijos y al menos uno de ellos es niña, ¿cuál es la probabilidad de que tenga dos niñas?
M = mujer/niña, H = hombre/niño



Aleatoriedad, Deborah J. Bennett, Alianza Editorial, 2000.

(1) Le preguntamos a una persona si tiene hijos. Contesta que dos. ¿Alguna niña? Y contesta que sí. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos niñas? Respuesta: 1/3.

MM
HM
MH
HH

1/3

(2) Le preguntamos a una persona si tiene hijos. Contesta que dos, uno de 6 y otro de 10 años. ¿El mayor es una niña? Y contesta que sí. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos niñas? Respuesta: 1/2.

MH
MM

Sabemos que el mayor es niña (M)

(3) Le preguntamos a una persona si tiene hijos. Contesta que dos. ¿Alguna niña? Y contesta que sí. Al día siguiente me encuentro a esa persona paseando con una niña. ¿Es tu hija?, pregunto y responde: Sí. Cuál es la probabilidad de que tenga dos niñas? Respuesta: 1/2.

MH
MM

HM
MM

Sabemos que esa que vi (M) es una niña.

Paradoja del carcelero

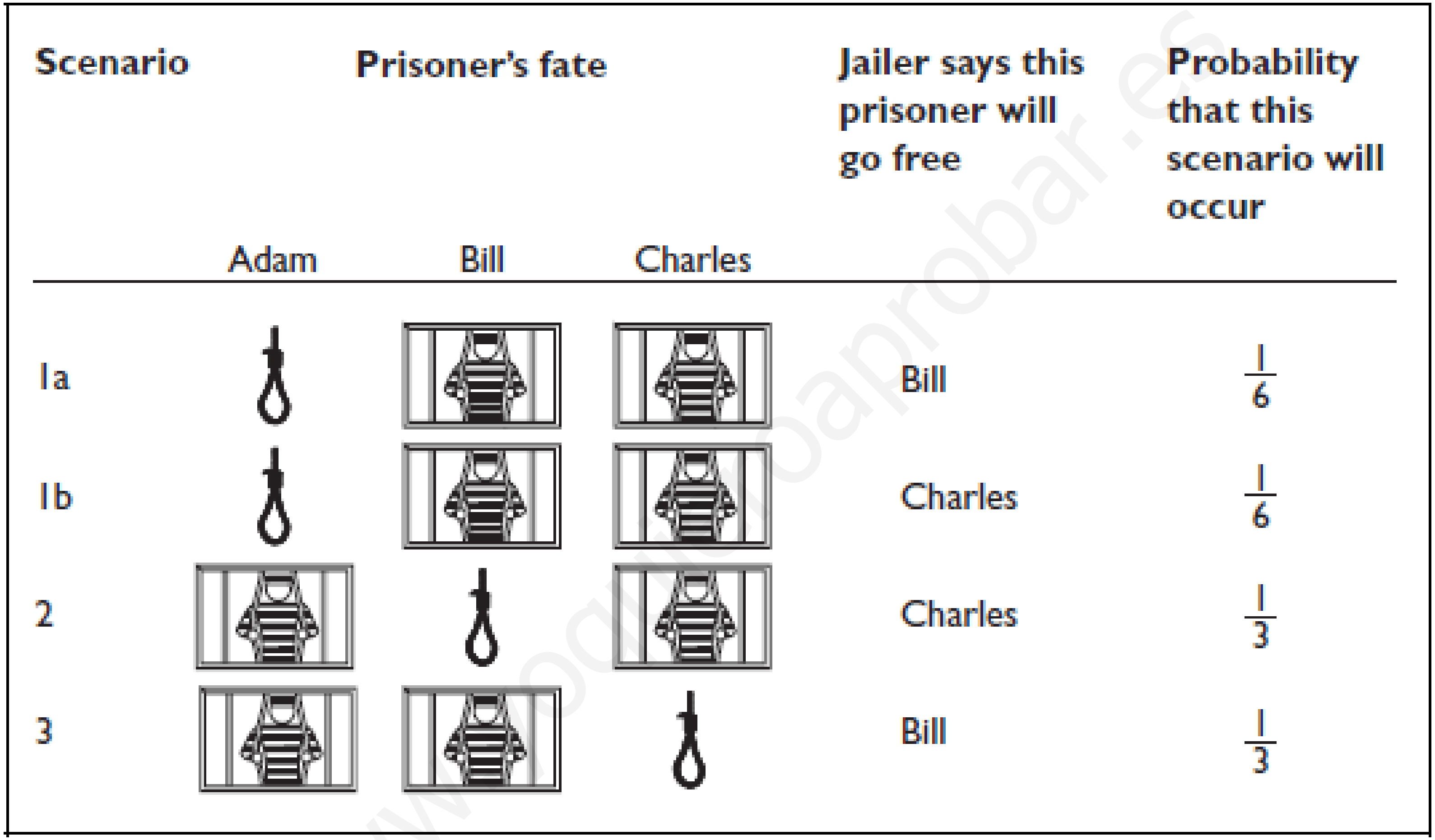


FIGURE 27 The jailer's paradox: If he divulges the name of one of the two prisoners who will go free, will that change the probability of being executed for the remaining two?

Aleatoriedad, Deborah J. Bennett, pág. 137.

9] *Dilema del prisionero.* En una cárcel hay 3 prisioneros (A, B, C) con historiales similares. En un momento dado, los tres solicitan el indulto a un tribunal, y sin conocerse más detalles llega la información al prisionero A de que han concedido el indulto a 2 de los 3 prisioneros. El prisionero A conoce a uno de los miembros del tribunal y puede intentar hacerle una pregunta para obtener algo de información. Sabe que no puede preguntar si él es uno de los dos indultados, pero sí puede pedir que le den el nombre de uno de los otros dos (nunca él) que esté indultado. Pensando un poco concluye que si no hace tal pregunta, entonces la probabilidad de ser uno de los dos indultados es $2/3$, mientras que si la hace obtendrá respuesta y entonces la probabilidad de ser el otro indultado es $1/2$. Por ello, concluye que es mejor no hacer tal pregunta, porque sea cual sea la respuesta, sólo le servirá para disminuir la probabilidad de ser uno de los dos indultados. ¿Dónde está el error de su razonamiento?

Solución

Si no hace la pregunta, entonces un espacio muestral es

$$\Omega = \{w = \{w_1, w_2\} : w_i \in \{A, B, C\}, w_1 \neq w_2\} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\},$$

que es un espacio equiprobable. Dado que el suceso "A es indultado" coincide con $\{\{A, B\}, \{A, C\}\}$, entonces su probabilidad es $2/3$, y por tanto ese cálculo del prisionero es correcto.

Sin embargo, si hace la pregunta, un espacio muestral sería

$$\Omega' = \{w = (\{w_1, w_2\}, w_3) : w_i \in \{A, B, C\}, w_1 \neq w_2, w_3 \in \{w_1, w_2\} \setminus \{A\}\},$$

donde w_1 y w_2 representan los dos presos indultados, y w_3 es el nombre de uno de los indultados que el miembro del tribunal da al preso A. Nótese que:

$$P((\{A,B\},B)) = P((\{A,C\},C)) = \frac{1}{3},$$
$$P((\{B,C\},B)) = P((\{B,C\},C)) = \frac{1}{6},$$

donde se asume que A no es indultado con probabilidad $1/3$ y en tal caso la respuesta puede ser B ó C con igual probabilidad. En consecuencia el suceso "A es indultado" coincide con $\{(\{A,B\},B),(\{A,C\},C)\}$ y por tanto la probabilidad sigue siendo $2/3$. Aquí está su error. En efecto, era de esperar que conocer la respuesta a su pregunta no le diera información sobre la probabilidad de que él mismo fuera indultado, debido al propio enunciado de la pregunta.

¿De qué color son las fichas del saco?

From :: ZTFNews.org Marta Macho Stadler

The Mathematical Recreations of Lewis Carroll: Pillow Problems and a Tangled Tale Reading [Dover, 1958].

Un saco contiene dos fichas, de las que se sabe que pueden ser de color blanco o negro. ¿Puedes prever su color sin sacarlas de la bolsa?

Lewis Carroll afirma que una de las fichas es negra y la otra blanca… y lo argumenta del siguiente modo:

Observación previa: Si la bolsa contuviera dos fichas negras (n) y una blanca (b), la probabilidad de sacar una ficha negra es de 2/3, y es el único caso en el que la probabilidad da este valor.

En la bolsa del problema planteado tenemos dos fichas, así que:
1) la probabilidad de que contenga dos fichas blancas (**suceso B**) es de **1/4**: un caso favorable (b,b) entre los cuatro posibles **(b,b), (b,n), (n,b)** y **(n,n)**;

2) la probabilidad de que el saco contenga una ficha blanca y otra negra (**suceso BN**) es de **1/2**: dos casos favorables (b,n) y (n,b) entre los cuatro posibles **(b,b), (b,n), (n,b)** y **(n,n)**;

3) la probabilidad de que el saco contenga dos fichas negras (**suceso N**) es de **1/4**: un caso favorable (n,n) entre los cuatro posibles **(b,b), (b,n), (n,b)** y **(n,n).**

Es claro que **{B,BN,N} es un sistema completo de eventos**.

Ahora **introducimos una ficha negra en la bolsa y llamamos A al evento "se saca una ficha negra de la bolsa que contiene las tres fichas"**. Y Carroll sigue argumentando… Por el teorema de la probabilidad total:

P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|BN)P(BN) + P(A|N)P(N) = 1/3 x 1/4 + 2/3 x 1/2 + 1/4 x 1 = 2/3.

Es decir, es la misma que la probabilidad de extraer una ficha negra cuando el saco contiene dos fichas negras y una blanca…, así se concluye que antes de añadir la ficha negra, la bolsa contenía una ficha negra y una blanca.

Lewis Carroll da esta solución aparentemente seria al problema, y lo remata con esta frase: «To the casual reader it may seem abnormal, and even paradoxical; but I would have such a reader ask himself, candidly, the question "Is not, Life itself a Paradox?".

The Monty Hall Problem

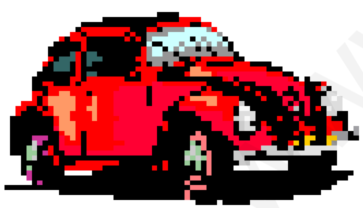
Let´s Make a Deal fue un famoso concurso en las décadas 60-70 de la televisión de EEUU presentado por Monty Hall y Carol Merril.

http://gaussianos.com/marilyn-vos-savant-la-mujer-que-provoco-el-error-de-erdos/

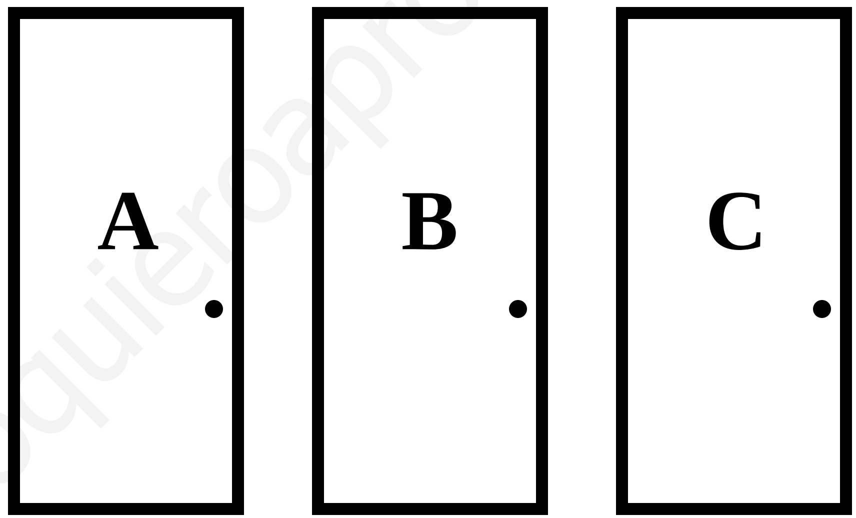
¡Bienvenidos al show de Monty Hall!

Detrás de una de estas puertas hay un coche.

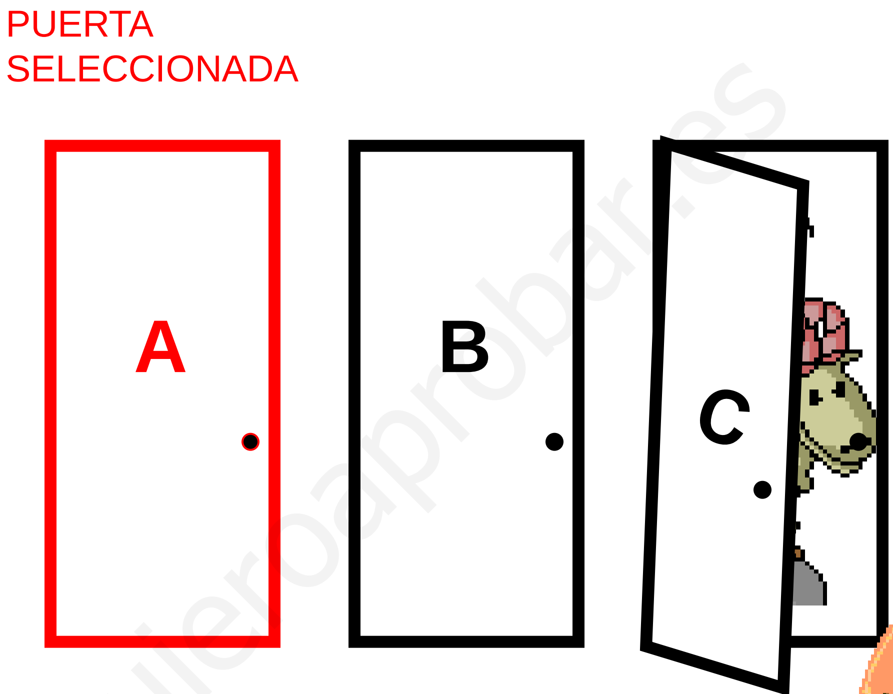
Y detrás de las dos restantes hay una cabra.



Nuestro concursante seleccionará una puerta ...



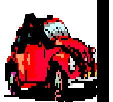
Monty Hall (que conoce dónde está el coche) abre la puerta C.



Ahora sabemos que el coche está o bien en A, o bien en B.

Monty Hall nos permite cambiar de elección si queremos …

¿Es más probable ganar el coche si cambiamos de puerta? (En este caso de A a B).

Si el concursante CAMBIA su elección original	**A** B C	A **B** C	A B **C**
 B C	Pierde	Gana	Gana
A  C	Gana	Pierde	Gana
A B 	Gana	Gana	Pierde

Si el concursante CAMBIA su elección original gana 6 veces de las 9: su probabilidad de ganar es 6/9 = 2/3. Si no cambia, su probabilidad de ganar es de 3/9 = 1/3. ¡Tiene el doble de posibilidades de ganar si cambia de puerta!

Pierde	**Gana**	**Gana**
Gana	**Pierde**	**Gana**
Gana	**Gana**	**Pierde**

Juega y compruébalo estadísticamente en http://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html

Una manera intuitiva de comprender este resultado anti-intuitivo: Cuando elijo la puerta, en promedio, dos de cada tres veces detrás de ella habrá una cabra. O sea, la mayor parte de las veces habré elegido una puerta con cabra. Después Monthy me enseña una puerta con cabra. Así que es razonable cambiar mi elección previa…

Podemos probar este resultado sin hacer una lista de todos los casos. Usando la noción de **probabilidad condicional**. Recuerda que la probabilidad condicional nos muestra cómo la ocurrencia de un suceso afecta a la probabilidad de otro.

En el problema de Monthy Hall, si nosotros escogemos la puerta A y Monthy abre la puerta B, por ejemplo, la pregunta que nos estamos haciendo es: ¿Cuál es la probabilidad de ganar si cambio a la puerta C, teniendo la *información adicional* de que el coche no está en la B?

Lo dejamos como ejercicio.

Asumamos sin pérdida de generalidad que:

- Inicialmente el concursante escoge la puerta A.
- Y Monty abre la B.

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

$$p(A\cap B)=p(B)\cdot p(A|B)$$

(i) El concursante NO cambia de opción:

$$p(A|\text{Monty abre }B)=\frac{p(A\cap \text{Monty abre }B)}{p(\text{Monty abre }B)}$$

$$p(\#3 \mid \text{opened } \#2) = \frac{p(\#3 \cap \text{opened } \#2)}{p(\text{opened } \#2)}$$

Rules:

1. $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

2. $p(A \cap B) = p(B) \times p(A \mid B)$

$$p(A \mid \text{Monty abre } B) = \frac{p(A \cap \text{Monty abre } B)}{p(\text{Monty abre } B)}$$

$$p(\#1 \cap \text{opened } \#2) = p(\text{opened } \#2 \mid \#1) \times p(\#1)$$ (By rule 2.)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$ (If the prize is behind door #1, Monty can open either #2 or #3.)

$$p(\#3 \cap \text{opened } \#2) = p(\text{opened } \#2 \mid \#3) \times p(\#3)$$ (By rule 2.)

$$= 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$ (If the prize is behind door #3, Monty **must** open door #2.)

$$p(\#1 \mid \text{opened } \#2) = \frac{p(\#1 \cap \text{opened } \#2)}{p(\text{opened } \#2)} = \frac{1/6}{p(\text{opened } \#2)}$$

$$p(\#3 \mid \text{opened } \#2) = \frac{p(\#3 \cap \text{opened } \#2)}{p(\text{opened } \#2)} = \frac{1/3}{p(\text{opened } \#2)}$$

$$p(\text{opened } \#2) = p(\text{opened } \#2 \cap \#1) + p(\text{opened } \#2 \cap \#2) + p(\text{opened } \#2 \cap \#3)$$

$$= \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

So:

$$p(\#1 \mid \text{opened } \#2) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad p(\#3 \mid \text{opened } \#2) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

- **Definición**

$$P\left(S_1|_S\right) = \frac{P\left(S_1 \cap S\right)}{P\left(S\right)} \quad \text{siempre que} \quad P\left(S\right) > 0$$

- **Regla de la multiplicación**

Dados n sucesos, $S_1, \ldots, S_n$, se verifica

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) = P\left(S_1\right) P\left(S_2|_{S_1}\right) P\left(S_3|_{S_1 \cap S_2}\right) \cdots P\left(S_n|_{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{n-1}}\right)$$

- **Teorema de la probabilidad total**

Dados un suceso A y n sucesos, $S_1, \ldots, S_n$, disjuntos dos a dos, $S_i \cap S_j = \emptyset$, tales que $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = E$, se verifica

$$P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A|_{S_i}\right) P\left(S_i\right)$$

- **Teorema de Bayes**

Dados un suceso A y n sucesos, $S_1, \ldots, S_n$, disjuntos dos a dos, $S_i \cap S_j = \emptyset$, tales que $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = E$, se verifica

$$P\left(S_i|_A\right) = \frac{P\left(A|_{S_i}\right) P\left(S_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A|_{S_i}\right) P\left(S_i\right)}$$

Problemas resueltos

1. La probabilidad de que un hombre casado vea cierto programa de televisión es 0,4 y la probabilidad de que una mujer casada vea el programa es 0,5. La probabilidad de que un hombre vea el programa, dado que su esposa lo hace, es 0,7.

Encuentre la probabilidad de que:

a) un matrimonio vea el programa.

Respuesta:

Sean

$$P(\text{Hombre vea TV}) = P(\text{HVT}) = 0{,}4$$

$$P(\text{Mujer vea TV}) = P(\text{MVT}) = 0{,}5$$

$$P(\text{HTV/MTV}) = 0{,}7$$

La probabilidad de que un matrimonio vea el programa es la probabilidad de que el hombre y la mujer vean el programa, es decir la probabilidad de la intersección:

$$P(\text{HTV} \cap \text{MTV}) = P(\text{HTV/MTV}) * P(\text{MTV}) = 0,7 * 0,5 = 0,35$$

b) una esposa vea el programa dado que su esposo lo ve.

Respuesta:
La probabilidad condicional pedida es:

$$P(M\mathrm{TV}/\mathrm{HTV}) = \frac{P(\mathrm{MTV} \cap \mathrm{HTV})}{P(\mathrm{HTV})} = \frac{0{,}35}{0{,}4} = 0{,}875$$

c) al menos una persona de un matrimonio vea el programa

Respuesta: Usando la regla de la suma, la probabilidad es:

$$P(\mathrm{MTV} \cup \mathrm{HTV}) = P(\mathrm{HTV}) + P(\mathrm{MTV}) - P(\mathrm{HTV} \cap \mathrm{MTV}) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}35 = 0{,}55$$

2. Suponga que se estudia si el color del pelo está asociado al color de los ojos. Se analizaron 300 personas seleccionadas aleatoriamente con los siguientes resultados:

Color del pelo	Color de los ojos		
	Café	Azul	Otro
Negro	70	30	20
Rubio	20	110	50

a) Si se selecciona una de estas personas al azar, encuentre la probabilidad de que la persona tenga el pelo negro, dado que tiene los ojos café.

Solución:

Primero asignamos letras a los eventos y calculamos los totales de la tabla:

	C	**A**	**O**	**Total**
N	70	30	20	**120**
R	20	110	50	**180**
Total	**90**	**140**	**70**	**300**

La probabilidad condicional pedida es:

$$P(N / C) = \frac{P(\mathrm{N} \cap \mathrm{C})}{P(\mathrm{C})} = \frac{70/300}{90/300} = \frac{70}{90} = 0{,}78$$

Es la probabilidad que la persona tenga el pelo negro dado que tiene ojos café.

b) ¿Son los eventos tener el pelo rubio y tener los ojos azules independientes? Justifique su respuesta

Para que sean independientes se tiene que cumplir que:

$$\mathrm{P(R / A) = P(R)}$$

$$\frac{110}{140} \quad ? \quad \frac{180}{300}$$

$$0.79 > 0.6$$

<u>Por lo tanto NO son eventos independientes</u>

c) ¿Cuántas persona rubias de ojos azules esperaría encontrar en este grupo si los eventos fueran independientes? Justifique su respuesta.

Si fueran independientes:

$$P(R \cap A) = P(R)P(A)$$

$$P(R \cap A) = \frac{180}{300} * \frac{140}{300}$$

$$P(R \cap A) = 0.6 * 0.47$$

$$P(R \cap A) = 0.28$$

Por lo tanto observaríamos 28% es decir 84 personas rubias de ajos azules.

Una empresa de trabajo temporal ha realizado un amplio estudio sobre los tipos de empleo solicitados por los estudiantes de Bachiller, Formación Profesional y Universitarios. El informe clasifica estos solicitantes de empleo como cualificados o no para los trabajos que solicitan, y de los datos que contiene se desprende que sólo el 25 % estaban cualificados para el trabajo que solicitaban, de los cuales, un 20 % eran estudiantes universitarios, un 30 % estudiaban Formación Profesional y un 50 % Bachillerato. La situación entre los no cualificados es diferente: un 40 % de ellos era estudiante universitario, otro 40 % estudiaba Formación Profesional y sólo un 20 % se encontraba en Bachillerato.

a) ¿Qué porcentaje de los estudiantes se encontraban en Bachillerato y estaban cualificados para los empleos que solicitaban?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos estudiantes que solicitaba empleo estudiara Formación Profesional?

c) Entre los estudiantes universitarios que solicitaron empleo, ¿qué porcentaje no estaba cualificado para los puestos de trabajo que solicitaban?

Definimos los siguientes sucesos:

$$\begin{aligned}
C &\equiv \text{Estar cualificado para los trabajos que se solicita}\\
U &\equiv \text{Ser Universitario}\\
F &\equiv \text{Ser de Formación Profesional}\\
B &\equiv \text{Ser de Bachillerato}
\end{aligned}$$

a)

$$P(B \cap C) = P(C) \cdot P(B \mid C) = 0.25 \cdot 0.05 = 0.125 \Rightarrow 12.5\,\%$$

b)

$$P(F) = P(F \mid C) \cdot P(C) + P(F \mid \overline{C}) \cdot P(\overline{C}) = 0.3 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 0.75 = 0.375$$

c)

$$\begin{aligned}
P(C \mid U) &= \frac{P(U \mid \overline{C}) \cdot P(\overline{C})}{P(U \mid C) \cdot P(C) + P(U \mid \overline{C}) \cdot P(\overline{C})}\\
&= \frac{0.4 \cdot 0.75}{0.2 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 0.75} = 0.857 \Longrightarrow 85.7\,\%
\end{aligned}$$

Una compañía telefónica ha realizado un estudio para conocer el número de intentos necesarios para conseguir linea al llamar por teléfono a una entidad bancaria. El estudio consiste en llamar sucesivas veces de forma que, si se consigue línea, se acaba, y si no se consigue se vuelve a intentar. Finalmente se ha comprobado que

$$\Pr\left(A_{k+1}|A_k\right) = \frac{k}{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

donde $A_k =$"en el k-ésimo intento de llamada el teléfono comunica."

a) *Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas (justifica tus respuestas):*

1) *A_k y A_{k+1} son independientes.* Falso, porque si no sucede A_k, A_{k+1} es imposible, mientras que en caso contrario tiene probabilidad $k/(k+1)$.
2) *A_k y A_{k+1} son disjuntos, es decir si $A_k \cap A_{k+1} = \varnothing$.* Falso, porque si sucede A_{k+1} sabemos seguro que ha ocurrido A_k (y además que ha vuelto a comunicar): $A_k \cap A_{k+1} = A_{k+1}$
3) *A_k está incluido en A_{k+1}.* Verdadero.
4) *A_{k+1} está incluido en A_k.* Falso: A_{k+1} incluye además que el teléfono volvió a comunicar.

b) *Si* $\Pr(A_1) = 0{,}3$, *calcula* $\Pr(A_2)$ *y* $\Pr(A_3)$.

Tenemos que

$$\Pr(A_2|A_1) = \frac{\Pr(A_2 \cap A_1)}{\Pr(A_1)} = \frac{\Pr(A_2)}{\Pr(A_1)} = \frac{1}{2}$$

por lo que

$$\Pr(A_2) = \frac{1}{2}\Pr(A_1) = \frac{1}{2}0{,}3 = 0{,}15.$$

Además, se obtiene que

$$\Pr(A_3) = \frac{2}{3}\Pr(A_2) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\Pr(A_1) = 0{,}1.$$

c) *Si la VA* X *está definida como el número de llamadas que tiene que realizar un usuario para poder establecer comunicación con el banco, calcula la probabilidad de que* $X = 3$.

Tenemos que si $X = 3$, entonces ha ocurrido A_2, pero no A_3, por tanto

$$\begin{aligned} \Pr(X &= 3) = \Pr\left(A_2 \cap \bar{A}_3\right) \\ &= \Pr\left(\bar{A}_3|A_2\right)\Pr(A_2) \\ &= [1 - \Pr(A_3|A_2)]\Pr(A_2) \\ &= \left[1 - \frac{2}{3}\right]0{,}3\frac{1}{2} = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

En el circuito eléctrico de 6 componentes

la probabilidad de que funcione cada uno de los componentes, independiente de los demás, es

$$\begin{aligned}\Pr(C_1) &= \Pr(C_4) = \Pr(C_5) = 0.9 \\ \Pr(C_2) &= \Pr(C_3) = \Pr(C_6) = 0.85\end{aligned}$$

(a) *Calcular la probabilidad de que el circuito funcione.*

Si $R_i =$ "el componente i-ésimo funciona" y $R =$ "el sistema funciona",

$$\begin{aligned}\Pr(R) &= \Pr(R_1 \text{ y } [R_2 \text{ ó } R_3] \text{ y } [(R_4 \text{ y } R_5) \text{ ó } R_6]) \\ &= \Pr(R_1)\Pr(R_2 \cup R_3)\Pr((R_4 \cap R_5) \cup R_6).\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\Pr(R_2 \cup R_3) &= \Pr(R_2) + \Pr(R_3) - \Pr(R_2)\Pr(R_3) \\ &= 0.9775 \\ \Pr((R_4 \cap R_5) \cup R_6) &= \Pr(R_4 \cap R_5) + \Pr(R_6) - \Pr((R_4 \cap R_5))\Pr(R_6) \\ &= 0.9^2 + 0.85 - 0.9^2 \cdot 0.85 = 0.8547\end{aligned}$$

por lo que

$$\Pr(R) = 0.9 \cdot 0.9775 \cdot 0.9715 = 08547$$

(b) *Calcular la probabilidad de que el circuito funcione sabiendo que el componente C_5 funciona.*

El sistema es el mismo, pero con $\Pr(C_5) = 1$, por lo que

$$\begin{aligned}\Pr\left((R_4 \cap R_5) \cup R_6\right) &= \Pr\left(R_4 \cap R_5\right) + \Pr\left(R_6\right) - \Pr\left((R_4 \cap R_5)\right)\Pr\left(R_6\right) \\ &= 0.9 + 0.85 - 0.9 \cdot 0.85 = 0.985\end{aligned}$$

y por tanto

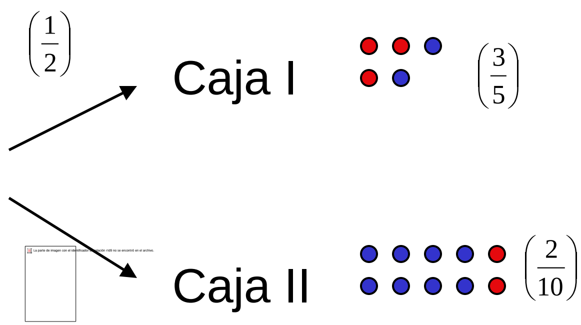
$$\Pr\left(R|R_5\right) = 0.9 \cdot 0.9775 \cdot 0.985 = 0.8666.$$

(c) *Calcular la probabilidad de que el componente C_5 funcione si sabemos que el circuito ha funcionado.*

$$\Pr\left(R_5|R\right) = \frac{\Pr\left(R_5 \cap R\right)}{\Pr\left(R\right)} = \frac{\Pr\left(R|R_5\right)\Pr\left(R_5\right)}{\Pr\left(R\right)} = \frac{0.8666 \cdot 0.9}{0.8547} = 0.91253.$$

2/ Se lanza una moneda si sale cara se saca una canica de la caja I que contiene 3 rojas y 2 azules, si sale cruz se saca una canica de la caja II que contiene 2 rojas y 8 azules. a) Determinar la probabilidad de que se saque una canica roja. b) Habiendo sacado bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido cara?

a)



$$P = P(I)P(R\mid I) + P(II)P(R\mid II) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2+8}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)$$

b)

$$P = \left(\frac{P(I)P(R\mid I)}{P(I)P(R\mid I) + P(II)P(R\mid II)}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2+8}\right)} = \frac{3}{4}$$

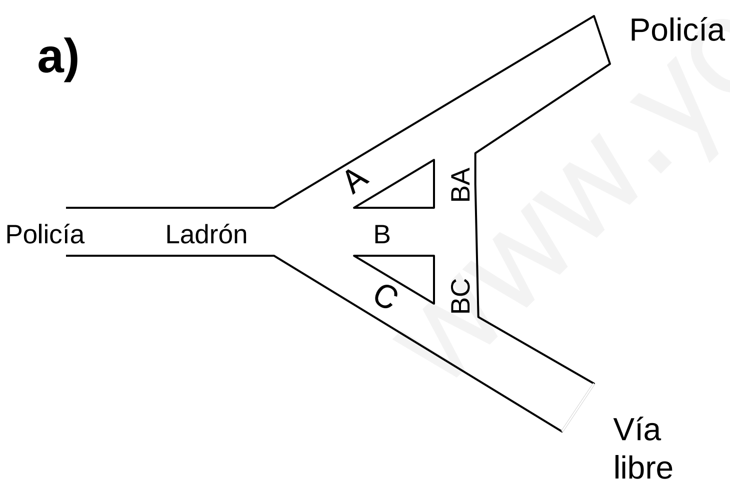
8/ Un ladrón es perseguido por un coche de policía y al llegar a un determinado cruce se encuentra tres posibles calles por las que huir (A, B y C), de tal manera que las dos ultimas son tan estrechas que por ellas no cabe el coche de policía, de lo cual el ladrón no se da cuenta

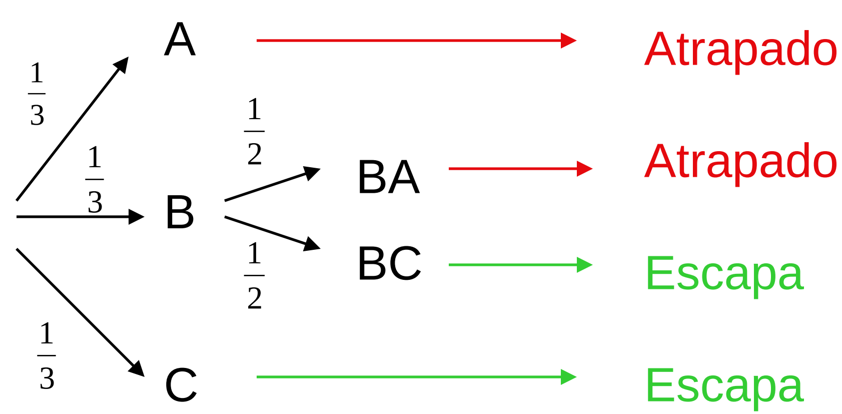
Si huye por la calle A le atrapan seguro puesto que la final de la misma hay otra patrulla de policía. Si huye por la calle C se escapa seguro puesto que no está vigilada. Si huye por la calle B se encontrará que esta se bifurca en dos callejuelas: la BA, que conduce a A y la BC que conduce a C-

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el ladrón sea atrapado?

b) Sabiendo que escapó, ¿cuál es la probabilidad de que huyera por la C entrando por la B y llegando a C por la callejuela BC?

a)





$$P(\text{atraparle}) = P(\text{A}) \times P(\text{atraparle en A}) +$$
$$+ P(\text{B}) \times \left[P(\text{BA}) \times P(\text{atraparle en BA}) + P(\text{BC}) \times P(\text{atraparle en BC}) \right] +$$
$$+ P(\text{C}) \times P(\text{atraparle en C}) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 \right] + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

b)

$$P(\text{escapar por BC}) = \frac{P(\text{B}) \times P(\text{BC}) \times P(\text{escapar C})}{P(\text{escapar})} = \frac{\frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2} \bullet 1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{escapar}) = 1 - P(\text{ser atrapado}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

13/ Dados los sucesos A y B , tales que P(A)=0,4 y P(B)=0,3 y P(A∩B)=0,1 , calcúlense las siguientes probabilidades:

a) **P(**$\overline{A}/\overline{B}$**)**
b) **P(**A/A U B**)**
c) **P(**A/A ∩ B**)**
d) **P(**$\overline{A}$/B**)**

a)

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})};(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cup B)=E$$

$$P((\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cup B))=P(\overline{A}\cap\overline{B})+P(A\cup B)=P(E)=1$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=$$

$$1-(0,4+0,3-0,1)=0,4$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,3=0,7\ ;\ P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{0,4}{0,7}=\frac{4}{7}$$

b)

$$P(A/A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P((A\cap A)\cup P(A\cap B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cup(A\cap B))}{P(A\cup B)}=$$

$$\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0,4}{0,6}=\frac{2}{3}$$

c)

$$P(A/A\cap B)=\frac{P(A\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=1$$

d)

$$P(\overline{A}/B)=1-P(A/B),\ \text{ya que }(A/B)\cup(\overline{A}/B)=E$$

$$P(\overline{A}/B)=1-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-\frac{0,1}{0,3}=\frac{2}{3}$$

17/ En unos laboratorios se preparan tres vacunas contra la misma enfermedad. Las probabilidades de obtener en el mercado cada una de ellas son: vacuna 1=1/6; vacuna 2=1/3; vacuna 3=1/2. Las probabilidades de inmunidad con cada una son: vacuna 1=0,90; vacuna 2=0,94; vacuna 3=0,88. Calcúlese la probabilidad de que, utilizando cualquiera de ellas, el sujeto vacunado resulte inmune.

Para calcular la probabilidad de inmunización aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(I) = P(V_1)P(I/V_1) + P(V_2)P(I/V_2) + P(V_3)P(I/V_3) =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 0,90 + \frac{1}{3}\cdot 0,94 + \frac{1}{2}\cdot 0,88 = 0,903$$

19/ Sean las urnas de bolas U1 = (5b, 8n) y U2 = (6b, 9r). Se toma una bola de U1 y se pasa a U2 y seguidamente una de U2 y se pasa a U1. ¿cuál es la probabilidad de que esta última sea roja?
(b = bola blanca, n = bola negra, r = bola roja)

Las posibles dobles extracciones de U1 son: bb, br, nn, nb y nr ; cuyas probabilidades respectivas son:

$$\frac{5}{13}\cdot\frac{7}{16},\frac{5}{13}\cdot\frac{9}{16},\frac{8}{13}\cdot\frac{1}{16},\frac{8}{13}\cdot\frac{6}{16}\ y\ \frac{8}{13}\cdot\frac{9}{16}$$

Sea B el suceso cuya probabilidad queremos calcular. Por el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$$P(B)=P(B/bb)P(bb)+P(B/br)P(br)+P(B/nn)P(nn)+P(B/nb)P(nb)+$$

$$+P(B/nr)P(nr)=0\cdot\frac{35}{208}+\frac{1}{13}\cdot\frac{45}{208}+0\cdot\frac{8}{208}+0\cdot\frac{48}{208}+\frac{1}{13}\cdot\frac{72}{208}=\frac{117}{2704}=0,043$$

20/ Un test detecta la presencia de un cierto tipo T de bacterias en el agua con probabilidad 0,9 en caso de haberlas. Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad 0,8. sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de tipo T es 0,2 , calcular la probabilidad:

a) De que realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo
b) Ídem cuando del resultado del test es negativo
c) De que haya bacterias y el test sea positivo
d) De que, o haya bacterias, o el test sea positivo

Designaremos por T el suceso "que haya bacterias tipo T" y por C el suceso "el test dio positivo".

a) Por el teorema de Bayes:

$$P(T/C)=\frac{P(C/T)P(T)}{P(C/T)P(T)+P(C/\overline{T})P(\overline{T})}=\frac{0,9\cdot 0,2}{0,9\cdot 0,2+0,2\cdot 0,8}=\frac{9}{17}$$

b) $$P(T/\overline{C})=\frac{P(\overline{C}/T)P(T)}{P(\overline{C}/T)P(T)+P(\overline{C}/\overline{T})P(\overline{T})}=\frac{0,1\cdot 0,2}{0,1\cdot 0,2+0,8\cdot 0,8}=\frac{0,02}{0,66}=\frac{1}{33}$$

c) $P(T\cap C)=P(T)P(C/T)=0,2\cdot 0,9=0,18$

d)

$$P(T\cup C)=P(T)+P(C)-P(T\cap C)=0,2+0,34-0,18=0,36$$

ya que la probabilidad de que el test sea positivo es:

$$P(C)=P(C/T)P(T)+P(C/\overline{T})P(\overline{T})=0,9\cdot 0,2+0,2\cdot 0,8=0,34$$

21/ A un puesto aduanero llegan periódicamente misiones diplomáticas procedentes de un determinado país y que están constituidas por 10 miembros. El citado país es un gran productor de marihuana, circunstancia que, de vez en cuando, es aprovechada por sus misiones diplomáticas para introducir algún que otro cargamento en el país que visitan, siendo la forma de hacerlo el que dos de los diez miembros lleven en sus maletas la hierba.
Los aduaneros tienen ya información del truco, pero, para no producir incidentes diplomáticos, se limitan a inspeccionar dos de las diez maletas dejando pasar a la misión si en las maletas inspeccionadas no encuentran droga. Su experiencia les dice además que el 10% de las misiones portan la droga.
Si una misión inspeccionada no arroja resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que realmente dicha misión no lleve droga alguna?

Denominaremos:
A1 al suceso “la delegación porta droga”
A2 al suceso “la delegación no lleva droga”
B al suceso “una misión inspeccionada arroja resultado negativo”

Conocemos:

$$P(A_1) = 0{,}1 \quad P(A_2) = 0{,}9$$

$$P(B/A_1) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{45} \qquad P(B/A_2) = 1$$

Y nos pide P(A2/B). Esta probabilidad podemos calcularla con ayuda del teorema de Bayes:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} = 0{,}9353$$

22/ Una caja contiene 3 monedas, 2 normales y una con dos caras. Se elige una moneda al azar y se efectúa una tirada. Si sale cara se tira otra vez. Si sale cruz se elige una de las otras dos que quedan en la caja y se tira. Se pide:

a) **Probabilidad de que hayan salido dos caras**
b) **En este caso, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda que se ha lanzado dos veces sea la que tiene dos caras?**
c) **¿cuál es la probabilidad de que salgan dos cruces?**

a) $$P(\text{dos caras}) = P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0,5$$

(donde A1 es el suceso consistente en que la moneda extraída sea normal y A2 que la moneda extraída sea la especial)

b) $$P(A/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$ $$P(H) = P(M_1)P(C/M_1)P(M_2/M_1)P(C/M_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

c) Saldrán dos cruces si la primera moneda era normal y el lanzamiento fue cruz y la segunda moneda era también normal y asimismo arrojó cruz. Llamaremos:

M_i : La moneda extraída en el lugar i-ésimo es normal , i = 1 , 2
C : Salir cruz al lanzar una moneda
H : Salir dos cruces

$$P(H) = P(M_1)P(C/M_1)P(M_2/M_1)P(C/M_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

23/ Una urna contiene 2 bolas blancas, 5 negras y 4 rojas, y de ella extraemos tres bolas, una a continuación de otra. La primera que se extrajo resultó roja, la segunda no se miró y la tercera fue negra.
Determinar la probabilidad de que la bola extraída en segundo lugar sea blanca.

La información de que la primera bola extraída fue roja reduce el problema inicial a este otro:
Una urna con 2 bolas blancas, 5 negras y 3 rojas y de ella extraemos 2 bolas, una después de la otra. La primera no se miró y la segunda era negra. ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída en primer lugar sea blanca?
Llamamos B, N y R a los sucesos salir bola blanca, negra o roja en primer lugar y C al suceso "segunda bola extraída sea negra"

$$P(C/B)=\frac{5}{9} \quad P(C/N)=\frac{4}{9} \quad P(C/R)=\frac{5}{9}$$

$$P(B)=\frac{2}{10} \qquad P(N)=\frac{5}{10} \qquad P(R)=\frac{3}{10}$$

Y pretendemos calcular es P(B/C) lo que haremos con ayuda del teorema de Bayes. Así tenemos:

$$P(B/C)=\frac{P(C/B)P(B)}{P(C/B)P(B)+P(C/N)P(N)+P(C/R)P(R)}=\frac{2}{9}$$

Análogamente se calcula que: P(N/C) = 4/9 P(R/C) = 3/9

Sean tres urnas con las siguientes posiciones de bolas blancas y negras:
U1: (3 blancas y 2 negras)
U2: (4 blancas y 2 negras)
U3: (1 blanca y 4 negras)
Calcúlese:

- **a) Probabilidad de extraer bola blanca**
- **b) Probabilidad de que una bola negra que se ha extraído proceda de la segunda urna.**

SOLUCIÓN:

a) Suponemos que las tres urnas son equiprobables:

P(U1) = P(U2) = P(U3) = 1/3.

Por el teorema de la probabilidad total:

P(blanca) = P(blanca/U1) P(U1) + P(blanca/U2) P(U2) + P(blanca/U3) P(U3) = 3/5 x 1/3+ 4/6 x 1/3 +1/5 x 1/3 = 22/45 = 0,48888

b) P (U2/negra) = P (negra/ U2)P (U2)/P(negra) =

= (P(negra/U2) P(U2)/(P(negra/U1)P(U1)+P(negra/ U2) P (U2)+P(negra/U3) P/U3) =

$$\frac{\frac{2}{6}\bullet\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}\bullet\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\bullet\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\bullet\frac{1}{3}}=\frac{5}{23}$$

También se podría haber obtenido con la probabilidad del complementario:

P (negra) = 1 – P (blanca) = 1 – 22/45 = 23/45