1 Matrices

1. Para las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

comprueba que $AB = AC$ y, sin embargo, $B \neq C$, es decir, el producto de matrices no es cancelativo.

2. Calcula, si es posible, la matriz inversa de $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

3. Halla la forma de las matrices de orden 2 que conmuten con la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Halla el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

5. Se consideran las transformaciones geométricas $H(x, y) = (2x, 2y)$ y $S(x, y) = (x, -y)$:

a) Escribe las matrices asociadas a las transformaciones H y S.

b) Escribe la matriz asociada a la transformación compuesta $S \circ H$.

6. Dos personas A y B tienen gripe, el contacto con otras cuatro personas $P1$, $P2$, $P3$ y $P4$, con las que trabajan, hace posible el contagio. Se considera la matriz de contagio:

$$C = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P1 & P2 & P3 & P4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde 1 significa contagio y 0 no contagio. Las cuatro personas anteriores se relacionan con otras cuatro: $P5$, $P6$, $P7$ y $P8$, siendo la matriz de contagio:

$$D = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P5 & P6 & P7 & P8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcula la matriz $C \cdot D$ e interpreta los resultados.

SOLUCIONES

1. $AB = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$

2. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left[\dfrac{(F_1)}{2}\right]$;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow [F_2 - F_1;\ F_3 - F_1];$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow [F_3 + F_2];$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz no tiene inversa, puesto que la tercera fila está formada exclusivamente por ceros.

3. Se debe verificar: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c + d = d \end{cases}$$

De donde $c = 0$ y $a = d$, con lo que la matriz pedida es:

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$; siendo $a, b \in \mathbf{R}$

4. Se reduce la matriz a la forma escalonada utilizando las siguientes transformaciones elementales:

- $F_2 \longrightarrow F_2 - F_1$, $F_3 \longrightarrow F_3 - 2F_1$, $F_4 \longrightarrow F_4 - 3F_1$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $F_3 \longrightarrow F_3 + 3F_2$, $F_4 \longrightarrow F_4 + F_2$

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2.

5. a) $H(x, y) = (2x, 2y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La matriz de H es: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$S(x, y) = (x, -y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La matriz de S es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $(S \circ H)(x, y) = S(H(x, y)) = S(2x, 2y) = (2x, -2y)$, por lo que la matriz asociada a la transformación compuesta

$$S \circ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

6. $CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

se escribirá: $CD = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P5 & P6 & P7 & P8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$

El 1 significa que $P5$, $P6$ y $P7$ han sufrido un contagio a través de una sola de las personas $P1$, $P2$, $P3$ o $P4$, previamente contagiados por A o B; el 2 es contagiado por contacto con dos enfermos y el 3, por contacto con tres.

2 Determinantes

1. Demuestra que $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$

2. Calcula: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 11 & 22 & -11 & 44 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

3. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 7 & x & x & 3 \\ x & 7 & 3 & x \\ x & 3 & 7 & x \\ 3 & x & x & 7 \end{vmatrix} = 0$

4. Calcula el valor de: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

5. Dada una matriz cuadrada A, se denominan valores propios de esa matriz a los numeros x que satisfacen la ecuación $|A - xI| = 0$.

Halla los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, discute su inversibilidad en función del parámetro a y calcula su inversa para $a = 2$.

7. Una compañía aérea transporta diamantes en cajas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y 1 kg. Cierto día transportó 60 cajas en total, habiendo 5 más de tamaño pequeño $\left(\frac{1}{4}\text{ kg}\right)$ que de mediano $\left(\frac{1}{2}\text{ kg}\right)$. Sabiendo que el precio que cobra esta compañía por transportar cada kg de diamantes es de 4 000 euros y que el importe de los diamantes transportados asciende a 125 000 euros:

a) Plantea un sistema de ecuaciones para determinar el número de cajas de cada tipo envasadas.

b) Expresa matricialmente el problema y resuelve su determinante asociado.

c) ¿Cuántas cajas de cada tipo se envasaron?

d) ¿Qué rango tiene la matriz ampliada?

SOLUCIONES

1. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 11 & 22 & -11 & 44 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 11 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 22 \begin{vmatrix} 0 & 11 & -5 & -13 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -22 \begin{vmatrix} 11 & -5 & -13 \\ 4 & -4 & -1 \\ 8 & -5 & -4 \end{vmatrix} =$

$= 1\,650$

Las transformaciones que se han hecho son:

1. Se saca 11 factor común de la tercera fila y 2 de la cuarta columna.
2. $F_1 \longrightarrow F_1 - 3F_2$, $F_3 \longrightarrow F_3 - F_2$, $F_4 \longrightarrow F_4 - 2F_2$
3. Se desarrolla por a_{21}

3. $\begin{vmatrix} 7 & x & x & 3 \\ x & 7 & 3 & x \\ x & 3 & 7 & x \\ 3 & x & x & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ x & 7 & 3 & x \\ x & 3 & 7 & x \\ 3 & x & x & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ x & 7 & 3 & 2x \\ x & 3 & 7 & 2x \\ 3 & x & x & 10 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ x & 3 & 7 & 2x \\ 3 & x & x & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ x & 3 & 10 & 2x \\ 3 & x & 2x & 10 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot 4 \begin{vmatrix} 10 & 2x \\ 2x & 10 \end{vmatrix} = 16\,(100 - 4x^2) = 0 \iff x = \pm 5$

Las transformaciones han sido:

1. $F_1 \longrightarrow F_1 - F_4$
2. $C_4 \longrightarrow C_4 + C_1$
3. $F_2 \longrightarrow F_2 - F_3$
4. $C_3 \longrightarrow C_3 + C_2$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 16$

Las transformaciones han sido:

1. Se resta C_1 a todas las columnas.
2. Se desarrolla por a_{11}.
3. Se repite el primer paso.
4. Se desarrolla por a_{11}.

5. $A - xI = \begin{pmatrix} 2-x & -2 & -2 \\ -1 & -x & -2 \\ -1 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$

$|A - xI| = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \iff$

$\iff x = \begin{cases} -2 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$

6. Se calcula el determinante de la matriz,

$\begin{vmatrix} 3 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = a \cdot (-2 + 3) = a$

- Para $a = 0$ la matriz A es singular, no es inversible.
- Para $a \neq 0$, la matriz es regular e inversible.
- La inversa para $a = 2$ es:

$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad (\text{adj } A)^t = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & 12 & -5 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

7. Sean p, m y g el número de cajas pequeñas, medianas y grandes, respectivamente:

a) $\begin{cases} p + m + g = 60 \\ p - m = 5 \\ p + 2m + 4g = 125 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ m \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 5 \\ 125 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -5$

c) $\begin{pmatrix} p \\ m \\ g \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 5 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 5 \\ 125 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

por tanto: $p = 25$ cajas, $m = 20$ cajas, $g = 15$ cajas.

d) La matriz ampliada es: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 125 \end{array}\right)$

El rango de esta matriz es menor o igual que 3, pero como el determinante asociado es distinto de cero, es decir, hay tres columnas linealmente independientes, se concluye que el rango es tres.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 3z + 2t = 0 \\ x + 7y + 7z + 4t = 0 \\ 2x + 2z + t = 0 \end{cases}$$

2. Resuelve el siguiente sistema por el método de la matriz inversa:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

3. Discute y resuelve el sistema, según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + y - az = 3 \\ ax + 2y + (a + 2)z = a^2 - 2 \end{cases}$$

4. Discute, según los valores de los parámetros a y b, el sistema y resuélvelo en su caso:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$$

5. Un determinado inversor dispone de un capital C que invierte en tres productos financieros a, b y c. Se desea saber cuál es el interés de a, cuál el de b y cuál el de c, sabiendo que:

— Si invierte el 15 % en a, el 50 % en b y el resto en c, obtiene una rentabilidad del 5 %.

— Si invierte el 30 % en a, el 45 % en c y el resto en b, obtiene una rentabilidad del 5,5 %.

— Si invierte exclusivamente a partes iguales en a y b, obtiene una rentabilidad del 6,5 %.

Plantea el sistema de ecuaciones correspondiente y resuélvelo.

6. Dado el sistema: $x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

Exprésalo en la forma matricial $A\ X = B$ y resuélvelo por el método de la matriz inversa.

SOLUCIONES

1. El sistema es homogéneo, por lo que es compatible:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Las transformaciones han sido:

1. $F_2 \longrightarrow F_2 + F_1,\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1,\ F_4 \longrightarrow F_4 - 2F_1$
2. Se desarrolla por a_{11}.

El sistema es indeterminado, se elige una submatriz B, con $|B| \neq 0$, se aplica el teorema de Rouché y el sistema es de Cramer.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 16 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 3z = -2t \\ 2x + 2z = -t \end{cases}$$

$$x = \frac{3t}{8};\ y = \frac{t}{4};\ z = \frac{-7t}{8};\ t = t \in \mathbf{R}$$

2. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, es decir, $A\ X = B$

$|A| = 1$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ 6 & -9 & 5 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot B \iff X = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3. $$|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -a & 3 \\ a & 2 & a+2 & a^2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1+a & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -a & 3 \\ a & 2 & a+2 & a^2-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1 + a)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ a & 2 & a^2 - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1 + a) \cdot (-a^2 + 7a - 6)$$

$$|M^*| = 0 \iff \begin{cases} -1+a=0 \iff a=1 \\ -a^2+7a-6=0 \iff a=\begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases} \end{cases}$$

- Si $a = 1$, rango $M^* =$ rango $M = 3$, el sistema es compatible determinado: $x = 7;\ y = -4;\ z = 0$.
- Si $a = 6$, rango $M^* =$ rango $M = 3$, el sistema es compatible determinado: $x = 7;\ y = -4;\ z = 0$.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 6$, rango $M^* = 4$, como el rango de M es, como máximo, tres, el sistema es incompatible.

4. $\begin{cases} 2x+y = 1 \\ x+y-2z = 1 \\ 3x+y+az = b \end{cases}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $|M| = a - 2$

De la matriz ampliada M^* se extrae una submatriz B de orden tres en la que figuren los parámetros a y b:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & a & b \end{pmatrix},\ |B| = 2(1 - b)$$

- Si $a = 2$ y $b = 1$, rango $M = 2 =$ rango M^*, como el número de incógnitas es 3, el sistema es compatible indeterminado, las soluciones se obtienen del sistema:

  $$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=1+2z \end{cases}$$

  $x = -2z;\ y = 1 + 4z;\ z = z$, con $z \in \mathbf{R}$
- Si $a = 2$ y $b \neq 1$, rango $M < 3$ y rango $M^* = 3$, por lo que el sistema es incompatible.
- Si $a \neq 2$, rango $M =$ rango $M^* = 3$, por lo que el sistema es compatible determinado. Para cada par de valores a y b habrá un sistema con solución única: $x = \dfrac{-2b+2}{a-2};\ y = \dfrac{a+4b-6}{a-2};\ z = \dfrac{b-1}{a-2}$

5. Se plantea el sistema para un capital de 100 euros, siendo x, y y z los intereses respectivos de a, b y c:

a) $\begin{cases} 15x + 50y + 35z = 5 \\ 30x + 25y + 45z = 5{,}5 \\ 50x + 50y = 6{,}5 \end{cases}$

b) Para resolver el sistema se procede de esta forma:

Se comprueba que el sistema es de Cramer, y la solución única, al ser compatible determinado, es:

$$x = \frac{117}{1\,400} = 0{,}083;\ y = \frac{65}{1\,400} = 0{,}046;$$

$z = \dfrac{57}{1\,400} = 0{,}040$; a tiene un interés del 8,3 %, b del 4,6 % y c del 4 %.

6. $A\ X = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Por el método de la matriz inversa, pues $|A| \neq 0$:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; por tanto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4 Programación lineal

1. Representa gráficamente el conjunto de puntos que determinan las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 85 \\ 2x + 3y \leqslant 200 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

2. Considera la región del plano determinada por el polígono de vértices: $A = (1, 1)$; $B = (0, 3)$; $C = (3, 5)$; $D = (6, 2)$; $E = (4, 0)$.

a) Representación gráfica de dicha región.

b) En la misma figura representa las rectas asociadas a la función objetivo $Z = 2x + y$.

c) ¿Dónde alcanza Z el máximo y el mínimo?

3. Encuentra el valor máximo de $f(x, y) = 10x + 15y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leqslant 6 \\ 3x + y \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

4. Una persona tiene que tomar en su alimentación dos clases de componentes A y B. Necesita tomar 70 unidades de A y 120 de B.

Se le dan dos tipos de dieta en la que la concentración de dichos componentes es:

Dieta $D1$: 2 unidades de A y 3 unidades de B.

Dieta $D2$: 1 unidad de A y 2 unidades de B.

Sabiendo que el precio de $D1$ es 15 euros, y el de $D2$ es 9 euros, ¿cuál es la distribución óptima para el menor coste?

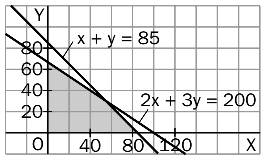
5. Una empresa de muebles posee tres madereras A, B y C. En ellas se corta madera a razón de 60 m^3, 45 m^3 y 30 m^3 por día, respectivamente. La madera se distribuye a dos fábricas M y N que necesitan 65 y 70 m^3. Los costes de transporte por m^3 desde las madereras a las fábricas son:

	a M	a N
Desde A	1,5	3
Desde B	3,5	2
Desde C	2,9	1,9

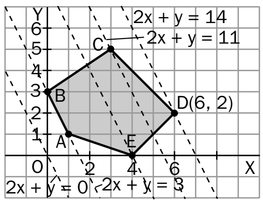
¿Cómo debe organizarse el transporte para que los gastos sean mínimos?

SOLUCIONES

1. $\begin{cases} x + y \leqslant 85 \\ 2x + 3y \leqslant 200 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$



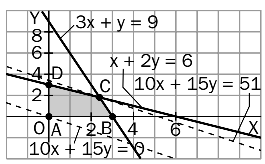
2. a) y b)



c) El máximo se alcanza en $D(6, 2)$ y vale 14. El mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento $\overline{AB}$, y su valor es 3.

3. La región factible es:

R: $\begin{cases} x + 2y \leqslant 6 \\ 3x + y \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$



Los valores de $f(x, y)$ en cada uno de los vértices son: $f(3, 0) = 30$; $f\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{9}{5}\right) = 51$; $f(0, 3) = 45$, por lo que el valor máximo de $f(x, y)$ es 51 y se alcanza en $C\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$.

4. Se dispone la información dada en la tabla:

	A	B	PRECIO
*D*1	2	3	15
*D*2	1	2	9
Necesidades	70	120	

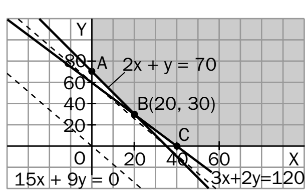
Se trata de minimizar la función de coste:

$C(x, y) = 15x + 9y$

Donde x e y son el número de dietas *D*1 y *D*2, respectivamente, que ha de adquirir.

$\begin{cases} 2x + y \geqslant 70 \\ 3x + 2y \geqslant 120 \\ x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0 \end{cases}$

La región factible no es acotada.



El coste mínimo se alcanza en el vértice *B*.

Conclusión: deberá adquirir 20 dietas de tipo *D*1 y 30 del tipo *D*2.

5. Suponiendo que de la maderera *A* se distribuyen x m³ a *M*, de la maderera *B* y m³ a *M*, entonces de *C* se llevarán $65 - (x + y)$ m³ a *M*.

Por otra parte, si en *A* se producen 60 m³ y se envían x a *M*, entonces se enviarán $60 - x$ a *N*.

Planteamos la tabla:

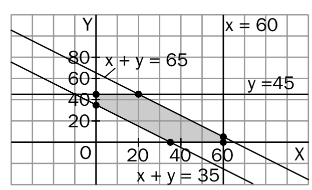
	a *M*	a *N*	Producción
Desde *A*	x	$60 - x$	60
Desde *B*	y	$45 - y$	45
Desde *C*	$65 - (x + y)$	$x + y - 35$	30
Demanda	65	70	

Se trata de minimizar la función de costes:

$C(x, y) = 1{,}5x + 3(60 - x) + 3{,}5y + 2(45 - y) +$
$+ 2{,}9[65 - (x + y)] + 1{,}9(x + y - 35) =$
$= 392 - 2{,}5x + 0{,}5y$

Sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0 \\ 65 - (x + y) \geqslant 0 \\ 60 - x \geqslant 0 \\ 45 - y \geqslant 0 \\ x + y - 35 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leqslant 65 \\ x \leqslant 60 \\ y \leqslant 45 \\ x + y \geqslant 35 \\ x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0 \end{cases}$$



La función objetivo toma valores:

$C_A(0, 35) = 409{,}5$; $C_B(0, 45) = 414{,}5$;
$C_C(20, 45) = 364{,}5$; $C_D(60, 5) = 244{,}5$;
$C_E(60, 0) = 242$; $C_F(35, 0) = 304{,}5$

El mínimo lo alcanza en el vértice *E* y asciende a 242 unidades monetarias, lo que significa que el transporte debe organizarse según la siguiente tabla:

	a *M*	a *N*
Desde *A*	60	0
Desde *B*	0	45
Desde *C*	5	25

5 Límites y continuidad

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{1 - \sqrt{1 - x}}$

a) Halla su dominio.

b) Halla sus puntos de discontinuidad y clasifica sus discontinuidades.

2. Halla el valor de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leqslant 0 \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ \dfrac{bx + 2}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

3. Una empresa vende una máquina fotocopiadora cuya capacidad de hacer copias por minuto se va deteriorando con el paso de los años, aunque para paliar el problema aconseja hacerle una revisión al cabo de 4 años. La función que, en este caso, da el número de copias por minuto en función de los x años transcurridos viene dada por la función

$$f(x) = \begin{cases} 15 - 2x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ \dfrac{5x + 2}{x - 2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) ¿Cuántas copias hace la máquina cuando se compra?

b) ¿La revisión de los 4 años cambia el rendimiento de la máquina o no se nota el arreglo?

c) Junto con la máquina la empresa ofrece una garantía de un mínimo de 5 copias por minuto por vieja que sea la máquina. ¿Es fiable esta garantía?

d) ¿Sería válida la garantía si no se pasa la revisión?

4. José comprueba un día que está perdiendo pelo alarmantemente. La función que determina el número de pelos que pierde en función de los días, t, que pasan es $f(t) = 57t + 30$. Al décimo día de notar el problema decide ponerle remedio y compra un crecepelo que asegura no solo frenar la caída del cabello, sino que su uso prolongado la detiene completamente. José observa, ahora, que el número de pelos que pierde varía en función de

$$f(t) = \frac{150t}{t + 10}$$

a) Escribe la función que describe el proceso de la caída de pelo de José.

b) ¿Notó José alguna variación el primer día que se echó el crecepelo?

c) ¿Es cierto que el producto detiene completamente la caída del cabello?

5. Demuestra que la función $f(x) = e^x + x - 2$ corta a la parte positiva del eje OX.

6. La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

7. ¿Se puede utilizar el teorema de Bolzano para asegurar que la ecuación $x^{24} + \dfrac{1}{x - 3} = 0$ tiene una solución en el intervalo $(0, 1)$? ¿Y en el intervalo $(2, 4)$?

8. Considera las funciones $f(x) = \sqrt{x + 3}$ y $g(x) = x^2 + 1$

a) Representa la función $(g \circ f)(x)$

b) ¿Está acotada dicha función en el intervalo $[1, 4]$?

c) ¿Cuáles son sus máximo y mínimo absolutos en este intervalo?

9. ¿Se puede asegurar que la función $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ está acotada en el intervalo $[2, 5]$? ¿Y en el intervalo $[0, 3]$?

SOLUCIONES

1. a) $Df = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, pues f no está definida si $1 - \sqrt{1-x} = 0$.

b) En $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable si se define $f(0) = 4$, pues:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})\,(1 + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = 4$$

2. Es continua en 0 si $e^0 + a = b$ y es continua en 2 si $4a + b = 2b + 2$.

Por tanto: $a = 1$, $b = 2$

3. a) $f(0) = 15$ copias por minuto.

b) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 7$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 11$

Mejora el rendimiento, pues pasa de 7 a 11 copias por minuto.

c) Sí, puesto que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 5$

d) No, puesto que si no se hace la revisión $f(7{,}5) = 0$, es decir, la máquina deja de funcionar a los siete años y medio.

4. a) $f(t) = \begin{cases} 57t + 30 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 10 \\ \dfrac{150t}{t + 10} & \text{si} \quad t \geqslant 10 \end{cases}$

b) Sí, se frenó la caída del cabello, puesto que $\lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = 600$, mientras que $\lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = 75$.

c) No es cierto, ya que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 150$, es decir, frena la caída del cabello pero no la detiene.

5. f es continua en toda la recta real y además:

$f(0) = -1$ y $f(1) = e - 1 \cong 1{,}72$

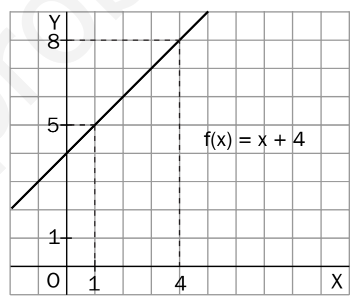
Por tanto, al aplicar el teorema de Bolzano se obtiene que f corta al eje OX en un punto del intervalo $(0, 1)$.

6. No, puesto que $f(x) = \operatorname{tg} x$ no es continua en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y, por tanto, no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

7. a) La función $f(x) = x^{24} + \dfrac{1}{x - 3}$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ y tal que $f(0) = \dfrac{-1}{3}$ y $f(1) = \dfrac{1}{2}$, es decir, cambia de signo en los extremos del intervalo y entonces por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)/c^{24} + \dfrac{1}{c - 3} = 0$

b) No se puede asegurar que la ecuación tenga en $(2, 4)$ una solución porque f es discontinua en $x = 3 \in (2, 4)$ y no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

8. $(g \circ f) = x + 4$:



b) Sí está acotada, puesto que es continua en el intervalo y se puede aplicar el teorema de Weierstrass.

c) Al ser la función lineal y creciente, su máximo absoluto está en $f(4) = 8$ y su mínimo absoluto en $f(1) = 5$.

9. En $[2, 5]$ está acotada, pues f es continua en dicho intervalo y se puede aplicar el teorema de Weierstrass, pero en $[0, 3]$ no se puede asegurar, ya que f es discontinua en $x = 1 \in (0, 3)$. De hecho, f no está acotada en este intervalo, ya que:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

6 Derivadas

1. Una empresa de bebidas lanza al mercado un refresco. Durante los dos primeros meses las ventas permanecen estables y la empresa decide poner en marcha una campaña publicitaria para incrementarlas. La función que representa el número de botellas vendidas, en miles de unidades, dependiendo de los meses, t, transcurridos desde su lanzamiento, viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 50 & \text{si } 0 < t \leq 2 \\ \dfrac{50(t^2 + 2)}{3t} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

a) Justifica que el volumen de ventas representa una curva continua en el tiempo.

b) Calcula la tasa de variación media de las ventas en los intervalos [0, 2] y [2, 4]. ¿Ha tenido efecto la campaña?

c) Halla la tasa de variación instantánea de las ventas a los 4 meses.

2. El coste de fabricación de x bombillas viene dado por la expresión $f(x) = 0{,}30x + 0{,}12\sqrt{x}$

a) Escribe la función que expresa la variación del coste de producción de las bombillas dependiendo de las unidades producidas.

b) ¿Cuál es el coste medio de cada una de las 100 primeras bombillas producidas?

c) ¿Cuál es el coste real de producir la bombilla número 100?

d) Si la empresa vende cada bombilla a 1 euro, escribe la función que determina los beneficios obtenidos por vender x bombillas.

e) ¿Cuál es el beneficio medio por cada una de las 100 primeras bombillas producidas?

f) ¿Cuál es el beneficio real que produce la venta de la bombilla número 100?

3. En Economía, se llama *coste marginal* de un producto a la derivada de la función de costes respecto al número de unidades producidas. El coste marginal representa, aproximadamente, el coste necesario para producir una unidad extra.

Una empresa textil compra a un diseñador el boceto de un vestido por 18 030 euros con la idea de fabricar x unidades que, a su vez, tienen un coste de producción de 12 euros cada una.

a) Escribe la función que determina el coste de fabricación de x vestidos.

b) ¿Cuál es el coste medio de fabricación por vestido confeccionado? (Téngase en cuenta el precio pagado por el diseño.)

c) Escribe la función que determina el coste marginal de fabricar x vestidos.

d) ¿Cuál es el coste marginal que supone producir el vestido que hace el número 1 001?

e) Si cada vestido se quiere vender a 36 euros, ¿cuántos debe producir la empresa para que los beneficios totales sean de 24 040 euros?

4. El efecto de un analgésico a las t horas de ser administrado viene dado por la función $E(t) = 10\,\text{sen}^2 t$, con $t \leq \pi$.

a) Si se midiese el efecto en una escala numérica, ¿cuál será el mayor efecto posible que puede alcanzar el analgésico?

b) ¿Cuánto tiempo tarda en dejar de hacer efecto?

c) ¿Cuál es la velocidad con que está haciendo efecto el analgésico a la media hora?

d) ¿Cuál es la velocidad con que está haciendo efecto el analgésico a las 2 horas? ¿Cómo se interpreta este resultado respecto al resultado del apartado anterior?

5. El número de personas contagiadas por una determinada enfermedad, donde x representa el número de días transcurridos desde que se inició la enfermedad, crece según la expresión $f(x) = 500\,[x + \log(x^2 + 1)]$.

a) ¿Cuál es el número de personas contagiadas a los 3 días de la aparición de la enfermedad?

b) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la enfermedad al tercer día?

c) ¿Qué número de personas tiende a contagiarse cada día si la enfermedad dura mucho tiempo y no aparece el remedio para curarla?

SOLUCIONES

1. a) La función es continua en cada uno de los intervalos de definición y también es continua en $t = 2$, ya que $\lim_{t \to 2^-} f(t) = \lim_{t \to 2^+} f(t) = f(2) = 50$

b) $TVM[0, 2] = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{50 - 50}{2} = 0$

$TVM[2, 4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{75 - 50}{2} = 12{,}5$

La campaña ha tenido efecto, puesto que la tasa ha aumentado.

c) $TVI(f, 4) = f'(4) = \dfrac{175}{12}$

2. a) $f'(x) = 0{,}30 + \dfrac{0{,}06}{\sqrt{x}}$

b) $C_m(100) = \dfrac{f(100)}{100} = 0{,}31$ euros

c) $f'(100) = 0{,}30 + \dfrac{0{,}06}{\sqrt{100}} = 0{,}31$ euros

d) $b(x) = x - (0{,}30x + 0{,}12\sqrt{x}) =$
$= 0{,}70x - 0{,}12\sqrt{x}$

e) $b_m(100) = \dfrac{b(100)}{100} = \dfrac{68{,}8}{100} = 0{,}69$ euros/unid.

f) $1 - 0{,}30 = 0{,}70$ euros

3. a) $c(x) = 18\,030 + 12x$

b) $c_m(x) = \dfrac{18\,030}{x} + 12$

c) $c'(x) = 12$

d) $c'(1\,001) = 12$

e) $b(x) = 36x - c(x) = 24x - 18\,030$
$b(x) = 24\,040 \Rightarrow x = 1\,753$ vestidos.

4. a) 10, puesto que sen $t \leq 1 \Rightarrow E(t) \leq 10$

b) $E(t) = 0 \Rightarrow 10 \text{ sen}^2 t = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = \pi$; deja de hacer efecto a las 3 h 8 m 30 s aproximadamente.

c) $E'(t) = 20 \text{ sen } t \cos t \Rightarrow E'(0{,}5) = 8{,}4$

d) $E'(2) = -7{,}56$, es decir, el analgésico está dejando de hacer efecto puesto que la derivada es negativa.

5. a) $f(3) = 500(3 + \log 10) = 2\,000$ personas.

b) $f'(x) = 500\left(1 + \dfrac{2x \log e}{x^2 + 1}\right)$
$f'(3) \approx 630$ personas/día.

c) $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 500$ personas/día.

7 Funciones derivables

1. Considera el triángulo que forman los ejes coordenados con la recta tangente a la curva $f(x) = xLx$ en el punto de abscisa $x = 1$.

a) ¿Qué tipo de triángulo es?

b) Halla su área.

2. Considera la función $f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leqslant 0 \\ bx + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Halla el valor de a y de b sabiendo que la función es derivable en $x = 0$.

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ estudia su continuidad y su derivabilidad en la recta real y escribe su función derivada.

4. Considera la función definida de la siguiente manera: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2 + 1}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad.

b) Estudia su derivabilidad.

c) Escribe su función derivada.

d) ¿Es continua f' en $x = 1$?

5. Se tiene un recipiente metálico de forma cúbica de 10 cm de lado. Al calentar el recipiente, el lado experimenta una dilatación del 1 %.

a) Halla la tasa de variación absoluta (incremento) de su volumen.

b) Halla el valor de la diferencial en ese momento.

c) Halla el error cometido.

6. Considera la función $f(x) = x^2 - 3x$, calcula:

a) El incremento de la función en $x = 2$ para un incremento de la variable independiente de 0,02.

b) El valor de la diferencial y el error que se comete al estimar dicho incremento a través de la diferencial.

c) El punto de la gráfica de f en el cual la recta tangente tiene de pendiente 5.

7. Si se calienta un disco metálico, se observa que su radio, medido en cm, sufre un aumento en función de la temperatura que viene dado por la fórmula $r = 10 + 0{,}002t$, donde t representa la temperatura en °C.

a) ¿Cuál es la superficie del disco a 0 °C?

b) Escribe la expresión que da la superficie del disco en función de la temperatura.

c) Calcula el incremento del área cuando la temperatura pasa de 90 °C a 100 °C.

d) Calcula el valor de la diferencial del área en ese momento.

e) Halla el error que se comete al estimar la tasa de variación de la superficie del disco por medio de la diferencial.

f) ¿Cuánto ha aumentado la temperatura si teniendo el disco a 0 °C se le ha calentado y se ha observado que la superficie se ha incrementado 2 cm²?

g) Estima este incremento de temperatura por medio de la diferencial.

8. Halla las tres primeras derivadas de la función $f(x) = L(x^2 + 1)$.

SOLUCIONES

1. Como $f'(x) = 1 + Lx$, $f'(1) = 1$, la recta tangente es $y = x - 1$ que corta a los ejes coordenados en $(1, 0)$ y $(0, -1)$

a) Es un triángulo rectángulo isósceles.

b) $A = \dfrac{1}{2}\ \text{u}^2$

2. Si f es derivable en 0 es porque también es continua en dicho punto. Por ser continua en $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow e^0 + a = b \cdot 0 + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2$

Por ser derivable en $x = 0$:

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow e^0 = b \Rightarrow b = 1$

3. En cada trozo de su dominio f es continua y derivable por ser en el primer caso polinómica y en el segundo exponencial. El problema está en $x = 0$.

En $x = 0$ la función es continua, pues $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^0$

En $x = 0$ la función es derivable, pues $f'(0^-) = -1 = f'(0^+) = -e^0$

Por tanto, f es continua y derivable en toda la recta real y su función derivada es

$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

4. En cada trozo de su definición f es continua y derivable. El problema está en $x = 1$.

a) En $x = 1$ la función es continua, pues

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1+1}{4}$

b) En $x = 1$ la función es derivable, pues

$f'(1^-) = \dfrac{1}{2} = f'(1^+)$

c) Por tanto, f es continua y derivable en toda la recta real. Su función derivada es

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) Sí, puesto que $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$

5. El volumen del recipiente es $V(x) = x^3$, siendo x el lado, y su derivada es $V'(x) = 3x^2$

a) $V(10, 1) - V(10) = (10{,}1)^3 - 10^3 = 30{,}301\ \text{cm}^3$

b) $dy = V'(10)dx = 300 \cdot 0{,}1 = 30$

c) $\Delta y - dy = 0{,}301\ \text{cm}^3$

6. a) $f(2{,}02) - f(2) = 0{,}0204$

b) $dy = f'(2)dx = 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}02$; el error es $\Delta y - dy = 0{,}0004$

c) $f'(x) = 2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 4$

7. a) $r = 10 \Rightarrow S = 100\pi\ \text{cm}^2$

b) La función que da la superficie del disco en función de la temperatura es: $S(t) = \pi(10 + 0{,}002t)^2$

c) $\Delta y = S(100) - S(90) = 1{,}28052\ \text{cm}^2$

d) $dy = S'(90)dt = 0{,}127925 \cdot 10 = 1{,}27925\ \text{cm}^2$

e) $\Delta y - dy = 0{,}00127\ \text{cm}^2$

f) $\Delta y = S(t) - S(0) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow S(t) = \pi(10 + 0{,}002t)^2 = 2 + 100\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 15{,}894\ ^\circ\text{C}$

g) $dy = S'(t) \cdot (t - 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 = 0{,}004\pi t(10 + 0{,}002t) \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 15{,}8649\ ^\circ\text{C}$

8. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$; $f''(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$;

$f'''(x) = \dfrac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

8 Monotonía y curvatura

1. Halla el número x que hace que el valor del determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x - 1 & x + 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ sea mínimo.

2. De todos los triángulos rectángulos tales que la suma de su hipotenusa y un cateto sea 12 cm, halla el que tiene área máxima.

3. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia cuyo radio mide 2 cm.

4. Se quiere construir una piscina con forma de paralelepípedo rectangular tal que su anchura sea doble que su altura y que la suma del largo, ancho y alto sea 24 m. Halla las dimensiones que debe tener la piscina para que su capacidad sea máxima.

5. De una chapa circular de radio 10 cm se recorta un sector circular y con la lata restante se construye un embudo. Halla el sector que debe cortarse para que el embudo tenga capacidad máxima.

6. Descompón el número 45 en suma de dos números tales que el producto del cubo del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

7. La comisión que cobra un agente de seguros viene dada por la función:

$f(x) = 60\,000 - 270x + \dfrac{63x^2}{20} - \dfrac{3x^3}{500}$, donde x representa el importe, en euros, de la póliza contratada.

¿Cuál es el importe de la póliza que le garantiza una comisión máxima?

8. La cotización de las acciones de una empresa a lo largo del pasado año vino dada por la expresión $f(t) = 1{,}8 + 0{,}57t - 0{,}11t^2 + 0{,}006t^3$, donde t representa el mes del año ($0 \leqslant t \leqslant 12$).

a) Halla los periodos del año durante los cuales creció la cotización de las acciones y durante los cuales decreció.

b) ¿Cuándo la cotización fue más alta y cuándo fue más baja? ¿Qué valor alcanzaron las acciones en esos momentos? Fíjate que estás hallando extremos en el intervalo cerrado [0, 12].

9. Los gastos anuales en publicidad de una empresa, en euros, vienen dados por la expresión $f(x) = 120\,200 - \dfrac{6\,010x^2 - 24\,040x + 6\,010}{e^{x-2}}$, donde x representa el número de años que lleva funcionando la empresa.

a) ¿Cuánto dinero se gastó la empresa en publicidad en el momento de su creación?

b) ¿En qué periodos de tiempo los gastos en publicidad crecieron? ¿En cuáles decrecieron?

c) ¿En qué año se produjeron los mayores gastos en publicidad? ¿A cuánto ascendieron?

d) ¿En qué año se produjeron los menores gastos en publicidad? ¿A cuánto ascendieron?

e) Con el paso de los años, ¿cuál tiende a ser el gasto publicitario anual de esta empresa?

10. La relación entre los beneficios obtenidos por la venta de un determinado producto y el tiempo en años que está en el mercado viene dada por la función $B(t) = \dfrac{600t}{t^2 + 100}$, medida en miles de euros.

a) Estudia los períodos en los que los beneficios crecen y en los que decrecen.

b) Indica a cuánto ascienden los beneficios máximos anuales.

c) ¿En qué períodos de tiempo los beneficios son menores que 18 000 euros anuales?

d) ¿Hay algún momento en que la venta de este producto ocasione pérdidas?

SOLUCIONES

1. $D(x) = \det(A) = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow$ los extremos de la función $D(x)$ están en $D'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 1$, que es un mínimo pues $D''(1) > 0$.

2. $\left.\begin{array}{l} a + h = 12 \\ a^2 + x^2 = h^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 6 - \dfrac{x^2}{24} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(x) = \dfrac{x}{2}\left(6 - \dfrac{x^2}{24}\right) = 3x - \dfrac{x^3}{48}$

$S'(x) = 3 - \dfrac{x^2}{16} = 0 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{3}$, puesto que $S''(4\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$ es un máximo.

La hipotenusa mide 8 cm, y los catetos 4 y $4\sqrt{3}$ cm respectivamente.

3. La diagonal del rectángulo es 4 cm, por tanto,

$S(x) = x\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow S'(x) = \dfrac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$;

$S'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$ posibles extremos; como $S''(2\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}$ es un máximo.El rectángulo de mayor área es el cuadrado de $2\sqrt{2}$ cm de lado.

4. $\left.\begin{array}{l} a = 2h \\ l + a + h = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(l) = l \cdot a \cdot h = l \cdot 2h^2 = 2l\left(8 - \dfrac{l}{3}\right)^2$;

$V'(l) = 128 - \dfrac{64l}{3} + \dfrac{2l^2}{3}$; $V'(l) = 0 \Rightarrow l = 24$, $l = 8$ posibles extremos; como $V''(12) < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow l = 8$ es un máximo. Las medidas de la piscina son 5,33, 8 y 10,66 m respectivamente.

5. La generatriz del cono resultante mide 10 cm, su volumen, en función del radio de la base, es

$V(r) = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi r^2\sqrt{100 - r^2}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V'(r) = \dfrac{\pi(200r - r^3)}{3\sqrt{100 - r^2}}$; $V'(r) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 0$, $r = \pm\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ posibles extremos, puesto que $V''\left(\dfrac{10\sqrt{6}}{3}\right) < 0 \Rightarrow \dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ es un máximo

Puesto que la longitud de la circunferencia que forma la base del cono es el arco que ha quedado después del corte. Para calcular el arco del sector circular:

$2\pi 10 - 2\pi\dfrac{10\sqrt{6}}{3} = 11{,}53$

Es decir, n.º grados $= \dfrac{360 \cdot 11{,}53}{2\pi 10} \approx 66$ grados.

6. $x + y = 45$, la función a maximizar es $P(x) = x^3(45 - x)^2 = x^5 - 90x^4 + 2\,025x^3$, tiene un máximo en $x = 27$; los números son $x = 27$, $y = 18$.

7. $f'(x) = -\dfrac{9x^2}{500} + \dfrac{63x}{10} - 270$, el máximo es $x = 300$, el importe de la póliza es:

$f(300) = 100\,500$ euros

8. a) $f'(t) = 0{,}018t^2 - 0{,}22t + 0{,}57$, tiene un máximo en $t = 3{,}74$ y un mínimo en $t = 8{,}49$, por tanto, en el período (0; 3,74) la cotización aumenta, en (3,74; 8,49) decrece y en (8,49; 12) vuelve a crecer.

b) Los extremos absolutos de f están en los extremos, por tanto, la máxima cotización fue en diciembre, $f(12) = 3{,}17$ euros, y la mínima al comenzar el año, $f(0) = 1{,}80$ euros.

9. a) $f(0) = 120\,200 - 6\,010e^2 \approx 75\,791{,}77$ euros.

b) f es siempre continua y tal que

$f'(x) = \dfrac{6\,010x^2 - 36\,060x + 30\,050}{e^{x-2}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$, $x = 5$ posibles extremos. Como $f''(1) < 0$ y $f''(5) > 0 \Rightarrow$ en (0, 1) los gastos aumentaron, en (1, 5) decrecieron y después volvieron a crecer siempre.

c) En $x = 1$, f tiene un máximo, $f(1) = 152\,873{,}75$ euros.

d) En $x = 5$, f tiene un mínimo, $f(5) = 118\,404{,}68$ euros.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 120\,200 \Rightarrow$ El gasto en publicidad tiende a ser 120 200 euros.

10. a) $B'(t) = \dfrac{600(100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$. Los extremos de esta función son $t = -10$ y $t = 10$; como $t = -10$ queda fuera de su dominio, que es $(0, \infty)$, estudiamos solo $t = 10$, donde tiene un máximo. Por tanto, B crece en (0, 10) y decrece en $(10, \infty)$.

b) El máximo de B es $t = 10$, por tanto, $B(10) = 30\,000$ euros.

c) $B(t) < 18 \Rightarrow t > 30$ años.

d) No, pues $B(t) > 0$ para cualquier $t > 0$. Es decir, siempre da beneficios, aunque, puesto que $\lim\limits_{t\to\infty} B(t) = 0$, con el paso de los años los beneficios tienden a anularse.

9 Representación de funciones

1. Considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

a) ¿Cuál es su dominio?

b) ¿Es continua en 1?

c) ¿Es derivable en 1?

d) ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y decrecimiento?

e) ¿Cuáles son sus extremos?

f) ¿Tiene asíntotas?

g) Dibuja su gráfica.

2. Representa la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

3. Representa la función $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$

4. Representa la función $f(x) = xe^x$

5. Representa la función $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

6. Conocida la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$, dibuja razonadamente las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = |\text{sen}(x+1)|$ b) $f(x) = \text{sen}^2 x$

7. Un fontanero ha comprobado que trabajando x horas diarias, sus ingresos vienen dados, en euros, por la función $f(x) = \dfrac{60x}{x+2}$. Teniendo en cuenta que cada hora de trabajo le supone un gasto de 1,20 euros en material, que debe descontar de los ingresos:

a) Escribe la función que determina los ingresos del fontanero.

b) ¿Cuántas horas debe trabajar al día para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden estos?

c) Representa gráficamente la función beneficios (fíjate en cuál es el dominio de f).

8. La función $f(x) = -40x^2 + 1\,200x - 5\,760$ representa el número de viajeros por hora que pasan a diario por la estación central del metro de una ciudad, donde x simboliza la hora del día objeto de estudio.

a) ¿A qué hora abre y cierra el metro de esta ciudad?

b) ¿A qué hora se produce la mayor afluencia de viajeros? ¿Cuántas personas entran en la estación a esa hora?

c) Si queremos viajar cuando entren en el metro menos de 2 240 personas por hora, ¿cuándo debemos hacerlo?

d) Representa gráficamente la función como ayuda para responder mejor a las preguntas anteriores.

SOLUCIONES

1. a) $Df = (-\infty, \infty)$

b) Sí, pues $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 2$

c) No, pues $f'(1^-) = 2L(2) \neq f'(1^+) = -1$

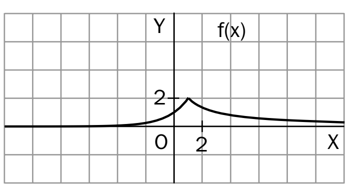
d) $f'(x) = \begin{cases} 2^x L2 & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{4}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f$ crece en $(-\infty, 1)$, pues $f(x) = 2^x$ es siempre creciente y es decreciente en $(1, \infty)$ pues $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$ es decreciente en $(1, \infty)$

e) No tiene extremos relativos y tiene un máximo absoluto en x = 1

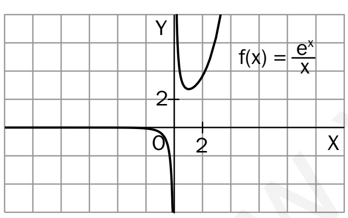
f) No tienen asíntotas verticales, pues es siempre continua; tiene una asíntota horizontal por la izquierda y por la derecha en $y = 0$, pues

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0$

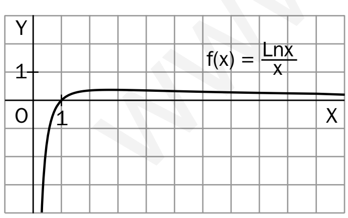
g)



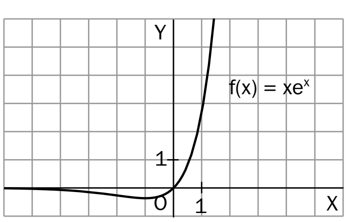
2.



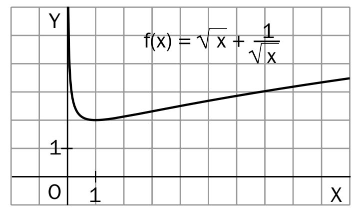
3.



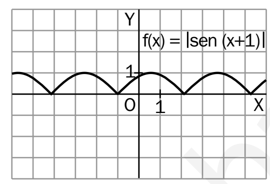
4.



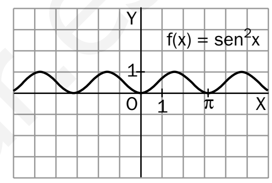
5.



6. a)



b)



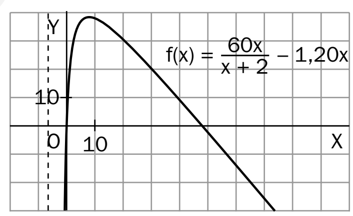
7. a) $b(x) = \dfrac{60x}{x+2} - 1{,}20x$

b) $b'(x) = \dfrac{120}{(x+2)^2} - 1{,}20$; $b'(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 8$, como $b''(8) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 8$ es un máximo; $b(8) = 38{,}40$ euros.

c)

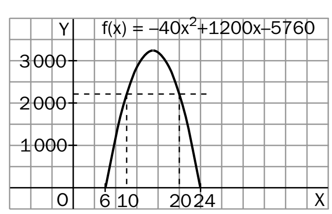


8. a) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 6$, $x = 24$, es decir, abre a las 6 de la mañana y cierra a las 12 de la noche.

b) $f'(x) = 1\,200 - 80x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 15$, puesto que $f''(15) < 0 \Rightarrow 15$ es un máximo, es decir, la mayor afluencia de viajeros es a las 3 de la tarde y $f(15) = 3\,240$ personas.

c) $f(x) < 2\,240 \Rightarrow x < 10$, $x > 20$, es decir, viajaremos entre las 6 y las 10 de la mañana o entre las 8 y las 12 de la noche.

d)



10 Integral indefinida

1. Calcula las siguientes integrales mediante cambio de variable:

a) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx \ (e^x = t^2 - 1)$ b) $\int \text{sen}^5 x dx \ (\cos x = t)$ c) $\int \frac{1}{xL^2x} dx \ (Lx = t)$

2. Calcula las siguientes integrales mediante integración por partes:

a) $\int \frac{Lx}{x^3} dx$ b) $\int x5^x dx$ c) $\int L^2 x dx$

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{5\sqrt[5]{x^3}} dx$ b) $\int \cos x e^{\text{sen } x} x dx$ c) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$ b) $\int 5x^3 \text{ sen}(x^4 + 7) dx$ c) $\int e^x \cos(e^x + 1) dx$

5. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 4 \text{ sen}^2 x \cos x dx$ b) $\int x^2 e^{5x} dx$ c) $\int x + \frac{a}{x^3} dx$ a constante

6. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{6x + 8}{x^2 + 4x + 4} dx$ b) $\int (x^2 - 2x + 1) Lx dx$ c) $\int \frac{5}{(x + 3)^2} dx$

7. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$ b) $\int \frac{x}{2^x} dx$ c) $\int \frac{2x + 2}{x^2 + x + \frac{1}{4}} dx$

8. Halla una función F tal que $F'(x) = x^2 - 2x + 3$ y $F(0) = 2$.

9. Halla una función F tal que $F''(x) = 6x - 10$, $F(0) = 4$ y $F(1) = 0$.

10. Halla una función F tal que $F''(x) = x \cos x$, $F'(0) = 0$ y $F(0) = 3$.

11. Calcula una primitiva de la función $f(x) = xe^{-x^2}$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

12. Calcula una primitiva de la función $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{1 + x^2}}$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

13. De una función derivable, se conoce que $f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + a & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$ y que $f(0) = 0$. Halla el valor de a.

14. Halla una función f tal que tiene un punto de inflexión en el punto (1, 3) y que $f'(x) = 3x^2 - ax$.

SOLUCIONES

1. a) $\frac{2}{3}(e^x - 2)\sqrt{e^x + 1} + C$

b) $-\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$

c) $-\frac{1}{Lx} + C$

2. a) $-\frac{2Lx + 1}{4x^2} + C$

b) $\frac{5^x(xL5 - 1)}{L^2 5} + C$

c) $xL^2x - 2xLx + 2x + C$

3. a) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{2} + C$

b) $e^{\text{sen}x} + C$

c) $\frac{-1}{(x-1)} + C$

4. a) $-\frac{e^{-x^3}}{3} + C$

b) $-\frac{5\cos(x^4 + 7)}{4} + C$

c) $\text{sen}\,(e^x + 1) + C$

5. a) $\frac{4\,\text{sen}^3 x}{3} + C$

b) $e^{5x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{25} + \frac{2}{125}\right) + C$

c) $\frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2} + C$

6. a) $3L(x^2 + 4x + 4) + \frac{4}{(x+2)} + C$

b) $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)Lx - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - x + C$

c) $-\frac{5}{x+3} + C$

7. a) $x - L(1 + e^x) + C$

b) $-\frac{xL2 + 1}{2^x L^2 2} + C$

c) $L\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{x + \frac{1}{2}} + C$

8. $F(x) = \int (x^2 - 2x + 3)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$, si $F(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + 2$

9. $F'(x) = \int (6x - 10)\,dx = 3x^2 - 10x + C \Rightarrow$ $\Rightarrow F(x) = \int (3x^2 - 10x + C)\,dx =$ $= x^3 - 5x^2 + Cx + K$, si $F(0) = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow K = 4$, si $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow F(x) = x^3 - 5x^2 + 4$

10. $F'(x) = \int x\cos x dx = \cos x + x\,\text{sen}\,x + C$, si $F'(0) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow F'(x) = \cos x + x\,\text{sen}\,x - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow F(x) = \int (\cos x + x\,\text{sen}\,x - 1)\,dx =$ $= -x\cos x + 2\,\text{sen}\,x - x + K$, si $F(0) = 3 \Rightarrow$ $K = 3 \Rightarrow F(x) = -x\cos x + 2\,\text{sen}\,x - x + 3$

11. $F(x) = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C$, si la gráfica pasa por el origen, $F(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2}$

12. $F(x) = \int \frac{5x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = 5\sqrt{1 + x^2} + C$, si la gráfica pasa por el origen, $F(0) = 0 = C = -5 \Rightarrow F(x) = 5\sqrt{1 + x^2} - 5$

13. $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,x + c & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$, debe ser continua y derivable en 0

Por ser continua en $x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow b = c = 0$

Por ser derivable en $x = 0 \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos 0 = a \Rightarrow a = 1$

14. Si tiene un punto de inflexión para $x = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 - a = 0 \Rightarrow a = 6$, por tanto, $F(x) = \int (3x^2 - 6x)\,dx = x^3 - 3x^2 + C$, como su gráfica pasa por $(1, 3) \Rightarrow F(1) = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow C = 5 \Rightarrow F(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

11 Integral definida

1. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^e \frac{L^2 x}{x}\,dx$

2. Calcula las siguientes integrales definidas:

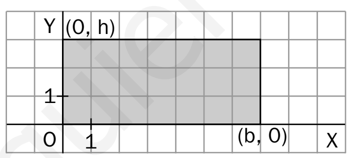
a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx$

3. Halla la función cuya gráfica es tal que la recta pendiente en cada punto de abscisa x sigue la ecuación $y = 6x + 4$, y el área encerrada por la curva pedida, el eje OX y las abscisas $x = 1$ y $x = 2$ es 5 unidades cuadradas.

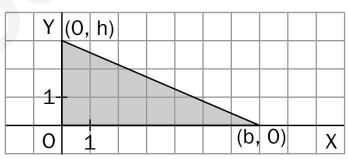
4. Se sabe que $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = 3$. ¿Cuál es el valor de $\displaystyle\int_2^5 (f(x) + 2)\,dx$?

5. La parábola $f(x) = x^2 + ax + b$ verifica que su gráfica pasa por el punto (0, 3) y que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 2$. Halla los valores de a y b.

6. Demuestra, utilizando la integral definida, que el área del rectángulo de la figura es $S = b \cdot h$



7. Demuestra, utilizando la integral definida, que el área del triángulo rectángulo de la figura es $S = \dfrac{b \cdot h}{2}$



8. Considera la función $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ¿Es f continua?

b) ¿Es f derivable?

c) Halla el valor de $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

9. Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) Aproxima, mediante el área de un trapecio curvilíneo, el valor de $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ (ayúdate de la gráfica de f).

b) Aplica la regla de Barrow para calcular $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$

c) Estima el error cometido al calcular el área pedida mediante el método del apartado a.

10. La función $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2}}$ no tiene primitiva y, por tanto, no se puede usar la regla de Barrow. Aproxima, mediante el área de un trapecio curvilíneo, el valor de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

SOLUCIONES

1. a) $2\sqrt{x+2}\,\big|_2^7 = 6 - 4 = 2$

b) $\text{sen } x + \cos x\,\big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

c) $\dfrac{L^3\,x}{3}\Big|_1^e = \dfrac{1}{3}$

2. a) $L(\cos x) + x\text{tg } x\,\big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{L2}{2}$

b) $-\dfrac{1}{x+2}\Big|_0^4 = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

c) $-\dfrac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{3}$

3. $f(x) = \displaystyle\int (6x + 4)\,dx = 3x^2 + 4x + C$, además

$\displaystyle\int_1^2 (3x^2 + 4x + C)\,dx = x^3 + 2x^2 + Cx\,\big|_1^2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow (16 + 2C) - (3 + C) = 5 \Rightarrow C = -8$, la función pedida es $f(x) = 3x^2 + 4x - 8$

4. $\displaystyle\int_2^5 (f(x) + 2)\,dx = \int_2^5 f(x)\,dx + \int_2^5 2\,dx =$

$= 3 + (2x)\,\big|_2^5 = 3 + 6 = 9$

5. Si pasa por $(0, 3) \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow b = 3$

$\displaystyle\int_0^1 (x^2 + ax + 3)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + 3x\,\Big|_0^1 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\dfrac{8}{3}$

6. Se trata de hacer la integral definida de la recta que pasa por $(0, h)$ y (b, h) entre $x = 0$ y $x = b$:

$\displaystyle\int_0^b h\,dx = hx\,\Big|_0^b = bh$

7. Se trata de hacer la integral definida de la recta que pasa por $(0, h)$ y $(b, 0)$ entre $x = 0$ y $x = b$:

$\displaystyle\int_0^b \left(-\frac{hx}{b} + h\right)dx = -\frac{hx^2}{2b} + hx\,\Big|_0^b =$

$= -\dfrac{hb}{2} + hb = \dfrac{bh}{2}$

8. a) f es continua siempre, pues es continua en cada trozo de su dominio por ser exponencial y polinómica, respectivamente, y además es continua en 0, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2$

b) f es derivable siempre, pues es derivable en cada trozo de su definición por ser exponencial y polinómica, respectivamente, y además es derivable en 0, ya que $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx =$

$\displaystyle= \int_{-1}^0 (e^x + 1)\,dx + \int_0^1 (x^2 + x + 2)\,dx =$

$\displaystyle= e^x + x\,\big|_{-1}^0 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\,\big|_0^1 = \frac{29}{6} - \frac{1}{e}$

9. a) $S = \dfrac{f(e) + f(1)}{2}(e - 1) \cong$

$\cong$ 1,175 unidades cuadradas.

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \text{L}x\,\big|_1^e = 1$ unidades cuadradas.

c) error $\cong$ 0,175 unidades cuadradas.

10. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{e^{x^2}}\,dx \cong \frac{f(3) + f(1)}{2}(3 - 1) = \frac{1}{e^9} + \frac{1}{e} =$

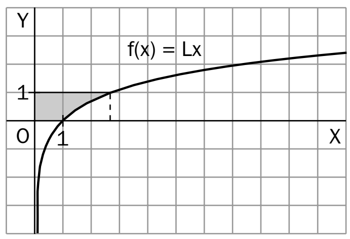
$=$ 0,368 unidades cuadradas.

12 Aplicaciones de la integral definida

1. Halla el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $y = x$. Haz un esquema gráfico que te sirva de ayuda.

2. Halla el área de la región del plano limitada por las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{sen} 2x$, entre $x = 0$ y $x = \pi$. Haz un esquema gráfico que te sirva de ayuda.

3. Halla el área del recinto sombreado de la figura, donde la curva representa la función $f(x) = Lx$.



4. Una piscina se vacía a una velocidad que viene dada por la función $v(t) = \frac{t^2}{6} + 4t$, expresada en m³/min. Calcula los metros cúbicos de agua que han salido de la piscina entre el minuto 8 y el minuto 20.

5. Los beneficios de una empresa, en miles de euros, vienen dados por la función $b(x) = -6x^2 + 120x + 264$, donde x representa el número de años que lleva funcionando la empresa.

a) ¿En qué año alcanza sus máximos beneficios?

b) ¿Hay algún momento en que la empresa entre en pérdidas?

c) Halla sus beneficios acumulados entre el tercer y el octavo año de funcionamiento.

6. Un grifo llena de agua un depósito a una velocidad que viene dada por la función $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$, donde x se mide en segundos y $f(x)$ en litros/segundo.

a) Calcula los litros de agua que habrá en el depósito después de 10 s.

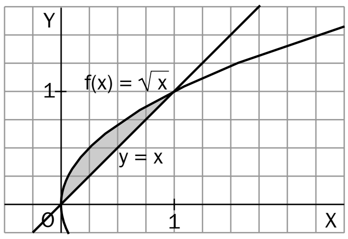
b) Si el depósito tuviese una capacidad de 9 litros, ¿cuánto tiempo tardaría en llenarse?

SOLUCIONES

1. Los puntos de corte de la parábola y la recta son $x = 0$ y $x = 1$, el área pedida es:

$$\text{área}(R) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ unidades cuadradas}$$



2. Los puntos de corte de f y g entre 0 y π son $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$ y $x = \pi$, el área pedida es:

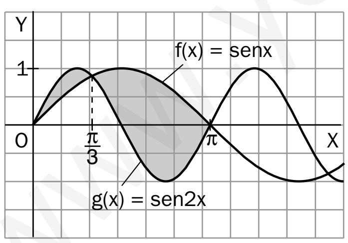
$$\text{área}(R) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\text{sen}\, x - \text{sen}\, 2x)\, dx =$$

$$= -\frac{\cos 2x}{2} + \cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\cos 2x}{2} - \cos x\,\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{5}{2} \text{ unidades cuadradas}$$



3. La recta $y = 1$ corta a $f(x) = Lx$ en $x = e$, el área pedida es:

$$\text{Área} = A(R) - \int_1^e Lx\,dx = e - (x(Lx - 1)|_1^e) =$$

$= e - 1$ unidades cuadradas, donde R es el rectángulo de base e y altura 1.

4. $$\int_8^{20} v(t)dt = \int_8^{20} \left(\frac{t^2}{6} + 4t\right) dt = \frac{t^3}{18} + 2t^2\,\Big|_8^{20} =$$

$$= \left(\frac{8\,000}{18} + 800\right) - \left(\frac{512}{18} + 128\right) = 1\,088 \text{ m}^3$$

5. a) $b'(x) = -12x + 120$, $x = 10$ es un máximo pues $b''(10) < 0$.

b) $b(x) < 0 \Rightarrow x > 22$ (la solución $x < -2$ carece de sentido). Por tanto, si $x > 22$ hay pérdidas.

c) $$\int_3^8 (-6x^2 + 120x + 264)\, dx =$$

$$= -\frac{6x^3}{3} + 60x^2 + 264x\,\Big|_3^8 = 3\,650\,000 \text{ euros}$$

6. a) Se trata de hacer la integral definida

$$\int_0^{10} \frac{10}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{10}{x+1}\bigg|_0^{10} = \frac{100}{11} \text{ litros}$$

b) $$\int_0^t \frac{10}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{10}{x+1}\bigg|_0^t = \frac{10t}{t+1} = 9 \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = 9$ s

13 Combinatoria

1. Simplifica la expresión: $\dfrac{V_{x,5} \cdot V_{x+2,7} \cdot V_{x-1,6}}{V_{x+1,6} \cdot V_{x-2,4}}$

2. Comprueba:

a) $(k-1) \cdot V_{n,k-1} = n \cdot V_{n,k-1} - V_{n,k}$

b) $V_{n,k} - V_{n-1,k} = k \cdot V_{n-1,k-1}$

c) $P_{n+1} - P_n = \dfrac{(P_n)^2}{P_{n-1}}$

3. Resuelve:

a) $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = x + 1$

b) $\dfrac{\left[30 \cdot \dfrac{\binom{x}{5}}{\binom{x}{4}}\right] \cdot \binom{x}{3}}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)} = 2$

4. Desarrolla:

a) $(5x^2 - 3y)^3$

b) Busca el octavo término del desarrollo de la potencia $(3a^2b - 2a)^{11}$

5. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 libros distintos en una estantería? ¿Y si dos de ellos, seleccionados previamente, han de permanecer fijos uno en cada extremo?

6. Demuestra que la suma de todos los números de tres cifras distintas que es posible formar con los dígitos 4, 5 y 6 es igual a $222 \cdot (4 + 5 + 6)$.

7. ¿Cuántas palabras de cinco letras se pueden formar con las letras de la palabra COCODRILO, sin que se repita ninguna? ¿Y si se permite repetición?

8. Con los dígitos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ¿cuántos números de siete cifras distintas se pueden formar de manera que en los lugares pares haya un número par y en los impares uno impar? Se toma el cero como par.

9. Deduce la fórmula que da el número de diagonales de un polígono convexo.

10. ¿Cuántas maneras diferentes hay de formar un tren con 3 coches de segunda clase, 3 de primera, 2 coches cama y un vagón de correos?

SOLUCIONES

1. $\dfrac{V_{x,5} \cdot V_{x+2,7} \cdot V_{x-1,6}}{V_{x+1,6} \cdot V_{x-2,4}} =$

$= \dfrac{V_{x,5} \cdot [(x+2) \cdot V_{x+1,6}] \cdot [(x-1) \cdot V_{x-2,4} \cdot (x-6)]}{V_{x+1,6} \cdot V_{x-2,4}} =$

$= V_{x,5} \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 6)$

2. a) $n \cdot V_{n,k-1} - V_{n,k} =$

$= n \cdot V_{n,k-1} - V_{n,k-1} \cdot (n - k + 1) =$

$= [n - (n - k + 1)] \cdot V_{n,k-1} = (k - 1) \cdot V_{n,k-1}$

b) $V_{n,k} - V_{n-1,k} =$

$= n \cdot V_{n-1,k-1} - V_{n-1,k-1} \cdot (n - 1 - k + 1) =$

$= [n - (n - k)] \cdot V_{n-1,k-1} = k \cdot V_{n-1,k-1}$

c) $P_{n+1} - P_n = (n + 1) \cdot P_n - P_n =$

$= (n + 1 - 1) \cdot P_n = n \cdot P_n$

$\dfrac{(P_n)^2}{P_{n-1}} = \dfrac{P_n \cdot P_n}{P_{n-1}} = \dfrac{n \cdot P_{n-1} \cdot P_n}{P_{n-1}} = n \cdot P_n$

3. a) $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = x + 1 \iff$

$\iff \dfrac{x \cdot (x - 1)}{2} + \dfrac{x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)}{6} =$

$= x + 1 \iff x^3 - 7x - 6 = 0 \iff$

$\iff x = \{-2, -1, 3\}$

La única solución válida es $x = 3$.

b) $\dfrac{\left[30 \cdot \dfrac{\binom{x}{5}}{\binom{x}{4}}\right] \cdot \binom{x}{3}}{x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)} = 2 \iff$

$\iff \dfrac{30 \cdot \dfrac{x-4}{5} \cdot \dfrac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{6}}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)} = 2 \iff$

$\iff x - 4 = 2 \iff x = 6$

4. a) $(5x^2 - 3y)^3 = \binom{3}{0}(5x^2)^3 - \binom{3}{1}(5x^2)^2\, 3y +$

$+ \binom{3}{2} 5x^2(3y)^2 - \binom{3}{3}(3y)^3 =$

$= 1 \cdot 125x^6 - 3 \cdot 25x^4 \cdot 3y + 3 \cdot 5x^2 \cdot 9y^2 - 1 \cdot 27y^3$

$= 125x^6 - 225x^4y + 135x^2y^2 - 27y^3$

b) $\binom{11}{7}(3a^2b)^4\ (2a)^7 = 330 \cdot 3^4 \cdot 2^7 \cdot a^{15} \cdot b^4 =$

$= 3\,421\,440\ a^{15}b^4$

5. Se utilizan todos los libros, y hay que tener en cuenta el orden: $P_{10} = 3\,628\,800$

Si dos libros permanecen fijos: $P_8 = 40\,320$

6. Los números de tres cifras distintas que se puedan formar con los dígitos 4, 5, 6: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

4, 5 y 6 ocupan la posición de las centenas dos veces, por lo que su suma es:

$2 \cdot 100 \cdot 4 + 2 \cdot 100 \cdot 5 + 2 \cdot 100 \cdot 6 =$
$= 200 \cdot (4 + 5 + 6)$

Para las decenas ocurre lo mismo:

$2 \cdot 10 \cdot 4 + 2 \cdot 10 \cdot 5 + 2 \cdot 10 \cdot 6 =$
$= 20 \cdot (4 + 5 + 6)$

Para la posición de las unidades:

$2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 6 =$
$= 2 \cdot (4 + 5 + 6)$

La suma total es: $200 \cdot (4 + 5 + 6) +$
$+ 20 \cdot (4 + 5 + 6) + 2 \cdot (4 + 5 + 6) =$
$= 222 \cdot (4 + 5 + 6)$

7. Sin repetición: $V_{6,5} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ palabras.

Con repetición: $VR_{6,5} = 6^5 = 7\,776$ palabras.

8. Impares $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, pares $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

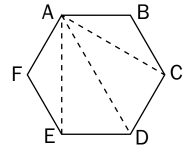
IPIPIPI

$V_{5,4} \cdot V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7\,200$

9. Para formar una diagonal hay que unir dos vértices no consecutivos, por ejemplo $\overline{AC}$. Ahora bien, la diagonal $\overline{AC}$ coincide con la diagonal $\overline{CA}$, es decir, no interviene el orden. Por tanto, si un polígono tiene n lados, el número de diagonales es:

$C_{n,2} - n = \dfrac{n \cdot (n - 1)}{2} - n =$

$= \dfrac{n^2 - 3n}{2}$



se resta n, número de lados, ya que al unir los vértices, de dos en dos, se generan las diagonales más los lados.

10. Todas las unidades, coches de distinta clase y vagón entran a formar parte del tren, por tanto son permutaciones. Como hay repetición:

$P_9^{3,3,2,1} = \dfrac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 7! = 5\,040$ maneras.

14 Cálculo de probabilidades

1. Se considera el experimento aleatorio consistente en volver una ficha de las 28 de un dominó y anotar el número de puntos de dicha ficha.

a) Establece el espacio muestral E.

b) Calcula el número de sucesos de este experimento, es decir, el número de elementos del espacio de sucesos S.

c) Si denotamos por a_i el suceso que consiste en haber vuelto y leído una ficha con i puntos, descríbanse los sucesos: a_{13}, a_0, $B = a_6 \cup a_{12}$, $C = a_4 \cap a_3$, D: «se consigue ficha con puntuación múltiplo de 6».

2. En una bolsa hay seis bolas numeradas del 1 al 6 y se hacen tres extracciones consecutivas con reemplazamiento, obteniéndose un número de tres dígitos. Calcula:

a) El número de elementos del espacio muestral.

b) El número de elementos del suceso A: «obtener capicúa».

c) El número de elementos del suceso B: «obtener un número de tres cifras múltiplo de 5».

3. Se lanza un dado dos veces. Calcula las probabilidades de los sucesos A: «la suma de las caras es 7»; B: «la suma es 8»; C: «la suma de las caras es menor que cinco».

4. Se extraen dos cartas de una baraja española de 40 cartas, de forma consecutiva, y se consideran los sucesos: A: «La primera carta es caballo o sota»; B: «La segunda es caballo o sota»; C: «La primera carta no es del palo de espadas»; D: «La segunda carta no es del palo de espadas».

Calcula las probabilidades de los sucesos $A \cap B$ y $C \cap D$:

a) Con reemplazamiento.

b) Sin reemplazamiento de la primera carta extraída.

5. Un dado se lanza dos veces. Halla la probabilidad de obtener cuatro, cinco o seis en el primer lanzamiento y uno, dos, tres o cuatro en el segundo.

6. Se considera el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de 3 dados al aire y anotar los números de las caras superiores. Calcula:

a) La probabilidad de que los 3 números sumen 10.

b) La probabilidad de que el producto de los 3 números sea 30.

c) La probabilidad de que la suma sea 10 y el producto 30.

d) La probabilidad de que o la suma es 10 o el producto es 30, o ambas cosas a la vez.

7. En una clase hay 10 hombres y 20 mujeres; la mitad de los hombres y la mitad de la mujeres tienen los ojos castaños. Determina la probabilidad de que una persona, elegida al azar, sea hombre o tenga los ojos castaños.

SOLUCIONES

1. a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) Núm. de sucesos $= 2^{\text{n.º de elementos de } E} = 2^{13} = 8\,192$

c) a_{13} = «la suma de los puntos es 13» $= \varnothing$

a_0 = «la suma de los puntos es 0» $= \{(0, 0)\}$

$B = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3)\} \cup \{(6, 6)\} =$
$= \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (6, 6)\}$

$C = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2)\} \cap \{(0, 3), (1, 2)\} = \varnothing$

$D = \{(0, 0), (0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (6, 6)\}$

2. a) Se forman números de tres cifras a partir de 6 dígitos, pudiéndose repetir: $VR_{6,3} = 6^3 = 216$

b) A: «obtener capicúa», son tantos elementos como números de dos cifras se pueden formar con 6 dígitos, ya que el tercero tiene que ser obligatoriamente igual al primero, es decir: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$

c) B: «obtener un múltiplo de 5», la cifra de las unidades tiene que ser cinco: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$

3. Hay $VR_{6,2} = 36$ sucesos elementales equiprobables:

$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$;

$p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$; $p(B) = \dfrac{5}{36}$

$C = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$;

$p(C) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

4. a) Con reemplazamiento

$VR_{40,2} = 40^2 = 1\,600$ casos posibles.

$A \cap B$: «La primera carta es caballo o sota y la segunda caballo o sota»: $VR_{8,2} = 8^2 = 64$ casos favorables.

Por tanto: $p(A \cap B) = \dfrac{64}{1\,600} = \dfrac{1}{25}$

$C \cap D$: «La primera carta no es de espadas y la segunda carta tampoco es de espadas»:

$VR_{30,2} = 30^2 = 900$

Por tanto: $p(C \cap D) = \dfrac{900}{1\,600} = \dfrac{9}{16}$

b) Sin reemplazamiento

$V_{40,2} = 40 \cdot 39 = 1\,560$ casos posibles.

$A \cap B$: «La primera carta es caballo o sota y la segunda caballo o sota»: $V_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56$

Por tanto: $p(A \cap B) = \dfrac{56}{1\,560} = \dfrac{7}{195}$

$C \cap D$: «La primera carta no es de espadas y la segunda carta tampoco es de espadas»:

$V_{30,2} = 30 \cdot 29 = 870$

Por tanto: $p(C \cap D) = \dfrac{870}{1\,560} = \dfrac{87}{156}$

5. Sea A: «Obtener 4, 5 ó 6 en el primer lanzamiento», y B: «Obtener 1, 2, 3 ó 4 en el segundo lanzamiento».

Casos posibles: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$

La probabilidad de $A \cap B$ consta de: $3 \cdot 4 = 12$ casos posibles, ya que cada uno de los 3 casos favorables del primer lanzamiento se puede asociar con cada uno de los 4 del segundo. Así:

$p(A \cap B) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

6. $VR_{6,3} = 6^3 = 216$ casos posibles.

a) Sea A: «La suma de los tres números es 10».

El número 10 se puede descomponer en tres sumandos, menores que 7, de las siguientes formas:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 3 + 6 \longrightarrow P_3 = 6 \text{ posibilidades} \\ 1 + 4 + 5 \longrightarrow P_3 = 6 \text{ posibilidades} \\ 2 + 2 + 6 \longrightarrow PR_3^{2,1} = 3 \text{ posibilidades} \\ 2 + 3 + 5 \longrightarrow P_3 = 6 \text{ posibilidades} \\ 2 + 4 + 4 \longrightarrow PR_3^{2,1} = 3 \text{ posibilidades} \\ 3 + 3 + 4 \longrightarrow PR_3^{2,1} = 3 \text{ posibilidades} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p(A) = \dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8}$

b) Sea B: «El producto de los tres números es 30».

El número 30 se puede expresar como producto de tres factores, menores que 7, de las siguientes formas:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot 5 \cdot 6 \rightarrow P_3 = 6 \text{ posibilidades} \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow P_3 = 6 \text{ posibilidades} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p(B) = \dfrac{12}{216} = \dfrac{1}{18}$

c) C: «La suma es 10 y el producto 30»: $C = A \cap B$

$p(C) = p(A \cap B) = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$

d) $D = A \cup B$, por tanto:

$p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$

$= \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{36} = \dfrac{11}{72}$

7. A: «La persona escogida es hombre»;

B: «La persona escogida tiene los ojos castaños».

$p(A) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$, $p(B) = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}$, $p(A \cap B) = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

15 Probabilidad condicionada

1. Una bolsa contiene 100 monedas correctas y 30 trucadas. Se extraen tres monedas, una a una y sin reemplazamiento. Se pide:

a) Forma el espacio muestral y asigna la probabilidad correspondiente a cada suceso del mismo.

b) ¿Cuál es la probabilidad de haber extraído dos monedas correctas?

c) Si la primera extracción ha sido una moneda correcta, ¿cuál es la probabilidad de haber extraído al menos una trucada?

2. En un grupo hay 30 personas de las que 13 son hombres, (H), y 17 mujeres, (M), de ellos 5 hombres y 7 mujeres son rubios (R). Calcula:

a) $p(H)$; $p(M)$; $p(H/R)$; $p(M/R)$; $p(H \cap R)$; $p(M \cap R)$.

b) $p(R)$; $p(R/H)$, $p(R/M)$.

3. La probabilidad de que un opositor apruebe una oposición es 0,45, y la de que apruebe una opositora es 0,51. Si elegimos a un hombre y a una mujer de entre los que se presentan a la opisición, al azar, halla la probabilidad de que:

a) Alguno de ellos apruebe.

b) Ninguno apruebe.

c) Solo apruebe la mujer.

4. En un examen hay 2 temas de máxima dificultad, 5 de dificultad media y 3 de escasa dificultad, de los cuales se elige uno al azar. La probabilidad de que un alumno apruebe el examen si el tema es de máxima dificultad es de $\frac{1}{9}$, si es de dificultad media, $\frac{3}{5}$, y si es de escasa dificultad, $\frac{3}{4}$.

a) Halla la probabilidad de que el alumno apruebe el examen.

b) Halla la probabilidad de que el tema elegido haya sido de máxima dificultad, si el alumno aprobó.

5. En un determinado almacén hay 3 estanterías y en cada una de ellas 2 tipos de productos: A y B. En la primera hay 140 productos y se sabe que el 25 % son del tipo A. En la segunda hay 130 productos y se sabe que 91 son del tipo B. Y en la tercera hay 40 del tipo A y 80 del tipo B.

a) Haz una tabla que recoja la información anterior.

b) Calcula la probabilidad de que un producto elegido al azar sea del tipo A.

c) Si se sabe que el producto elegido no pertenece a la primera estantería, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

6. Un país está habitado por dos grupos étnicos: M y N, que se encuentran en las proporciones 75 % y 25 % respectivamente. Se conoce que la talla de los individuos adultos varones es $N(\mu, \sigma)$, con $\mu = 170$ y $\sigma = 5$ cm para el grupo M, $\mu = 175$ y $\sigma = 5$ cm para el grupo N. Se conviene que un individuo es alto si su talla es superior a 180 cm.

a) Porcentaje de individuos altos del grupo M.

b) Porcentaje de altos en el grupo N.

c) Porcentaje de altos en el país.

d) Si un individuo es alto, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo N?

SOLUCIONES

1. a) El espacio muestral es:

$E = \{(C, C, C), (C, C, T), (C, T, C), (T, C, C), (C, T, T), (T, C, T), (T, T, C), (T, T, T)\}$

$p(C;\ C;\ C) = \dfrac{100}{130} \cdot \dfrac{99}{129} \cdot \dfrac{98}{128} = 0{,}45;$

$p(C;\ C;\ T) = p(C;\ T;\ C) = p(T;\ C;\ C) =$

$= \dfrac{100}{130} \cdot \dfrac{99}{129} \cdot \dfrac{30}{128} = 0{,}14$

$p(C;\ T;\ T) = p(T;\ C;\ T) = p(T;\ T;\ C) =$

$= \dfrac{100}{130} \cdot \dfrac{30}{129} \cdot \dfrac{29}{128} = 0{,}041$

$p(T;\ T;\ T) = \dfrac{30}{130} \cdot \dfrac{29}{129} \cdot \dfrac{28}{128} = 0{,}011$

b) $p(2\ C) = p(C;\ C;\ T) + p(C;\ T;\ C) + p(T;\ C;\ C) =$

$= 3 \cdot \dfrac{100}{130} \cdot \dfrac{99}{129} \cdot \dfrac{30}{128} = 0{,}42$

c) $p(\text{«al menos 1 } T\text{»/«la primera ha sido } C\text{»}) =$

$= \dfrac{p(\text{«la 1.}^{\text{era}}\ C\text{»} \cap \text{«al menos 1 } T\text{»})}{p(\text{«la 1.}^{\text{era}}\ C\text{»})} =$

$= \dfrac{\dfrac{100}{130}\left(\dfrac{99}{129}\cdot\dfrac{30}{128}+\dfrac{99}{129}\cdot\dfrac{30}{128}+\dfrac{30}{129}\cdot\dfrac{29}{128}\right)}{\dfrac{100}{130}} = 0{,}412$

2.

	Rubios	No rubios	Total
Hombres	5	8	13
Mujeres	7	10	17
Total	12	18	30

a) $p(H) = \dfrac{13}{30};\ p(M) = \dfrac{17}{30};\ p(H/R) = \dfrac{5}{12};$

$p(M/R) = \dfrac{7}{12};\ p(H \cap R) = \dfrac{5}{30};\ p(M \cap R) = \dfrac{7}{30}$

b) $p(R) = \dfrac{12}{30};\ p(R/H) = \dfrac{5}{13};\ p(R/M) = \dfrac{7}{17}$

3. Si llamamos $p(H)$ y $p(M)$ a las probabilidades de que un opositor y una opositora aprueben, respectivamente, y entonces $p(\overline{H})$ y $p(\overline{M})$ a las probabilidades de que no aprueben:

$p(H) = 0{,}45$ $\qquad p(M) = 0{,}51$

$p(\overline{H}) = 0{,}55$ $\qquad p(\overline{M}) = 0{,}49$

$p(H \cap M) = p(H) \cdot p(M) = 0{,}45 \cdot 0{,}51 = 0{,}2295$

a) $p(H \cup M) = p(H) + p(M) - p(H \cap M) =$
$= 0{,}45 + 0{,}51 - 0{,}2295 = 0{,}731$

b) $p(\overline{H} \cap \overline{M}) = P(\overline{H}) \cdot P(\overline{M}) = 0{,}2695$
(Si A y B son independientes $\Rightarrow \overline{A}$ y $\overline{B}$ también)

c) $p(\overline{H} \cap M) = p(\overline{H}) \cdot p(M) = = 0{,}2805$

4. Mx: Máxima dificultad; Md: Dificultad media; E: Escasa dificultad; A: El alumno aprueba.

a) $p(A) = p(Mx) \cdot p(A/Mx) + p(Md) \cdot p(A/Md) + p(E)p(A/E) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9} + \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{3}{4} = 0{,}55$

b) $p(Mx/A) = \dfrac{p(Mx) \cdot p(A/Mx)}{p(A)} = \dfrac{\dfrac{2}{90}}{0{,}55} = 0{,}04$

5. a)

	$E1$	$E2$	$E3$	Total
A	35	39	40	114
B	105	91	80	276
Total	140	130	120	390

b) $p(A) = p(E1) \cdot p(A/E1) + p(E2) \cdot p(A/E2) + p(E3) \cdot p(A/E3) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{35}{140} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{39}{130} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{40}{120} = 0{,}294$

c) $p(B/\overline{E1}) = \dfrac{p(B \cap \overline{E1})}{p(\overline{E1})} = \dfrac{\dfrac{91}{390} + \dfrac{80}{390}}{\dfrac{2}{3}} = 0{,}657$

6. a) $100 \cdot p(X \geqslant 180) = 100 \cdot p\left(Z \geqslant \dfrac{180 - 170}{5}\right) =$
$100 \cdot p(Z \geqslant 2) = 100 \cdot (1 - p(Z < 2)) =$
$= 100 \cdot 0{,}0228 = 2{,}28\ \%$ en M

b) $100 \cdot p(X \geqslant 180) = 100 \cdot p\left(Z \geqslant \dfrac{180 - 175}{5}\right) =$
$= 100 \cdot p(Z \geqslant 1) = 100 \cdot (1 - p(Z < 1)) =$
$= 100 \cdot 0{,}1587 = 15{,}87\ \%$ en N

c) $100 \cdot p(A) =$
$= 100[0{,}75 \cdot 0{,}0228 + 0{,}25 \cdot 0{,}1587] =$
$= 5{,}68\ \%$ altos en el país.

d) $p(N/A) = \dfrac{p(N) \cdot p(A/N)}{p(A)} = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}1587}{0{,}056775} =$
$= 0{,}6988$

16 Teoría de muestras

1. Se sabe que el 2 % de las piezas producidas por una cierta máquina son defectuosas. Calcula:

a) La distribución que sigue la proporción de piezas defectuosas en muestras de 400 piezas.

b) La probabilidad de que en una partida de 400 piezas sean defectuosas el 3 % o más.

2. Una urna contiene 80 bolas, de las que el 60 % son rojas y el 40 % son blancas. De un total de 50 muestras de 20 bolas cada una, sacadas de la urna con reemplazamiento, indica en cuántas cabe esperar:

a) igual número de bolas rojas que de blancas.

b) 12 bolas rojas y 8 blancas.

c) 10 o más bolas blancas.

3. Un laboratorio fabrica comprimidos efervescentes en forma de disco cuyo diámetro X quiere controlar. La cantidad X es una variable aleatoria cuyos diámetros tienen una media $\mu = 15$ mm y desviación típica $\sigma = 4$ mm. A intervalos fijos de tiempo se extraen muestras de tamaño 64 y se miden los diámetros.

a) ¿De qué tipo es el muestreo realizado?

b) Determina la distribución en el muestreo de la variable media muestral.

c) Calcula la probabilidad de que dicha variable esté comprendida entre 13 y 16 mm.

4. Los pesos de los paquetes repartidos por una empresa de mensajería tienen una media de 300 g y una desviación típica de 50 g. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso de 25 paquetes elegidos al azar supere el límite de carga de un repartidor, que es de 8 200 g?

5. Una prueba escrita consta de 100 cuestiones, la puntuación media que se ha obtenido es de 68 puntos con una desviación típica de 10 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 grupos formados por 28 y 36 personas, elegidas al azar entre las que han realizado la prueba escrita, difieran en su puntuación media en:

a) más de 5 puntos,

b) entre 3 y 7 puntos?

6. El voltaje medio de las baterías de un fabricante es de 15 voltios y la desviación típica 0,2 voltios. Si se eligen al azar 4 baterías de este fabricante y se conectan en serie (esto supone que se suman los voltajes), calcula la probabilidad de que tengan un voltaje conjunto de 60,8 o más voltios.

SOLUCIONES

1. a) La proporción, en la población, de piezas defectuosas es $p = 0{,}02$. En muestras de 400 piezas, la proporción es una variable aleatoria con parámetros: Media: $\mu = p = 0{,}02$.

Desv. típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{p \cdot (1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{400}} =$
$= 0{,}007$

La distribución es $N(0{,}02;\ 0{,}007)$.

b) Como la proporción de piezas defectuosas es una variable aleatoria discreta, se hace la corrección de normalidad:

$p(p \geqslant 0{,}03) = p\left(X \geqslant 0{,}03 - \dfrac{0{,}5}{400}\right) =$
$= p\left(Z \geqslant \dfrac{0{,}02875 - 0{,}02}{0{,}007}\right) = p(Z \geqslant 1{,}25) =$
$= 1 - P(Z < 1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

2. Llamamos p a la proporción de bolas rojas (R), $p = 0{,}6$ y $q = 1 - p = 0{,}4$ a la proporción de blancas (B).

En muestras de tamaño 20, obtenidas mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento, la proporción de R es una variable aleatoria con: Media: $\mu = p = 0{,}6$

Desv. típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{p(1 - p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{20}} =$
$= 0{,}1095$

Su distribución en el muestreo se aproxima a $N(0{,}6,\ 0{,}1095)$; en muestras de 20:

$N(0{,}6 \cdot 20,\ 0{,}1095 \cdot 20) = N(12;\ 2{,}19)$

a) $p(R = 10) = p(9{,}5 < X \leqslant 10{,}5) =$
$= p\left(\dfrac{9{,}5 - 12}{2{,}19} < Z \leqslant \dfrac{10{,}5 - 12}{2{,}19}\right) =$
$= p(-1{,}14 < Z \leqslant -0{,}68) =$
$= p(Z \leqslant 1{,}14) - P(Z \leqslant 0{,}68) = 0{,}121$

es decir, en un total de 50, cabe esperar igual número de R que de B en:

$0{,}1211 \cdot 50 = 6{,}0550 \approx 6$ muestras.

b) $p(R = 12) = p(11{,}5 < X \leqslant 12{,}5) =$
$= p\left(\dfrac{11{,}5 - 12}{2{,}19} < Z \leqslant \dfrac{12{,}5 - 12}{2{,}19}\right)$

$p(-0{,}23 < Z \leqslant 0{,}23) =$
$= 2 \cdot [p(Z \leqslant 0{,}23) - 0{,}5] = 0{,}182$

El número de muestras es:

$0{,}182 \cdot 50 = 9{,}1 \approx 9$

c) Esto es igual que el número de $R \leqslant 10$.

$p(R \leqslant 10) = p(X \leqslant 10{,}5) = p\left(Z \leqslant \dfrac{10{,}5 - 12}{2{,}19}\right) =$
$= 0{,}248$

El número de muestras es:

$0{,}248 \cdot 50 = 12{,}41 \approx 12$

3. a) El muestreo es aleatorio sistemático, puesto que a intervalos fijos de tiempo se van eligiendo muestras de tamaño constante.

b) La media muestral $\overline{X}$ sigue, en el muestreo, una

$N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(15, \dfrac{4}{\sqrt{64}}\right) \longrightarrow N(15;\ 0{,}5)$

c) $p(13 \leqslant \overline{X} \leqslant 16) = p\left(\dfrac{13 - 15}{0{,}5} \leqslant Z \leqslant \dfrac{16 - 15}{0{,}5}\right) =$
$= p(-4 \leqslant Z \leqslant 2) = p(Z \leqslant 2) = 0{,}9772$

4. La media muestral $\overline{X}$ sigue, en el muestreo, una

$N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(300, \dfrac{50}{\sqrt{25}}\right) \longrightarrow N(300,\ 10)$

El peso de 25 paquetes superará el límite de carga de 8 200 g, si cada paquete, por término medio, supera $\dfrac{8\,200}{25} = 328$ g: $p(\overline{X} \geqslant 328) = p\left(Z \geqslant \dfrac{328 - 300}{10}\right) =$
$= p(Z \geqslant 2{,}8) = 1 - p(Z \leqslant 2{,}8) = 1 - 0{,}9974 =$
$= 0{,}0026$

5. La variable diferencia de medias, $\overline{X}_{28} - \overline{X}_{36}$, sigue una distribución en el muestreo con:

Media: $\mu = \mu_1 - \mu_2 = 68 - 68 = 0$

Desv. típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\dfrac{10^2}{28} + \dfrac{10^2}{36}} =$
$= \sqrt{\dfrac{400}{63}} = 2{,}5$

La variable se distribuye mediante una N(0;2,5)

a) $p(\overline{X}_{28} - \overline{X}_{36} > 5) = p\left(Z > \dfrac{5 - 0}{2{,}5}\right) = p(Z > 2) =$
$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

b) $p(3 < \overline{X}_{28} - \overline{X}_{36} \leqslant 7) = p\left(\dfrac{3}{2{,}5} < Z \leqslant \dfrac{7}{2{,}5}\right) =$
$= p(Z \leqslant 2{,}8) - p(Z \leqslant 1{,}2) = 0{,}9974 - 0{,}8849$
$= 0{,}1125$

6. La variable T sumas muestrales, con:

Media: $4 \cdot \mu = 4 \cdot 15 = 60$ voltios.

Desviación típica: $\sigma \cdot \sqrt{4} = 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$

La variable T sigue una muestreo $N(60;\ 0{,}4)$

$p(T \geqslant 60{,}8) = p\left(Z \geqslant \dfrac{60{,}8 - 60}{0{,}4}\right) = p(Z \geqslant 2) =$
$= 1 - p(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

17 Intervalos de confianza

1. a) Dar ejemplos de estimadores puntuales insesgados y eficientes para la media y la varianza poblacionales.

b) Supongamos que las alturas de 100 estudiantes de una universidad representan una muestra, elegida al azar, de las 5 316 alturas de todos los estudiantes de dicha universidad. Si la media y la desviación típica de estas 100 alturas son 178 cm y 10 cm respectivamente, determina estimaciones insesgadas y eficientes de la altura media y la varianza poblacionales.

2. Al medir el tiempo de respuesta a señales luminosas en pruebas para renovar el permiso de conducir, se estima que la desviación típica del mismo es de 0,05 segundos. Indica cuál será el número de medidas que deberás hacer para que el error de tu estimación no exceda de 0,01 segundos, con un nivel de confianza del:

a) 95 %.

b) 99 %.

3. En 60 lanzamientos de una moneda se obtuvieron 36 cruces. Halla el intervalo de confianza para la proporción de cruces que se obtendrían en un número ilimitado de tiradas, con un nivel de confianza del:

a) 95 %.

b) 99,73 %.

4. El consumo de un producto sigue una distribución normal, con varianza 300. A partir de una muestra de tamaño 25 se ha logrado una media muestral igual a 180. Halla un intervalo de confianza, al 99 %, para la media del consumo.

5. Al medir el diámetro de arandelas producidas por una empresa, se estima que la desviación típica de dicho diámetro es 0,05 cm. Se han hecho 121 mediciones con objeto de estimar el diámetro medio.

¿Se puede afirmar, con el 99 % de confianza, que el error de la estimación no excederá de 0,012 cm?

6. Una empresa adquiere 5 000 cables de acero. Un ensayo con 40 de ellos, elegidos al azar, dieron una media de resistencia a la rotura de 2 400 kg, con una desviación típica de 150 kg.

a) Halla un intervalo de confianza para la resistencia media, de la población de cables adquiridos, al nivel de confianza del 80 %.

b) Repite el apartado a para un nivel del 95 %.

c) Compara las longitudes de los intervalos obtenidos en los apartados anteriores e interprétalos.

d) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra, para estar seguro al nivel del 85 %, que el error máximo cometido sea de 10 kg?

SOLUCIONES

1. a) Para la media poblacional: la media muestral: $\overline{X}$.
Para la varianza poblacional:
la cuasivarianza muestral: $\widehat{S}^2 = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

b) Para la media poblacional: 178 cm.
Para la varianza poblacional:
$\widehat{S}^2 = \dfrac{n}{n-1} S^2 \Rightarrow \widehat{S}^2 = \dfrac{100}{99} \cdot 10^2 = 101{,}01 \text{ cm}^2$

2. a) Para $1 - \alpha = 0{,}95$ el intervalo de confianza, para la media poblacional, es $\left(\overline{x} \pm 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Como no conocemos σ, tomamos $\sigma = s = 0{,}05\ s$, con lo que el error es:

$1{,}96 \dfrac{0{,}05}{\sqrt{n}} = 0{,}01 \iff n = \left(1{,}96 \dfrac{0{,}05}{0{,}01}\right)^2 =$
$= 9{,}8^2 = 96{,}04 \Rightarrow$ para $n \geqslant 97$, el error $< 0{,}01\ s$

b) Para $1 - \alpha = 99$, el intervalo de confianza es $\left(\overline{x} \pm 2{,}58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ y el error de la estimación $2{,}58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Tomamos $\sigma = s = 0{,}05\ s$, así:

$2{,}58 \dfrac{0{,}05}{\sqrt{n}} = 0{,}01 \iff n = \left(2{,}58 \dfrac{0{,}05}{0{,}01}\right)^2 =$
$= 12{,}9^2 = 166{,}4 \Rightarrow$ para $n \geqslant 167$, el error $< 0{,}01\ s$

3. a) $1 - \alpha = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$

$p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}95 + \dfrac{0{,}05}{2} = 0{,}975$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$IC\colon \left(\widehat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\widehat{p} \cdot (1 - \widehat{p})}{n}}\right) = \left(0{,}6 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{60}}\right)$
$= (0{,}6 \pm 0{,}124) = (0{,}476,\ 0{,}724)$

b) $1 - \alpha = 0{,}9973$, $\alpha = 0{,}0027$, $P(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) =$
$= 0{,}9973 + \dfrac{0{,}0027}{2} = 0{,}9987$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 3$

$IC\colon \left(\widehat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\widehat{p} \cdot (1 - \widehat{p})}{n}}\right) = \left(0{,}6 \pm 3 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{60}}\right)$
$= (0{,}6 \pm 0{,}189) = (0{,}411;\ 0{,}789)$

4. Como la población sigue una normal, la variable media muestral sigue $N\left(\overline{x}, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, aun para valores de $n < 30$, donde hemos sustituido μ, desconocida, por $\overline{x}$. El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$\left(\overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(180 \pm z_{\frac{0{,}01}{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{300}}{\sqrt{25}}\right) =$
$= (171{,}06;\ 188{,}94)$, ya que $Z_{\frac{0{,}01}{2}} = 2{,}58$

5. Sí se puede, ya que: error máximo $= z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} =$
$= z_{\frac{0{,}01}{2}} \cdot \dfrac{0{,}05}{\sqrt{121}} = 2{,}58 \cdot \dfrac{0{,}05}{11} = 0{,}0117$

6. El estimador de la media poblacional es la media muestral, $\overline{x} \longrightarrow N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, pero como σ es desconocida se trabaja con: $N\left(\mu, \dfrac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}\right)$.

$\widehat{s} = \sqrt{\dfrac{5\,000}{4\,999}} \cdot s = 150{,}01 \approx 150$

a) Para $1 - \alpha = 0{,}80$, el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}2}{2}} = 1{,}28$, puesto que: $p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) =$
$= 0{,}80 + 0{,}10 = 0{,}90$; entonces:

$IC = \left(\overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}\right) = \left(2\,400 \pm 1{,}28 \cdot \dfrac{150}{\sqrt{40}}\right) =$
$= (2\,369{,}6;\ 2\,430{,}4)$

b) Para un nivel de confianza $1 - \alpha = 0{,}95$, el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}05}{2}} = 1{,}96$, ya que $p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975$

$IC = \left(2\,400 \pm 1{,}96 \cdot \dfrac{150}{\sqrt{40}}\right) = (2\,353{,}5;\ 2\,446{,}5)$

c) Los intervalos obtenidos cubrirán, o no, el valor de la media poblacional μ. Se observa que cuanto mayor es $1 - \alpha$, mayor es la amplitud del intervalo y mayor es la probabilidad de que cubra el verdadero valor de μ.

d) El error máximo que se comete es el radio del intervalo de confianza: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}$, despejando:

$z_{\frac{0{,}15}{2}} = 1{,}44$, ya que $p\left(Z \leqslant z_{\frac{0{,}15}{2}}\right) =$
$= 0{,}85 + \dfrac{0{,}15}{2} = 0{,}925$

$n = \left(\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{s}}{E}\right)^2 = \left(\dfrac{1{,}44 \cdot 150}{10}\right)^2 = 466{,}56$, con una muestra de 467 o más cables nos aseguramos, con un nivel de confianza del 85 %, que el error máximo sea de 10 kg.

18 Contraste de hipótesis

1. Se lanzan un par de dados 100 veces y se observa que el resultado, la suma de puntos es 7, aparece 23 veces. Contrasta la hipótesis de que los dados están bien hechos mediante:

a) un contraste bilateral;

b) un contraste unilateral derecho, siempre con un nivel de significación del 0,05.

2. En una muestra de 100 bombillas halógenas, de una determinada marca, se observa que su duración media es de 1 650 horas, con una desviación típica de 130 horas. Si μ es la duración media de todas las bombillas halógenas de esa marca, contrasta la hipótesis $\mu = 1\,680$ horas, con la hipótesis alternativa $\mu \neq 1\,680$ horas, al nivel de significación de 0,05.

3. El diámetro de unos tubos metálicos cilíndricos sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 3 mm. Se toma una muestra, al azar, de 36 tubos y se obtiene un diámetro medio de 39 mm. ¿Se puede afirmar con un nivel de significación de 0,01 que la media de la población de tubos es 43 mm?

4. Un constructor mantiene que al menos el 95 % de las viviendas que construye cumplen con la certificación de calidad europea. Se toma una muestra de 100 viviendas, al azar, de las que 9 resulta que no cumplen la certificación. Contrasta la afirmación del constructor los niveles del 0,01.

5. Se ha aplicado un test de memoria a un gran número de estudiantes, encontrándose que la desviación típica es 33,5. Aplicado el test a una muestra aleatoria de 36 alumnos, se ha obtenido una media de 187,7. Se puede afirmar que la memoria media es de 195, con arreglo a este test, y con un nivel de confianza del 90 %.

SOLUCIONES

1. La probabilidad de obtener «suma de puntos igual a 7» es $\frac{1}{6}$, ya que el suceso considerado es:

$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$.

a) Contraste bilateral:

$$H_0\colon p = \frac{1}{6} = p_0 \qquad H_1\colon p \neq \frac{1}{6}$$

- Estadístico del contraste: $\hat{p}$.
- Para $\alpha = 0{,}05$, contraste bilateral, la región de aceptación es: $(-1{,}96;\ 1{,}96)$.
- $Z = \dfrac{\frac{23}{100} - \frac{1}{6}}{0{,}037} = 1{,}71 \in (-1{,}96;\ 1{,}96)$, por tanto se acepta H_0, es decir, aceptamos que los dados están bien hechos, al nivel de significación prefijado.

b) Contraste unilateral:

$$H_0\colon p = \frac{1}{6} = p_0 \qquad H_1\colon p > \frac{1}{6}$$

- Estadístico del contraste: $\hat{p}$.
- Para $\alpha = 0{,}05$, contraste unilateral derecho, la región de aceptación es: $(-\infty;\ 1{,}645)$.
- $Z = 1{,}71$, $\notin (-\infty;\ 1{,}645)$, por tanto, se rechaza la hipótesis nula, es decir, aceptamos que los dados están cargados, al nivel de significación prefijado.

2. $H_0\colon \mu = 1\,680$ horas $= \mu_0$ $H_1\colon \mu \neq 1\,680$ horas.

El contraste es bilateral.

Para un ensayo bilateral con $\alpha = 0{,}05$ tenemos la siguiente regla de decisión:

Se rechaza H_0, la duración media es de 1 680 horas, si el valor de Z, normal tipificada, correspondiente está fuera de la región de aceptación:

$(-1{,}96,\ 1{,}96)$; en caso contrario se acepta H_0.

El estadístico del contraste es la media muestral $\overline{X} \longrightarrow N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, donde μ y σ son la media y la desviación típica de la población de bombillas de esa marca y n el tamaño de la muestra.

Como no se conoce σ la desviación típica del estadístico es: $\dfrac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{\frac{100}{99}} \cdot 130}{\sqrt{100}} = 13{,}06 \approx 13$, bajo la hipótesis H_0 la distribución es: $N(1\,680,\ 13)$.

Para $\overline{x} = 1\,650 \Rightarrow \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1\,650 - 1\,680}{13} =$

$= -2{,}307$

Como $-2{,}307 \notin (-1{,}96;\ 1{,}96)$ se rechaza la hipótesis nula, al nivel del 5 %, y se acepta que la duración media de las bombillas es distinta de 1 680 horas.

3. $H_0\colon \mu = 43$ mm $= \mu_0$ $\qquad H_1\colon \mu \neq 43$ mm

El contraste es bilateral, ya que $\mu \neq 43$ mm incluye valores menores y mayores que 43 mm.

El estadístico del contraste es la media muestral $\overline{X}$ que sigue una: $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$: $N(43;\ 0{,}5)$.

Para $\alpha = 0{,}01$, contraste bilateral, la región de aceptación es $(-2{,}58;\ 2{,}58)$.

Para $\overline{x} = 39$

$z = \dfrac{39 - 43}{0{,}5} = -8 \notin (-2{,}58;\ 2{,}58)$, rechazamos que el diámetro medio de los tubos es de 43 mm, al nivel de significación del 1 %.

4. $H_0\colon p = 0{,}95 = p_0$

$H_1\colon p < 0{,}95$. Contraste unilateral izquierdo.

Estadístico del contraste: $\hat{p}$, proporción poblacional cuya distribución en el muestreo es: $N\left(p_0, \sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}\right)$:

$N(0{,}95;\ 0{,}022)$ y $Z = \dfrac{\hat{p} - 0{,}95}{0{,}022} \longrightarrow N(0,\ 1)$

Si $\alpha = 0{,}01$, la región de aceptación es, al ser el contraste unilateral izquierdo $(-2{,}33;\ +\infty)$.

Para $\hat{p} = 0{,}09$

$Z = \dfrac{0{,}09 - 0{,}95}{0{,}022} - 39{,}09 \notin (-2{,}33;\ +\infty)$, rechazamos H_0, es decir, rechazamos que el 95 % de las viviendas hechas por el constructor cumplan la normativa europea y aceptamos H_1, con el nivel de significación estipulado.

5. $H_0\colon \mu = 195 = \mu_0$ $\qquad H_1\colon \mu \neq 195$

El contraste es bilateral.

El estadístico del contraste es la media muestral $\overline{X}$, cuya distribución en el muestreo es: $N(187{,}7;\ 5{,}58)$.

Para $\alpha = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, contraste bilateral, la región de aceptación es $(-1{,}645;\ 1{,}645)$.

Si $\overline{x} = 195$, como $Z = \dfrac{195 - 187{,}7}{5{,}58} = 1{,}308$

y $1{,}308 \in (-1{,}645;\ 1{,}645)$, aceptamos la hipótesis nula, y podemos afirmar que la memoria media es de 195 con arreglo a este test y para un nivel de confianza del 90 %.