Máximos y Mínimos: Problemas de aplicación.

1 . Una compañía pretende fabricar una caja de cartulina con una capacidad de $108\ cm^3$. La caja debe tener la forma de un prisma cuadrangular sin tapa. ¿Qué medidas debería tener la caja para ocupar la mínima cantidad de material en su fabricación y con ello reducir los costos?

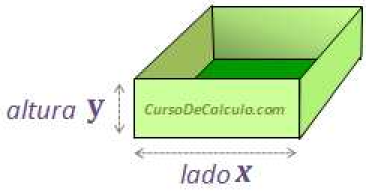


Figura 1-A: *La caja tiene forma de prisma cuadrangular, sin tapa.*

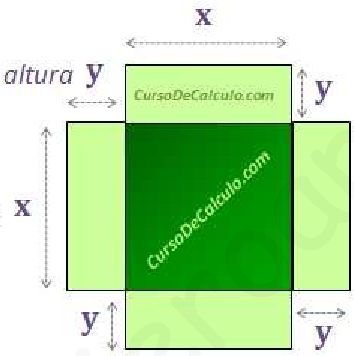


Figura 1-B: *Caja desplegada: se observan sus caras.*

Solución: El volumen del prisma está determinado por:

$$V = (x)(x)(y) = x^2y = 108\ cm^3$$

Despejando la variable y en función de x:

$$x^2y = 108$$

$$y = \frac{108}{x^2}$$

El área de este prisma es la suma de las 4 áreas de los rectángulos en color verde claro $4(xy)$ más el área del cuadrado de color verde oscuro (xx).

$$A = 4(xy) + (x)(x) = 4xy + x^2$$

Así obtenemos la **función área total,** que está en función de dos variables : $x, \ y$

$$A = x^2 + 4xy$$

Recordemos que tenemos disponible la variable y despejada de la función volumen:

$$y = \frac{108}{x^2}$$

Entonces podemos sustituir este despeje, en vez de la y de la función área:

$$A = x^2 + 4x\left(\frac{108}{x^2}\right)$$

Simplificando:

$$A = x^2 + \frac{432}{x}$$

$$A = x^2 + 432x^{-1}$$

Ahora, comienza el proceso para hallar máximos y mínimos. Lo primero que tenemos que hacer es determinar la función derivada de la función área (*porque nos interesa el área mínima*):

$$A = x^2 + 432x^{-1}$$

Derivada:

$$\frac{dA}{dx} = 2x - 432x^{-2} = 2x - \frac{432}{x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{432}{x^2}$$

Se buscan valores críticos de x igualando la derivada con cero y despejando x. Lo que buscamos es el punto o puntos donde la derivada sea cero, y esto ocurre precisamente en los máximos y en los mínimos locales.

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{432}{x^2}$$

$$2x^3 = 432$$

$$x^3 = \frac{432}{2}$$

$$x^3 = 216$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{216}$$

$$x = 6$$

Solo encontramos un valor crítico, para determinar si es un máximo o un mínimo, obtenemos la segunda derivada de la función área:

$$\frac{dA}{dx} = 2x - 432x^{-2}$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = A´´(x) \; = 2 + 864x^{-3} = 2 + \frac{864}{x^3}$$

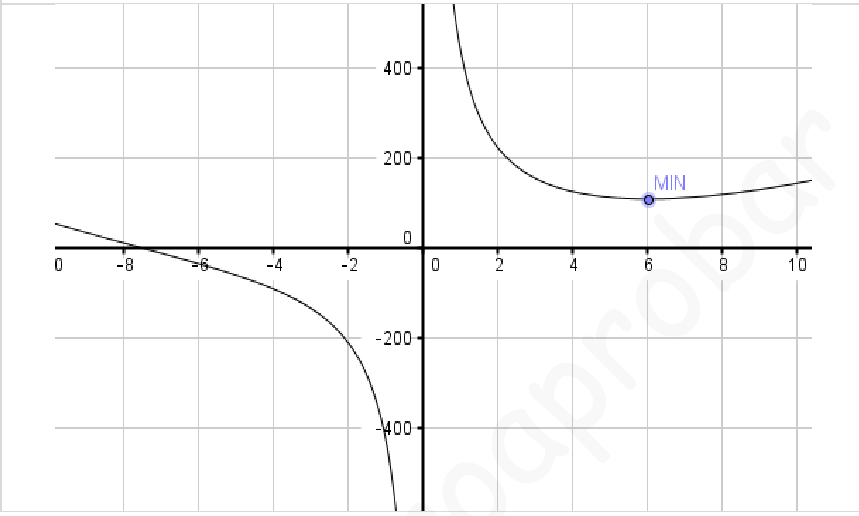
Sustituimos en la segunda derivada el valor crítico que teníamos: 6

$$A´´(6) = 2 + \frac{864}{(6)^3} = 6$$

Recordemos que cuando la sustitución de un valor crítico en la segunda derivada da un resultado positivo representa un punto mínimo. Por lo tanto el punto mínimo tiene abscisa 6. Eso quiere decir, que el área mínima se obtiene cuando x vale 6, podemos ver esto en la gráfica de la función área.

Figura 2. Gráfica de la función área de una variable (x).

$$A = x^2 + \frac{432}{x}$$



Para conocer el área mínima que se puede obtener solo hay que sustituir el valor 6 en vez de la variable x en la función área de una variable:

$$A = x^2 + \frac{432}{x}$$

$$A(6) = (6)^2 + \frac{432}{(6)} = 36 + 72 = 108\ cm^2$$

Podemos comprobar, observando la gráfica de la función área, que los valores ligeramente superiores o ligeramente inferiores a $x = 6$ dan como resultado valores de área mayores a 108. También podemos hacer esta comprobación de manera analítica al sustituir en la función área, valores de x ligeramente inferiores o superiores a $x = 6$.

$$A(7) = (7)^2 + \frac{432}{(7)} \approx 110.7$$

$$A(5) = (5)^2 + \frac{432}{(5)} \approx 111.4$$

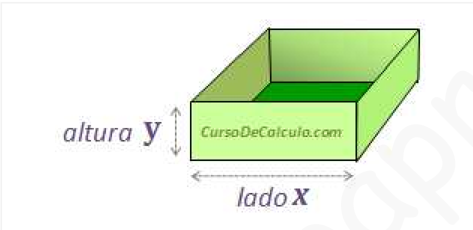
etc.

Ahora, solo falta encontrar el valor de la medida y, lo cuál es muy sencillo, solo hay que sustituir el valor de $x = 6$ en la expresión del volúmen:

$$y = \frac{108}{x^2}$$

$$y(6) = \frac{108}{(6)^2} = 3$$

Por lo tanto, las dimensiones de la caja deben ser: $x = 6, \quad y = 3$



Podemos comprobar que el volumen es:

$$V = x^2y = (6)^2(3) = 108\ cm^3$$