

**Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato**

1. [2 puntos, 1 punto por apartado] Halla la derivada de la función  $y = f(x)$  definida implícitamente por cada una de las siguientes expresiones algebraicas (en ambos casos se trata de derivar de manera implícita y luego despejar  $y'$ ).

a)  $x = \cos(xy)$

b)  $\frac{y}{3} - \frac{x}{y} = 6$

2. [2 puntos, 1 punto por apartado] Utilizando la derivación logarítmica, calcula la derivada de las siguientes funciones:

a)  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

b)  $y = \sqrt{x^3}$

3. [2 puntos] Determina los valores de  $m$ ,  $n$  y  $k$  para los que puede aplicarse el teorema de Rolle a la siguiente función en su intervalo de definición.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ kx + 1 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

4. [2 puntos] En el segmento comprendido entre los puntos  $A(1,1)$  y  $B(3,9)$  de la parábola  $y = x^2$ , halla un punto en el cual la tangente sea paralela a la cuerda  $AB$ . Halla también las ecuaciones de la cuerda y de la tangente en dicho punto.
5. [2 puntos] Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas  $(0,0)$ ,  $(a,0)$ ,  $(a,b)$  y  $(0,b)$ , de modo que el punto  $(a,b)$  tiene ambas coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación  $y = \frac{1}{x^2} + 4$ . De todos estos rectángulos, determina razonadamente el de área mínima.

### Soluciones

1. Halla la derivada de la función  $y = f(x)$  definida implícitamente por cada una de las siguientes expresiones algebraicas (en ambos casos se trata de derivar de manera implícita y luego despejar  $y'$ ):

a)  $x = \cos(xy) \Rightarrow 1 = -\operatorname{sen}(xy) \cdot (1y + xy') \Rightarrow 1 = -y \operatorname{sen}(xy) - xy' \operatorname{sen}(xy) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow xy' \operatorname{sen}(xy) = -y \operatorname{sen}(xy) - 1 \Rightarrow y' = \frac{-y \operatorname{sen}(xy) - 1}{x \operatorname{sen}(xy)}$

b)  $\frac{y}{3} - \frac{x}{y} = 6 \Rightarrow \frac{y'}{3} - \frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = 0 \Rightarrow \frac{y' y^2 - 3y + 3xy'}{3y^2} = 0 \Rightarrow \frac{y'(y^2 + 3x) - 3y}{3y^2} = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y'(y^2 + 3x) - 3y = 0 \Rightarrow y'(y^2 + 3x) = 3y \Rightarrow y' = \frac{3y}{y^2 + 3x}$

**Otra forma.** Si se eliminan denominadores:  $y^2 - 3x = 18y$ . Derivando en ambos miembros:

$$2yy' - 3 = 18y' \Rightarrow 2yy' - 18y' = 3 \Rightarrow y'(2y - 18) = 3 \Rightarrow y' = \frac{3}{2y - 18}$$

2. Utilizando la derivación logarítmica, calcula la derivada de las siguientes funciones:

a)  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ . Derivando ambos miembros de la igualdad:  
 $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y' = y \left( \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) \Rightarrow y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left( \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right)$

b)  $y = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow y = x^{3/x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{3/x} \Rightarrow \ln y = \frac{3}{x} \ln x \Rightarrow \ln y = \frac{3 \ln x}{x}$ . Derivando en ambos miembros:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\frac{3}{x} \cdot x - 3 \ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3 - 3 \ln x}{x^2} \Rightarrow y' = y \frac{3 - 3 \ln x}{x^2} \Rightarrow y' = \sqrt[3]{x^3} \frac{3 - 3 \ln x}{x^2}$$

3. Determina los valores de  $m$ ,  $n$ , y  $k$  para los que puede aplicarse el teorema de Rolle a la siguiente función

en su intervalo de definición:  $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ kx + 1 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$

Para que se cumpla el teorema de Rolle  $f$  ha de cumplir las siguientes hipótesis: ser continua en  $[0, 4]$ , derivable en  $(0, 4)$  y  $f(0) = f(4)$ . La continuidad y derivabilidad está asegurada, salvo en  $x = 2$ , porque los trozos en los que está dividida  $f$  son funciones polinómicas.

Para que  $f$  sea continua en  $x = 2$  se debe cumplir:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4 + 2m + n = 2k + 1$

Para que  $f$  sea derivable en  $x = 2$  deben existir las derivadas laterales y ser iguales. La función derivada

es  $f'(x) = \begin{cases} 2x + m & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ k & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$ . Entonces  $f'_-(2) = f'_+(2) \Leftrightarrow 4 + m = k \Leftrightarrow m = k - 4$

Por último, como  $f(0) = f(4)$ , entonces  $n = 4k + 1$

Tenemos pues tres condiciones:  $m = k - 4$   
 $4 + 2m + n = 2k + 1$   
 $n = 4k + 1$  } . Sustituyendo la segunda y tercera en la primera:

$4 + 2(k - 4) + 4k + 1 = 2k + 1 \Rightarrow 4 + 2k - 8 + 4k + 1 = 2k + 1 \Rightarrow 4k = 4 \Rightarrow k = 1$ . Y sustituyendo este valor en las dos últimas:  $m = 1 - 4 \Rightarrow m = -3$ ,  $n = 4k + 1 \Rightarrow n = 5$ .

4. En el segmento comprendido entre los puntos  $A(1,1)$  y  $B(3,9)$  de la parábola  $y = x^2$ , halla un punto en el cual la tangente sea paralela a la cuerda  $AB$ . Halla también las ecuaciones de la cuerda y de la tangente en dicho punto.

Aplicando el teorema del valor medio a la función  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[1,3]$ , tenemos que existe  $c \in (1,3)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow f'(c) = 4$ . Entonces  $2c = 4 \Rightarrow c = 2$ .

La cuerda  $AB$  tiene por ecuación  $y = mx + n$  y pasa por los puntos  $A(1,1)$  y  $B(3,9)$ , es decir,

$1 = m + n$   
 $9 = 3m + n$  }  $\Rightarrow m = 4, n = -3$ . Luego la cuerda es la recta  $y = 4x - 3$ . La recta tangente en  $c = 2$ , es

$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow y = 4x - 4$ .

5. Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas  $(0,0)$ ,  $(a,0)$ ,  $(a,b)$  y  $(0,b)$ , de modo que el punto  $(a,b)$  tiene ambas coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación  $y = \frac{1}{x^2} + 4$ . De todos estos rectángulos, determina razonadamente el de área mínima.

El área del rectángulo es  $ab$ . Como el punto  $(a,b)$

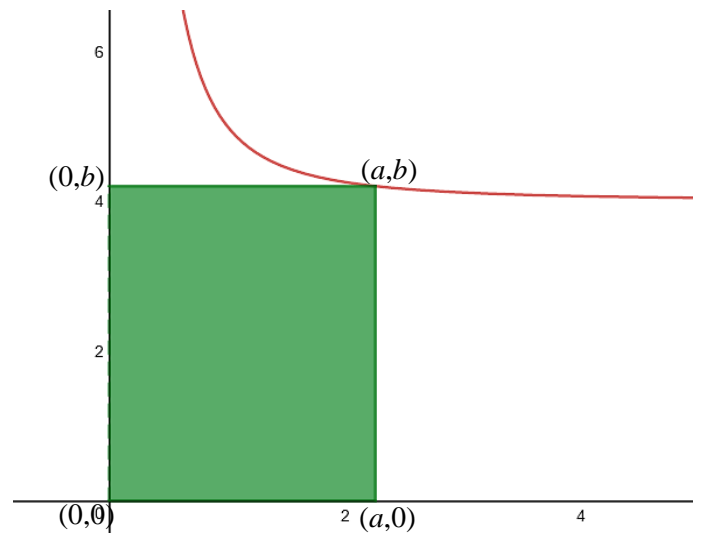
está sobre la curva  $y = \frac{1}{x^2} + 4$ , se tiene que

$b = \frac{1}{a^2} + 4$ , luego el área del rectángulo es

$A = a\left(\frac{1}{a^2} + 4\right) = \frac{1}{a} + 4a$ ,  $A' = -\frac{1}{a^2} + 4$ ,

$A' = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{a^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow -1 + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$ . La solución



$a = -\frac{1}{2}$  hay que descartarla por ser negativa. La solución  $a = \frac{1}{2}$  es un mínimo de  $A$  porque a la izquierda de  $\frac{1}{2}$ ,  $A' < 0$  y a la derecha de  $\frac{1}{2}$ ,  $A' > 0$ . Por tanto el rectángulo de área mínima es el que tiene por

vértices los puntos  $(0,0)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$  y  $(0,8)$ .