

EJERCICIOS: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES. MATEMÁTICAS II.

Estudia y representa la gráfica de las funciones:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+4}$$

$$f(x) = \ln(x^2+1)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$f(x) = x^3 - 4x$$

• Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

• Simetrías: $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$.

La función es impar o simétrica respecto del origen.

• Puntos de corte con los ejes:

- Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$

Los puntos de corte con el eje X son: $(0,0)$, $(-2,0)$ y $(2,0)$

- Eje Y: $f(0) = 0$. El punto de corte con el eje Y es: $(0,0)$

• Asíntotas: No tiene (es una función polinómica).

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

	$(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}})$	$(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$	$(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty)$
signo f'	+	-	+
	CRECIENTE	DECRECIENTE	CRECIENTE

• Extremos relativos:

$$f''(x) = 6x$$

$f''(-\frac{2}{\sqrt{3}}) < 0 \Rightarrow$ El punto $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{16}{3\sqrt{3}})$ es un máximo relativo

$f''(\frac{2}{\sqrt{3}}) > 0 \Rightarrow$ El punto $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{16}{3\sqrt{3}})$ es un mínimo relativo.

• Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

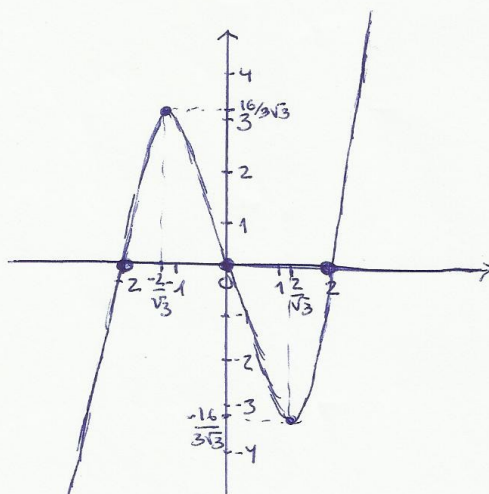
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo f''	-	+
	CONVEXA	CÓNCAVA

El punto $(0,0)$ es un punto de inflexión.

• Signo de la función:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & + & & - & & + \\ & & & | & & | & & | \\ - & & - & & 0 & & & 2 \end{array}$$

• Representación gráfica:



www.yoquieroaprobar.es

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

• Dominio : $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

• Simetrías: $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) + 5 = -x^3 - 6x^2 - 9x + 5$

La función no es par ni impar

• Puntos de corte:

- Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x + 5 = 0$

(No tiene soluciones enteras)

$$\begin{matrix} f(-1) = -11 \\ f(0) = 5 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{En el intervalo } [-1, 0] \text{ tiene un} \\ \text{punto de corte (Teorema de Bolzano)} \end{array} \right.$$

- Eje Y: $f(0) = 5$. La función corta al eje Y en el punto $(0, 5)$

• Asíntotas: No tiene (es una función polinómica)

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
signo f'	+	-	+
	CRECIENTE	DECRECIENTE	CRECIENTE

• Extremos relativos:

$$f''(x) = 6x - 12$$

$f''(3) > 0 \Rightarrow$ El punto $(3, 5)$ es un mínimo relativo

$f''(1) < 0 \Rightarrow$ El punto $(1, 9)$ es un máximo relativo.

• Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

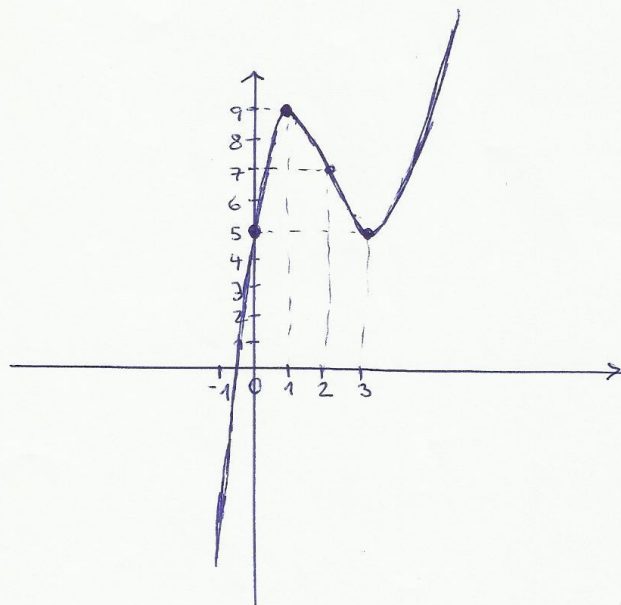
	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
signo f''	-	+
	CONVEXA	CONCAVA

El punto $(2, 7)$ es un punto de inflexión

• Signo de la función:



• Representación gráfica



www.yoquieroaprobar.es

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

• Dominio: $1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$
 $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• Simetrías: $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{x^2}{1-x^2} = f(x)$

La función es par o simétrica respecto del eje Y.

• Puntos de corte con los ejes:

- Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{1-x^2}=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

La función corta al eje X en el punto (0,0)

- Eje Y: $f(0)=0$. La función corta al eje Y en el punto (0,0).

• Asíntotas:

- Verticales: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \begin{cases} -\infty, & x \rightarrow -1^- \\ +\infty, & x \rightarrow -1^+ \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \begin{cases} +\infty, & x \rightarrow 1^- \\ -\infty, & x \rightarrow 1^+ \end{cases}$

Las rectas $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales.

- Horizontal:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1-x^2} = -1$. La recta $y=-1$ es asíntota horizontal

- Oblicua: No tiene pues tiene asíntota horizontal.

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo f'	-	-	+	+
	DECRECIENTE	DECRECIENTE	CRECIENTE	CRECIENTE

• Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1-x^2)^2 - 2x \cdot 2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2-2x^2+8x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$$

$f''(0) > 0 \Rightarrow$ El punto $(0,0)$ es un mínimo relativo.

• Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3} = 0 \Rightarrow 6x^2+2=0 \text{ sin solución.}$$

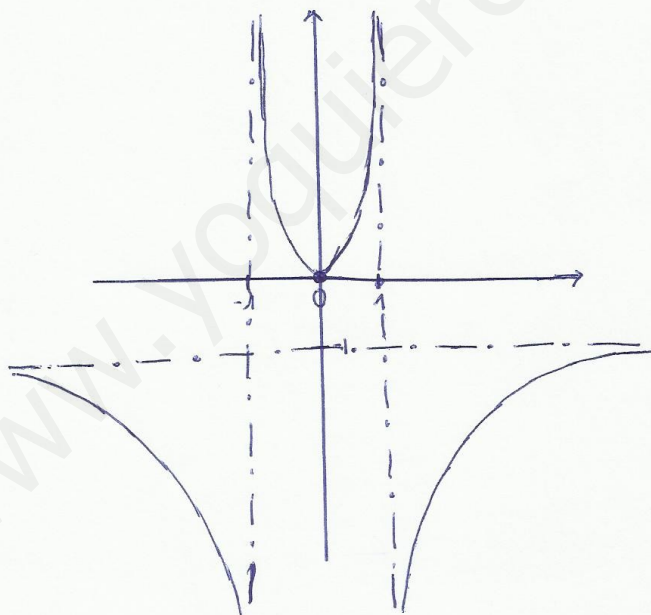
La función no tiene puntos de inflexión

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
signo f''	-	+	-
	CONVEXA	CONCAVA	CONVEXA

• Signo de la función:



• Representación gráfica:



$$f(x) = \frac{2x^2}{x-2}$$

• Dominio: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$$

• Simetrías: $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{-x-2} = \frac{2x^2}{-x-2}$

La función no es par ni impar.

• Puntos de corte con los ejes:

- Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^2}{x-2}=0 \Rightarrow 2x^2=0 \Rightarrow x=0$

La función corta al eje X en el punto (0,0)

- Eje Y: $f(0)=0$. La función corta al eje Y en el punto (0,0).

• Asíntotas:

- Verticales: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x-2} = \frac{8}{0} = \begin{cases} -\infty, x \rightarrow 2^- \\ +\infty, x \rightarrow 2^+ \end{cases}$

La recta $x=2$ es una asíntota vertical

- Horizontal:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x-2} = \infty$. La función no tiene asíntotas horizontales

- Oblicua:

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-2x} = 2$

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x-2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 4x}{x-2} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-2} = 4$.

La recta $y=2x+4$ es una asíntota oblicua

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \frac{4x(x-2) - 2x^2}{(x-2)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 2x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x(x-4) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$

signo f'	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
	+	-	-	+
	CRECIENTE	DECRECIENTE	DECRECIENTE	CRECIENTE

• Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{(4x-8)(x-2)^2 - (2x^2-8x) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^3} = \frac{4x^2-8x-8x+16-4x^2+16x}{(x-2)^3} = \frac{16}{(x-2)^3}$$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ El punto $(0,0)$ es un máximo relativo

$f''(4) > 0 \Rightarrow$ El punto $(4,16)$ es un mínimo relativo.

• Concavidad y convexidad:

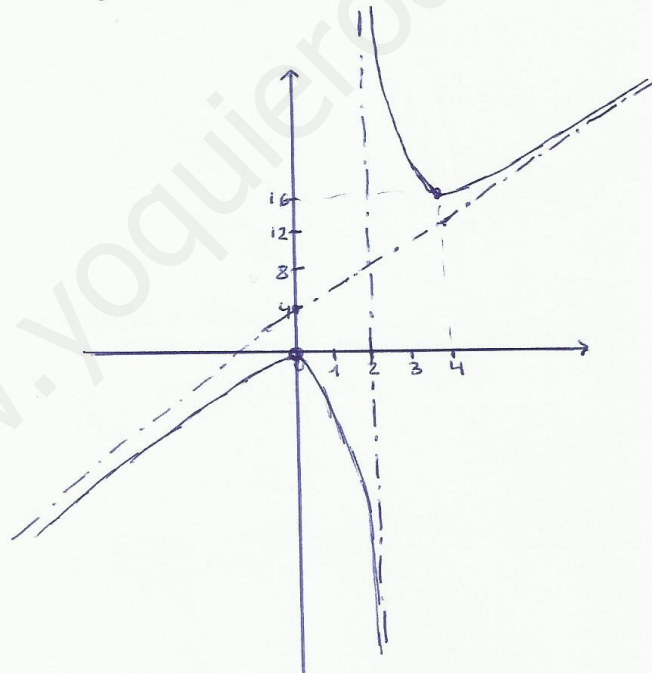
$f''(x) = \frac{16}{(x-2)^3} = 0$ sin solución.
La función no tiene punto de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
signo f''	-	+
	CONVEXA	CONCAVA

• Signo de la función:



• Representación gráfica:



$$f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$$

• Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

• Simétrica: $f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+2} = \frac{-2x}{x^2+2} = -f(x)$

La función es impar o simétrica respecto del origen.

• Puntos de corte con los ejes:

- Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

La función corta al eje X en el punto (0,0)

- Eje Y: $f(0) = 0$. La función corta al eje Y en el punto (0,0)

• Asíntotas:

- Vertical: No tiene

- Horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+2} = 0$. La recta $\overline{y=0}$ es asíntota horizontal.

- Oblicua: No tiene

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^2+4-4x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow 4-2x^2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
signo f'	-	+	-
	DECRECIENTE	CRECIENTE	DECRECIENTE

• Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+2)^2 - (4-2x^2) \cdot 2(x^2+2) \cdot 2x}{(x^2+2)^3} = \frac{-4x^3-8x-16x+8x^3}{(x^2+2)^3} = \frac{4x^3-20x}{(x^2+2)^3}$$

$f''(-\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow$ El punto $(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ es un mínimo relativo

$f''(\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow$ El punto $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ es un máximo relativo.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{4x^3 - 20x}{(x^2 + 2)^3} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 20x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

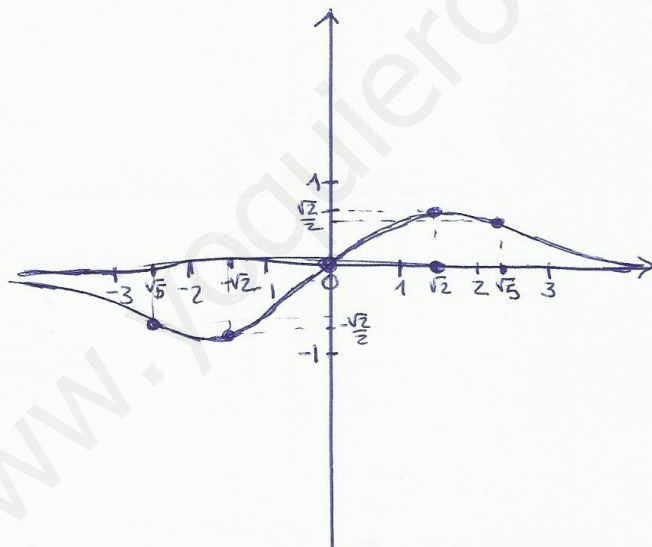
	$(-\infty, -\sqrt{5})$	$(-\sqrt{5}, 0)$	$(0, \sqrt{5})$	$(\sqrt{5}, +\infty)$
Signo f''	-	+	-	+
	CONVEXA	CÓNCAVA	CONVEXA	CÓNCAVA

La función tiene tres puntos de inflexión: $(0, 0)$, $(-\sqrt{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{7})$ y $(\sqrt{5}, \frac{2\sqrt{5}}{7})$

- Signo de la función:



- Representación gráfica:



$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

• Dominio: $1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

• Simetrías: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x)$

La función es impar o simétrica respecto del origen.

• Puntos de corte con los ejes:

- Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^3}{1-x^2}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$

La función corta al eje X en el punto (0,0)

- Eje Y: $f(0)=0$. La función corta al eje Y en el punto (0,0)

• Asíntotas:

- Verticales: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0} = \begin{cases} +\infty, x \rightarrow -1^- \\ -\infty, x \rightarrow -1^+ \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \begin{cases} +\infty, x \rightarrow 1^- \\ -\infty, x \rightarrow 1^+ \end{cases}$$

Las rectas $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales

- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty, \text{ No tiene asíntotas horizontales}$$

- Oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x-x^3} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

La recta $y = -x$ es asíntota oblicua.

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow -x^4 + 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(-x^2+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ -x^2+3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
signo f'	-	+	+	+	+	-
	DECRECIANTE	CRECIENTE	CRECIENTE	CRECIENTE	CRECIENTE	DECRECIANTE

- Extremos relativos:

$$f''(x) = \frac{(-4x^3 + 6x) \cdot (1-x^2)^2 - (-x^4 + 3x^2) \cdot 2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{-4x^3 + 4x^5 + 6x - 6x^3 - 4x^5 + 12x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(1-x^2)^3}$$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ El punto $(0,0)$ es un punto de inflexión

$f''(-\sqrt{3}) \neq 0 \Rightarrow$ El punto $(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ es un mínimo relativo

$f''(\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow$ El punto $(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ es un máximo relativo

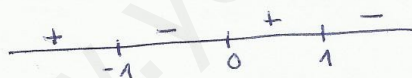
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(1-x^2)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 + 3 = 0 \text{ sin solución} \end{cases}$$

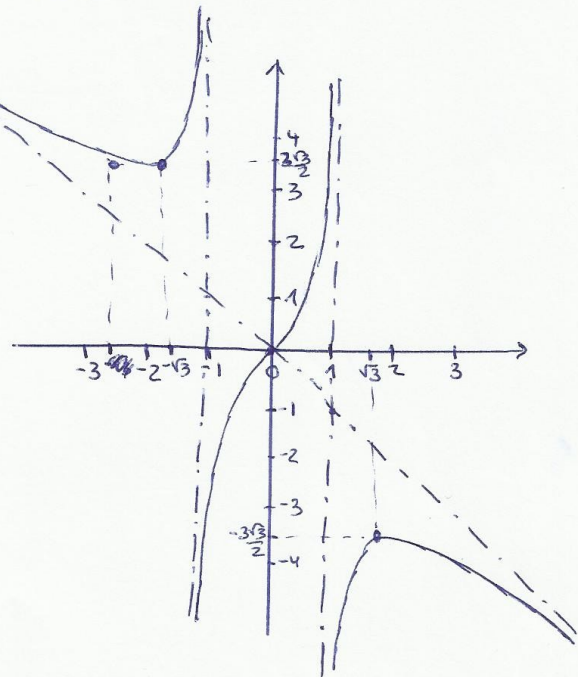
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
signo f''	+	-	+	-
	CONCAVA	CONVEXA	CONCAVA	CONVEXA

El punto $(0,0)$ es un punto de inflexión

- Signo de la función:



- Representación gráfica:



$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

• Dominio: $x^2 - 4 \geq 0$ $\begin{array}{c} + & - & + \\ -2 & & 2 \end{array}$
 $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

• Simetrías: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f(x)$
 La función es par o simétrica respecto del eje Y

• Puntos de corte con los ejes:

- Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
 La función corta al eje X en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$

- Eje Y: $f(0)$, $0 \notin \text{Dom } f$. La función no corta al eje Y.

• Asíntotas:

- Verticales: No tiene

- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 4} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = \infty$$

La función no tiene asíntotas horizontales

- Oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x) = \frac{\infty - \infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua (en $+\infty$)

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4} + x) = \frac{\infty - \infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} + x)(\sqrt{x^2 - 4} - x)}{\sqrt{x^2 - 4} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} - x} = 0$$

La recta $y = -x$ es asíntota oblicua (en $-\infty$)

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \Rightarrow x=0$$

signo f''	$(-\infty, -2)$	$(+2, \infty)$
	-	+
	DECRECIENTE	CRECIENTE

- Extremos Relativos: No tiene, $0 \notin \text{Dom}f$

- Concavidad y convexidad:

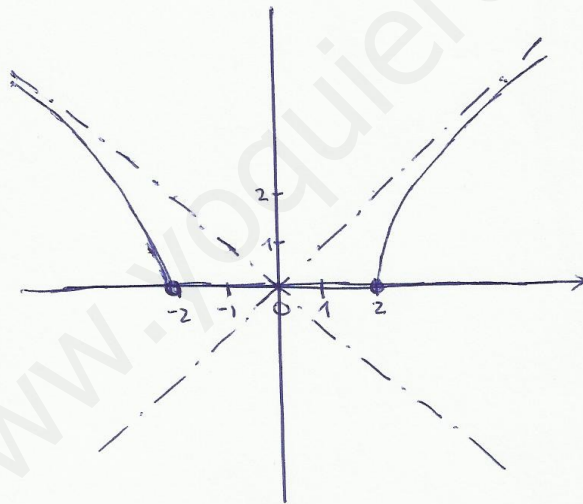
$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{(\sqrt{x^2-4})^2} = \frac{x^2-4-x^2}{x^2-4} = \frac{-4}{\sqrt{(x^2-4)^3}} = 0 \text{ sin solución}$$

La función no tiene puntos de inflexión.

- Signo de la función:



- Representación gráfica:



$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

• Dominio: $x^2 + 4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

• Simetrías: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 4} = \sqrt{x^2 + 4} = f(x)$

La función es par o simétrica respecto del eje Y.

• Puntos de corte con los ejes:

- Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0$ sin solución

La función no corta al eje X

- Eje Y: $f(0) = 2$. El punto de corte con el eje Y es $(0, 2)$

• Asíntotas:

- Verticales: No tiene

- Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4} = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} = \infty$ } La función no tiene asíntotas horizontales

- Oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 + 4} - x] = 0$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua (en ∞)

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x) = 0$$

La recta $y = -x$ es asíntota oblicua (en $-\infty$)

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
signo f''	-	+
	DECRECIENTE	CRECIENTE

- Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{x^2+4 - x^2}{\sqrt{x^2+4} \cdot x^2+4} = \frac{4}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

$f''(0) > 0 \Rightarrow 0$ El punto $(0,2)$ es un mínimo relativo

- Concavidad y convexidad:

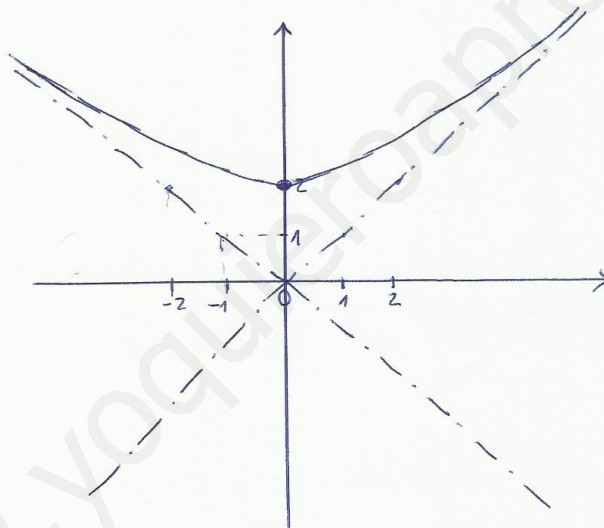
$$f''(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = 0 \text{ sin solución.}$$

La función no tiene ningún punto de inflexión

$f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, por tanto, la función es cóncava en todo su dominio.

- Signo de la función: La función es positiva en todo su dominio.

- Representación gráfica:



$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

• Dominio: $x^2 + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

• Simetrías: $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = f(x)$

La función es par o simétrica respecto del eje Y

• Puntos de corte con los ejes:

- Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

La función corta al eje X en el punto (0,0)

- Eje Y: $f(0) = 0$. La función corta al eje Y en el punto (0,0).

• Asíntotas:

- Verticales: No tiene

- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 + 1) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = \infty$$

La función no tiene asíntotas horizontales

- Oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

La función no tiene asíntotas oblicuas.

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo f'	-	+
	DECRECIENTE	CRECIENTE

• Extremos Relativos:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f''(0) > 0 \Rightarrow$ El punto (0,0) es un mínimo relativo.

• Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2-2x^2=0 \Rightarrow x = \pm 1$$

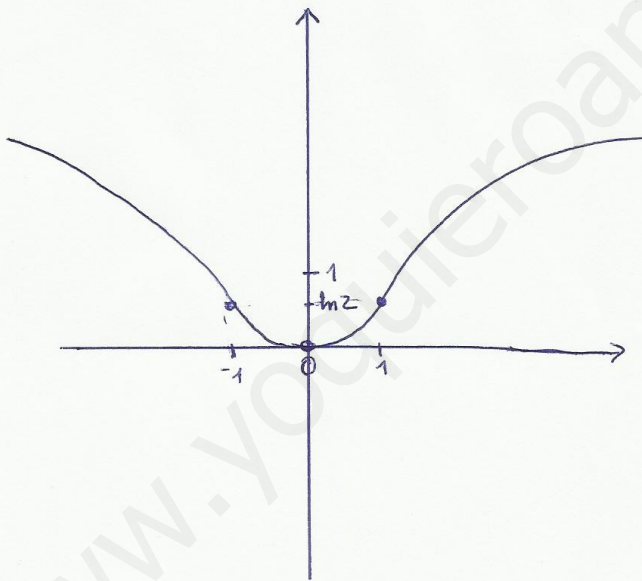
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo f''	-	+	-
	CONVEXA	CÓNCAVA	CONVEXA

Los puntos $(1, \ln 2)$ y $(-1, \ln 2)$ son puntos de inflexión.

• Signo de la función:

$x^2+1 \geq 1 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln(x^2+1) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, la función es positiva en todo su dominio de definición.

• Representación gráfica:



$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

• Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

• Asíntotas: $f(-x) = -x e^x$

La función no es par ni impar

• Puntos de corte con los ejes:

- Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$

La función corta al eje X en el punto $(0, 0)$

- Eje Y: $f(0) = 0$. La función corta al eje Y en el punto $(0, 0)$

• Asíntotas:

- Verticales: No tiene

- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal (en $+\infty$)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty \cdot \infty = -\infty$. No tiene asíntota horizontal en $-\infty$.

- Oblicuas: No tiene

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x} = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
signo f'	+	-
	CRECIENTE	DECRECIENTE

• Extremos relativos:

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x) e^{-x} = -2e^{-x} + x e^{-x} = (x-2) e^{-x}$$

$f''(1) < 0 \Rightarrow$ El punto $(1, \frac{1}{2})$ es un máximo relativo.

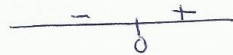
- Concavidad y convexidad

$$f''(x) = (x-2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo f''	-	+
	CONVEXA	CÓNCAVA

El punto $(2, \frac{2}{e^2})$ es un punto de inflexión.

- Signo de la función:



- Representación gráfica:

