# Título: Sistemas de ecuaciones lineales

Autor:© Juan José Isach Mayo

Fecha:04 Septiembre del 2007

# Contents

# Chapter 1

# SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



## 1.1 Conceptos

**Definicion** Llamaremos sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un conjunto de m ecuaciones de la forma:

$$\clubsuit \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ...... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ...... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + ...... + a_{3,n}x_n = b_3 \\ .............................................................. \\ .............................................................. \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + ...... + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$$

siendo $a_{i,j}$[1] y $b_i$ [2]$\in \Re$ con $i$ variando de 1a $m$ y $j$ variando de 1 a $n$
Las $x_1, x_2, x_3, ........., x_n$ son las incógnitas a determinar

**Ejemplos**

a) $\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = -1 \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = -2 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = -2 \\ 2x - 3y - 5z = 0 \end{array} \right.$ d) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ x - 3y = -2 \\ 2x + 5y = 3 \end{array} \right.$

Observa que la notación utilizada en algunos sistemas para representar las incógnitas no se realiza mediante subíndices. Por simple comodidad, se suelen sustituir las incógnitas $x_1, x_2, x_3....$ por $x, y, z, ....$

En cualquier sistema de ecuaciones lineales puede ocurrir que:

1. $m > n$ mayor número de ecuaciones que incógnitas→ejemplos d)
2. $m = n$ igual número de ecuaciones que incógnitas→ejemplo c)
3. $m < n$ menor número de ecuaciones que incógnitas→ejemplos a) y b)

---

[1] Los coeficientes $a_{i,j}$ se denominan coeficientes de las incógnitas
[2] Los $b_i$ se denominan términos independientes

**Contraejemplos**

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1^2+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ -2x_1-4x_2+5x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2-x_4=-1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 3\sqrt{x}+2y+3z=1 \\ x-3y-z=-2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2+2y+3z=1 \\ x-3y^3-z=-2 \\ 2x-3y-5z^4=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=1 \\ \sqrt{x}-3y=-2 \end{array}\right.$$

**Definicion** **<u>Solución de un sistema</u>**

Llamaremos solución del sistema ♣ a toda n-tupla $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4...,\alpha_n)$ tal que al sustituir $x_1$ por $\alpha_1$,$x_2$ por $\alpha_2$,$x_3$ por $\alpha_3$,....,$x_n$ por $\alpha_n$ en todas las ecuaciones del sistema ♣ obtengamos identidades

**Ejemplos**

**1)**El sistema $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ 3x+y=7 \end{array}\right.$ admite como solución el par $(2,1)$ ya que al sustituir $x$ por 2 e $y$ por 1 en ambas ecuaciones obtenemos identidades

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot 2-1=3 \\ 3\cdot 2+1=7 \end{array}\right.$$

**2)**El sistema $\left\{\begin{array}{l} x-2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x-y+4z=4 \end{array}\right.$ admite como solución la terna $(\frac{9}{10},\frac{7}{10},\frac{1}{2})$ ya que al sustituir $x$ por $\frac{9}{10}$, $y$ por $\frac{7}{10}$,y $z$ por $\frac{1}{2}$ en las tres ecuaciones obtenemos identidades

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{9}{10}-2\cdot\frac{7}{10}+3\cdot\frac{1}{2}=1 \\ 2\cdot\frac{9}{10}+\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=2 \\ 3\cdot\frac{9}{10}-\frac{7}{10}+4\cdot\frac{1}{2}=4 \end{array}\right.$$

**3)**El sistema $\left\{\begin{array}{l} x-3y+2z=1 \\ 2x-3y+5z=2 \end{array}\right.$ admite como solución todas las ternas de la forma $(1-3z,-\frac{z}{3},z)$ con $z\in\Re$. Ya que al sustituir $x$ por $1-3z$, $y$ por $-\frac{z}{3}$,y $z$ por $z$ en ambas ecuaciones obtenemos identidades

$$\left\{\begin{array}{l} 1-3z-3\left(-\frac{z}{3}\right)+2z=1 \\ 2\left(1-3z\right)-3\left(-\frac{z}{3}\right)+5z=2 \end{array}\right.$$

Es necesario resaltar, que según los valores que asignemos a $z$ obtendremos distintas soluciones para el sistema (admite infinitas soluciones)

**4)**El sistema $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ 4x-2y=8 \end{array}\right.$ es evidente que no tiene solución; ya que para cualquier par de valores $x,y$ que verifiquen la $1^a$ ecuación, éstos nunca pueden verificar la $2^a$

**Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales**

**a)** Según los términos independientes

**Sistemas** $\left\{ \begin{array}{l} \text{Homogéneos} \rightarrow \text{Todos los términos independientes nulos} \left\{ \begin{array}{l} 3x+2y+3z=0 \\ x-3y-z=0 \\ 2x-3y-5z=0 \end{array} \right. \\ \text{Heterogéneos: algún término independientes no nulo} \left\{ \begin{array}{l} 3x+2y+3z=1 \\ x-3y-z=-2 \\ 2x-3y-5z=0 \end{array} \right. \end{array} \right.$

**b)** Según sus soluciones

**Sistemas** $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Compatibles} \rightarrow \text{Tienen solución} \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinados} \rightarrow \text{solución única} \\ \text{Indeterminados} \rightarrow \text{Infinitas soluciones} \end{array} \right. \\ \textbf{Incompatibles} \rightarrow \text{No tienen solución} \end{array} \right.$

**Nota** : Los sistemas homogéneos son siempre compatibles; ya que al menos una solución será la trivial (todas las incógnitas nulas)

## 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones lineales diremos que son equivalentes siempre y cuando tengan ambos el mismo conjunto solución.

**Ejemplos**:

**1)** Los sistemas $\left\{ \begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{array} \right.$ y $\left\{ \begin{array}{l} x+y=3 \\ 3x+2y=8 \end{array} \right.$ son equivalentes ya que la solución de ambos es el par $(1,2)$

**2)** Los sistemas $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 3x+2y+2z=7 \\ 2x-y+z=2 \end{array} \right.$ y $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x-y+z=2 \end{array} \right.$ son equivalentes ya que la solución de ambos es la terna $(1,1,1)$

**3)** Los sistemas $\left\{ \begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array} \right.$ y $\left\{ \begin{array}{l} x+y=3 \\ 3x+3y=9 \end{array} \right.$ son equivalentes ya que la solución en ambos es el conjunto $H=\{(x,3-x)/x\in\Re\}$

### 1.2.1 Transformaciones de equivalencia

¿ Qué transformaciones pueden hacerse en un sis0tema de manera que lo conviertan en uno equivalente y más sencillo de resolver?

Las siguientes transformaciones realizadas en cualquier sistema lo convierten en otro equivalente:

**a)** Cambiar el orden de las ecuaciones

**b)** Multiplicar cualquier ecuación por un número real no nulo

**c)** Sustituir una ecuación por una C.Lineal de ella misma con las demás siempre que el coeficiente por el que multipliquemos la ecuación sustituida sea no nulo

**d)** Eliminar una ecuación que sea C. Lineal de las demás

## 1.3 Método de Gauss

Las transformaciones de equivalencia anteriores, nos van a permitir determinar cuando un sistema es compatible y además en caso de serlo como determinar sus soluciones

*Utilizando las transformaciones anteriores obtendremos un sistema equivalente al inicial de manera que*:

**a)** *En la 1ª ecuación aparezca al menos la 1ª incógnita*

**b)** *En la 2ª ecuación no aparezca la 1ª incógnita*

**c)** *En la 3ª ecuación no aparezca la 1ª incógnita, ni tampoco la 2ª*

**d)** *En la 4ª ecuación no aparezca la 1ª incógnita , ni la 2ª, ni tampoco la 3ª*

*Y así sucesivamente hasta triangularizar el sistema; pudiendo obtener:*

**I)** *Un sistema con el mismo número de ecuaciones que incógnitas. Sistema Compatible Determinado*

**II)** *En alguna ecuación algún absurdo.Sistema Incompatible*

**III)** *Un sistema con menor número de ecuaciones que incógnitas. Sistema Compatible Indeterminado*

*Este procedimiento recibe el nombre de método de reducción o de Gauss*

Ahora bien. ¿Cómo lo conseguimos?

Vamos a explicarlo para un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Dado el sistema ♣ $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ...... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ...... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + ...... + a_{3,n}x_n = b_3 \\ .............................................................. \\ .............................................................. \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + ...... + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right.$

Buscamos un coeficiente asociado a alguna incógnita no nulo y reorganizamos las ecuaciones del sistema, así como los sumandos de éstas de tal manera que $a_{1,1} \neq 0$ (este elemento se denomina pivote)

Realizamos las siguientes transformaciones en las $2^a, 3^a, ....., m-ésima$ ecuaciones . A cada una de ellas, le sumamos una combinación lineal de la primera de la siguiente manera:

$$2^a ec\ nueva = 2^a ec - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot 1^a ec$$

Quedando los nuevos coeficientes de la segunda ecuación así:

$c_{2,j} = a_{2,j} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,j}$ con $j$ variando de 1 a $n$ $\qquad b_2^{'} = b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot b_1$

$$3^a ec\ nueva = 3^a ec - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot 1^a ec$$

Quedando los nuevos coeficientes de la tercera ecuación así:

$c_{3,j} = a_{3,j} - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,j}$ con $j$ variando de 1 a $n$ $\qquad b_3^{'} = b_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot b_1$

......................................

$$m - ésima\ ec\ nueva = m - ésima\ ec - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}} \cdot 1^a ec$$

Quedando los nuevos coeficientes de la segunda ecuación así:

$c_{m,j} = a_{m,j} - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,j}$ con $j$ variando de 1 a $n$ $\qquad b_m^{'} = b_m - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}} \cdot b_1$

Con estas transformaciones[3], conseguimos que los coeficientes $c_{k,1}$ con $k$ variando de 2 a $m$ sean nulos. Quedando el siguiente sistema

$\left\{\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ...... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ c_{2,2}x_2 + c_{2,3}x_3 + ...... + c_{2,n}x_n = b_2^{'} \\ c_{3,2}x_2 + c_{3,3}x_3 + ...... + c_{3,n}x_n = b_3^{'} \\ .............................................................. \\ .............................................................. \\ c_{m,2}x_2 + c_{m,3}x_3 + ...... + c_{m,n}x_n = b_m^{'} \end{array}\right.$ equivalente al sistema inicial ♣

De este sistema, extraemos el subsistema $\left\{\begin{array}{r} c_{2,2}x_2 + c_{2,3}x_3 + ...... + c_{2,n}x_n = b_2^{'} \\ c_{3,2}x_2 + c_{3,3}x_3 + ..... + c_{3,n}x_n = b_3^{'} \\ .............................................................. \\ .............................................................. \\ c_{m,2}x_2 + c_{m,3}x_3 + ...... + c_{m,n}x_n = b_m^{'} \end{array}\right.$

[3]Conseguimos un sistema equivalente al anterior, donde la incógnita $x_1$sólo aparece en la$1^a$ ecuación

**Nota**: Si alguno de los $a_{i,1}$ fuese ya nulo, no sería necesario modificar su ecuación correspondiente y repetimos el procedimiento anterior para conseguir que la incógnita $x_2$ desaparezca en todas las ecuaciones menos en una (bastará con encontrar algún $c_{i,2}$ no nulo con $i$ variando de 2 a $m$)

Iterando este procedimiento tantas veces como sea necesario, obtendremos un sistema equivalente al inicial donde:

**En la $1^a$ecuación aparezca al menos la $1^a$ incógnita**

**En la $2^a$ecuación no aparezca la $1^a$ incógnita**

**En la $3^a$ecuación no aparezca la $1^a$ incógnita, ni tampoco la $2^a$**

**En la $4^a$ecuación no aparezca la $1^a$ incógnita , ni la $2^a$, ni tampoco la $3^a$**

Atendiendo a la disposición final de las incógnitas, se pueden presentar las siguientes posibilidades

**a)Que el sistema final tenga el mismo número de ecuaciones que incógnitas**

$$\left\{\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ...... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ...... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ +a_{3,3}x_3 + ...... + a_{3,n}x_n = b_3 \\ ......................................... \\ ..................................... \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right. \quad \textit{donde } a_{i,i} \textit{ no nulos}$$

El sistema es compatible determinado. Se calcula la incógnita $x_n$ de la última ecuación, se sustituye en las anteriores y se calcula $x_{n-1}$ , y así sucesivamente hasta obtener el valor de $x_1$.

**Ejemplo**:Resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y - 4z = 5 \end{array}\right.$

Realizamos las siguientes transformaciones$\rightarrow$ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3 \cdot 1^a ec \end{array}$

quedando el siguiente sistema equivalente $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 7y - 13z = 2 \end{array}\right.$

Si dividimos la $2^a ec$ por 7 tendremos $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ 7y - 13z = 2 \end{array}\right.$

Por último si a la $3^a ec$ le restamos la segunda multiplicada por 7 ($3^a ecnueva = 3^a ec - 7 \cdot 2^a ec$) tendremos:

$$\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ -6z = 2 \end{array}\right.$$

De la $3^a ec$ obtenemos que $z = \dfrac{-1}{3}$

Sustituyendo dicho valor en la $2^a ec$ y despejando "$y$" tendremos $y = \dfrac{-1}{3}$

Sustituyendo los valores obtenidos para "$z$" e "$y$" en la $1^a ec$ y despejando "$x$" $\rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

La solución de este sistema es el conjunto $H = \left\{ \left( \dfrac{-1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{4}{3} \right) \right\}$

**b)Que obtengamos algún absurdo**

$$\left\{\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ...... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ...... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ +a_{3,3}x_3 + ...... + a_{3,n}x_n = b_3 \\ ........................................ \\ ..................................... \\ 0 = b_n \end{array}\right. \quad \textit{siendo } b_n \text{ no nulo}$$

El sistema es incompatible

**Ejemplo**:Resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{array}\right.$

Realizamos las siguientes transformaciones→ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -3 \cdot 1^a ec \end{array}$

quedando el siguiente sistema equivalente $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 7y - 7z = 2 \end{array}\right.$

Si dividimos la $2^a ec$ por 7 tendremos $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ 7y - 7z = 2 \end{array}\right.$

Por último si a la $3^a ec$ le restamos la segunda multiplicada por 7 ($3^a ecnueva = 3^a ec\ -7 \cdot 2^a ec$) tendremos:

$$\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 2 \end{array}\right.$$

El sistema está triangularizado y hemos obtenido un absurdo; por lo tanto el sistema es Incompatible

**c)Que el sistema final tenga menor número de ecuaciones que incógnitas**

$$\left\{\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + .... + a_{1,m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1}.. + a_{1,m+r}x_{m+r} = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + .... + a_{2,m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1}.. + a_{2,m+r}x_{m+r} = b_2 \\ +a_{3,3}x_3 + .... + a_{3,m}x_m + a_{3,m+1}x_{m+1}.. + a_{3,m+r}x_{m+r} = b_3 \\ ........................................ \\ ..................................... \\ a_{m,m}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1}.. + a_{m,m+r}x_{m+r} = b_m \end{array}\right.$$

siendo todos los $a_{i,i}$ (elementos de la diagonal) no nulos

En esta situación, el sistema es compatible indeterminado (grado de indeterminación $r$); ya que de la última ecuación obtendremos $x_m$ en función de las incógnitas (parámetros) $x_{m+1}, x_{m+2}, .....x_{m+r}$. Es evidente que los valores obtendidos para $x_1, x_2, .....x_{m-1}$también dependerán de los valores que asignemos a los parámetros $x_{m+1}, x_{m+2}, .....x_{m+r}$

**Ejemplo**:Resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{array}\right.$

Realizamos las siguientes transformaciones$\rightarrow$ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -3\cdot 1^a ec \end{array}$

quedando el siguiente sistema equivalente $\left\{\begin{array}{r} x-2y+3z=1 \\ 7y-7z=0 \\ 7y-7z=0 \end{array}\right.$

Si dividimos las ecuaciones $2^a$ y $3^a$ por 7 tendremos $\left\{\begin{array}{r} x-2y+3z=1 \\ y-z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right.$

Por último si a la $3^a ec$ le restamos la segunda ($3^a ecnueva = 3^a ec\ -2^a ec$) tendremos:

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y+3z=1 \\ y-z=0 \\ 0=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x-2y+3z=1 \\ y-z=0 \end{array}\right.$$

El sistema está triangularizado y hemos obtenido menos ecuaciones que incógnitas; por lo tanto el sistema es compatible indeterminado

Para obtener la solución despejamos de la última "$y$" $\rightarrow y = z$. Sustituyendo este valor en la $1^a ec$ y despejando "$x$" $\rightarrow x = 1 - z$

El conjunto solución es $H = \{(1-z, z, z)\,/z \in \Re\}$

Nota1:Ahora vamos a resolver dos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, tal y como los resolvería un ordenador utilizando el método de Gauss explicado con anterioridad

**1)** $\left.\begin{array}{l} 3x-2y+3z=1 \\ 2x-3y-z=2 \\ 4x+2y-3z=1 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} E_2' = E_2 - \dfrac{2}{3}E_1 \\ E_3' = E_3 - \dfrac{4}{3}E_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -\dfrac{5}{3} & -3 & \dfrac{4}{3} \\ 0 & \dfrac{14}{3} & -7 & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$E_3'' = E_3' + \frac{14}{5}E_2' \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{77}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}$$

Con lo que; el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 3x-2y+3z=1 \\ -\dfrac{5}{3}y-3z=\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{77}{5}z=\dfrac{17}{5} \end{array}\right\}$$

Cuya solución es

$$S = \left\{\left(\frac{2}{7}, -\frac{31}{77}, -\frac{17}{77}\right)\right\}$$

**2)** $\left.\begin{array}{l} x+2y+4z-6t=4 \\ 2x+3y-5z+4t=-2 \\ 3x-4y-3z-2t=4 \\ 6x-5y-2z+3t=-3 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & -3 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} E_2' = E_2 - 2E_1 \\ E_3' = E_3 - 3E_1 \\ E_4' = E_4 - 6E_1 \end{array} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 16 & -10 \\ 0 & -10 & -15 & 16 & -8 \\ 0 & -17 & -26 & 39 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_3'' = E_3' - 10E_2' \\ E_4'' = E_4' - 17E_2' \end{array} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 115 & -144 & 92 \\ 0 & 0 & 195 & -233 & 143 \end{pmatrix}$$

$$E_4''' = E_4'' - \frac{39}{23}E_3''; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 115 & -144 & 92 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{257}{23} & -13 \end{pmatrix}$$

Con lo que; el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\rightarrow \left. \begin{array}{r} x + 2y + 4z - 6t = 4 \\ -y - 13z + 16t = -10 \\ 115z - 144t = 92 \\ \frac{257}{23}t = -13 \end{array} \right\}$$

Cuya solución es

$$S = \left\{ \left( -\frac{258}{1285}, -\frac{98}{1285}, -\frac{844}{1285}, -\frac{299}{257} \right) \right\}$$

Nota2:Es evidente, que si tuvieramos que resolver todos los sistemas como los dos ejemplos precedentes resolver éstos sería harto complejo. Para evitar estas complicaciones, lee detenidamente los consejos siguientes:

# Consejos al aplicar Gauss

1) Buscaremos un coeficiente asociado a una incógnita que valga 1. Reordenaremos las ecuaciones del sistema , de manera que el pivote aparezca en primer lugar ( si fuere necesario reordenaremos los sumandos de cada una de las ecuaciones)

2) Abreviaremos el sistema escribiendo sólo los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes en una matriz (separaremos los coeficientes del sistema de los términos independientes con una barra. Los coeficientes de cada incógnita han de ocupar la misma columna)

3) Se irán realizando las transformaciones hasta obtener un sistema triangularizado , que nos permita discutir y resolver el sistema

## 1.3.1 Ejemplos y ejercicios

**Ejemplo 1:***Resuelve el sistema* $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{array} \right.$

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 2 & 3 & -1 & | & 2 \\ 3 & 1 & +2 & | & 1 \\ 3 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -3 \cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec\ -3 \cdot 1^a ec \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 7 & 5 & | & 0 \\ 0 & 7 & 11 & | & -2 \\ 0 & 7 & 8 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3^a ecnueva = 3^a ec\ -2^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec\ -2^a ec \end{matrix} : \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 7 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & -2 \\ 0 & 0 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$

Dividiendo la $3^a ec$ por $2 \rightarrow$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 7 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 3 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 4^a ecnueva =$ $4^a ec\ -3^a ec$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 7 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 7y + 5z = 0 \\ 3z = -1 \end{cases}$$

Resolviéndolo, tendremos que $z = \dfrac{-1}{3}$, $y = \dfrac{5}{21}$, $x = \dfrac{10}{21}$

El sistema es compatible determinado y la solución es el conjunto

$$H = \left\{ \left( \frac{-1}{3}, \frac{5}{21}, \frac{10}{21} \right) \right\}$$

**Ejemplo 2:** *Resuelve el sistema* $\begin{cases} 4x - 2y - 3z + 2t = 1 \\ 2x + 3y - z - 3t = 2 \\ 3x + y - 4z + t = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$

Como ningún coeficiente de la incógnita "$x$" vale 1; reorganizamos ecuaciones y sumandos de manera que el pivote sea el coeficiente de la incógnita "$y$" de la $3^a$ ecuación

$$\begin{cases} y - 4z + t + 3x = 1 \\ y - z + 3x = 2 \\ -2y - 3z + 2t + 4x = 1 \\ 3y - z - 3t + 2x = 2 \end{cases}$$

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & | & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 4 & | & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$[4] $\rightarrow \begin{matrix} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ +2 \cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec\ -3 \cdot 1^a ec \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -11 & 4 & 10 & | & 3 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & | & -1 \end{pmatrix}$$ [5]

[4] Observa que en esta matriz las columnas corresponden a los coeficientes de las incógnitas $y, z, t$ y $x$ respectivamente

[5] Intercambiamos las filas segunda y cuarta

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & -11 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec \\ 4^a ecnueva = 11 \cdot 4^a ec - 3 \cdot 2^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 21 & 14 \end{array}\right)$$ [6] $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$4^a ecnueva = 4^a ec + 2 \cdot 3^a ec \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$$\text{dividiendo la } 4^a ec \text{ por } 3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Así pues, el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{r} y - 4z + t + 3x = 1 \\ 11z - 6t - 7x = -1 \\ t + 3x = 2 \\ 3x = 2 \end{array}\right. \text{ Resolviéndolo obtendremos que}$$

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{3}, t = 0$$

Por lo tanto; el sistema es compatible determinado siendo su solución

$$H = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)\right\}$$

**Ejemplo 3:** *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{r} 3x - 2y + 4z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + z = 0 \end{array}\right.$

Consideramos la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Modificamos la $1^a$ ecuación restándole la segunda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 5 \cdot 1^a ec \end{array},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 10 & -17 & 0 \\ 0 & 20 & 34 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2 \cdot 2^a ec \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 10 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al siguiente sistema

[6] Dividimos la $4^a$ ecuación por 7 y después la intercambiamos con la $3^a$

$$\left.\begin{array}{r} x-4y+7z=0 \\ 10y-17z=0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible indeterminado y su solución es el conjunto:

$$H=\left\{\left(-\frac{1}{5}z,\frac{17}{10}z,z\right)\ /\ z\in\mathbb{R}\right\}$$

Este conjunto también se puede expresar así:

$$H=\{(-2\alpha,17\alpha,10\alpha)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\}$$

**Ejemplo 4:** *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{r} 3x-2y+4z-t=-1 \\ 2x+2y-3z+2t=2 \\ 5x+z+t=1 \\ x-4y+7z-3t=-3 \end{array}\right.$

Consideramos la matriz $\left(\begin{array}{cccccc} 3 & -2 & 4 & -1 & | & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & | & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -4 & 7 & -3 & | & -3 \end{array}\right)$

Intercambiamos las filas $1^a$ y $4^a$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & -4 & 7 & -3 & | & -3 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & | & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -1 & | & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -5\cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec\ -3\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & -4 & 7 & -3 & | & -3 \\ 0 & 10 & -17 & 8 & | & 8 \\ 0 & 20 & -34 & 16 & | & 16 \\ 0 & 10 & -17 & 8 & | & 8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 3^a ecnueva = 3^a ec\ -2\cdot 2^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec\ -2^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & -4 & 7 & -3 & | & -3 \\ 0 & 10 & -17 & 8 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right)$$

Con lo que el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x-4y+7z-3t=-3 \\ 10y-17z+8t=8 \end{array}\right.$$

Este sistema es compatible doblemente indeterminado. La solución es el conjunto:

$$H=\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}z-\frac{1}{5}t,\frac{17}{10}z-\frac{4}{5}t+\frac{4}{5},z,t\right)\ /\ z,t\in\mathbb{R}\right\}$$

Dicho conjunto también se puede expresar así:

$$H=\left\{\left(\frac{1}{5}-2\alpha-\beta,17\alpha-4\beta+\frac{4}{5},10\alpha,5\beta\right)\ /\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

**Ejemplo 5** *Resuelve el sistema a)* $\left\{\begin{array}{r} 3x-2y+4z=0 \\ 2x+2y-3z=2 \\ 5x+z=3 \end{array}\right.$

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & | & 0 \\ 2 & 2 & -3 & | & 2 \\ 5 & 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}$

Modificamos la $1^a$ ecuación restándole la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & | & -2 \\ 2 & 2 & -3 & | & 2 \\ 5 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2{\cdot}1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -5\cdot 1^a ec \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & | & -2 \\ 0 & 10 & -17 & | & 6 \\ 0 & 20 & 34 & | & 13 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2\cdot 2^a ec \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & | & -2 \\ 0 & 10 & -17 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible

**Ejemplo 6** *Resuelve el sistema* $\left\{ \begin{array}{r} 3x-2y=0 \\ 2x+2y=1 \\ 5x-8y=-2 \end{array} \right.$

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -2 & | & 0 \\ 2 & 2 & | & 1 \\ 5 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$

Modificamos la $1^a$ ecuación restándole la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & | & -1 \\ 2 & 2 & | & 1 \\ 5 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2{\cdot}1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -5\cdot 1^a ec \end{matrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & | & -1 \\ 0 & 10 & | & 3 \\ 0 & 20 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2\cdot 2^a ec \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & | & -1 \\ 0 & 10 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible

**Exercise 1.3.1** *Resuelve a)* $\left\{ \begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ 2x+3y-z=2 \\ 3x+y+2z=5 \\ 3x+y-z=4 \end{array} \right.$ *b)* $\left\{ \begin{array}{r} x-2y-3z+t=1 \\ 2x+3y-z-2t=2 \\ 3x+y+2z+3t=1 \\ 3x+y-z=5 \end{array} \right.$

**Exercise 1.3.2** *Resuelve a)* $\left\{ \begin{array}{r} x-2y-3z+t=0 \\ 2x+3y-z-2t=0 \\ 3x+y+2z+3t=0 \\ 3x+y-z=0 \end{array} \right.$ *b)* $\left\{ \begin{array}{r} 3x-2y+4z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \\ 6x+z=0 \end{array} \right.$

Es importante resaltar; que los sistemas homogéneos son siempre compatibles, ya que al menos una solución será la trivial (todas las incógnitas nulas)

**Ejemplo 7:***Discute el sistema* $\left\{ \begin{array}{l} x-2y-3z=1 \\ 2x+3y-z=2 \\ 3x+y+a\cdot z=a+7 \end{array} \right.$ *según los valores del parámetro a. En los casos en que sea compatible, resuélvelo*

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 2 & 3 & -1 & | & 2 \\ 3 & 1 & a & | & a+7 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -3\cdot 1^a ec \end{matrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 7 & 5 & | & 0 \\ 0 & 7 & a+9 & | & a+4 \end{array}\right) 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 7 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & a+4 & | & a+4 \end{array}\right)$$

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ 7y+5z=0 \\ (a+4)\cdot z=a+4 \end{array}\right.$$

Según los valores que puede tomar $a$ sólo hay dos posibilidades:

**I)Si** $a+4 \neq 0 \rightarrow a \neq -4$ ; podríamos dividir la $3^a ec$ por $a+4$, quedando el sistema así:

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ 7y+5z=0 \\ z=1 \end{array}\right. \text{ el sistema sería compatible determinado}$$

Resolviéndolo, tendremos $z=1; y=\frac{-5}{7}; x=\frac{18}{7}$

**II**) Si $a+4=0 \rightarrow a=-4$ el sistema quedará de la siguiente manera $\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ 7y+5z=0 \end{array}\right.$

Obteniendo $y$ en función de $z$ en la $3^a ec \rightarrow y=\frac{-5z}{7}$ y sustituyendo en la $1^a ec$

$x-2\left(\frac{-5z}{7}\right)-3z=1$ y despejando "$x$" $\rightarrow x=1+\frac{11z}{7}$

Como el conjunto solución es $H=\left\{\left(1+\frac{11z}{7}, \frac{-5z}{7}, z\right) / z \in \Re\right\}$ entonces el sistema es compatible indeterminado

**Ejemplo 8:***Discute el sistema* $\left\{\begin{array}{l} x-2y-3z=1 \\ 2x+3y+z=2 \\ 3x+y+a\cdot z=b \end{array}\right.$ *según los valores de los parámetros "a" y "b". En los casos en que sea compatible, resuélvelo*

Consideramos la matriz $\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & | & 2 \\ 3 & 1 & a & | & b \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3\cdot 1^a ec \end{array}$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 7 & 7 & | & 0 \\ 0 & 7 & a+9 & | & b-3 \end{array}\right)$$

$$3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 7 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & | & b-3 \end{array}\right)$$

Podemos dividir la $3^a ec$ por $7 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & | & b-3 \end{array}\right)$

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ y+z=0 \\ (a+2)\cdot z=b-3 \end{array}\right.$$

Según los valores que pueden tomar $a$ y $b$ hay tres posibilidades:

**I)Si** $a+2 \neq 0$ y $b \in \Re$ ; podríamos dividir la $3^a ec$ por $a+2$, quedando el sistema así:

$$\left\{ \begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ y+z=0 \\ z=\dfrac{b-3}{a+2} \end{array} \right.$$

Resolviéndolo, tendremos

$$z=\frac{b-3}{a+2}; y=-\frac{b-3}{a+2}; x=1+\frac{b-3}{a+2}=\frac{a+b-1}{a+2}$$

Po lo tanto; el sistema es compatible determinado

**II**) Si $a+2=0$ y $b-3=0 \rightarrow (a=-2$ y $b=3)$ el sistema quedará de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ y+z=0 \end{array} \right.$$

Obteniendo $y$ en función de $z$ en la $3^a ec \rightarrow y=-z$ y sustituyendo en la $1^a ec$ $x-2(-z)-3z=1$ y despejando "$x$" $\rightarrow x=1+z$

Como el conjunto solución es $H=\{(1+z,-z,z)\,/z \in \Re\}$ entonces el sistema es compatible indeterminado

**III**) Si $a+2=0$ y $b-3 \neq 0 \rightarrow (a=-2$ y $b \neq 3)$el sistema quedará de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ y+z=0 \\ 0\cdot z=b-3 \neq 0 \end{array} \right. \rightarrow \textit{Absurdo}$$

El sistema no tiene solución; es Incompatible

**Ejemplo 9** Discutir según los valores de $a$ el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x-2y-3z=0 \\ 2x+3y+(a+1)z=0 \\ 3x+y+a\cdot z=0 \end{array} \right.$ .

Consideramos la matriz $\left( \begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 2 & 3 & a+1 & | & 0 \\ 3 & 1 & a & | & 0 \end{array} \right)$ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3\cdot 1^a ec \end{array}$

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 7 & a+7 & | & 0 \\ 0 & 7 & a+9 & | & 0 \end{array} \right)$$

$$3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \left( \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 7 & a+7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{array} \right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema $\left\{ \begin{array}{l} x-2y-3z=0 \\ 7y+(a+7)z=0 \\ 2z=0 \end{array} \right.$

Este sistema es compatible determinado y su solución es la trivial$\rightarrow x=0$, $y=0$, $z=0$

**Ejemplo 9** Discutir según los valores de $a$ el sistema $\left\{ \begin{array}{l} (a-2)\,x-y+z=0 \\ x+(2a-1)\,y-az=0 \\ 1x+ay-1z=0 \end{array} \right.$ .

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} a-2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2a-1 & -a & | & 0 \\ 1 & a & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$

Intercambiamos las filas $1^a$ y $3^a$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & | & 0 \\ 1 & 2a-1 & -a & | & 0 \\ a-2 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - (a-2) \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & | & 0 \\ 0 & a-1 & -a+1 & | & 0 \\ 0 & -a^2+1 & -a+1 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & | & 0 \\ 0 & a-1 & -(a-1) & | & 0 \\ 0 & -(a-1)(a+1) & -(a-1) & | & 0 \end{pmatrix}$$

Modificamos la $3^a$ ecuación de la siguiente manera
$3^a ecnueva = 3^a ec + (a+1) \cdot 2^a ec$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & | & 0 \\ 0 & a-1 & -(a-1) & | & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)-(a-1)(a+1) & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & | & 0 \\ 0 & a-1 & -(a-1) & | & 0 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & | & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + ay - z = 0 \\ (a-1)y - (a-1)z = 0 \\ -(a+2)(a-1)z = 0 \end{array} \right.$

Posibilidades:

1. Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \to$El sistema es compatible determinado la solución es la trivial $x = y = z = 0$
2. Si $a = 1$ El sistema inicial es equivalente al sistema$\{x + y - z = 0$
   Este sistema es compatible doblemente indeterminado,
   Su solución es el conjunto:
   $$H = \{(-y+z, y, z) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\}$$
3. Si $a = -2$.El sistema inicial es equivalente al sistema $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{array} \right.$
   Este sistema es compatible indeterminado.
   Su solución es el conjunto:
   $$H = \{(3z, z, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$$

**Ejemplo 10** Discutir según los valores del parámetro $k$ el siguiente sistema $\left. \begin{array}{l} (3k-1)x + 2ky + (3k+1)z = 1 \\ 2kx + 2ky + (3k+1)z = k \\ (k+1)x + (k+1)y + 2(k+1)z = k^2 \end{array} \right\}$ y en los casos en que sea compatible resolvedlo

Previamente realizamos un intercambio de ecuaciones y de sumandos

$$\left.\begin{array}{l} 2ky + 2kx + (3k+1)z = k \\ 2ky + (3k-1)\,x + (3k+1)z = 1 \\ (k+1)y + (k+1)x + 2(k+1)z = k^2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2k & 2k & 3k+1 & k \\ 2k & 3k-1 & 3k+1 & 1 \\ k+1 & k+1 & 2k+2 & k^2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

**I)** Si $k \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} E_2' = E_2 - E_1 \\ E_3' = 2kE_3 - (k+1)E_1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2k & 2k & 3k+1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & -k+1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & 2k^3-k^2-k \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2ky + 2kx + (3k+1)z = k \\ (k-1)\,x = -k+1 \\ (k^2-1)z = 2k^3 - k^2 - k \end{array}\right\}$$

Nos interesa factorizar el coeficiente asociado a la incógnita $z$ y el término independiente de la última ecuación

$$\left.\begin{array}{r} 2ky + 2kx + (3k+1)z = k \\ (k-1)\,x = -k+1 \\ (k-1)(k+1)z = (2k^2+k)(k-1) \end{array}\right\}$$

**Ia)** • Si además $k \neq 1$ y $k \neq -1 \rightarrow$ el sistema es compatible determinado; ya que todos los elementos de la diagonal principal son no nulos

Despejando de la última ecuación la incógnita $z$ tendremos

$$z = \frac{(2k^2+k)(k-1)}{(k-1)(k+1)} = \frac{2k^2+k}{k+1}$$

De la segunda ecuación obtenemos:

$$x = \frac{-k+1}{k-1} = -1$$

Por último, sustituyendo los valores obtenidos para las incógnitas $z$ y $x$ en la primera ecuación; tendremos que:

$$2ky = k + 2k - \frac{\left(2k^2+k\right)(3k+1)}{k+1} = \frac{(-2k)\left(k-1+3k^2\right)}{k+1}$$

Despejando $y$

$$y = \frac{(-2k)\left(k-1+3k^2\right)}{(k+1)\,2k} = \frac{-3k^2-k+1}{k+1}$$

$$S=\left\{\left(-1,\frac{-3k^2-k+1}{k+1},\frac{2k^2+k}{k+1}\right)/k\neq 1\ y\ k\neq -1\right\}$$

**Ib)** • Si $k=1\rightarrow\ 2x+2y+4z=1\}$, Sistema compatible doblemente indeterminado

$$S=\left\{\left(-y-2z+\frac{1}{2},y,z\right)/y,z\in R\right\}$$

Ic) Si k$=-1\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}-2x-2y-2z=k\\ -2x=-2\\ 0=-2\end{array}\right\}$ Sistema incompatible

**II)** Si $k=0$ $\rightarrow$sustituyendo en la matriz $(**)$ tendremos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{l}z=0\\ -x+z=1\\ y+x+2z=0\end{array}\right\}\text{cuya solución es } S=\{(-1,1,0)\}$$

**Ejemplo 11** Resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{l}x+y+az=2\\ x+ay+z=-1\\ ax+y+z=-1\end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&2\\1&a&1&-1\\a&1&1&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}E_2-2\cdot E_1\\E_3-a\cdot E_1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&2\\0&a-1&1-a&-3\\0&1-a&1-a^2&-1-2a\end{array}\right)$$

$$E_3-E_2\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&2\\0&a-1&1-a&-3\\0&0&2-a-a^2&-4-2a\end{array}\right)$$

Con lo que el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{l}x+y+az=2\\ (a-1)\,y+(1-a)\,z=-3\\ (-a^2-a+2)z=-4-2a\end{array}\right.$$

Es muy importante; descomponer factorialmente el polinomio de segundo grado, que aparece como coeficiente de la incógnita $z$, de la última ecuación

Observa que:

$$-a^2-a+2=-(a-1)(a+2)$$

Con lo que el sistema quedaría así:

$$\left\{\begin{array}{c}x+y+az=2\\ (a-1)\,y+(1-a)\,z=-3\\ -(a-1)(a+2)z=-2(2+a)\end{array}\right.\qquad\text{(Sistema final)}$$

Casos que se pueden presentar

**I)** Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$ el sistema será compatible determinado; ya que de la $3^a$ ecuación obtendremos

$$z=\frac{-2(2+a)}{-(a-1)(a+2)}=\frac{2}{a-1}$$

Sustituyendo este valor en la $2^a ec$

$$(a-1)\,y + \frac{2\,(1-a)}{a-1} = -3 \rightarrow (a-1)\,y - 2 = -3$$

Y despejando la incógnita $y$ (podemos ya que $a-1 \neq 0$)

$$y = \frac{-1}{a-1}$$

Sustituyendo ahora en la $1^a ec$ los valores obtenidos para las incógnitas $x$ e $y$

$$x - \frac{1}{a-1} + \frac{2a}{a-1} = 2 \rightarrow x + \frac{2a-1}{a-1} = 2$$

Y despejando $x$

$$x = 2 - \frac{2a-1}{a-1} = \frac{-1}{a-1}$$

La solución de este sistema es $S = \left\{ \left( \frac{-1}{a-1}, \frac{-1}{a-1}, \frac{2}{a-1} \right) \text{siendo } a \neq 1 \text{ y } a \neq -2 \right\}$

**II)** Si $a = 1$ al sustituir en el sistema final, obtenemos un absurdo

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + 1 \cdot z = 2 \\ 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3 \\ 0 \cdot z = 6 \end{array} \right.$$

Por lo tanto; el sistema es incompatible

**III)** Si $a = -2$ al sustituir en el sistema final, veremos que la $3^a ec$ desaparece

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y - 2z = 2 \\ -3y + 3z = -3 \\ 0 \cdot z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y - 2z = 2 \\ -y + z = -1 \end{array} \right.$$

El sistema es compatible indeterminado y las soluciones son las del conjunto

$$S = \{(z+1, z+1, z)\,/\,z \in \Re\}$$

## 1.4 Cuestiones

**Exercise 1.4.1** *Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que sea: a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado y c) Incompatible.*

**Exercise 1.4.2** *Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea: a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado y c) Incompatible.*

**Exercise 1.4.3** *¿Un sistema que tenga dos ecuaciones lineales con tres incógnitas puede ser compatible determinado?*

**Exercise 1.4.4** *Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea: a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado y c) Incompatible.*

**Exercise 1.4.5** *Escribe dos sistemas de ecuaciones lineales que sean equivalentes*

**Exercise 1.4.6** *¿Los siguientes sistemas* $\left\{ \begin{array}{c} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{c} x+y=3 \\ -x+2y=-3 \end{array} \right.$ *son equivalentes?*

**Exercise 1.4.7** *¿Los siguientes sistemas* $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2z=9 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=6 \\ 3x+2z=9 \\ 4x+y+3z=15 \end{array} \right.$ *son equivalentes?*

**Exercise 1.4.8** *Invéntate un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya solución sea* $H = \{(-1, 2, -3)\}$

**Exercise 1.4.9** *a) Invéntate un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya solución sea* $H = \{(x, 2x-3, 3x+2) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$
*b)Invéntate un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas equivalente al sistema del apartado anterior que tenga una ecuación más*

**Exercise 1.4.10** *¿ Todo sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas es siempre compatible indeterminado?. Razona tu respuesta.*

**Exercise 1.4.11** *¿ Todo sistema de ecuaciones lineales con mayor número de ecuaciones que incógnitas es siempre compatible ?. Razona tu respuesta.*

**Exercise 1.4.12** *Si las soluciones de dos sistemas de ecuaciones lineales son respectivamente los conjuntos*
$H = \left\{ \left( \frac{2-z}{5}, \frac{-1+3z}{5}, z \right) \ / \ z \in \mathbb{R} \right\}$ $\qquad H\,' = \{(x, 1-3x, 2-5x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$
*Determina si dichos sistemas son equivlentes.*

## 1.5 Problemas de planteamiento y aplicación

**Exercise 1.5.1** *Dada la parábola* $y = ax^2 + bx + c$ *Determinad los parámetros* $a, b$ *y* $c$ *para que los puntos* $P(-2,1), Q(3,3)$ *y* $R(1,3)$ *pertenezcan a su gráfica*

Como los puntos anteriores son de la parábola; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{l} P(-2,1) \\ Q(3,3) \\ R(1,3) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = 4a - 2b + c \\ 3 = 9a + 3b + c \\ 3 = a + b + c \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema anterior obtendremos:

$$a = -\tfrac{2}{15} \; ,b = \tfrac{8}{15} \; ,c = \tfrac{13}{5}$$

La única parábola que pasa por los puntos $P, Q$ y $R$ es:

$$y = -\frac{2}{15}x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{13}{5}$$

**Exercise 1.5.2** *Dada la función* $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ *Determinad los parámetros* $a, b$ *y* $c$ *para que los puntos* $P(0,0), Q(2,6)$ *y* $R(-2,-6)$ *pertenezcan a su gráfica*

Como los puntos anteriores son de la función dada; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{l} P(0,0) \\ Q(2,6) \\ R(-2,-6) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = c \\ 6 = 8 + 4a + 2b + c \\ -6 = -8 + 4a - 2b + c \end{array}\right\}$$

Reorganizando el sistema anterior tendremos

$$\left.\begin{array}{l} 0 = c \\ 4a + 2b = -2 \\ +4a - 2b = 2 \end{array}\right\}$$

Si resolvemos el sistema, obtendremos$\rightarrow$ $a = 0$ y $b = -1$

La función pedida es:

$$y = x^3 - x$$

**Exercise 1.5.3** *¿Existe alguna parábola (*$y = ax^2 + bx + c$*)que pase por los puntos* $P(1,2), Q(2,3), R(-1,6)$ *y* $T(3,2)$*?*

Como los puntos dados son de la parábola; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2) \\ Q(2,3) \\ R(-1,6) \\ T(3,2) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \\ 6 = a - b + c \\ 2 = 9a + 3b + c \end{array}\right\}$$

Si resolvemos ahora el sistema , obtendremos que el sistema anterior es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} a+b+c=2 \\ -2b-3c=-5 \\ 3c=9 \\ 0=-4 \end{array}\right\}$$

Como este sistema es incompatible;: entonces no existe ninguna parábola que pase por los puntos $P, Q, R, T$

**Exercise 1.5.4** *¿Existe alguna parábola ($y = ax^2 + bx + c$)que pase por los puntos $P(1,2), Q(2,3)$?*

Como los puntos $P, Q$ son de la parábola; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{c} P(1,2) \\ Q(2,3) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 2=a+b+c \\ 3=4a+2b+c \end{array}\right\}$$

Aplicando el método de Gaus, el sistema anterior es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} a+b+c=2 \\ -2b-3c=-5 \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible indeterminado y todas sus soluciones (expresadas en función del parámetro $c$ son:

$$a = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\ , b = -\tfrac{3}{2}c + \tfrac{5}{2}$$

Existen infinitas parábolas que pasan por los puntos $P$ y $Q$. En concreto, todas ellas son de la forma:

$$y = \left(\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\tfrac{3}{2}c + \tfrac{5}{2}\right)x + c \qquad \text{con } c \in \Re \sim \left\{\tfrac{1}{2}\right\}$$

Fíjate que si $c = \frac{1}{2}$ ; obtendríamos la recta $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$.

**Exercise 1.5.5** *Dada la función $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (hipérbola equilatera) determina los parámetros $a, b, c$ y $d$ para que los puntos $P(3,10), Q(0,-2), R(1,-6)$ y $T(4,6)$ pertenezcan a su gráfica*

$$\left.\begin{array}{l} P(3,10) \\ Q(0,-2) \\ R(1,-6) \\ T(4,6) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 10 = \dfrac{3a+b}{3c+d} \\ -2 = \dfrac{b}{d} \\ -6 = \dfrac{a+b}{c+d} \\ 6 = \dfrac{4a+b}{4c+d} \end{array}\right\}$$

Reorganizando todas las ecuaciones y resolviendo el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 3a+b-30c-10d \\ 0 = b+2d \\ 0 = a+b+6c+6d \\ 0 = 4a+b-24c-6d \end{array}\right\}$$

Obtenemos que el sistema es compatible indeterminado y todas las soluciones ( en función del parámetro $c$)son de la forma

$$d = -2c, a = 2c, b = 4c \qquad \text{con } c \in \Re$$

Casos

1. Si $c = 0$ no existe función (Razona cuál es el motivo)
2. Si $c \neq 0 \to y = \dfrac{2cx + 4c}{cx - 2c} = \dfrac{c\,(2x+4)}{c\,(x-2)} \to y = \dfrac{2x+4}{x-2}$

La única hipérbola equilátera que pasa por los puntos dados; es pues:

$$y = \frac{2x+4}{x-2}$$

**Exercise 1.5.6** *Determina los valores* $a, b, c$ *para que la parábola* $y = ax^2 + bx + c$ *pase por los puntos* $P(1,4), Q(2,9), T(3,24)$

Como los puntos anteriores son de la parábola; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{c} P(1,4) \\ Q(2,9) \\ R(3,24) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} 4 = a + b + c \\ 9 = 4a + 2b + c \\ 24 = 9a + 3b + c \end{array}\right\}$$

Restando la $2^a$ de la $1^a$ y la $3^a$ de la $2^a$ tendremos

$$\left.\begin{array}{c} 4 = a + b + c \\ 5 = 3a + b \\ 15 = 5a + b \end{array}\right\}$$

Restando la $3^a$ de la $2^a$

$$\left.\begin{array}{c} 4 = a + b + c \\ 5 = 3a + b \\ 10 = 2a \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$a = 5, b = -10, c = 9$$

Así pues, la parábola pedida es

$$y = 5x^2 - 10x + 9$$

**Exercise 1.5.7** *Un número de tres dígitos es igual a 28 veces la suma de sus dígitos. Si al número obtenido escribiendo sus dígitos en orden inverso le restamos ell número inicial , resulta 198. El dígito de las unidades es igual a la suma de los otros dos. Determina dicho número*

Si el número es $N = xyz \to N = 100x + 10y + z$
Si invertimos sus cifras:

$$zyx \to 100z + 10y + x$$

$$\left.\begin{array}{l} 100x+10y+z=28(x+y+z) \\ 100z+10y+x-(100x+10y+z)=198 \\ z=x+y \end{array}\right\}$$

Reorganizando y simplificando las ecuaciones, tendremos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-z=-2 \\ 72x-18y-27z=0 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es $x=2,\ y=2, z=4$
El número pedido es el 224

**Exercise 1.5.8** *Una compañía petrolífera posee tres refinerías I,II,III que producen las siguientes cantidades (en litros) de fuel, gasóleo y gasolina por cada barril de crudo*

| | $I$ | $II$ | $III$ |
|---|---|---|---|
| *Fuel* | 50 | 30 | 75 |
| *Gasóleo* | 30 | 65 | 40 |
| *Gasolina* | 70 | 55 | 30 |

.

*Si la demanda de fuel, gasóleo y gasolina es de* $10775000, 8675000$ *y* $10175000$ *litros respectivamente. ¿ Cuántos barriles de crudo necesitará cada refinería para satisfacer la demanda?*

Si llamamos $x$ al número de barriles de la refinería $I, y$ al número de barriles de la refinería $II$ y $z$ al número de barriles de la refinería $III$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 50x+30y+75z=10775000 \\ 30x+65y+40z=8675000 \\ 70x+55y+30z=10175000 \end{array}\right\}$$

Dividiendo las tres ecuaciones por 5 tenemos :

$$\left.\begin{array}{l} 10x+6y+15z=2155000 \\ 6x+13y+8z=1735000 \\ 14x+11y+6z=2035000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{llll} 6 & 13 & 8 & | & 1735000 \\ 10 & 6 & 15 & | & 2155000 \\ 14 & 11 & 6 & | & 2035000 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=6\cdot 2^a-10\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=6\cdot 3^a-14\cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{lllll} 6 & 13 & 8 & | & 1735000 \\ 0 & -94 & 10 & | & -4420000 \\ 0 & -116 & -76 & | & -12080000 \end{array}\right)$$

Dividimos la $2^a$ por 2 y la $3^a$ por -2 también

$$\left(\begin{array}{lllll} 6 & 13 & 8 & | & 1735000 \\ 0 & -47 & 5 & | & -2210000 \\ 0 & 58 & 38 & | & 6040000 \end{array}\right) 3^{a\prime}=47{\cdot}3^a{+}58{\cdot}2^a \left(\begin{array}{lllll} 6 & 13 & 8 & | & 1735000 \\ 0 & -47 & 5 & | & -2210000 \\ 0 & 0 & 2076 & | & 155700000 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{r} 6x+13y+8z=1735000 \\ -47y+5z=-2210000 \\ 2076z=155700000 \end{array}\right\}$$

De la última ecuación $z=\dfrac{155700000}{2076}=75000$
Sustituyendo en la $2^a$ ecuación:
$-47y+375000=-2210000 \rightarrow y=55000$
Sustituyendo los valores de ambas incógnitas en la $1^a$

$6x + 13 \cdot 55000 + 8 \cdot 75000 = 1735000$ : :
$6x + 715000 + 600000 = 1735000 \to x = 70000$
La solución es: $x = 70000$,$y = 55000$ , $z = 75000$

**Exercise 1.5.9** *La edad de un padre es doble que la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de sus hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de las edades de las tres personas será de 150 años. ¿ Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?*

$x \to Edad\ actual\ del\ padre$
$y \to Edad\ actual\ del\ hijo\ mayor$
$z \to Edad\ actual\ del\ hijo\ menor$
$y - z \to Diferencia\ de\ las\ edades\ de\ sus\ hijos$
$y + z \to Suma\ de\ las\ edades\ de\ sus\ hijos$
Si volvemos hacia atrás $y - z$ años; entonces sus edades son

| Padre | Hijo $1^o$ | Hijo $2^o$ |
|---|---|---|
| $x - (y - z)$ | $y - (y - z)$ | $z - (y - z)$ |

Si pasan $y + z$ años;entonces sus edades son

| Padre | Hijo $1^o$ | Hijo $2^o$ |
|---|---|---|
| $x + (y + z)$ | $y + (y + z)$ | $z + (y + z)$ |

Con esta información ya podemos plantear las ecuaciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2(y+z) \\ x - (y-z) = 3\left(y - (y-z) + z - (y-z)\right) \\ x + (y+z) + y + (y+z) + z + (y+z) = 150 \end{array}\right\}$$

Reorganizando las ecuaciones obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 8z = 0 \\ x + 4y + 4z = 150 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{llllll} 1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 1 & 2 & -8 & | & 0 \\ 1 & 4 & 4 & | & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 1^a \end{array}\Bigg\} \to \left(\begin{array}{lllll} 1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 4 & -6 & | & 0 \\ 0 & 6 & 6 & | & 150 \end{array}\right)$$

Dividimos la $3^a$ por 6, la segunda por 2,y después las intercambiamos

$$\left(\begin{array}{lllll} 1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 25 \\ 0 & 2 & -3 & | & 0 \end{array}\right) 3^{a\prime} = 3^a - 2 \cdot 2^a \to \left(\begin{array}{lllll} 1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 25 \\ 0 & 0 & -5 & | & -50 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - 2z = 0 \\ y + z = 25 \\ -5z = -50 \end{array}\right\} \text{cuya solución es } x = 50, y = 15, z = 10$$

Así pues; cuando nació su segundo hijo tenía 40 años, y cuando nació el primero 35 años

**Exercise 1.5.10** *Halla tres números reales sabiendo que el primero es igual a dos veces el segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero el resultado es 5*

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y + \dfrac{z}{2} \\ y + z = x + 1 \\ x + z - y = 5 \end{array}\right\}$$

Reorganizando el sistema , tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 4y - z = 0 \\ -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 5 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a + 2 \cdot 1^a \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Intercambiando la $2^a$ y la $3^a$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$

El sistema es equivalente a :

$$\left.\begin{array}{l} -x + y + z = 1 \\ -2y + z = 2 \\ 2z = 6 \end{array}\right\}$$

De la $3^a \to z = 3$

Sustituyendo en la $2^a \to -2y + 3 = 2$ y resolviéndola :

$$y = \tfrac{1}{2}$$

Sustituyendo los dos valores anteriores en la $1^a \to -x + \frac{1}{2} + 3 = 1$ y resolviéndola:

$$x = \tfrac{5}{2}$$

Solución $x = \frac{5}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 3$

**Exercise 1.5.11** *Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a 3 establecimientos que demandan toda la producción. En una determinada semana el primer establecimiento solicitó tantas unidades como el segundo y tercero juntos, mientras que el segundo establecimiento pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por el primero más la tercera parte de lo pedido por el tercero. ¿Cuáles fueron las cantidades solicitadas por los tres establecimientos?*

Si $x, y, z$ son las unidades del primer segundo y tercer establecimiento respectivamente; entonces:

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z = 42 \\ x = y + z \\ y = \dfrac{120}{100}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{z}{3}\right) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} x + y + z = 42 \\ x - y - z = 0 \\ -3x + 5y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 42 \\ -3 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a + 3 \cdot 1^a \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 42 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$2^{a\prime}=\frac{2^a}{2}-1^a \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$
$$3^{a\prime}=3^a-2{\cdot}2^a \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & -7 & -42 \end{array}\right)$$

El sistema es equivalente a :

$$\left.\begin{array}{c} x-y-z=0 \\ y+z=21 \\ -7z=-42 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema; obtendremos como solución $x=21, y=15, z=6$

**Exercise 1.5.12** *Un financiero invirtió en bolsa* 3000000 *pts en acciones de tres empresas* $A, B, C$, *y obtuvo un beneficio de* 155000 *pts. Si sabemos que invirtió en A tanto como en B y C juntos y que los beneficios de las empresas fueron de un* 5% *en A,* 3% *en B y un* 10% *en C. ¿Cuánto invirtió en cada empresa*

Si $x, y, z$ son las cantitades invetidas en $A, B$ y $C$ respectivamente; entonces:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=3000000 \\ x=y+z \\ \frac{5x}{100}+\frac{3y}{100}+\frac{10z}{100}=155000 \end{array}\right\}$$

De la $1^a$ y la $2^a$ deducimos que $2x=3000000 \rightarrow x=1500000$

Sustituyendo el valor de x en las otras dos ecuaciones tendremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 1500000=y+z \\ 75000+\frac{3y}{100}+\frac{10z}{100}=155000 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{c} y+z=1500000 \\ 3y+10z=8000000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1500000 \\ 3 & 10 & 8000000 \end{array}\right) 2^{a\prime}=2^a-3\cdot 1^a \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1500000 \\ 0 & 7 & 3500000 \end{array}\right)$$

El sistema es equivalente a :

$$\left.\begin{array}{c} y+z=1500000 \\ 7z=3500000 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, la solución será $x=1500000, y=1000000, z=500000$

**Exercise 1.5.13** *Si la altura de Carlos aumentase el triple de la diferencia de las alturas de Toni y Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. La altura de los tres suman 515 cm. ,y ocho veces la altura de Toni es igual que nueve veces la de Carlos. Halla las tres alturas*

Si $x, y, z$ son las alturas de Carlos, Toni y Juan respectivamente

$$\left.\begin{array}{c} x+3(y-z)=z \\ x+y+z=515 \\ 8y=9x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x+3y-4z=0 \\ x+y+z=515 \\ -9x+8y=0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 515 \\ -9 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{c} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a + 9 \cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 515 \\ 0 & 35 & -36 & 0 \end{array}\right)$$

$$3^{a\prime} = 2 \cdot 3^a + 35 \cdot 2^a$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 515 \\ 0 & 0 & 103 & 515 \cdot 35 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - 4z = 0 \\ -2y + 5z = 515 \\ 103z = 515 \cdot 35 \end{array}\right\}$$

De la última ecuación obtenemos $z = \dfrac{515 \cdot 35}{103} = 5 \cdot 35 = 175$
Sustituyendo en la segunda $-2y + 5 \cdot 175 = 515$, y despejando $y$ tendremos:

$$y = 180$$

Sustituyendo los valores de $y$ y $z$ en la $1^a$ $x + 540 - 700 = 0$y despejando $x$:

$$x = 160$$

La solución es : $x = 160, z = 175, y = 180$

**Exercise 1.5.14** *La edad de su madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades de padre,madre e hijo es de 80 años, y dentro de 5 años la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre*

Si $x, y, z$ son respectivamente las edades de padre,madre e hijo respectivamente
Si transcurren 5 años; entonces las edades respectivas son $x + 5, y + 5, z + 5$

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z = 80 \\ y = 3z \\ y + 5 + z + 5 = x + 5 + 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 80 \\ y - 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) 3^{a\prime} = 3^a + 1^a \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 80 \end{array}\right)$$

Dividimos la última por 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 40 \end{array}\right) 3^{a\prime} = 3^a - 2^a \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 40 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z = 80 \\ y - 3z = 0 \\ 4z = 40 \end{array}\right\}$$

Resolviéndolo, obtendremos $x = 40, y = 30,\ z = 10$

**Exercise 1.5.15** *Un automóvil sube las cuestas a una velocidad de 54 $Km/h$.Las baja a 90 km/h y en llano circula a 80 km/h . Para ir de A a B tarda 2horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 38 minutos. ¿ Cuál es la longitud del camino llano entre A y B si se sabe que A y B distan 192 Km*

Es evidente que el camino tiene tres tipos de tramo. Si vamos de $A$ a $B$ y llamo $x$ a los kilómetros de subida, $y$ a los km de llano y $z$ a los de bajada; entonces es evidente que de B a A $x$ serán los km de bajada, $y$ los de llano y $z$ los de subida (Fíjate que $x+y+z=192$)

Tramo de A a B (tiempo total$\rightarrow$ 2.5)

| | Subida | LLano | Bajada |
|---|---|---|---|
| Km | $x$ | $y$ | $z$ |
| Velocidad | 54 | 80 | 90 |
| Tiempo en horas | $\frac{x}{54}$ | $\frac{y}{80}$ | $\frac{z}{90}$ |

$$\rightarrow \frac{x}{54}+\frac{y}{80}+\frac{z}{90}=2.5$$

Tramo de B a A (tiempo total$\rightarrow 2+\frac{38}{60}$)

| | Subida | LLano | Bajada |
|---|---|---|---|
| Km | $z$ | $y$ | $x$ |
| Velocidad | 54 | 80 | 90 |
| Tiempo en horas | $\frac{z}{54}$ | $\frac{y}{80}$ | $\frac{x}{90}$ |

$$\rightarrow \frac{x}{90}+\frac{y}{80}+\frac{z}{54}=2+\frac{38}{60}$$

Hemos de resolver pues el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=192 \\ \frac{x}{54}+\frac{y}{80}+\frac{z}{90}=2.5 \\ \frac{x}{90}+\frac{y}{80}+\frac{z}{54}=2+\frac{38}{60} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=192 \\ 40x+27y+24z=5400 \\ 24x+27y+40z=5688 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 192 \\ 40 & 27 & 24 & | & 5400 \\ 24 & 27 & 40 & | & 5688 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=2^a-40\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-24\cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 192 \\ 0 & -13 & -16 & | & -2280 \\ 0 & 3 & 16 & | & 1080 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las columnas $2^a$ y $3^a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 192 \\ 0 & -16 & -13 & | & -2280 \\ 0 & 16 & 3 & | & 1080 \end{pmatrix} 3^{a\prime}=3^a+2^a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 192 \\ 0 & -16 & -13 & | & -2280 \\ 0 & 0 & -10 & | & -1200 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+z+y=192 \\ -16z-13y=-2280 \\ -10y=-1200 \end{array}\right\} \rightarrow y=120$$

Sustituyendo en la $2^a$ $-16z-1560=-2280 \rightarrow -16z=-720$

Despejando $z \rightarrow z=45$

Sustituyendo los valores de $y$ y $z$ en la$1^a$

$x+45+120=192 \rightarrow x=27$

**Exercise 1.5.16** *El Sr Carlos le dice a José: "Yo tengo el doble de la edad que usted tenía cuando yo tenía la edad que usted tiene ahora. La suma del triple de la edad que usted tiene y la edad que yo tendré cuando usted tenga mi edad es de 280"; ¿Qué edades tienen actualmente ambos?·*

$X \rightarrow$ *Edad de Carlos*

$Y \rightarrow$ *Edad de José*

Para que Carlos tuviese la edad de José, tendríamos que retroceder $X-Y$ años; con lo que sus edades respectivas serían:

$X-(X-Y) \rightarrow$ *Edad de Carlos hace* $X-Y$ *años*

$Y-(X-Y)=2Y-X \rightarrow$ *Edad de José hace* $X-Y$ *años*

Para que José tuviese la edad de Carlos tendríamos que avanzar en el tiempo $X-Y$ años; con lo que sus edades respectivas serían:

$X+(X-Y)=2X-Y \rightarrow$ *Edad de Carlos dentro de* $X-Y$ *años*

$Y+(X-Y) \rightarrow$ *Edad de José dentro de* $X-Y$ *años*

Leyendo detenidamente el enunciado del problema; podemos concluir que:

$$\left.\begin{array}{l} X=2(2Y-X) \\ 3Y+(2X-Y)=280 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 3X-4Y=0 \\ 2X+2Y=280 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{c} 2Y+2X=280 \\ -4Y+3X=0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 280 \\ -4 & 3 & 0 \end{array}\right) 2^{a\prime}=2^a+2\cdot 1^a \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 280 \\ 0 & 7 & 560 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2Y+2X=280 \\ 7X=560 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Su solución es } X=80,\ Y=60$$

## 1.6 Actividades de evaluación

El objetivo de esta sección es preparar al alumno para poder superar sin dificultades el control de este tema. Es evidente; que el alumno es el que ha de intentar resolver todas los ejercicios (De aquí seleccionaré las preguntas del examen).

Para empezar dividiré esta sección en cuatro boques. A saber:
$1^o$ Ejercicios recomendados
$2^o$ Ejercicios de Selectividad-Logse de otras comunidades
$3^o$ Ejercicicios de Selectividad de la Comunidad Valenciana
$4^o$ Exámenes personales

### 1.6.1 Ejercicios recomendados

**Exercise 1.6.1** *Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas*

$a)\ \left.\begin{array}{c} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\}$ $\quad b)\ \left.\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\}$

$c)\ \left.\begin{array}{c} x+y=12 \\ y+z=8 \\ x+z=6 \end{array}\right\}$ $\quad d)\ \left.\begin{array}{c} 2x+y-z=15 \\ 5x-y+5z=16 \\ x+4y+z=20 \end{array}\right\}$

Soluciones

$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 11 \\ 2 & -1 & 1 & | & 5 \\ 3 & 2 & 1 & | & 24 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{c} 2^{a\prime}=2^a-2\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-3\cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 11 \\ 0 & -3 & -1 & | & -17 \\ 0 & -1 & -2 & | & -9 \end{pmatrix}$

Cambiamos de signo la $2^a$ y después intercambiamos la $2^a$ y la $3^a$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 11 \\ 0 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & -3 & -1 & | & -17 \end{pmatrix} 3^{a\prime}=3^a+3\cdot 2^a\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 11 \\ 0 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 0 & 5 & | & 10 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=11 \\ y+2z=9 \\ 5z=10 \end{array}\right\}$$

De la $3^a$ ecuación tendremos que $z=2$
Sustituyendo dicho valor en la $2^a$
$y+4=9 \rightarrow y=5$
Sustituyendo los valores obtenidos para $z$ e $y$ en la $1^a$
$x+5+4=11 \rightarrow x=2$
Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\{(2,5,4)\}$

$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 5 & | & 11 \\ 1 & -5 & 6 & | & 29 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{c} 2^{a\prime}=2^a-2\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-1^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 7 \\ 0 & -6 & 5 & | & 27 \end{pmatrix}$

$3^{a\prime}=3^a+6\cdot 2^a\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 7 \\ 0 & 0 & 23 & | & 69 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y+3z=7 \\ 23z=69 \end{array}\right\}$$

De la $3^a$ ecuación tendremos que $z=3$
Sustituyendo dicho valor en la $2^a$
$y+9=7 \rightarrow y=-2$
Sustituyendo los valores obtenidos para $z$ e $y$ en la $1^a$
$x-2+3=2 \rightarrow x=1$
Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\{(1,-2,3)\}$

$c)$ $\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & | & 12 \\ 0 & 1 & 1 & | & 8 \\ 1 & 0 & 1 & | & 6 \end{array}\right) 3^{a\prime}=3^a-1^a\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & | & 12 \\ 0 & 1 & 1 & | & 8 \\ 0 & -1 & 1 & | & -6 \end{array}\right)$

$3^{a\prime}=3^a+2^a\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & 1 & 1 & | & 8 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{array}\right)$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ y+z=8 \\ 2z=2 \end{array}\right\}$$

De la $3^a$ ecuación tendremos que $z=1$
Sustituyendo dicho valor en la $2^a$
$y+1=8 \rightarrow y=7$
Sustituyendo los valores obtenidos para $z$ e $y$ en la $1^a$
$x+1+7=12 \rightarrow x=5$
Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\{(5,7,1)\}$

$d)$ $\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 1 & | & 20 \\ 2 & 1 & -1 & | & 15 \\ 5 & -1 & 5 & | & 16 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=2^a-2\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-5\cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 1 & | & 20 \\ 0 & -7 & -3 & | & -25 \\ 0 & -21 & 0 & | & -84 \end{array}\right)$

Intercambiamos las columnas $2^a$ y $3^a$ , cambiamos de signo la $2^a$ ecuación y la $3^a$ ecuación

$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 4 & | & 20 \\ 0 & 3 & 7 & | & 25 \\ 0 & 0 & 21 & | & 84 \end{array}\right)$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+z+4y=20 \\ 3z+7y=25 \\ 21y=84 \end{array}\right\}$$

De la $3^a$ ecuación tendremos que $y=4$
Sustituyendo dicho valor en la $2^a$
$3z+28=7 \rightarrow z=-1$
Sustituyendo los valores obtenidos para $z$ e $y$ en la $1^a$
$x-1+16=20 \rightarrow x=5$
Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\{(5,4,-1)\}$

**Exercise 1.6.2** *Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas*

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3x-y+4z=2 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-6 \\ 4x+4y+6z=18 \end{array}\right\}$$

Soluciones

*a)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{c} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a + 1^a \end{array} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$

Intercambiamos las columnas $2^a$ y $3^a$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{c} x + z - y = 1 \\ 2z - 2y = 0 \\ 2y = 2 \end{array} \right\}$$

De la $3^a$ ecuación tendremos que $y = 1$

Sustituyendo dicho valor en la $2^a$

$z = 1$

Sustituyendo los valores obtenidos para $z$ e $y$ en la $1^a$

$x + 1 - 1 = 1 \to x = 1$

Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S = \{(1, 1, 1)\}$

*b)* $\left. \begin{array}{l} x - 3y - 5z = -6 \\ 2x + 3y - 3z = 4 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{array} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & | & -6 \\ 2 & 3 & -3 & | & 4 \\ 3 & -1 & 4 & | & 2 \\ 4 & 4 & 6 & | & 18 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{c} 2^{a\prime} = 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 4^{a\prime} = 4^a - 4 \cdot 1^a \end{array} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & | & -6 \\ 0 & 9 & 7 & | & 16 \\ 0 & 8 & 19 & | & 20 \\ 0 & 16 & 26 & | & 42 \end{pmatrix}$

$\left. \begin{array}{c} 3^{a\prime} = 9 \cdot 3^a - 8 \cdot 2^a \\ 4^{a\prime} = 9 \cdot 4^a - 16 \cdot 2^a \end{array} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & | & -6 \\ 0 & 9 & 7 & | & 16 \\ 0 & 0 & 115 & | & 52 \\ 0 & 0 & 122 & | & 122 \end{pmatrix}$

Dividimos la $4^a$ por 122 y después intercambiamos esta ecuación por la $3^a$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & | & -6 \\ 0 & 9 & 7 & | & 16 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 115 & | & 52 \end{pmatrix} 4^{a\prime} = 4^a - 115 \cdot 3^a \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & | & -6 \\ 0 & 9 & 7 & | & 16 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -63 \end{pmatrix}$

Hemos obtenido un absurdo→El sistema es incompatible

**Exercise 1.6.3** *Resuelve por el método de Gauss*

$\left. \begin{array}{c} 3x + y - z = 5 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ y + z = 3 \end{array} \right\} \equiv \left. \begin{array}{c} y + 3x - z = 5 \\ -y + 2x + 2z = 0 \\ y + z = 3 \end{array} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 5 \\ -1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{c} 2^{a\prime} = 2^a + 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 1^a \end{array} \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 5 \\ 0 & 5 & 1 & | & 5 \\ 0 & -3 & 2 & | & -2 \end{pmatrix}$

$3^{a\prime} = 5 \cdot 3^a + 3 \cdot 2^a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 5 \\ 0 & 5 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 13 & | & 5 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} y+3x-z=5 \\ 5x+z=5 \\ 13z=5 \end{array}\right\}$$

De la $3^a$ ecuación tendremos que $z=\dfrac{5}{13}$
Sustituyendo dicho valor en la $2^a$
$5x+\dfrac{5}{13}=5 \rightarrow x=\frac{12}{13}$
Sustituyendo los valores obtenidos para $z$ e $y$ en la $1^a$
$y+\frac{36}{13}-\frac{5}{13}=5 \rightarrow y=\frac{34}{13}$
Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\left\{\left(\frac{12}{13},\frac{34}{13},\frac{5}{13}\right)\right\}$

**Exercise 1.6.4** *Discutir y resolver según los valores del parámetro $a$ los sistemas*

$$a)\ \left.\begin{array}{l} 2x-y=a \\ ax+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{l} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{l} x-ay-z=0 \\ (2-2a)x+5y+z=0 \\ 4x+y=0 \end{array}\right\} \qquad d)\ \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ ay+z=0 \\ x+(a+1)y+az=a+1 \end{array}\right\}$$

Soluciones:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x-y=a \\ ax+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{l} -y+2x=a \\ 3y+ax=4 \\ -y+3x=2 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 3 & a & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=2^a+3\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-1^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 0 & a+6 & 4+3a \\ 0 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la $2^a$ y la $3^a$ ecuación

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2-a \\ 0 & a+6 & 4+3a \end{pmatrix}$$

$3^{a\prime}=3^a-(a+6)\cdot 1^a$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & | & 2-a \\ 0 & 0 & | & a^2+7a-8 \end{pmatrix}$$

Nos interesa factorizar $a^2+7a-8=(a+8)(a-1)$
El sistema inicial es equivalente a resolver

$$\left.\begin{array}{l} -y+2x=a \\ x=2-a \\ 0=(a+8)(a-1) \end{array}\right\}$$

Es evidente que:
I) Si $a\neq 1$ y $a\neq -8$ $\rightarrow$El sistema es incompatible
II) Si $a=1 \rightarrow \left.\begin{array}{c} -y+2x=1 \\ x=1 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$El sistema es compatible determinado$x=1$,$y=1$
III) Si $a=-8 \rightarrow \left.\begin{array}{c} -y+2x=-8 \\ x=10 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$El sistema es compatible determinado$x=10$,$y=28$

b) $\left.\begin{array}{l} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{l} z+x+y=a+2 \\ z+x-ay=1 \\ z+ax+y=4 \end{array}\right\}$

$\left(\begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & \mid\ a+2 \\ 1 & 1 & -a & \mid\ 1 \\ 1 & a & 1 & \mid\ 4 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=2^a-1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-1^a \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & \mid\ a+2 \\ 0 & 0 & -a-1 & \mid\ -a-1 \\ 0 & a-1 & 0 & \mid\ -a+2 \end{array}\right)$

Intercambiamos la $2^a$ y la $3^a$ ecuación

$$\left(\begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & \mid\ a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & \mid\ 2-a \\ 0 & 0 & -a-1 & \mid\ -a-1 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} z+x+y=a+2 \\ (a-1)x=2-a \\ (-a-1)y=-a-1 \end{array}\right\}$$

Casos:

I) Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \to$El sistema es compatible determinado y las soluciones son

$y=1, x=\frac{2-a}{a-1}, z=\frac{a^2+a-3}{a-1}$

II) Si $a=-1 \to \left.\begin{array}{c} z+x+y=1 \\ -2x=3 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible indeterminado y la solución es

$S=\left\{\left(-\frac{3}{2}, y, -y+\frac{5}{2}\right)/y \in \Re\right\}$

III) Si $a=1 \to \left.\begin{array}{c} z+x+y=a+2 \\ 0=1 \\ -2y=-2 \end{array}\right\}$ El sistema es incompatible

c) $\left.\begin{array}{l} x-ay-z=0 \\ (2-2a)x+5y+z=0 \\ 4x+y=0 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{l} -z-ay+x=0 \\ z+5y+(2-2a)x=0 \\ y+4x=0 \end{array}\right\}$

$\left(\begin{array}{llll} -1 & -a & 1 & \mid\ 0 \\ 1 & 5 & 2-2a & \mid\ 0 \\ 0 & 1 & 4 & \mid\ 0 \end{array}\right) 2^{a\prime}=2^a+1^a\} \to \left(\begin{array}{llll} -1 & -a & 1 & \mid\ 0 \\ 0 & 5-a & 3-2a & \mid\ 0 \\ 0 & 1 & 4 & \mid\ 0 \end{array}\right)$

Intercambiando la $2^a$ y $3^a$ ecuación

$\left(\begin{array}{llll} -1 & -a & 1 & \mid\ 0 \\ 0 & 1 & 4 & \mid\ 0 \\ 0 & 5-a & 3-2a & \mid\ 0 \end{array}\right) 3^{a\prime}=3^a+(a-5)\cdot 1^a\} \to \left(\begin{array}{llll} -1 & -a & 1 & \mid\ 0 \\ 0 & 1 & 4 & \mid\ 0 \\ 0 & 0 & 2a-17 & \mid\ 0 \end{array}\right)$

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver

$\left.\begin{array}{l} -z-ay+x=0 \\ y+4x=0 \\ (2a-17)x=0 \end{array}\right\}$

Casos:

I) Si $a=\dfrac{17}{2} \to \left.\begin{array}{l} -z-\dfrac{17}{2}y+x=0 \\ y+4x=0 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} -2z-17y+2x=0 \\ y+4x=0 \end{array}\right\}$

De la segunda obtenemos que $y=-4x$

Sustituyendo en la $1^a$ $-2z+68x+2x=0$

Despejando la incógnita $z \rightarrow z = 35x$

El sistema es compatible indeterminado y la solución es el conjunto $S = \{(x, -4x, 35x)/x \in \Re\}$

II) Si $a \neq \frac{17}{2}$ →Sistema compatible determinado. Solución trivial→ $x = y = z = 0$

d) $\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & a & 1 & | & 0 \\ 1 & a+1 & a & | & a+1 \end{array}\right) \left. 3^{a\prime} = 3^a - 1^a \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & a & 1 & | & 0 \\ 0 & a & a & | & a \end{array}\right)$

$\left. 3^{a\prime} = 3^a - 2^a \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & a & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & | & a \end{array}\right)$

El sistema es equivalente a resolver

$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ ay+z=0 \\ (a-1)z=a \end{array}\right\}$

Casos

I) Si $a \neq 1$ y $a \neq 0 \rightarrow z = \frac{a}{a-1}$

$y = -\frac{a}{(a-1)\,a} = \frac{-1}{a-1}$

$x = 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a}{a-1}$

El sistema es compatible determinado y la solución es:

$S = \left\{ \left( \frac{a}{a-1}, \frac{-1}{a-1}, \frac{a}{a-1} \right) \right\}$

II) Si $a = 1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=0 \\ 0=1 \end{array}\right\}$ Absurdo→Sistema incompatible

III) Si $a = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ z=0 \\ -z=0 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible indeterminado y la solución es

$S = \{(1-y, y, 0)\,/y \in \Re\}$

### 1.6.2 Ejercicios selectividad año 2000 (Otras comunidades)

**Exercise 1.6.5** *(*Cataluña 2000) *Dado el sistema de ecuaciones lineales* $\left.\begin{array}{l} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{array}\right\}$
*a) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea incompatible*
*b)Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminado. Resuélvelo*

**Exercise 1.6.6** *(*Extremadura 2000) *Da un ejemplo de un sistema de 2 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible*

**Exercise 1.6.7** (Castilla la Mancha 2000) *Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x-y=5 \\ y+z=a \\ x-2z=3 \\ 2x-3z=a \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos* *en que sea compatible*

**Exercise 1.6.8** *(*Galicia 2000) *Discutir y resolver según los valores del parámetro* $\alpha$ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ \alpha y+2z=4 \\ 2y+\alpha z=4 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

**Exercise 1.6.9** *(*Islas Baleares 2000*) Discutir y resolver según los valores del parámetro* $k$ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ x+ky+z=8 \\ kx+y+kz=10 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

**Exercise 1.6.10** *(*Islas Canarias 2000*)Discutir y resolver según los valores del parámetro* $k$ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-kz=2 \\ x+y+kz=10 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

**Exercise 1.6.11** *(*Rioja 2000*) Discutir y resolver según los valores del parámetro* $m$ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ (m-1)\,x+y+z=m \\ x+(m-1)\,y-z=0 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

**Exercise 1.6.12** *(*PaísVasco 2000*) Dados los sistemas* $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-3z=1 \\ 5x-3y-2z=0 \\ x+2y+3z=5+a \end{array}\right\}$ *y* $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-2z=2 \\ 7x-4y-3z=0 \\ x+4y+3z=8 \end{array}\right\}$*.¿Existe algún valor de* $a$ *de tal manera que los sistemas* $S$ *y* $T$ *sean equivalentes?*

**Exercise 1.6.13** *(*País Vasco 2000*)Discutir y resolver según los valores del parámetro* $a$ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+ay+z=2 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

**Exercise 1.6.14** *)(*Navarra 2000) *Discutir y resolver según los valores del parámetro* $\alpha$ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+\alpha y+3z=1 \\ x+2y+\alpha z=4 \\ x+4y+3z=1 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

**Exercise 1.6.15** *(*Navarra 2000) *Luis, Javier,Enrique y Fermín acuden a una plaza para reunir una colección entera de cromos. Fermín tiene 5 cromos más que la suma de Luis y Javier juntos, Enrique tiene el doble de cromos que Javier ,y Javier tiene 90 cromos menos que Enrique y Fermín juntos*
*¿Cuántos cromos tiene la colección?*

**Exercise 1.6.16** *(* Zaragoza 2000*) Discutir y resolver según los valores del parámetro $\alpha$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+z=1 \\ y+(\alpha-1)z=0 \\ x+(\alpha-1)y+\alpha z=\alpha \end{array}\right\}$

### 1.6.3 Ejercicios selectividad Comunidad Valenciana

Estos ejercicios se presentan divididos en dos bloques. En primer lugar los sistemas homogéneos y después los sistemas heterogéneos

**Sistemas homogéneos Valencia**

**Exercise 1.6.17** *(Valencia 1984) Discutir y resolver según los valores del parámetro $\alpha$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} ax+y+z=0 \\ (2-a)x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\}$

Dado el sistema $\left.\begin{array}{c} ax+y+z=0 \\ (2-a)x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\}$ vamos a intercambiar ecuaciones y sumandos para facilitar su resolución por el método de Gauss. El sistema quedará así:

$$\left.\begin{array}{c} y-z+2x=0 \\ y+z+ax=0 \\ y+z+(2-a)x=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 2-a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 \\ 0 & 2 & -a & 0 \end{pmatrix} 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & -2a+2 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues; el sistema inicial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{c} y-z+2x=0 \\ 2z+(a-2)x=0 \\ (2-2a)x=0 \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $a=1 \rightarrow$desaparece la $3^a$ ecuación quedando el sistema siguiente $\left.\begin{array}{c} y-z+2x=0 \\ 2z-1x=0 \end{array}\right\}$ que es un S.C.Indeterminado;: siendo su solución $S=\{(2z,-3z,z)\ /\ z\in\Re\}$

II) Si $a\neq 1 \rightarrow$El sistema es compatible determinado y la solución es la trivial $x=y=z=0$

**Exercise 1.6.18** *(Valencia 1993) Discutir y resolver según los valores del parámetro $a$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{c} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - a\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Posibilidades

I) Si $a \neq 1 \rightarrow$ En la $2^a$ y $3^a$ ecuación dividimos por $1-a$ $(1-a \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a $\left.\begin{array}{r} x+y \ +az=0 \\ -y+z=0 \\ (2+a)z=0 \end{array}\right\}$

Subcasos

- – Si $a \neq -2 \rightarrow$El sistema es compatible determinado y la solución es la trivial $z=x=y=0$

  – Si $a=-2 \rightarrow$El sistema queda así $\left.\begin{array}{r} x+y \ -2z=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\}$. Éste es compatible indeterminado y el conjunto solución es $S=\{(z,z,z)\ /\ z \in \Re\}$

II) Si $a=1 \rightarrow$ La matriz de coeficientes $(a)$ queda así $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente al sistema $x+y+z=0$ . El sistema es compatible doblemente indeterminado y su conjunto solución es $S=\{(-y-z,y,z)\ /\ y,z \in \Re\}$

*Resumen*

I) Si $a=1 \rightarrow$ *S.C.Doblemente Indeterminado* $S=\{(-y-z,y,z)\ /\ y,z \in \Re\}$

II) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \rightarrow$ *S.C.Determinado* $S=\{(0,0,0)\}$ Solución trivial

III) Si $a=-2 \rightarrow$ *S.C.Indeterminado* $S=\{(z,z,z)\ /\ z \in \Re\}$

**Exercise 1.6.19** *(Valencia 1995) Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} ax-y+z=0 \\ x-ay+z=0 \\ x-y\ +az=0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x-y+az=0 \\ x-ay+z=0 \\ ax-y+z=0 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & -a & 1 & 0 \\ a & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -a\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}$$

Posibilidades

I) Si $a \neq 1 \to$ En la $2^a$ y $3^a$ ecuación dividimos por $1-a$ $(1-a \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+a & 0 \end{pmatrix} \to 3^a ecnueva = 3^a ec\ +2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a $\left.\begin{array}{r} x-y\ +az=0 \\ y+z=0 \\ (2+a)z=0 \end{array}\right\}$

Subcasos

- – Si $a \neq -2 \to$El sistema es compatible determinado y la solución es la trivial $z=x=y=0$
  – Si $a=-2 \to$El sistema queda así $\left.\begin{array}{r} x-y\ -2z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$. Éste es compatible indeterminado y el conjunto solución es $S=\{(z,-z,z)\ /\ z\in\Re\}$

II) Si $a=1 \to$ La matriz de coeficientes $(b)$ queda así $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente al sistema $x-y+z=0$ . El sistema es compatible doblemente indeterminado y su conjunto solución es $S=\{(y-z,y,z)\ /\ y,z\in\Re\}$

*Resumen*

I) Si $a=1 \to$ *S.C.Doblemente Indeterminado* $S=\{(y-z,y,z)\ /\ y,z\in\Re\}$

II) Si $a\neq -2$ y $a\neq 1 \to$ *S.C.Determinado* $S=\{(0,0,0)\}$ Solución trivial

III) Si $a=-2 \to$ *S.C.Indeterminado* $S=\{(z,-z,z)\ /\ z\in\Re\}$

**Exercise 1.6.20** *(Valencia 1996) Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 6x-3y+7z=0 \\ ax-3y\ -4z=0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} y+2z+x=0 \\ -3y+7z+6x=0 \\ -3y-4z\ +ax=0 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & a & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec + 3\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec + 3\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & a+3 & 0 \end{pmatrix} \to {}^{7} 3^a ecnueva = 13\cdot 3^a ec - 2\cdot 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 13a+21 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} y+2z+x=0 \\ 13z+9x=0 \\ (13a+21)x=0 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $a=-\dfrac{21}{13}$ →La tercera ecuación desaparece. El sistema resultante $\left.\begin{array}{r} y+z+2x=0 \\ 13z+9x=0 \end{array}\right\}$es compatible indeterminado y el conjunto solución es $S=\left\{(x,\frac{5}{13}x,-\frac{9}{13}x)\ /\ x\in\Re\right\}$

II) Si $a\neq-\dfrac{21}{13}$ →El sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial $x=y=z=0$

**Exercise 1.6.21** *(Valencia 1999) Discutir y resolver según los valores del parámetro m el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ mx+y+4z=0 \end{array}\right\}$

Intercambiamos sumandos de la siguiente manera $\left.\begin{array}{r} y+z+x=0 \\ -y+2z+3x=0 \\ y+4z+mx=0 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & m & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ +1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -1^a ec \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3^a ecnueva = 3^a ec\ -2^a ec \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & m-5 & 0 \end{pmatrix}$$

El sitema inicial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y+z+x=0 \\ 3z+4x=0 \\ (m-5)x=0 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $m\neq 5$ →El sistema es compatible determinado. La solución es la trivial $x=y=z=0$

[7] También podríamos haber realizado esta transformación
$3^a ecnueva = 3^a ec - \dfrac{2}{13}\cdot 2^a ec$
Despues tendríamos que multiplicarla por 13

II) Si $m = 5$ →El sistema es compatible indeterminado $\left.\begin{array}{c} y+z+x=0 \\ 3z+4x=0 \end{array}\right\}$ y su solución es el conjunto

$S = \left\{ (x, \frac{x}{3}, -\frac{4x}{3}) \ / \ z \in \Re \right\}$

Dicho conjunto también se puede expresar así:

$$S = \{(3\alpha, \alpha, -4\alpha) \ / \ \alpha \in \Re\}$$

**Exercise 1.6.22** *(*Valencia 2002)*Discutir y resolver según los valores del parámetro m el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+mz=0 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+mz=0 \end{array}\right\} \to\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & m & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 2 \cdot 1^a ec \end{array}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & 0 \end{pmatrix} \to 3^a ecnueva = 3^a ec - \cdot 2^a ec$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente a resolver:

$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \\ (m-4)z=0 \end{array}\right\}$

Posibilidades

I) Si $m \neq 4$ →Sistema compatible determinado

La solución es la solución trivial $x = y = z = 0$

II) Si $m = 4$ →Desaparece la $3^a$ ecuación y queda el sistema $\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{array}$ que es compatible indeterminado

Siendo su solución $s = \{(z, -2z, z) \ / \ z \in \Re\}$

**Exercise 1.6.23** *(Valencia 2006) Discutir y resolver según los valores del parámetro $\lambda$ el siguiente sistema*

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda+2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda+6)\, y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda-2)\, z = 0 \end{array}\right\}$$

**Sistemas heterogéneos Valencia**

**Exercise 1.6.24** *(Valencia 1984) Discutir y resolver según los valores del parámetro $a$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=-2(a+1) \\ ax+y+z=a \end{array}\right\}$ *Repasar*

$$\left.\begin{array}{r} x+y+az=-2(a+1) \\ x+ay+z=a+2 \\ ax+y+z=a \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ 1 & a & 1 & a+2 \\ a & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -a\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ 0 & a-1 & 1-a & 3a+4 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3a+2a^2 \end{pmatrix} 3^a ecnueva = 3^a ec\ +2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ 0 & a-1 & 1-a & 3a+4 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 4+6a+2a^2 \end{pmatrix}$$

Factorizando los elementos de la $3^a$ ecuación tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ 0 & a-1 & 1-a & 3a+4 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & 2(a+2)(a+1) \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a

$$\left.\begin{array}{r} x+y\ \ +az=-2(a+1) \\ (a-1)y-(a-1)z=3a+4 \\ -(a+2)(a-1)z=2(a+2)(a+1) \end{array}\right\} \qquad \text{(ab)}$$

Posibilidades

I) Si $a\neq 1$ $y$ $a\neq -2 \to$ El sistema es compatible determinado

$$x=\frac{a}{a-1},\ y=\frac{a+2}{a-1},\ z=\frac{-2(a+1)}{a-1}$$

II) Si $a=1\to$ Al sustituir dicho valor en $(ab)$ tendremos $\left.\begin{array}{r} x+y\ \ +z=2 \\ 0=7 \\ 0=12 \end{array}\right\}$

El sistema es incompatible

III) Si $a=-2\to$ Al sustituir dicho valor en $(ab)$ tendremos $\left.\begin{array}{r} x+y\ \ -2z=2 \\ -3y+3z=-2 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible indeterminado y la solución es el conjunto $S=\left\{\left(z+\frac{4}{3},z+\frac{2}{3},z\right)\ /\ z\in\Re\right\}$

**Exercise 1.6.25** *(Valencia 1985) Discutir y resolver según los valores del parámetro $k$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+kz=6 \\ 7x-7y-z=k \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+kz=6 \\ 7x-7y-z=k \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & k & 6 \\ 7 & -7 & -1 & k \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -7\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 14 & 6 & k+28 \end{pmatrix} \to 3^a ecnueva = 3^a ec\ -2\cdot 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 0 & -2k+2 & k \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 7y+(k+2)z=14 \\ (-2k+2)z=k \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $k=1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 7y+3z=14 \\ 0\cdot z=1 \end{array}\right\}$ El sistema es incompatible

II) Si $k\neq 1 \rightarrow$El sistema es compatible determinado

De la $3^a$ ecuación obtenemos que $z=-\frac{1}{2}\frac{k}{k-1}$

Sustituyendo este valor de $z$ en la $2^a$ ecuación

$7y-(k+2)\frac{1}{2}\frac{k}{k-1}=14 \rightarrow y=\frac{k^2+2k}{14(k-1)}+\frac{28(k-1)}{14(k-1)}=\frac{k^2-28+30k}{14(k-1)}$

Sustituyendo los valores de $z$ e $y$ en la $1^a$

$x-\frac{3\left(k^2-28+30k\right)}{14(k-1)}+\frac{1}{2}\frac{k}{k-1}=-4:$

$x-\frac{3k^2-84+83k}{14(k-1)}=-4 \rightarrow x=\frac{3k^2-28+27k}{14(k-1)}$

**Exercise 1.6.26** *(Valencia 1985) Discutir y resolver según los valores de los parámetros a i b el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 4x \quad +az=b \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 4x \quad +az=b \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva=2^a ec\ -1^a ec \\ 3^a ecnueva=3^a ec\ -4\cdot 1^a ec \end{array}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & a-4 & b-4 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva=3^a ec\ -2\cdot 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & b-8 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -2y=2 \\ (a-4)z=b-8 \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $a=4$ y $b\neq 8$ en la $3^a$ ecuación obtenemos un absurdo. Por lo tanto; el sistema es incompatible

II) Si $a=4$ y $b=8$ la $3^a$ ecuación desaparece.El sistema es compatible indeterminado y las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -2y=2 \end{array}\right\}$ son $S=\{(2-z,-1,z)\ /\ z\in\Re\}$

III) Si $a\neq 4$ el sistema es compatible determinado y su solución es:

$x=\frac{2a-b}{a-4}$

$y=-1$

$z=2-\frac{2a-b}{a-4}=\frac{b-8}{a-4}$

**Exercise 1.6.27** *(Valencia 1985) Discutir y resolver según los valores del parámetro* *m el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ 2x-y-5z=7 \\ 3x\ -4y\ +mz=m \\ 6x-3y-15z=21 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & -15 & 21 \\ 3 & -4 & m & m \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -6\cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec\ -3\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 5 \\ 0 & -15 & -33 & 15 \\ 0 & -10 & m-9 & m-3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3^a ecnueva = 3^a ec\ -3\cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec\ -2\cdot 1^a ec \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m+13 & m-13 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ -5y-11z=5 \\ (m+13)z=m-13 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $m=-13$ en la $3^a$ ecuación obtenemos un absurdo. El sistema es incompatible

II) Si $m\neq -13 \to$El sistema es compatible determinado y su solución es:

$$z=\frac{m-13}{m+13}$$

$$y=-1-\frac{11(m-13)}{5(m+13)}=-\frac{2}{5}\frac{8m-39}{m+13}$$

$$x=1+\frac{4\,(8m-39)}{5\,(m+13)}-\frac{3\,(m-13)}{m+13}=\frac{2}{5}\frac{11m+52}{m+13}$$

**Exercise 1.6.28** *($Valencia$ 1985) Discutir y resolver según los valores del parámetro k el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+z=6 \\ 4x-5y-z=k \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+z=6 \\ 4x-5y-z=k \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & k & 6 \\ 4 & -5 & -1 & k \end{pmatrix} \to, \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -4\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 7 & 3 & k+16 \end{pmatrix} \to 3^a ecnueva = 3^a ec\ -2^a ec \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 0 & -k+1 & k+2 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 7y+(k+2)z=14 \\ (-k+1)z=k+2 \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $k=1 \to$en la $3^a$ ecuación obtenemos un absurdo. El sistema es incompatible

II) Si $k\neq 1 \to$El sistema es compatible determinado y la solución es

$$z=\frac{k+2}{-k+1}$$

$$y=2-\frac{(k+2)\,(k+2)}{7\,(-k+1)}=\frac{-k^2-18k+10}{7\,(-k+1)}$$

$$x = -4 - \frac{3\left(k^2+18k-10\right)}{7\left(-k+1\right)} + \frac{k+2}{-k+1} = \frac{1}{7}\frac{3k^2-16+19k}{-1+k}$$

**Exercise 1.6.29** *(Valencia 1986) Discutir y resolver según los valores del parámetro k el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+kz=6 \\ 7x-7y-z=k \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+z=6 \\ 7x-7y-z=k \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & k & 6 \\ 7 & -7 & -1 & k \end{pmatrix} \to, \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 7\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 14 & 6 & k+28 \end{pmatrix} \to 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 0 & -2k+2 & k \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 7y+(k+2)z=14 \\ (-2k+2)z=k \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $k=1$ $\to$en la $3^a$ ecuación obtenemos un absurdo. El sistema es incompatible

II) Si $k\neq 1$ $\to$El sistema es compatible determinado y la solución es

$$z = \frac{k}{2(-k+1)}$$

$$y = 2 - \frac{k(k+2)}{14(-k+1)} = \frac{-28+30k+k^2}{14\left(-1+k\right)}$$

$$x = -4 + \frac{3\left(-28+30k+k^2\right)}{14\left(-1+k\right)} + \frac{k}{2(-k+1)} = \frac{-28+27k+3k^2}{14\left(-1+k\right)}$$

**Exercise 1.6.30** *(Valencia 1989) Discutir y resolver según los valores de los parámetros $\lambda$ i $\mu$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=\mu \\ 2x-5y\ +\lambda z=-2 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x+4y+z=\mu \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x-5y\ +\lambda z=-2 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & \mu \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & \lambda & -2 \end{pmatrix} \to, \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 3\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 2\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -13 & -1 & 1-3\mu \\ 0 & -13 & \lambda-2 & -2-2\mu \end{pmatrix} \to 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -13 & -1 & 1-3\mu \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -3+\mu \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+4y+z=\mu \\ -13y-z=1-3\mu \\ (\lambda-1)z=-3+\mu \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $\lambda=1$ y $\mu\neq 3$ $\to$El sistema es incompatible; ya que en la $3^a$ ecuación obtenemos un absurdo

II) Si $\lambda=1$ y $\mu=3$ $\to$La tercera ecuación desaparece. El sistema resultante

$\left.\begin{array}{r} x+4y+z=3 \\ -13y-z=-8 \end{array}\right\}$es compatible indeterminado

El conjunto solución es $S = \{(9y-5, y, -13y+8) \ / \ y \in \Re\}$
III) Si $\lambda \neq 1 \rightarrow$El sistema es compatible determinado. La solución es
$z = \dfrac{\mu - 3}{\lambda - 1}$
$-13y = +\dfrac{\mu - 3}{\lambda - 1} + 1 - 3\mu = \rightarrow y = \frac{-\lambda+4-4\mu+3\mu\lambda}{13(\lambda-1)}$
$x = \mu - \frac{4(-\lambda+4-4\mu+3\mu\lambda)}{13(\lambda-1)} - \dfrac{\mu - 3}{\lambda - 1} = \frac{4\lambda+23-10\mu+\mu\lambda}{13(\lambda-1)}$

**Exercise 1.6.31** *($Valencia$ 1990) Discutir y resolver según los valores del parámetro $\lambda$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = -2(\lambda + 1) \\ \lambda x + y \ + z = \lambda \end{array}\right\}$

Este sistema es el mismo que el de 1984

**Exercise 1.6.32** *($Valencia$ 1991) Discutir y resolver según los valores de los parámetros $\lambda$ i $\mu$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 3 \\ y - z = -1 \\ 2x - y \ + \lambda z = \mu \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 3 \\ y - z = -1 \\ 2x - y \ + \lambda z = \mu \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda & \mu \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 & \mu - 3 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec + 2 \cdot 2^a ec \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & \mu - 5 \end{pmatrix}$$
El sistema inicial es equivalente al sistema
$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 3 \\ y - z = -1 \\ (\lambda - 3)z = \mu - 5 \end{array}\right\}$$
Posibilidades
I) Si $\lambda = 3$ y $\mu \neq 5 \rightarrow$El sistema es incompatible; ya que en la $3^a$ ecuación obtenemos un absurdo
II) Si $\lambda = 3$ y $\mu = 5 \rightarrow$La tercera ecuación desaparece. El sistema resultante
$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 3 \\ y - z = -1 \end{array}\right\}$es compatible indeterminado
El conjunto solución es $S = \{(2 - z, -1 + z, z) \ / \ z \in \Re\}$
III) Si $\lambda \neq 3 \rightarrow$El sistema es compatible determinado. La solución es
$z = \dfrac{\mu - 5}{\lambda - 3}$
$y = -\dfrac{-\mu + 2 + \lambda}{\lambda - 3}$
$x = \dfrac{-\mu - 1 + 2\lambda}{\lambda - 3}$

**Exercise 1.6.33** *($Valencia$ 1996) Discutir y resolver según los valores del parámetro $m$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y + mz = 6 \\ -2x - 10y - 2z = m - 4 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=4 \\ 3x+y+mz=6 \\ -2x-10y-2z=m-4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & m & 6 \\ -2 & -10 & -2 & m-4 \end{pmatrix}$$ [8]

$$\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2\cdot 2^a ec - 3\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec + 1^a ec \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 2m-3 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & m \end{pmatrix}$$

Intercambiamos filas $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & m \\ 0 & -7 & 2m-3 & 0 \end{pmatrix}$ y después realizamos la siguiente transformación

$$3^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & m \\ 0 & 0 & 2m-2 & -m \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=4 \\ -7y-z=m \\ (2m-2)z=-m \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $m=1$ →En la tercera ecuación obtenemos un absurdo. El sistema es incompatible

II) Si $m\neq 1$ →El sistema es compatible determinado. Su solución es :

$$z=-\frac{m}{2(m-1)}, y=-\frac{-3m+2m^2}{14(m-1)}, x=\frac{27m+3m^2-28}{14(m-1)}$$

**Exercise 1.6.34** *(Valencia 1997) Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y\ +z=-1 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y+z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - a\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -1-2a \end{pmatrix} 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -4-2a \end{pmatrix}$$

Factorizando los elementos de la $3^a$ ecuación tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & -2(a+2) \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a

$$\left.\begin{array}{r} x+y\ +az=2 \\ (a-1)y-(a-1)z=-3 \\ -(a+2)(a-1)z=-2(a+2) \end{array}\right\} \qquad (c)$$

[8] También podríamos haber realizado estas transformaciones

$2^a ecnueva = 2^a ec - \frac{3}{2}\cdot 1^a ec$

$3^a ecnueva = 3^a ec + 1^a ec$

Después tendríamos que multiplicar por 2 la $2^a$

Posibilidades

I) Si $a \neq 1$ $y$ $a \neq -2 \to$ El sistema es compatible determinado

$z = \dfrac{2}{a-1}$

$y = \dfrac{-1}{a-1}$

$x = 2 + \dfrac{1-2a}{a-1} = \dfrac{-1}{a-1}$

II) Si $a = 1 \to$ el sistema $(c)$ queda así $\left.\begin{array}{r} x+y\ +1z=2 \\ 0=-3 \\ 0=-6 \end{array}\right\}$ El sistema es incompatible

III) Si $a = -2 \to$ el sistema $(c)$ queda así $\left.\begin{array}{r} x+y\ -3z=2 \\ -3y+3z=-3 \end{array}\right\}$

**Exercise 1.6.35** *(Valencia 2000) Discutir y resolver según los valores del parámetro $m$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} (m+1)x+3y+mz=1 \\ 3x+(m+1)y+2z=1 \\ mx+2y+mz=2 \end{array}\right\}$

Cambiamos la $1^a$ ecuación por ella menos la $3^a$. Con lo cual eel sistema dado es equivalente a:

$\left.\begin{array}{r} x+y=-1 \\ 3x+(m+1)y+2z=1 \\ mx+2y+mz=2 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & m+1 & 2 & 1 \\ m & 2 & m & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec\ -3\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec\ -m\cdot 1^a ec \end{array}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & m-2 & 2 & 4 \\ 0 & 2-m & m & 2+m \end{pmatrix} 3^a ecnueva = 3^a ec\ +2^a ec \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & m-2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 & 6+m \end{pmatrix}$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-1 \\ (m-2)y+2z=4 \\ (m+2)z=6+m \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si m$\neq 2$ y $m \neq -2 \to$El sistema es compatible determinado y la solución es.

$$\begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{4+m}{m+2} \\ y & = & \dfrac{2}{m+2} \\ z & = & \dfrac{6+m}{m+2} \end{array}$$

II) Si $m = -2$ El sistema es incompatible (en la $3^a$ ecuación obtenemos un absurdo $0 = 4$)

III Si $m = 2 \to \left.\begin{array}{r} x+y=-1 \\ 2z=4 \\ 4z=8 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y=-1 \\ z=2 \end{array}\right\}$

Sistema compatible indeterminado y la solución es $S = \{(-1-y, y, 2)\ /\ y \in \Re\}$

**Exercise 1.6.36** *(*Comunidad Valenciana 2000)*Discutir y resolver según los valores del parámetro* $\lambda$ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=3 \\ 3x+4y+\lambda z=\lambda \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=3 \\ 3x+4y+\lambda z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3 \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+2z=2 \\ (\lambda-5)z=\lambda-5 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $\lambda \neq 5 \rightarrow$El sistema es compatible determinado$\rightarrow z=1, y=0, x=0$

II) Si $\lambda = 5 \rightarrow$La tercera ecuación desaparece. El sistema resultante $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+2z=2 \end{array}\right\}$es compatible indeterminado

El conjunto solución es $S = \{(-1+z, 2-2z, z) \ / \ z \in \Re\}$

**Exercise 1.6.37** *(*Valencia 2002)*Discutir y resolver según los valores del parámetro* $m$ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} mx+y+(m+1)z=0 \\ x+my+(m+3)z=1 \\ x+2z=1 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$$\left.\begin{array}{l} mx+y+(m+1)z=0 \\ x+my+(m+3)z=1 \\ x+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Intercambiamos la} 1^a \text{ y la } 3^a \text{ ecuación} \left.\begin{array}{r} x+2z=1 \\ x+my+(m+3)z=1 \\ mx+y+(m+1)z=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & m & m+3 & 1 \\ m & 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - m \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & -m+1 & -m \end{pmatrix} \text{intercambiamos las dos últimas ecuaciones}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -m+1 & -m \\ 0 & m & m+1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - m \cdot 2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -m+1 & -m \\ 0 & 0 & m^2+1 & m^2 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a resolver:

$$\left.\begin{array}{l} 1x+2z=1 \\ y+(-m+1)z=-m \\ (m^2+1)z=m^2 \end{array}\right\}$$

Fijate que la ecuación $m^2+1=0$ no tiene solución real. Los elementos de la diagonal principal son todos nulos; lo que nos permite afirmar que el sistema siempre es compatible determinado sea cual sea el valor real asignado a $m$

$$z = \frac{m^2}{m^2+1}$$
$$y = -m + \frac{(m-1)m^2}{m^2+1} = -\frac{m\,(m+1)}{m^2+1}$$
$$x = 1 - \frac{2m^2}{m^2+1} = -\frac{m^2-1}{m^2+1}$$

**Exercise 1.6.38** (Valencia 2003)*Discutir y resolver según los valores del parámetro* $\lambda$ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$\left.\begin{array}{l} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\}$ →Intercambiamos la $1^a$ y la $3^a$ ecuación y los sumandos de las incógnitas $y$ y $z$

$$\left.\begin{array}{l} x + z + 3y = 5 \\ -z + \lambda y = \lambda \\ 2z + \lambda x = 0 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to 3^a ecnueva = 3^a ec - \lambda \cdot 1^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 2-\lambda & -3\lambda & -5\lambda \end{pmatrix} \to 3^a ecnueva = 3^a ec + (2-\lambda) \cdot 2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda-\lambda^2 & -3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$ Factorizamos los coeficientes de la $3^a$ ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(1+\lambda) & -\lambda(3+\lambda) \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a resolver:

$$\left.\begin{array}{l} x + z + 3y = 5 \\ -z + \lambda y = \lambda \\ -\lambda(1+\lambda)y = -\lambda(3+\lambda) \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ →El sistema es compatible determinado y su solución es:

$$y = \frac{\lambda+3}{\lambda+1}$$
$$z = \frac{\lambda\,(\lambda+3)}{\lambda+1} - \lambda = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$$
$$x = 5 - \frac{2\lambda}{\lambda+1} - \frac{3\,(\lambda+3)}{\lambda+1} = -\frac{4}{\lambda+1}$$

II) Si $\lambda = 0 \to \left.\begin{array}{l} x + z + 3y = 5 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ →El sistema es compatible indeterminado y el conjunto solución es:

$S = \{(5-3y, y, 0) \;/\; y \in \Re\}$

III) Si $\lambda = -1 \to \left.\begin{array}{l} x + z + 3y = 5 \\ -z - y = -1 \\ 0 = 2 \end{array}\right\}$ Absurdo

El sistema es incompatible

**Exercise 1.6.39** *(*Valencia 2004*)Discutir y resolver según los valores del parámetro $\lambda$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$\left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$Intercambiamos la $2^a$ y la $3^a$ ecuación

$\left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 3^a ec - 2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - \lambda \cdot 1^a ec \end{array}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda+2 & -4 & 6-2\lambda \\ 0 & \lambda+2 & -1-\lambda & 3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda+2 & -4 & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 5\lambda-\lambda^2-6 \end{pmatrix}$ Factorizamos los coeficientes de la $3^a$ ecuación

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda+2 & -4 & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-3) & -(\lambda-2)(\lambda-3) \end{pmatrix}$:

El sistema inicial es equivalente a resolver:

$\left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ (\lambda+2)y-4z=6-2\lambda \\ -(\lambda-3)z=-(\lambda-2)(\lambda-3) \end{array}\right\}$

Posibilidades:

I) Si $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -2$ $\rightarrow$El sistema es compatible determinado y su solución es:

$z=\lambda-2$

$(\lambda+2)y=6-2\lambda+4(\lambda-2) \rightarrow y=\dfrac{2(\lambda-1)}{\lambda+2}$

$x=\lambda+\dfrac{2(\lambda-1)}{\lambda+2}-(\lambda-2)=\frac{4\lambda+2}{\lambda+2}$

II) Si $\lambda=3 \rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x-y+z=3 \\ 5y-4z=0 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$El sistema es compatible indeterminado y el conjunto solución es:

$S=\left\{(3-\dfrac{z}{5},\dfrac{4z}{5},z)\ /\ z\in\Re\right\}$

III) Si $\lambda=-2 \rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ -4z=10 \\ 5z=0 \end{array}\right\}$ Absurdo

El sistema es incompatible

**Exercise 1.6.40** *(*Valencia 2005*)Discutir y resolver según los valores del parámetro $\alpha$ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2 z=1 \\ x+\alpha y+\alpha z=\alpha \\ x+\alpha^2 y+\alpha^2 z=\alpha^2 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$$\left.\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2 z=1 \\ x+\alpha y+\alpha z=\alpha \\ x+\alpha^2 y+\alpha^2 z=\alpha^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{llll} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec \end{array}$$

$\left(\begin{array}{llll} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha^2-\alpha & 0 & \alpha^2-1 \end{array}\right)$ Intercambiamos la $2^a$ y la $3^a$ ecuación

$\left(\begin{array}{llll} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha^2-\alpha & 0 & \alpha^2-1 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 & \alpha-1 \end{array}\right)$ Factorizamos los coeficientes de la $2^a$ y la $3^a$

$$\left(\begin{array}{llll} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha(\alpha-1) & 0 & (\alpha-1)(\alpha+1) \\ 0 & 0 & -\alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2 z=1 \\ \alpha(\alpha-1) y=(\alpha-1)(\alpha+1) \\ -\alpha(\alpha-1) z=\alpha-1 \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ $\rightarrow$El sistema es compatible determinado y su solución es:

$z=\dfrac{-1}{\alpha}$

$y=\dfrac{\alpha+1}{\alpha}$

$x=0$

II) Si $\alpha=0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=1 \\ 0=0 \\ 0=-1 \end{array}\right\}$ Absurdo

El sistema es incompatible

III)Si $\alpha=1 \rightarrow x+y+z=1$ El sistema es compatible indeterminado

La solución es $S=\{(1-y-z, y, z) \;/\; y, z \in \Re\}$

**Exercise 1.6.41** *($Valencia$ 2007) Discutir y resolver según los valores del parámetro $\alpha$ el siguiente sistema*

$$\left.\begin{array}{l} x+\alpha y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha x+y+z=9 \end{array}\right\}$$

### 1.6.4 Exámenes personales

**Examen Cou 1999-2000**

**1)** Resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -2x-y+z=2 \\ -x+2z=4 \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ec+2\cdot 1^a \\ 3^a ec+1^a \end{array} \left(\begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)^{9} \rightarrow 3^a ec-2^a$$

[9] Ja podrieu veure que el sistema és incompatible.Fixa't en la segona i tercera equació

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+3z=4 & \textit{Absurdo} \\ 0=1 \end{cases}$$

*El sistema es incompatible*

**2)** Discutir el sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+y-3z=1 \\ x+5y+az=b \end{cases}$ según los valores del parámetro $a$ y $b$ . En los casos en que sea compatible, determinar la solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & a & b \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 2^a ec - 2\cdot 1^a \\ 3^a ec - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & a+1 & b-2 \end{pmatrix} \to 3^a ec + 2^a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a & b-5 \end{pmatrix}$$ El sistema inicial es equivalente al sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y-z=-3 \\ az=b-5 \end{cases}$

Posibilidades:

**I** Si $a \neq 0$ i $b \in \Re$ el sistema es **compatible determinado**

Las soluciones del sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y-z=-3 \\ az=b-5 \end{cases}$ son las siguientes:

De la última ecuación obtenemos $\boxed{z=\dfrac{b-5}{a}}$

Sustituyendo esta incógnita en la segunda ecuación tenemos:

$$-3y-\frac{b-5}{a}=-3 \to \boxed{y=\frac{3a-b+5}{3a}}$$

Sustituyendo las dos incógnitas en la primera ecuación:

$$x+\frac{2\left(3a-b+5\right)}{3a}-\frac{b-5}{a}=2 \to x=\frac{6a-2\left(3a-b+5\right)+3(b-5)}{3a}$$

Obtenemos $\boxed{x=\dfrac{5b-25}{3a}}$

El conjunto solución es $H=\left\{\left(\dfrac{5b-25}{3a},\dfrac{3a-b+5}{3a},\dfrac{b-5}{a}\right)\right\}$

**II** Si $a=0$ i $b=5$ la tercera ecuación desaparece y por lo tanto el sistema quedará de la siguiente manera $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y-z=-3 \end{cases}$ .Evidentemente se trata de un **sistema compatible indeterminado**

Hemos de obtener las incógnitas $x$ e $y$ en función de la incógnita $z$

Despejando de la tercera $y \to y=\dfrac{3-z}{3} \to \boxed{y=1-\dfrac{z}{3}}$

Sustituyendo en la primera y despejando $x$ tendremos

$$x+\frac{2\left(3-z\right)}{3}-z=2 \to \boxed{x=\frac{5z}{3}}$$

El conjunto solución es $H=\left\{\left(\dfrac{5z}{3},1-\dfrac{z}{3},z\right)/z\in\Re\right\}$ [10]

[10] Si assignem a $z$ el valor $3\dot{\alpha}$ Aleshores $H=\left\{\left(5\alpha,1-\alpha,3\alpha\right)/\alpha\in\Re\right\}$

**III** Si $a = 0$ i $b \neq 5$ en la tercera ecuación obtenemos un absurdo→**Sistema incompatible**

**3)** Dado el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ x + 5y + az = 0 \end{cases}$ determinar el valor de a para que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial. En ese caso, calcula las soluciones

Com el sistema es homogéneo ;entonces realmente nos piden los valores de $a$ para que el sistema sea compatible indeterminado (ya que si fuese compatible determinado la única solución del sistema seria la trivial $x = y = z = 0$)

Aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a ec - 2 \cdot 1^a \\ 3^a ec - 1^a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3^a ec + 2^a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \\ (a+8)z = 0 \end{cases}$

Posibilidades:

**I** Si $a \neq -8$ →El sistema es compatible determinado y además homogéneo la única solución es la trivial $x = y = z = 0$

**II** Si $a = -8$ la tercera ecuación desaparece y el sistema equivalente obtenido es éste:

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{array} \right\}$$

Despejando la incógnita $y$ tendremos: $\boxed{y = \frac{7z}{3}}$

Sustituyéndola en la primera y después despejando $x$ → $\boxed{x = \frac{-11z}{3}}$

$$\text{El conjunto solució es } H = \left\{ \left( \frac{-11z}{3}, \frac{7z}{3}, z \right) / z \in \Re \right\}^{11}$$

**Ejemplo de examen (en valencià) curs 2005-2006**

**1)** Resoleu el sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x - y + z = 2 \\ -x + 2z = 4 \end{cases}$

[11] Si assignem a $z$ el valor $3\dot{\alpha}$ Aleshores $H = \{(-11\alpha, 7\alpha, 3\alpha) / \alpha \in \Re\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a ec + 2 \cdot 1^a \\ 3^a ec + 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{12} \rightarrow 3^a ec - 2^a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 3z = 4 \\ 0 = 1 \end{cases} \textit{Absurde}$$

*El sistema és incompatible*

**2)** Discutiu el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ x + 5y + az = b \end{cases}$ segons els valors del paràmetres $a$ i $b$ . En els casos en que siga compatible, heu de determinar la solució.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a ec - 2 \cdot 1^a \\ 3^a ec - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & a+1 & b-2 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ec + 2^a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a & b-5 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial és equivalent al sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y - z = -3 \\ az = b - 5 \end{cases}$

Posibilitats:

**I** Si $a \neq 0$ i $b \in \Re$ el sistema és **compatible determinat.**

Les solucions del sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y - z = -3 \\ az = b - 5 \end{cases}$ son les següents:

De l'última equació obtenim $\boxed{z = \frac{b-5}{a}}$

Substituint aquesta incògnita en la segona equació tenim:

$$-3y - \frac{b-5}{a} = -3 \rightarrow \boxed{y = \frac{3a - b + 5}{3a}}$$

Substituint les dues incògnites en la primera equació:

$$x + \frac{2(3a - b + 5)}{3a} - \frac{b-5}{a} = 2 \rightarrow x = \frac{6a - 2(3a - b + 5) + 3(b-5)}{3a}$$

Obtenim $\boxed{x = \frac{5b - 25}{3a}}$

El conjunt solució és $H = \left\{ \left( \frac{5b-25}{3a}, \frac{3a-b+5}{3a}, \frac{b-5}{a} \right) \right\}$

**II** Si $a = 0$ i $b = 5$ la tercera equació desapareix i per lo tant el sistema quedarà de la següent manera $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y - z = -3 \end{cases}$ .Evidentment es tracta d'un **sistema compatible indeterminat**

Hem d'obtindre les incògnites $x$ i $y$ en funció de la incògnita $z$

[12] Ja podrieu veure que el sistema és incompatible.Fixa't en la segona i tercera equació

Aïllant de la tercera $y \rightarrow y = \dfrac{3-z}{3} \rightarrow \boxed{y = 1 - \dfrac{z}{3}}$

Substituint en la primera i aïllant $x$ tindrem

$$x + \frac{2(3-z)}{3} - z = 2 \rightarrow \boxed{x = \frac{5z}{3}}$$

El conjunt solució és $H = \left\{ \left( \dfrac{5z}{3}, 1 - \dfrac{z}{3}, z \right) / z \in \Re \right\}$ [13]

**III** Si $a = 0$ i $b \neq 5$ en la tercera equació obtenim un absurde→**Sistema incompatible**

**3)** Donat el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ x + 5y + az = 0 \end{array} \right.$ determineu el valor de a perquè el sistema tinga soluciones distintes de la trivial. En eixe cas, calculeu les solucions

Com el sistema es homogeni; aleshores, realment ens demanen els valors de $a$ per a que el sistema siga compatible indeterminat (ya que si fos compatible determinat l'única solució del sistema seria la trivial $x = y = z = 0$)

Aplicant Gauss

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2^a ec - 2 \cdot 1^a \\ 3^a ec - 1^a \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & a+1 & 0 \end{array} \right)$$

$$3^a ec + 2^a \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema inicial és equivalent al sistema $\left\{ \begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \\ (a+8)z = 0 \end{array} \right.$

Posibilitats:

**I** Si $a \neq -8$ →El sistema és compatible determinat i a més a més al ser homogeni l'única solució es la trivial $x = y = z = 0$

**II** Si $a = -8$ la tercera equació desapareix i el sistema equivalen obtingut és aquest:

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{array} \right\}$$

Aïllant la incògnita $y$ tindrem: $\boxed{y = \dfrac{7z}{3}}$

Substituint-la en la primera i després aïllant $x \rightarrow \boxed{x = \dfrac{-11z}{3}}$

El conjunt solució és $H = \left\{ \left( \dfrac{-11z}{3}, \dfrac{7z}{3}, z \right) / z \in \Re \right\}$ [14]

[13] Si assignem a $z$ el valor $3\dot{\alpha}$ Aleshores $H = \{(5\alpha, 1-\alpha, 3\alpha) / \alpha \in \Re\}$

[14] Si assignem a $z$ el valor $3\dot{\alpha}$ Aleshores $H = \{(-11\alpha, 7\alpha, 3\alpha) / \alpha \in \Re\}$

Título: Matrices y determinantes

Autor: © Juan José Isach Mayo

Fecha: 04 Septiembre del 2007

# Contents

# Part I

# Matrices y determinantes

# Chapter 1

# Matrices

**Definition 1** *Matriz de orden mxn*

Es un conjunto de "mxn" elementos de un cuerpo conmutativo $K$, dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ......... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ......... & a_{2,n} \\ .. & .. & ......... & .. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}_{mxn}$$

donde el elemento $a_{i,j}$ representa el elemento del cuerpo $K$ , que ocupa la fila i-ésima y la columna j-ésima

**Example 2** $A = \begin{pmatrix} 2+i & 3 & 1+i \\ 4 & 1+i & 1-i \\ 3-2i & -\sqrt{2} & 3+2i \end{pmatrix}_{3x3}$ *En esta matriz sus elementos son números complejos (Recuerda que $i = \sqrt{-1}$)*

**Example 3** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$ *En esta matriz sus elementos son números reales*

**Remark 1** *A partir de ahora trabajaremos siempre con matrices cuyos elementos serán números reales; salvo que se indique lo contrario*

**Definition 4** *Matriz fila*
*Es una matriz de orden $1xn$ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ........ & a_{1,n} \end{pmatrix}_{1xn}$. También se llama matriz fila del vector $\overrightarrow{f} \in \Re^n$; cuyas componentes en una base concreta son las dadas*

**Definition 5** *Matriz columna*
*Es una matriz de orden $mx1$ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ .. \\ a_{m,1} \end{pmatrix}_{mx1}$. También se llama matriz columna del vector $\overrightarrow{c} \in \Re^m$; cuyas componentes en una base concreta son las dadas*

**Remark 2** *Basándonos en estas definiciones, podríamos considerar la matriz* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .......... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .......... & a_{2,n} \\ .. & .. & .......... & .. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}$ *como:*

*a) Una matriz formada por n vectores columna pertenecientes a* $\Re^m$

$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & .......... & \overrightarrow{c_n} \end{pmatrix}$ *donde* $\overrightarrow{c_j} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ .. \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$

*b) Una matriz formada por m vectores fila pertenecientes a* $\Re^n$

$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{f_2} \\ .. \\ \overrightarrow{f_m} \end{pmatrix}$ *donde* $\overrightarrow{f_i} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & ........ & a_{i,n} \end{pmatrix}$

**Definition 6** *Matriz nula*

*Es aquella matriz de orden mxn donde todos sus elementos son nulos. Se representara siempre por la letra mayúscula* $O \rightarrow O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .......... & 0 \\ 0 & 0 & .......... & 0 \\ .. & .. & .......... & .. \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$

**Definition 7** *Matriz opuesta de la matriz A*

*Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .......... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .......... & a_{2,n} \\ .. & .. & .......... & .. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}$ *Llamaremos matriz opuesta de A y lo representaremos por* $-A$ *a la matriz* $\rightarrow -A = \begin{pmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & .......... & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & .......... & -a_{2,n} \\ .. & .. & .......... & .. \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & & -a_{m,n} \end{pmatrix}$

**Definition 8** *Matriz traspuesta de una matriz A de orden mxn*

*Es la matriz que se obtiene al intercambiar en la matriz A las filas por las columnas.Se representara por* $A^t$

*;según esto si* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .......... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .......... & a_{2,n} \\ .. & .. & .......... & .. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}_{mxn} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & .......... & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & .......... & a_{m,2} \\ .. & .. & .......... & .. \\ a_{1,n} & a_{2,n} & & a_{m,n} \end{pmatrix}_{nxm}$

**Example 9** *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

**Definition 10** *Matriz cuadrada de orden n*

*Son aquellas matrices donde el número de filas coincide con el de columnas*

**Example 11** *Un ejemplo de matriz cuadrada de orden 3 es la matriz*

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1+i & 1 \\ 3 & -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

**Definition 12** *Matriz cuadrada identidad*
*Son aquellas matrices cuadradas donde los elementos de la diagonal principal son unos y el resto son ceros*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Example 13** $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Definition 14** *Matriz cuadrada simétrica*
*Son aquellas matrices cuadradas; tales que los elementos* $a_{i,j} = a_{j,i}$ *con* $i$ *y* $j$ *variando de* $1$ *a* $n$
*Estas matrices se caracterizan por el hecho de que* $A = A^t$

**Example 15** *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ *es simétrica ; ya que*
$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} = A$

**Definition 16** *Matriz cuadrada antisimétrica*
*Son aquellas matrices cuadradas; tales que los elementos* $a_{i,j} = -a_{j,i}$ *con* $i$ *y* $j$ *variando de* $1$ *a* $n$
*Observa que los elementos de la diagonal principal son nulos (ya que éstos verifican* $a_{i,i} = -a_{i,i} \to 2a_{i,i} = 0 \to a_{i,i} = 0$*)*
*Estas matrices se caracterizan por el hecho de que* $-A = A^t$

**Example 17** *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ -7 & 0 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ *es antisimétrica ; ya que*
$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -5 \\ 7 & 0 & -4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *y la matriz* $A$ *son opuestas*

## 1.1 Suma de matrices del mismo orden

**NOTACIÓN** :Al conjunto de las matrices de orden $mxn$ y cuyos elementos son números reales lo representamos utilizando la notación $M_{mxn}(\Re)$

**Definition 18** *Suma de matrices pertenecientes a* $M_{mxn}(\Re)$
*Sean* $\left.\begin{matrix} A = (a_{i,j})_{i,j=1..n} \\ B = (b_{i,j})_{i,j=1..n} \end{matrix}\right\} \in M_{mxn}(\Re) \to A + B = C = (c_{i,j})_{i,j=1..n} \in M_{mxn}(\Re)$
*Donde los elementos* $c_{i,j}$ *de la matriz* $C$ *son tales que* $\to c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$

**Example 19** *Si* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ *entonces* $A + B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

**Proposition 20** *El conjunto $M_{mxn}(\Re)$ con la ley suma tiene estructura de grupo conmutativo (abeliano); es decir verifica las propiedades:*

$$\begin{array}{lll}
1. & \textit{Ley de composición interna} & \Leftrightarrow \forall A, B \in M_{mxn}(\Re) \rightarrow A + B \in M_{mxn}(\Re) \\
2. & \textit{Asociativa} & \Leftrightarrow \forall A, B, C \in M_{mxn}(\Re) \; A + (B + C) = (A + B) + C \\
3. & \textit{Elemento neutro} & \Leftrightarrow \textit{La matriz nula } O \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A + O = A \\ O + A = A \end{array} \right\} \\
4. & \textit{Elemento opuesto de } A & \Leftrightarrow -A \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A + (-A) = O \\ (-A) + A = O \end{array} \right\} \\
5. & \textit{Conmutativa} & \Leftrightarrow \forall A, B \in M_{mxn}(\Re) \rightarrow A + B = B + A
\end{array}$$

## 1.2 Multiplicación de un número real por una matriz

**Definition 21** *Multiplicación de un número real por una matriz de $M_{mxn}(\Re)$*
*Sean* $\left. \begin{array}{l} A = (a_{i,j})_{i,j=1..n} \in M_{mxn}(\Re \\ \alpha \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow \alpha A = C = (c_{i,j})_{i,j=1..n} \in M_{mxn}(\Re)$
*Donde los elementos $c_{i,j}$ de la matriz $C$ son tales que* $\rightarrow c_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j}$

**Example 22** *Si* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *entonces* $4A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 16 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

**Proposition 23** *El producto de un número real por una matriz del conjunto $M_{mxn}(\Re)$ verifica las propiedades:*

$$\begin{array}{lll}
6. & \textit{Ley de composición externa} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \cdot A \in M_{mxn}(\Re) \\
7. & \textit{Distributiva respecto suma reales} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha, \beta \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow (\alpha + \beta)A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \\
8. & \textit{Distributiva respecto suma matrices} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall A, B \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \\
9. & \textit{Pseudoasociativa números reales} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha, \beta \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A \\
10. & \textit{Elemento unidad} & \Leftrightarrow \forall A \in M_{mxn}(\Re) \rightarrow 1 \cdot A = A
\end{array}$$

**Nota:** La terna $(M_{mxn}(\Re), +, \cdot\Re)$ se dice que tiene una estructura de espacio vectorial real; ya que con ambas operaciones verifica las diez propiedades enumeradas con anterioridad

a) Ley simplificativa suma $\Longleftrightarrow$ (*Si* $A + B = A + C \rightarrow B = C$)

b) $\left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha \in \Re \end{array} \right\}$ siempre se verifica que $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha, \beta \in \Re \sim \{0\} \end{array} \right\}$ Si $\alpha \cdot A = \beta \cdot A \rightarrow \alpha = \beta$

d) $(A + B)^t = A^t + B^t \qquad \forall A, B \in M_{mxn}(\Re)$

Demuéstralas como ejercicio

## 1.3 Producto de matrices

**Definition 24** *Producto de matrices*
*Dada una matriz Ade orden mxn y una matriz B =de orden nxp. La matriz $A \cdot B$ será una matriz de orden mxp cuyos elementos se calculan de la siguiente manera:*

$$A \cdot B = C \qquad c_{i,j=} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \text{ con } i = 1....m \text{ y } j = 1...p$$

El elemento $c_{i,j}$ es el resultado de multiplicar escalarmente la fila $i$ de $A$ por la columna $j$ de $B$

**Example 25** *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2x3}$ *calcula:*
*$A \cdot B$ y $B \cdot A$ si tienen sentido ambos productos*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ -2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 12 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 0 - 4 & 6 + 0 + 2 \\ -1 + 0 - 6 & 2 - 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Observa que $A \cdot B$ es de orden $3x3$; mientras que $B \cdot A$ es de orden $2x2$

**Example 26** *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{2x2}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2x3}$ *calcula:*
*$A \cdot B$ y $B \cdot A$ si tienen sentido ambos productos*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2 & -2 & -2 + 6 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Observa que $A \cdot B$ es de orden $2x3$, mientras que el producto $B \cdot A$ no tiene sentido ya que el número de columnas de $B$ no coincide con las filas de $A$

**Example 27** *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$ *calcula:*
*$A \cdot B$ y $B \cdot A$ si tienen sentido ambos productos*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 2 \\ 10 & 11 & -2 \\ -8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 10 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: El producto de dos matrices cuadradas del mismo orden siempre se puede efectuar en los dos sentidos. En el ejercicio anterior has visto que $A \cdot B$ no coincide con $B \cdot A$

## 1.4 Propiedades del producto de matrices cuadradas

**Proposition 28** *El producto de matrices cuadradas del mismo orden verifica las siguientes propiedades:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | *Ley de composición interna* | $\Leftrightarrow$ | $\forall A, B \in M_{nxn}(\Re) \to A \cdot B \in M_{nxn}(\Re)$ |
| 2. | *Asociativa* | $\Leftrightarrow$ | $\forall A, B, C \in M_{nxn}(\Re) \to (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ |
| 3. | *Elemento neutro (Matriz identidad)* | $\Leftrightarrow$ | $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A \qquad \forall A \in M_{nxn}(\Re)$ |
| 4. | *Distributiva con suma (ambos lados)* | $\Leftrightarrow$ | $\forall A, B, C \in M_{nxn}(\Re) \to \begin{cases} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \end{cases}$ |
| 5. | *No conmutativa* | $\Leftrightarrow$ | $A \cdot B$ *no siempre coincide con* $B \cdot A$ |

**Nota**: *El conjunto $M_{nxn}(\Re)$ con las leyes suma y producto de matrices se dice que tiene una estructura de anillo unitario no conmutativo*

**Otras propiedades**

a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \qquad \forall A, B \in M_{nxn}(\Re)$

b) $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{nxn}(\Re) \\ \forall \alpha \in \Re \end{array} \right\}$ siempre se verifica que $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

d1) $A \cdot O = O$ y $O \cdot B = O$ $\forall A, B \in M_{nxn}(\Re)$

d2) Si $A = O$ o $B = O \Longrightarrow A \cdot B = O$ ($O$ es la matriz nula)

Nota: La recíproca de esta última implicación no es cierta en general; ya que podemos encontrar un par de matrices cuadradas, del mismo orden, no nulas y de manera que su producto dé la matriz nula

e) Sean $A, B, C \in M_{nxn}(\Re)$ $\qquad$ Si $A \cdot B = A \cdot C$ eso no implicará siempre que $B = C$

Es decir; pueden existir tres matrices $A, B, C$ cuadradas del mismo orden tal que $B \neq C$ y sin embargo que se verifique la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$

f) Si $A, B \in M_{nxn}(\Re)$ $\qquad A^2 - B^2 \neq (A - B)(A + B)$

g)Si $A, B \in M_{nxn}(\Re)$ $\qquad (A - B)^2 \neq A^2 - 2A \cdot B + B^2$

h) Si $A, B \in M_{nxn}(\Re)$ $\qquad (A + B)^2 \neq A^2 + 2A \cdot B + B^2$

**Example 29** *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *y* $B \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ *calcula:*

$A \cdot B$ , $B \cdot A$, $A^2, B^2, A + B, (A + B)^2, A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2, A^2 + 2A \cdot B + B^2, A + B, (A - B)^2, A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2, A^2 - 2A \cdot B + B^2, A^2 - B^2, (A - B)(A + B), (A \cdot B)^t, B^t \cdot A^t$

- $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 - 6 & 4 + 6 + 15 & 0 + 4 - 9 \\ 0 + 8 + 4 & 0 + 12 - 10 & 0 + 8 + 6 \\ 2 + 2 + 6 & -8 + 3 - 15 & 0 + 2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}$

- $B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 + 0 & -2 + 16 + 0 & -3 - 8 + 0 \\ -2 + 0 - 4 & 4 + 12 + 2 & 6 - 6 - 6 \\ 2 + 0 + 6 & -4 + 20 - 3 & -6 - 10 + 9 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & -11 \\ -6 & 18 & -6 \\ 8 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

- $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix}$

- $(A+B)^2 =$ [1] $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 48 & -24 \\ 10 & 61 & 6 \\ 44 & -18 & 24 \end{pmatrix}$

- $A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 = A(A+B) + B(A+B)$

$= (A+B)(A+B) = (A+B)^2$

- $A^2 + 2A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 51 & -18 \\ 28 & 45 & 26 \\ 46 & -51 & 42 \end{pmatrix}$

Fíjate que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2A \cdot B + B^2$

- $(A-B)^2 =$ [2] $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 8 \\ -2 & 21 & -10 \\ 8 & -4 & 16 \end{pmatrix}$

- $A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2 = A(A-B) + B(A-B)$

$= (A-B)(A-B) = (A-B)^2$

- $A^2 - 2A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -17 & 2 \\ -20 & 37 & -30 \\ 6 & 29 & -2 \end{pmatrix}$

- $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 1 & -24 \\ 4 & -13 & -2 \\ -10 & 5 & -18 \end{pmatrix}$

---

[1] $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

[2] $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

- $(A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 4 & -18 \\ 22 & -29 & 18 \\ -8 & -28 & 0 \end{pmatrix}$

- $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -2 & -30 \\ -14 & 3 & -22 \\ -12 & 38 & -36 \end{pmatrix}$

Fíjate que $A^2 - B^2 \neq \begin{cases} (A-B)(A+B) \\ y \\ (A+B)(A-B) \end{cases}$

- $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 10 \\ 17 & 2 & -20 \\ -5 & 14 & 11 \end{pmatrix}$

- $B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 10 \\ 17 & 2 & -20 \\ -5 & 14 & 11 \end{pmatrix}$

**Remark 3** *Fíjate que* $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

**Example 30** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ *determina la/s matriz/ces B de orden dos tal que* $A \cdot B = O$ *(matriz nula)*

Sea $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Por ser $A \cdot B = O \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Operando las matrices tendremos la siguiente igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} x+3z & y+3t \\ -2x-6z & -2y-6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que da lugar al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+3z=0 \\ y+3t=0 \\ -2x-6z=0 \\ -2y-6t=0 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es

$$x=-3z, y=-3t, t=t, z=z \text{ } con \text{ } z,t \in \Re$$

Todas las matrices del conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} -3z & -3t \\ z & t \end{pmatrix} / z,t \in \Re \right\}$ verifican la condición pedida

Si nos pidiesen cuatro; bastaría con asignar a las incógnitas $z$ y $t$ cuatro parejas de valores distintos. Por ejemplo si:

$$\text{Si } z=1 \text{ y } t=0 \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ verifica que } A\cdot B_1 = O$$
$$\text{Si } z=0 \text{ y } t=1 \rightarrow B_2 \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ verifica que } A\cdot B_2 = O$$
$$\text{Si } z=1 \text{ y } t=1 \rightarrow B_3 \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ verifica que } A\cdot B_3 = O$$
$$\text{Si } z=0 \text{ y } t=0 \rightarrow O \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ verifica que } A\cdot O = O$$

Nota: Comprueba tú que los productos $B_1 \cdot A, B_2 \cdot A, B_3 \cdot A$ no dan la matriz nula

## 1.5 Matriz inversa de una matriz cuadrada respecte al producto

**Definition 31** *Matriz inversa de una matriz cuadrada*
*Dada la matriz $A \in M_{nxn}(\Re)$ , diremos que admite inversa con respecto al producto de matrices siempre que podamos encontrar una única matriz $B \in M_{nxn}(\Re)$ tal que:*
$\begin{matrix} A \cdot B = I_n \\ B \cdot A = I_n \end{matrix}$ *donde $I_n$es la matriz identidad*
*A dicha matriz se le representa por $A^{-1}$*

**A las matrices cuadradas que admiten inversa se les denomina** *matrices regulares*

### 1.5.1 Propiedades de las matrices regulares

**Proposition 32** *Si $A$ y $B$ son dos matrices regulares de orden $n$*
*a)* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
*b)* $(\alpha \cdot A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1}$ *con* $\alpha \in \Re \sim \{0\}$
*c)* $(A^{-1})^{-1} = A$
*d)* $\left(A^{-1}\right)^t = (A^t)^{-1}$

**Remark 4** *El cálculo de la matriz inversa de una dada es muy útil para resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX = B$ si $A$ es una matriz cuadrada regular de orden $n$.*

Como $A$ es regular, si multiplicamos la ecuación matricial por $A^{-1}$ por la izquierda obtendremos que :
$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$. Por la asociativa del producto
$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ Por definición de inversa
$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ Por ser $I$ el elemento unidad del producto
$X = A^{-1} \cdot B$

**Remark 5** *El cálculo de la matriz inversa es muy útil para resolver ecuaciones matriciales del tipo $A \cdot X \cdot C = B$ si $A$ y $C$ son matrices cuadradas regulares de orden $n$.($B$ es una matriz cuadrada del mismo orden que las anteriores al igual que la matriz incógnita $X$)*

Como $A$ es regular, si multiplicamos la ecuación matricial por $A^{-1}$ por la izquierda obtendremos que :
$A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot C) = A^{-1} \cdot B$. Por la asociativa del producto
$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X \cdot C = A^{-1} \cdot B$ Por definición de inversa
$I \cdot X \cdot C = A^{-1} \cdot B$ Por la asociativa del producto
$I \cdot (X \cdot C) = A^{-1} \cdot B$ Por ser $I$ el elemento unidad del producto
$X \cdot C = A^{-1} \cdot B$
Como $C$ es regular, si multiplicamos la ecuación matricial por $C^{-1}$ por la derecha obtendremos que :
$(X \cdot C) \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$Por la asociativa del producto
$X \cdot \left(C \cdot C^{-1}\right) = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$Por definición de inversa
$X \cdot I = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$Por ser $I$ el elemento unidad del producto
$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$

**Exercise 1.5.1** *Demuestra que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ *admite inversa y calcúlala. Después resuelve la ecuación matricial* $AX = C$ *donde* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Por la definición se trata de buscar una matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_2$ y $B \cdot A = I_2$

Considerando la $1^a$ $A \cdot B = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Obtenemos la siguiente igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} x - 3z & y - 3t \\ 4x + 5z & 4y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3z = 1 \\ y - 3t = 0 \\ 4x + 5z = 0 \\ 4y + 5t = 1 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{5}{17} \; , y = \frac{3}{17}, \; z = -\frac{4}{17}, \; t = \frac{1}{17}$$

Hemos obtenido pues la matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$ que verifica que $A{\cdot}B = I_2$
Comprobemos ahora que el otro producto también nos da la matriz identidad

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Conclusión**: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$

- Resolvamos ahora la ecuación matricial $A \cdot X = C$ . Por ser $A$ un matriz regular, admite inversa y por lo tanto si multiplicamos la ecuación por $A^{-1}$ ,por la izquierda, tendremos que:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot C$. Por la asociativa del producto
$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot C$ Por definición de inversa
$I \cdot X = A^{-1} \cdot C$ Por ser $I$ el elemento unidad del producto
$X = A^{-1} \cdot C$
Así pues, la solución será $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} \\ \frac{11}{17} \end{pmatrix}$

**Remark 6** *Resolver la ecuación matricial* $A \cdot X = C$ *donde* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *es equivalente a resolver el sistema* [3] $\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = -2 \\ 4x + 5y = 3 \end{array} \right.$

**Example 33** *Demuestra que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ *no admite inversa*

Por la definición se trata de buscar una matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_2$ y $B \cdot A = I_2$

Considerando la $1^a$ $A \cdot B = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Obtenemos la siguiente igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} x - 3z & y - 3t \\ 2x - 6z & 2y - 6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que da lugar al sistema:

$$\left. \begin{array}{r} x - 3z = 1 \\ y - 3t = 0 \\ 2x - 6z = 0 \\ 2y - 6t = 1 \end{array} \right\}$$

Dicho sistema es incompatible

**Conclusión**: $A$ no admite inversa

**Example 34** *Demuestra que toda matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *con la condición* $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ *admite inversa y ésta es* $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

**Comentario** Es evidente, que para determinar si una matriz cuadrada de orden tres admite inversa tendríamos que resolver un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas (no es tan complejo; más bien largo)

[3] $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x - 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

### 1.5.2 Cálculo de la matriz inversa (Método de Gauss-Jordan)

El cálculo de matrices inversas suele realizarse de una forma parecida al método de Gauss. Por ejemplo, para calcular la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

realizaremos operaciones análogas a las del método de Gauss con las filas[4] de la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

con el objetivo de transformar la parte izquierda en la matriz identidad. Cuando lo consigamos la parte derecha de la matriz obtenida , será la matriz inversa de $A$.

Las únicas transformaciones posibles a realizar son:

- Intercambiar filas
- Multiplicar una fila por un número real no nulo
- A cualquier fila le puedo sumar una combinación lineal de otra (Ejemplo $3^{a\prime} = 3^a + 2 \cdot 1^a$)

*Pasos:*

- $1^o$ Intercambiamos las filas $1^a$ y $2^a$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- $2^o$ Restamos a la $2^a$ el doble de la $1^a$ y a la $3^a$ le restamos el triple de la $1^a$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- $3^o$ Intercambiamos las filas $2^a$ y $3^a$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

[4] Las transformaciones a realizar son :
Intercambiar filas
Multiplicar una fila por un número real no nulo
A cualquier fila le puedo sumar una combinación lineal de otra (Ejemplo $3^{a\prime} = 3^a + 2 \cdot 1^a$
Nota: Si apareciesen parámetros intentad evitar siempre el siguiente tipo de combinación lineal $3^{a\prime} = (a+2)3^a - 2^a$ ; es mejor éste $3^{a\prime} = 3^a - (a+3) \cdot 2^a$

- $4^o$ Dividimos la $3^a$ por -5 ($3^{a\prime} = -\dfrac{3^a}{5}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{array}\right)$$

- $5^o$ $\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a + 7 \cdot 3^a \\ 1^{a\prime} = 1^a - 3 \cdot 3^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{array}\right)$

Observa que en las tres primeras columnas hemos obtenido $I_3$ la matriz identidad de orden tres

Una vez conseguido esto, la matriz inversa es la formada por las otras tres columnas: Así pues:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprueba tú que $A \cdot A^{-1} = I_3$ y $A^{-1} \cdot A = I_3$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \left(-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Aplicación}}$ :Utilizando la matriz inversa anterior resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x + z = 4 \\ x + 3z = -1 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema anterior es lo mismo que resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$A \cdot X = B \text{ Ecuación } *$$

Donde $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ se denomina matriz de coeficientes del sistema, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ matriz columna de las incógnitas y $B=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ matriz columna de los términos independientes

Ahora bien; como $A$ es regular$\rightarrow$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$

Si multiplicamos la ecuación * por $A^{-1}$ tendremos:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B$$

Por la propiedad asociativa del producto

$$\left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

Por la definición de matriz inversa

$$I_3\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

Por ser $I_3$ el elemento neutro para la multiplicación de matrices cuadradas

$$X=A^{-1}\cdot B$$

La solución del sistema es:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{27}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Sistema compatible determinado $S=\left\{\left(\frac{13}{5},-\frac{27}{5},-\frac{6}{5}\right)\right\}$

**Example 35** *Dada la matriz* $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *determina con el procedimiento anterior su matriz inversa. Después resuelve el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+2y+3z=2 \\ x+z=-5 \\ y+3z=-2 \end{array}\right\}$

Consideramos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

*Pasos:*

- $1^o$ Restamos a la segunda la primera $2^{a\prime} = 2^a - 1^a$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- $2^o$ Intercambiamos las filas $2^a$ y $3^a$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- $3^o$ Sumamos a la $3^a$ el doble de la $2^a$ $(3^{a\prime} = 3^a + 2 \cdot 2^a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

- $4^o$ Dividimos la $3^a$ por 4 $(3^{a\prime} = \dfrac{3^a}{4})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{array}\right)$$

- $5^o$ A la segunda le restamos el triple de la tercera y a la primera también le restamos el triple de la $3^a$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 3 \cdot 3^a \\ 3^{a\prime} = 2^a - 3 \cdot 3^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-6}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{array}\right)$$

- $6^o$ Por último; a la primera le resto el doble de la $2^a$ $(1^{a\prime} = 1^a - 2 \cdot 2^a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{array}\right)$$

Observa que en las tres primeras columnas hemos obtenido $I_3$ la matriz identidad de orden tres

Una vez conseguido esto, la matriz inversa es la formada por las otras tres columnas: Así pues:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprueba tú que $C \cdot C^{-1} = I_3$ y $C^{-1} \cdot C = I_3$

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left( -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} \cdot C = \left( -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & +2 \\ -3 & 3 & +2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & +2 \\ -3 & 3 & +2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Aplicación}}$ Resolvamos ahora el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} x + 2y + 3z = 2 \\ x + z = -5 \\ y + 3z = -2 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema anterior es lo mismo que resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$C \cdot X = B \text{ Ecuación } *$$

Donde $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ se denomina matriz de coeficientes del sistema,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ matriz columna de las incógnitas y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ matriz columna de los términos independientes

Ahora bien; como $C$ es regular$\rightarrow$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$

Si multiplicamos la Ecuación * por $C^{-1}$ tendremos:

$$\begin{gathered} C^{-1} \cdot (C \cdot X) = C^{-1} \cdot B \\ \left(C^{-1} \cdot C\right) \cdot X = C^{-1} \cdot B \\ I_3 \cdot X = C^{-1} \cdot B \\ X = C^{-1} \cdot B \end{gathered}$$

La solución del sistema es:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{25}{4} \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

Sistema compatible determinado $S=\left\{\left(-\frac{9}{4},\frac{25}{4},-\frac{11}{4}\right)\right\}$

**Example 36** *Con las matrices A y C anteriores calcula:*
*a)* $A\cdot C$
*b)* $(A\cdot C)^{-1}$ *con el procedimiento anterior*
*c) Comprueba que dicha matriz coincide con* $C^{-1}\cdot A^{-1}$

Como $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ entonces:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&9\\1&5&12\\4&8&16\end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la inversa de $H=A\cdot C$. Para ello consideramos la matriz:

$$\begin{pmatrix}2&5&9&|&1&0&0\\1&5&12&|&0&1&0\\4&8&6&|&0&0&1\end{pmatrix}$$

Intercambiamos $1^a$ y $2^a$

$$\begin{pmatrix}1&5&12&|&0&1&0\\2&5&9&|&1&0&0\\4&8&16&|&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}2^{a\prime}=2^a-2\cdot 1^a\\3^{a\prime}=3^a-4\cdot 1^a\end{array}\right\}\rightarrow\begin{pmatrix}1&5&12&|&0&1&0\\0&-5&-15&|&1&-2&0\\0&-12&-32&|&0&-4&1\end{pmatrix}$$

Dividimos la $2^a$ por $-5$

$$\begin{pmatrix}1&5&12&|&0&1&0\\0&1&3&|&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&-12&-32&|&0&-4&1\end{pmatrix}$$

$$3^{a\prime}=3^a+12\cdot 2^a\rightarrow\begin{pmatrix}1&5&12&|&0&1&0\\0&1&3&|&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&0&4&|&-\frac{12}{5}&\frac{4}{5}&1\end{pmatrix}$$

Divido la $3^a$ por 4

$$\begin{pmatrix}1&5&12&|&0&1&0\\0&1&3&|&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&0&1&|&-\frac{3}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}2^{a\prime}=2^a-3\cdot 3^a\\1^{a\prime}=1^a-12\cdot 1^a\end{array}\right\}\rightarrow\begin{pmatrix}1&5&0&|&\frac{36}{5}&-\frac{7}{5}&-3\\0&1&0&|&\frac{8}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{3}{4}\\0&0&1&|&-\frac{3}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Por último $1^{a\prime} = 1^a - 5 \cdot 2^a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$(A \cdot C)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora

$$C^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

**Example 37** *Dada la matriz* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

*a) Determina su matriz inversa por el método de Gauss_ Jordan*

*b) Utilizando el cálculo de la matriz inversa resuelve el sistema* $\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + 10z = -1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Consideramos la matriz de orden $3x6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3^{a\prime} = 3^a - 3 \cdot 1^a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & | & -9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dividimos la $3^a$ por $-20$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a + 7 \cdot 3^a \\ 1^{a\prime} = 1^a - 3 \cdot 3^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & \frac{-7}{20} & \frac{9}{20} & \frac{3}{20} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{23}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-7}{20} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{pmatrix}$$

Por último, a la primera le resto la segunda

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-30}{20} & \frac{10}{20} & \frac{10}{20} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{23}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-7}{20} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{array}\right) \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-30}{20} & \frac{10}{20} & \frac{10}{20} \\ \frac{23}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-7}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{pmatrix}$$

b) Resolver el sistema $\left.\begin{array}{c} x+y+3z=2 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x+10z=-1 \end{array}\right\}$ es equivalente a resolver la ecuación matricial $D \cdot X = B$ donde $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ se denomina matriz de coeficientes del sistema; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ matriz columna de las incógnitas y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ matriz columna de los términos independientes

Como la matriz $A$ es regular (admite inversa); entonces multiplicando por $A^{-1}$ , por la izquierda, la relación $D \cdot X = B$ tendremos:

$D^{-1} \cdot (D \cdot X) = D^{-1} \cdot B \rightarrow \left(D^{-1} \cdot D\right) \cdot X = D^{-1} \cdot B \rightarrow I_3 \cdot X = D^{-1} \cdot B$

Así pues:

$$X = D^{-1} \cdot B \rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-30}{20} & \frac{10}{20} & \frac{10}{20} \\ \frac{23}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-7}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=\frac{12}{5} \\ z=\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

# Chapter 2

# DETERMINANTES

A toda matriz cuadrada, $A$, le vamos a asociar un número real que denominaremos determinante de $A$ y que escribiremos así $|A|$

## 2.1 Determinante de una matriz cuadrada de orden 2

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$

**Example 38** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$

## 2.2 Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1}$

**Example 39** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -32 + 9 - 4 + 12 = -15$

**Example 40** *Calcula los siguientes determinantes*

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 1 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

## 2.3 Menor complementario del elemento $a_{i,j}$ de una matriz cuadada

Dada una matriz cuadrada, $A$, de orden n; llamaremos Menor complementario de ese elemento $a_{i,j}$ al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila $i$ y la columna $j$. Lo representaremos así: $M.C(a_{i,j})$

**Example 41** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *determina* $M.C\,(a_{2,3})$ *,* $M.C\,(a_{1,3})\,,\; M.C\,(a_{2,1})\,,\; M.C\,(a_{2,2})$

$$M.C\,(a_{2,3}) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 18$$
$$M.C\,(a_{1,3}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$
$$M.C\,(a_{2,1}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$
$$M.C\,(a_{2,2}) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

## 2.4 Adjunto del elemento $a_{i,j}$ de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada, $A$, de orden n; llamaremos adjunto del elemento $a_{i,j}$ al Menor complementario de ese elemento $a_{i,j}$ multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Lo representaremos así: $\Delta_{i,j}$

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} M.C\,(a_{i,j})$$

**Example 42** *De la matriz anterior calcula*
*a)* $\Delta_{1,1},\ \Delta_{1,2},\ \Delta_{1,3}$ *(adjuntos de los elementos de la 1ª fila)*
*b) El determinante de A*
*c) Calcula* $a_{1,1}\Delta_{1,1}+a_{1,2}\Delta_{1,2}+a_{1,3}\ \Delta_{1,3}$ *(Suma de los productos de los elementos de la 1ª fila por sus adjuntos correspondientes)*
*d)* $\Delta_{2,1},\ \Delta_{2,2},\ \Delta_{2,3}$ *(adjuntos de los elementos de la 2ª fila)*
*e) Calcula* $a_{2,1}\Delta_{2,1}+a_{2,2}\Delta_{2,2}+a_{2,3}\ \Delta_{2,3}$ *(Suma de los productos de los elementos de la 2ª fila por sus adjuntos correspondientes)*
*f)* $\Delta_{3,1},\ \Delta_{3,2},\ \Delta_{3,3}$ *(adjuntos de los elementos de la 3ª fila)*
*g) Calcula* $a_{3,1}\Delta_{3,1}+a_{3,2}\Delta_{3,2}+a_{3,3}\ \Delta_{3,3}$ *(Suma de los productos de los elementos de la 3ª fila por sus adjuntos correspondientes)*

**Solución** :

a)$\Delta_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$

$\Delta_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -6$

c) $a_{1,1}\Delta_{1,1} + a_{1,2}\Delta_{1,2} + a_{1,3}\ \Delta_{1,3} = 5\,(-1) + 3\,(1) + 4\,(-1) = -6$

d) $\Delta_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 24$

$\Delta_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -18$

e) $a_{2,1}\Delta_{2,1} + a_{2,2}\Delta_{2,2} + a_{2,3}\ \Delta_{2,3} = 1\,(0) - 4\,(24) - 5(-18) = -6$

f) $\Delta_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 29$

$\Delta_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3$

g) $a_{3,1}\Delta_{3,1} + a_{3,2}\Delta_{3,2} + a_{3,3}\ \Delta_{3,3} = -1\,(1) + 3\,(29) + 4\,(-23) = -6$

**Nota:** Fíjate que:

El determinante de la matriz cuadrada $A$ coincide con la suma de los productos de los elementos de una fila por sus adjuntos correspondientes

$$|A| = \sum_{k=1}^{3} a_{h,k}\Delta_{h,k} \text{ con } j = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3 \text{ siendo} \left\{ \begin{array}{c} a_{h,k} \text{ el elemento de } A \text{ que ocupa fila } h \text{ y columna } k \\ \Delta_{h,k} \text{ el adjunto del elemento } a_{h,k} \end{array} \right.$$

Comprueba tú que $|A|$ coincide con la suma de los productos de los elementos de una columna por sus adjuntos correspondientes

$$|A| = \sum_{k=1}^{3} a_{k,j}\Delta_{k,j} \text{ con } j = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3 \text{ siendo} \left\{ \begin{array}{c} a_{k,j} \text{ el elemento de } A \text{ que ocupa fila } k \text{ y columna } j \\ \Delta_{k,j} \text{ el adjunto del elemento } a_{k,j} \end{array} \right.$$

## 2.5 Determinante utilizando adjuntos

Según todo lo visto anteriormente, el determinante de una matriz cuadrada, de orden n, se puede determinar así:

El $|A|$ coincide con la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus adjuntos correspondientes

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\Delta_{j,k} \text{ con } j = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3 \text{ o....} n \text{ (fila j-ésima)} \\ |A| &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\Delta_{k,j} \text{ con } j = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3\text{o....} n \text{ (columna j-ésima)} \end{aligned}$$

**Example 43** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ *calcula su determinante*

Hemos de elegir de la matriz $A$ aquella línea que más ceros tenga.
Si observas verás que la $4^a$ columna tiene dos ceros; por lo tanto:

$$|A| = \sum_{k=1}^{4} a_{k,4}\Delta_{k,4} = a_{1,4}\Delta_{1,4} + a_{2,4}\Delta_{2,4} + a_{3,4}\Delta_{3,4} + a_{4,4}\Delta_{4,4}$$

Como $a_{1,4} = 0$ y $a_{4,4} = 0$ entonces:

$$|A| = a_{2,4}\Delta_{2,4} + a_{3,4}\Delta_{3,4} = 1(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -40$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -180$ obtendremos:

$$|A| = 1(-1)^{2+4}(-40) + 2(-1)^{3+4}(-180) = -40 + 360 = 320$$

**Example 44** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ *calcula su determinante*

Hemos de elegir de la matriz $A$ aquella línea que más ceros tenga.
Si observas verás que la $3^a$ fila tiene tres ceros; por lo tanto:

$$|A| = \sum_{k=1}^{4} a_{3,k}\Delta_{3,k} = a_{3,1}\Delta_{3,1} + a_{3,2}\Delta_{3,2} + a_{3,3}\Delta_{3,3} + a_{3,4}\Delta_{3,4}$$

Como $a_{3,1} = 0$ , $a_{3,3} = 0$ y $a_{3,4} = 0$ entonces:

$$|A| = a_{3,2}\Delta_{3,2} = 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -4 & 3 & 1 \\ 7 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -3(-90) = 270$$

## 2.6 Matriz adjunta de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada ,$A$, de orden $n$, denominaremos matriz adjunta a aquella matriz cuyos elementos son los adjuntos correspondientes de la matriz $A$. La representaremos por $Adj(A)$

**Example 45** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *determina* $\Delta_{2,3}$,$\Delta_{1,3}$, $\Delta_{2,1}$, $\Delta_{2,2}$

$$\Delta_{2,3} = (-1)^{2+3} M.C\,(a_{2,3}) = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -18$$
$$\Delta_{1,3} = (-1)^{1+3} M.C\,(a_{1,3}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$
$$\Delta_{2,1} = (-1)^{2+1} M.C\,(a_{2,1}) = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Delta_{2,2} = (-1)^{2+2} M.C\,(a_{2,2}) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

**Example 46** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *calcula* $Adj(A)$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & \Delta_{2,3} \\ \Delta_{3,1} & \Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) =$$
$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) == \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 24 & -18 \\ 1 & 29 & -23 \end{pmatrix}$$

**Exercise 2.6.1** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *calcula* $|A|\,, A{\cdot}(Adj(A))^t\,, (Adj(A))^t{\cdot}$ *A. Al realizar estos productos observas alguna relación entre ellos, el determinante de A y la matriz identidad I.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

En el ejercicio anterior hemos calculado la matriz $Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 24 & -18 \\ 1 & 29 & -23 \end{pmatrix}$

$$A{\cdot}(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} =$$
$$-6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|\, I$$

$(Adj(A))^t \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} =$
$-6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|\, I$

La relación es la siguiente:

$$\begin{aligned} A \cdot (Adj(A))^t &= |A|\, I \\ (Adj(A))^t \cdot A &= |A|\, I \end{aligned}$$

**Exercise 2.6.2** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 1 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ *calcula* $|A|\,, A \cdot (Adj(A))^t\,, (Adj(A))^t \cdot A$

### 2.6.1 Propiedades de la matriz adjunta

1. $(Adj(A))^t = Adj(A^t)$

2. $A \cdot (Adj(A))^t = |A|\, I$ y $A \cdot (Adj(A))^t = |A|\, I$

*Casos:*

Según si el $|A|$ se anule o no se pueden presentar las siguientes opciones:

1. a) Si $|A| \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{|A|}\left[A \cdot (Adj(A))^t\right] = I \\ \dfrac{1}{|A|}\left[(Adj(A))^t \cdot A\right] = \dfrac{1}{|A|} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} A \cdot \left[\dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t\right] = I \\ \left[\dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t\right] \cdot A = \dfrac{1}{|A|} \end{array}\right\}$

   La matriz inversa de $A$ es pues:$\rightarrow$ $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t}$[1]

1. b) Si $|A| = 0$ entonces la matriz A no tiene inversa ;puesto que en esta situación $A \cdot (Adj(A))^t = 0 \cdot I = O$

## 2.7 Matriz inversa de una matriz cuadrada

Recuerda: Si una matriz admite inversa $A^{-1}$, entonces ha de verificar siempre que ésta es única y además $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ donde $I$ es la matriz identidad. A esas matrices se les denomina regulares

Solamente aquellas matrices cuadradas cuyo determinante sea no nulo admiten inversa con respecto al producto. Y además por propiedades de la matriz adjunta hemos deducido que $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t}$

[1] también $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} Adj(A^t)$ ya que $(Adj(A))^t = Adj(A^t)$

### 2.7.1 Pasos para calcular la inversa de una matriz regular

Dada la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$1^o$ Calculamos su determinante $|A| = -6$

$2^o$ Calculamos su matriz adjunta

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 24 & -18 \\ 1 & 29 & -23 \end{pmatrix}$$

$3^o$ Calcularemos la traspuesta de la matriz anterior $(Adj(A))^t$

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix}$$

$4^o$ Como $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$ entonces:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix}$$

*Nota: Comprobemos si* $A \cdot A^{-1} = I$ *y que* $A \cdot A^{-1} = I$

$$A{\cdot}A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\left[-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A{\cdot}A^{-1} = \left[-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.8 Propiedades de los determinantes

1 El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su matriz traspuesta

$$|A| = \left|A^t\right|$$

<u>*Demostración*</u>

$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}-$
$a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1}$

$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}-$
$-a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$

Nota: En virtud de esta propiedad, todas las propiedades que se verifiquen para filas también serán válidas para columnas

2 El determinante de una matriz cuadrada es opuesto al determinante de la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas (o columnas) paralelas

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \end{vmatrix}$$

Demuéstrala como ejercicio

3 El determinante de una matriz cuadrada es nulo si hay dos filas (o columnas) proporcionales (o iguales)

$$\begin{vmatrix} kb & a_{1,2} & b \\ kc & a_{2,2} & c \\ kd & a_{3,2} & d \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} kb & kc & kd \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b & c & d \end{vmatrix} = 0$$

Demuéstrala como ejercicio

4 El determinante de una matriz cuadrada es lineal con respecto a cada una

de sus filas (o columnas)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+b & a_{1,2}+c & a_{1,3}+d \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \alpha a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+k & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1}+j & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1}+h & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & a_{1,2} & a_{1,3} \\ j & a_{2,2} & a_{2,3} \\ h & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \beta a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \beta a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \beta a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Demuéstrala como ejercicio

**<u>Nota:</u>** Ten presente que es lineal con respecto a cada fila o columna. Aquí la linealidad sólo se ha aplicado a la $1^a$ fila y a la $1^a$ columna

5 El determinante de una matriz cuadrada no varía si a una fila (o columna) le sumamos una combinación lineal de otras filas (u otras columnas):

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\alpha a_{2,1} & a_{1,2}+\alpha a_{2,2} & a_{1,3}+\alpha a_{2,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

<u>Demostración:</u>

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\alpha a_{2,1} & a_{1,2}+\alpha a_{2,2} & a_{1,3}+\alpha a_{2,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \text{[2]} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} & \alpha a_{2,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$\text{[3]} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

6 El determinante de una matriz cuadrada es nulo si alguna de sus filas (o columnas) es combinación lineal de las otras

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \alpha a_{1,1}+\beta a_{2,1} & \alpha a_{1,2}+\beta a_{2,2} & \alpha a_{1,3}+\beta a_{2,3} \end{vmatrix} = 0$$

<u>Demostración:</u>

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \alpha a_{1,1}+\beta a_{2,1} & \alpha a_{1,2}+\beta a_{2,2} & \alpha a_{1,3}+\beta a_{2,3} \end{vmatrix} \text{[4]} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \alpha a_{1,3} \end{vmatrix} +$$

[2] Por ser lineal el determinante con respecto a la $1^a$ fila

[3] El segundo determinante es nulo por tener la $1^a$ y $2^a$ filas proporcionales

[4] Por ser lineal el determinante con respecto a la $3^a$ fila

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \beta a_{2,1} & \beta a_{2,2} & \beta a_{2,3} \end{vmatrix} =^{5} = 0$$

7 Regla de Laplace $\rightarrow |A \cdot B| = |A|\,|B|$

8 Si $A$ es una matriz cuadradada de orden n, entonces $|\alpha A| = \alpha^n\,|A|\;\forall \alpha \in \Re$

9 Si una matriz cuadrada $A$ es triangular superior o triangular inferior (elementos por encima o por debajo de la diagonal principal nulos) su determinante coincide con el producto de los elementos de la diagonal superior:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

10 La suma de los productos de los elementos de una fila ( o columna) por los adjuntos correspondientes de una fila (o columna) paralela son nulos.

**Demostración por filas:**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ hemos de comprobar alguna de estas tres relaciones:

$$\begin{aligned} a_{1,1}\Delta_{2,1} + a_{1,2}\Delta_{2},_{2} + a_{1,3}\Delta_{2},_{3} &= 0 \\ a_{1,1}\Delta_{3,1} + a_{1,2}\Delta_{3},_{2} + a_{1,3}\Delta_{3},_{3} &= 0 \\ a_{2,1}\Delta_{3,1} + a_{2,2}\Delta_{3},_{2} + a_{2,3}\Delta 3,_{3} &= 0 \end{aligned}$$

donde $\Delta_{i,j}$ es el adunto del elemento $a_{i,j}$ de la matriz $A$
Veamos sólo una de las tres.

$a_{1,1}\Delta_{2,1} + a_{1,2}\Delta_{2},_{2} + a_{1,3}\Delta_{2},_{3} =^{6} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$ por tener dos filas iguales

11 El determinante de una matriz cuadrada es no nulo$\Longleftrightarrow$Sus filas( o columnas) son linealmente independientes

[5] El primer determinante es nulo por ser la $3^a$ fila proporcional a la $1^a$ y el segundo también por ser la $3^a$ fila proporcional a la $2^a$

[6] Recuerda como se calcula un determinante utilizando una fila y sus adjuntos correspondientes

# Chapter 3

# RANGO DE UNA MATRIZ

**Por filas**: Dada cualquier matriz $A$, se define el rango de $A$ por filas como el n$^o$ máximo de filas linealmente independientes

**Por columnas**: Dada cualquier matriz $A$, se define el rango de $A$ por columnas como el n$^o$ máximo de columnas linealmente independientes

## 3.1 Propiedades del rango de una matriz

1 El rango de una matriz coincide con el de su matriz traspuesta

**Nota:** El rango de una matriz por filas o por columnas coincide siempre

2 El rango de una matriz no varía si intercambiamos filas (o columnas)

3 El rango de una matriz no varía si multiplicamos cualquier fila (o columna) por un número real no nulo

4 El rango de una matriz coincide con el rango de la matriz obtenida al sustituir una fila por ella más una combinación lineal de otras

5 Si una fila ( o columna) es nula o es combinación lineal de otras el rango de dicha matriz coincide con el de la matriz obtenida al suprimir dicha fila (o columna)

## 3.2 Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss

Para calcular el rango de una matriz , utilizaremos un procedimiento aná logo al que utilizabamos en los sistemas. Intentaremos triangularizar la matriz inicial. El rango de la matriz inicial coincidirá con el rango de la matriz obtenida al suprimir aquellas filas que sean nulas.

**Example 47** *Calcular el rango de la siguiente matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$RangA = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$ [1] $$= Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

[2] $$Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

**Example 48** *Calcular el rango de la siguiente matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$RangA = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ [3] $$= Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

[4] $$= Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

## 3.3 Calculo de rangos por menores

El rango de una matriz coincide con el orden de la mayor submatriz cuadada, extraída de la matriz inicial , cuyo determinante sea no nulo.

**$1^o$ Método : basado en el cálculo de menores por filas**

Comenzando por el orden $k = 2$ , se realiza el proceso siguiente : (para una etapa $k$ cualquiera)

- Se busca un menor de orden $k$ no nulo; entonces el rango será mayor o igual que $k$
- Se añade a dicho menor una fila $i$, y cada una de las columnas que en él no figuran, obteniéndose así menores de orden $k + 1$.

[1] $2^a fila' = 2^a fila + 1^a fila$
$3^a fila' = 2^a fila - 2 \cdot 1^a fila$
$4^a fila' = 4^a fila - 1^a fila$
[2] $3^a fila' = 3^a fila - 2 \cdot 2^a fila$
$4^a fila' = 4^a fila + 2^a fila$
[3] $2^a fila' = 2^a fila + 1^a fila$
$3^a fila' = 2^a fila - 2 \cdot 1^a fila$
$4^a fila' = 4^a fila - 1^a fila$
[4] $3^a fila' = 3^a fila - 2 \cdot 2^a fila$
$4^a fila' = 4^a fila + 2^a fila$

Si todos estos menores son nulos, significa que la fila $i$ es combinación lineal de las $k$ filas del menor anterior, por lo que podemos eliminar esa fila.

- Seguimos probando con las restantes filas, si todos los menores así formados son nulos, entonces la matriz tiene sólo $k$ filas linealmente independientes, que son las que aparecen en el menor, y por tanto su rango es $k$.

Si alguno de los menores $k+1$ es distinto de cero, el rango es mayor o igual que $k+1$ y repetimos el proceso para otro etapa superior ( en concreto la $k+1$).

*Nota importante:*

Si al elegir un menor de orden 2 nos da 0, elegimos otro, y así sucesivamente hasta elegir todos, si todos son 0, el rango es 1. De la misma forma, cuando elegimos menores de orden 3.

**2$^o$ Método : basado en el cálculo de menores por columnas**

Comenzando por el orden $k = 2$ , se realiza el proceso siguiente :(para una etapa $k$ cualquiera)

- Se busca un menor de orden $k$ no nulo; entonces el rango será mayor o igual que $k$
- Se añade a dicho menor una columna $j$ , y cada una de las filas que en él no figuran, obteniéndose así menores de orden $k+1$.

Si todos estos menores son nulos, significa que la columna $j$ es combinación lineal de las $k$ columnas del menor anterior, por lo que podemos eliminar esa columna

- Seguimos probando con las restantes columnas, si todos los menores así formados son nulos, entonces la matriz tiene sólo $k$ columnas linealmente independientes, que son las que aparecen en el menor, y por tanto su rango es $k$.

Si alguno de los menores $k+1$ es distinto de cero, el rango es mayor o igual que $k+1$ y repetimos el proceso para otro etapa superior ( en concreto la $k+1$).

*Nota importante:*

Si al elegir un menor de orden 2 nos da 0, elegimos otro, y así sucesivamente hasta elegir todos, si todos son 0, el rango es 1. De la misma forma, cuando elegimos menores de orden 3.

**Example 49** *Calcula el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 10 & -11 & 3 & -15 & 22 \\ 23 & -22 & -3 & -40 & 44 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix}$

Por filas

1$^o$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ La 1$^a$ y la 2$^a$ fila son L.I (no existe ninguna relación entre ellas)

Por lo tanto el $rangA \geq 2$

2$^a$ ¿ La 3$^a$ fila es combinación lineal de la 1$^a$ y la 2$^a$?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior con los elementos de la $3^a$ fila y el resto de columnas formando así los siguientes menores de orden tres $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 10 & -11 & -15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 10 & -11 & 22 \end{vmatrix}$

Como $\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 10 & -11 & -15 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 10 & -11 & 22 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$ La tercera fila es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$

Recuerda que si una fila es combinación lineal de otras; entonces el rango de la matriz inicial coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir dicha fila

$$Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 10 & -11 & 3 & -15 & 22 \\ 23 & -22 & -3 & -40 & 44 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 23 & -22 & -3 & -40 & 44 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix}$$

$3^a$ ¿ La $4^a$ fila es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior (el de orden dos) con los elementos de la $4^a$ fila y el resto de columnas formando así los siguientes menores de orden tres $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 23 & -22 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 23 & -22 & -40 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 23 & -22 & 44 \end{vmatrix}$

Como $\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 23 & -22 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 23 & -22 & -40 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 23 & -22 & 44 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$ La cuarta fila también es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$

Recuerda que si una fila es combinación lineal de otras; entonces el rango de la matriz inicial coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir dicha fila

$$Rang A = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 23 & -22 & -3 & -40 & 44 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix}$$

$3^o$¿ La$5^a$ fila es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior (el de orden dos) con los elementos de la $5^a$ fila y el resto de columnas formando así los siguientes menores de orden tres $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 25 & -29 & 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 25 & -29 & -35 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 25 & -29 & 57 \end{vmatrix}$

Como $\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 25 & -29 & 12 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 25 & -29 & -35 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 25 & -29 & 57 \end{vmatrix} = 3 \end{array}\right\}$ →La $5^a$ fila no es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$

Por lo tanto; las únicas filas linealmente independientes son la $1^a$, $2^a$ y la $5^a$

$RangA = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix} = 3$

Observa que el menor, no nulo, de mayor orden que podemos extraer de la matriz $A$ es $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 25 & -29 & 57 \end{vmatrix}$

Haz el mismo ejercicio pero razonando por columnas

**Example 50** *Calcula el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 10 & -11 & 1 & -15 \\ 23 & -22 & -3 & -40 \end{pmatrix}$

Por columnas

$1^o$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ La $1^a$ y la $2^a$ columnas son L.I (no existe ninguna relación entre ellas)

Por lo tanto el $rangA \geq 2$

$2^a$ ¿ La $3^a$ columna es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior con los elementos de la $3^a$ columna y el resto de filas formando así los siguientes menores de orden tres $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 23 & -22 & -3 \end{vmatrix}$

Como $\left.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 6 \right\}$ → La tercera columna no es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$

Las tres primeras columnas son L.I→ $RangA \geq 3$

$3^o$ ¿ La $4^a$ columna es combinación lineal de la $1^a$ , la $2^a$y la $3^a$?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior(el de orden tres) con los elementos de la $4^a$ columna y la ultima fila formando así el siguiente menor de orden cuatro $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 10 & -11 & 1 & -15 \\ 23 & -22 & -3 & -40 \end{vmatrix}$

Calculémoslo por la regla de Chio

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 10 & -11 & 1 & -15 \\ 23 & -22 & -3 & -40 \end{vmatrix}$$

realizamos las siguientes transformaciones $\left\{ \begin{array}{l} 2^a col\prime = 2^a col + 2 \cdot 1^a col \\ 3^a col\prime = 3^a col - 3 \cdot 1^a col \end{array} \right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 10 & -11 & 1 & -15 \\ 23 & -22 & -3 & -40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 5 \\ 10 & 9 & -29 & -15 \\ 23 & 24 & -72 & -40 \end{vmatrix}$$

Por ser lineal el determinante respecto a la $2^a$col y $4^a$ col tendremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 5 \\ 10 & 9 & -29 & -15 \\ 23 & 24 & -72 & -40 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & 1 \\ 10 & -3 & -29 & -3 \\ 23 & -8 & -72 & -8 \end{vmatrix}$$

Al tener dos columnas iguales este determinante es nulo

Por lo tanto; la $4^a$col es combinación lineal de la $1^a$ ,$2^a$ y $3^a$. Recuerda que si una columna es combinación lineal de otras; entonces el rango de la matriz inicial coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir dicha columna

El $rangA = rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 1 \\ 23 & -22 & -3 \end{pmatrix} = 3$

Observa que el menor, no nulo, de mayor orden que podemos extraer de la matriz $A$ es $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 1 \end{vmatrix}$

Haz el mismo ejercicio pero razonando por filas

**Example 51** *Calcular el rango de la siguiente matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

*Por Gauss*

$Rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = Rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = Rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$
2

*Utilizando menores complementarios*

- – Por filas

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$ (no nulo) . Las filas $1^a$ y $2^a$ son L.I→ $RangoA \geq 2$

¿La tercera fila es C.Lineal de las dos primeras?

Para saberlo, tendré que orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ con la tercera fila y la tercera columna; obteniendo el siguiente menor de orden 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ Si fuese nulo, la $3^a$ fila sería C.Lineal de las dos primeras; en caso contrario las tres serían L. Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ entonces la $3^a$ fila es C.lineal de las dos primeras→ $RangoA \geq 2$

De las tres primeras filas, sabemos que las dos primeras son L.independientes. Ahora bien nos falta plantear la siguiente pregunta: ¿La cuarta fila es C.Lineal de las dos primeras?

Para saberlo, tendré que orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ con la cuarta fila y la tercera columna; obteniendo el siguiente menor de orden 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. Si fuese nulo, la $4^a$ fila sería C.Lineal de las dos primeras; en caso contrario las filas $1^a$,$2^a$ y $4^a$ serían L. Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ entonces la $4^a$ fila es C.lineal de las dos primeras

Conclusión: Las únicas filas L.Independientes son la $1^a$ la $2^a$→ $RangoA = 2$

- – Por columnas

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$ (no nulo) . Las columnas $1^a$ y $2^a$ son L.I→ $RangoA \geq 2$

¿La tercera columna es C.Lineal de las dos primeras?

Para saberlo, tendré que orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ con la restantes filas y la tercera columna; obteniendo los siguientes menores de orden 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ Si fuesen nulos, la $3^a$ columna sería C.Lineal de las dos primeras (rangoA=2); en caso contrario las tres serían L. Independientes ($RangoA = 3$)

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ entonces la $3^a$ columna es C.lineal de las dos primeras

Conclusión: Las únicas columnas L.Independientes son la $1^a$ la $2^a$→ $RangoA$

# Chapter 4

# PROBLEMAS DE MATRICES Y DETERMINANTES



## 4.1 Ejercicios Resueltos

**Exercise 4.1.1** *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *y* $B \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ *calcula* $3A - 2B$ *,* $A \cdot B$ *y* $B.A$

$$3A - 2B = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ -4 & 6 & -10 \\ -2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 & -11 \\ -6 & 18 & -6 \\ 8 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.2** *Con las matrices anteriores, calcula* $A^2, B^2, A^2 + B^2$ *y* $6A^2 - 12B^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 17 & -8 \\ 4 & 41 & -2 \\ 26 & -11 & 20 \end{pmatrix}$$

Calculemos $6A^2 - 12B^2$

$$6\begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -138 & -42 & -192 \\ 24 & -240 & -12 \\ -168 & 78 & -222 \end{pmatrix}$$

$$6A^2 - 12B^2 = \begin{pmatrix} -138 & -42 & -192 \\ 24 & -240 & -12 \\ -168 & 78 & -222 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.3** *Dada la matriz cuadrada* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ *calcula las matrices* $A + A^t$ *y* $A - A^t$ *y comprueba que la primera es simétrica y la segunda antisimétrica. Después demuestra que dicha matriz se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ Esta matriz es simétrica.

$A - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ Esta matriz es antisimétrica

Si denominamos $B$ a $A + A^t$ y $C$ a $A - A^t$ es evidente que $A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Con lo que acabamos de demostrar que $A$ es suma de una matriz simétrica $\frac{1}{2}B$ y una antisimétrica $\frac{1}{2}C$

$$A = \frac{(A + A^t)}{2} + \frac{(A - A^t)}{2}$$

**Exercise 4.1.4** *Determina la matriz* $X$ *cuadrada de orden 2 que verifica la siguiente igualdad* $A \cdot X \cdot B = C$ *donde* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *,*$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$

Como no conocemos la matriz $X$ $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 6x + 4z + 3y + 2t & 9x + 6z + 6y + 4t \\ 8x + 6z + 4y + 3t & 12x + 9z + 8y + 6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$

Obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} 6x+4z+3y+2t=29 \\ 9x+6z+6y+4t=40 \\ 8x+6z+4y+3t=34 \\ 12x+9z+8y+6t=47 \end{array}\right\} \text{Resolviéndolo por el método de Gauss}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 & 29 \\ 9 & 6 & 6 & 4 & 40 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 34 \\ 12 & 9 & 8 & 6 & 47 \end{pmatrix}, \text{eliminación Gaussiana} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 & 29 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Tendremos que el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} 6x+4z+3y+2t=29 \\ z+2y+2t=-11 \\ -4y-3t=8 \\ t=4 \end{array}\right\} \text{cuyas soluciones son } x=12; y=-5; z=-9; t=$$

4

La matriz pedida es: $\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

**Nota** Cuando ya sepas calcular la inversa de una matriz podrás calcular el ejercicio de la siguiente manera:

Dada la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$ .Como las matrices $A$ y $B$ admiten inversa por ser matrices regulares (determinante no nulo); entonces

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad, por la izquierda, por $A^{-1}$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot B) = A^{-1} \cdot C \to \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$$
$$I \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C \to X \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

Si ahora multiplicamos por la derecha esta igualdad por $B^{-1}$

$$(X \cdot B) \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \to X \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$
$$X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Así pues:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} {}^{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.5** *Determina las matrices* $B = \begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix}$ *cuadradas de orden 2 que conmutan con* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

---

[1]Recuerda que toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con la condición $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ admite inversa y ésta es $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Sea $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ como $B$ ha de conmutar con $A$ entonces

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Operando tendremos

$$\begin{pmatrix} 3x+4y & 2x+3y \\ 3z+4t & 2z+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2t \\ 4x+3z & 4y+3t \end{pmatrix}$$

Obteniendo el siguiente sistema
$\left.\begin{array}{l} 3x+4y = 3x+2z \\ 2x+3y = 3y+2t \\ 3z+4t = 4x+3z \\ 2z+3t = 4y+3t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 2y-z=0 \\ x-t=0 \\ x-t=0 \\ 2y-z=0 \end{array}\right\}$Eliminando dos ecuaciones tendremos que resolver el siguiente sistema compatible doblemente indeterminado
$\left.\begin{array}{l} 2y-z=0 \\ x-t=0 \end{array}\right\}$ cuyas soluciones son $x = t$ y $z = 2y$

Por lo tanto todas las matrices del siguiente conjunto $\left\{\begin{pmatrix} t & y \\ 2y & t \end{pmatrix} / t, y \in \Re\right\}$conmutan con la matriz $A$

Es interesante remarcar que dentro de este conjunto, encontraremos las siguientes matrices

- $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz nula
- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ la propia matriz A
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ su inversa
- $-A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

Comprobación $\begin{pmatrix} t & y \\ 2y & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y+3t & 3y+2t \\ 6y+4t & 4y+3t \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & y \\ 2y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y+3t & 3y+2t \\ 6y+4t & 4y+3t \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.6** *Determina la/s matriz/ces* $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *cuadradas de orden 2; tales que* $A \cdot B = O$ *donde* $A$ *es la matriz del ejercicio anterior y* $O$ *es la matriz nula (*$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*)*

Como $A \cdot B = O$ entonces

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2t \\ 4x+3z & 4y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} 3x+2z=0 \\ 3y+2t=0 \\ 4x+3z=0 \\ 4y+3t=0 \end{array}\right\}$$

Cuyas soluciones son $x = y = z = t = 0$

La única matriz $B$ es la nula $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Nota** Otra manera de resolver este ejercicio

Como la matriz $A$ es regular[2] (admite inversa); entonces de la igualdad $A \cdot B = O$ si multiplicamos por la inversa de $A$ tendremos

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot O = O \to \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot B = O \to I \cdot B = O \to B = O$$

**Exercise 4.1.7** *Determina la/s matriz/ces* $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *cuadradas de orden 2; tales que* $A \cdot B = O$ *donde* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ *y* $O$ *es la matriz nula* ($O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

Como $A \cdot B = O$ entonces

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ -4x-2z & -4y-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} 2x+z=0 \\ 2y+t=0 \\ -4x-2z=0 \\ -4y-2t=0 \end{array}\right\} \text{podemos eliminar}$$

dos ecuaciones; obteniendo un sistema de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas que es compatible doblemente indeterminado. Siendo sus soluciones todas las matrices del conjunto

$$H = {}^{3}\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{pmatrix} / x, y \in \Re\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Nota 1** Es interesante hacer resaltar que $B \cdot A$ no da la matriz nula

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4y & x-2y \\ -4x+8y & -2x+4y \end{pmatrix}$$

Sólo se verificarán ambos igualdades $B \cdot A = O, A \cdot B = O$ cuando $B$ coincida con la matriz nula

[2] $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$

**Nota 2** Demuestra que el conjunto de las matrices $B$ tales que $B \cdot A = O$ es de la forma

$$H = {}^{4}\left\{ \begin{pmatrix} 4x & 2x \\ 2y & y \end{pmatrix} / x, y \in \Re \right\}$$

**Exercise 4.1.8** *Dada la matriz* $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *determina la matriz cuadrada $X$ de orden 2 tales que $X \cdot B = I$ donde $I$ es la matriz identidad* ($I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

**Exercise 4.1.9** *Demuestra que* $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Por el principio de inducción, he de demostrar que se verifica para $n = 1$ y $n = 2$, luego suponer que la igualdad es cierta para $n$ y después comprobar que también se verifica para $n + 1$ utilizando la hipótesis anterior

$A = \begin{pmatrix} a & 1 \cdot a^0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

Si se verifica para $n$ [5] tengo que demostrar que es cierta para $n + 1$

$A^{n+1} = A^n \cdot A =$ [6] $\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n (n+1) \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$

Como es cierto; entonces puedo afirmar que

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \forall n \in N \sim \{0\}$$

**Exercise 4.1.10** *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

*a) Demostrar que* $A \cdot B = B \cdot A = O$ , $A \cdot C = A$, $C \cdot A = C$

*b) Aplicando los resultados de a) demostrar que* $A \cdot C \cdot B = C \cdot B \cdot A = O$, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$

**Exercise 4.1.11** *Calcular $B^{27}$ si sabemos que* $B = \begin{pmatrix} 19 & -8 & -1 \\ 49 & -21 & -3 \\ -46 & 19 & 2 \end{pmatrix}$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & -8 & -1 \\ 49 & -21 & -3 \\ -46 & 19 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -8 & -1 \\ 49 & -21 & -3 \\ -46 & 19 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 3 \\ 40 & -8 & 8 \\ -35 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

[5] Hipótesis de inducción $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

[6] Por la hipótesis de inducción sabemos que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 3 \\ 40 & -8 & 8 \\ -35 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & -8 & -1 \\ 49 & -21 & -3 \\ -46 & 19 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; es evidente que $B^{27} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.12** *Calcular $C^n$ si sabemos que* $C = \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix}$

Como $C = \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix}$;entonces

$$C^2 = \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix} = C$$

$$C^3 = C^2 C = C \cdot C = C^2 = C$$

Es evidente pues que $C^n = C \ \forall n \in N \sim \{0\}$

**Exercise 4.1.13** *Calcular $E^7$ si sabemos que* $E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$E^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{15}{49} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{15}{49} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{24}{49} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{24}{49} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{7} & \frac{34}{49} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^7 = E^4 \cdot E^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{24}{49} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{7} & \frac{34}{49} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.14** *Calcular $D^{20}$ si sabemos que* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^3 = D^2 \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D^4 = D^3 . D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Es fácil demostrar que:

$D^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.15** *Sean $A$ y $B$ dos matrices cuadradas del mismo orden. Averiguar si son ciertas las siguientes igualdades: a) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ b)$(A-B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$*

$(A-B)(A+B) = A^2 - A \cdot B + B \cdot A + B^2 \neq A^2 - B^2$ ya que las matrices $A$ y $B$ en general no conmutan

$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2 \neq A^2 - 2A \cdot B + B^2$ por la misma razón de antes

Conclusión: Estas igualdades sólo se cumplen cuando $A$ y $B$ sean matrices cuadradas del mismo orden y que además conmuten, es decir que $A \cdot B = B \cdot A$

**Exercise 4.1.16** *Demostrar que si $A$ es una matriz cuadrada que verifica la relación $A^2 - A + I = O$ (donde $I$ es la matriz identidad y $O$ es la matriz nula) entonces $A$ admite inversa. Hallarla*

Como $A^2 - A + I = O$

Entonces $-A^2 + A = +I \rightarrow \begin{cases} -A^2 + AI = I \ @ \\ -A^2 + IA = I \ @@ \end{cases}$

Per ser $I$ la matriz identidad $\begin{cases} IA = A \\ AI = A \end{cases}$

Si en @ sacamos factor común $A$ por la izquierda y en @@ sacamos factor común $A$ por la derecha tendremos

$$\left. \begin{array}{r} A(-A+I) = I \\ (-A+I)A = I \end{array} \right\} \rightarrow A^{-1} = -A + I$$

**Exercise 4.1.17** *Demostrar que $E^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n^2+13n}{98} \\ 0 & 1 & \frac{n}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si sabemos que la matriu $E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*

Comprobemos que se verifica para $n = 1$ y $n = 2$

$E^1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1^2 + 13 \cdot 1}{98} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Si se verifica para $n = 1$

Como $\left.\begin{array}{l} E^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{15}{49} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ E^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2}{7} & \dfrac{2^2+13\cdot 2}{98} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{15}{49} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow$ se verifica para $n = 2$

Supongamos que es cierta para $n =$ [7] y con esta hipótesis hemos de demostrar que se verifica para el siguiente $n + 1$

$$E^{n+1} = E^n \cdot E =^{8} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n}{7} & \dfrac{n^2+13n}{98} \\ 0 & 1 & \dfrac{n}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7}+\frac{1}{7}n & \frac{1}{7}+\frac{15}{98}n+\frac{1}{98}n^2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}+\frac{1}{7}n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que sea cierta para $n+1$; bastará con que calcules $\dfrac{(n+1)^2+13(n+1)}{98}$ y te fijes si coincide con $\frac{1}{7}+\frac{15}{98}n+\frac{1}{98}n^2$. Observarás que la respuesta es afirmativa.

Como es cierto; entonces puedo afirmar que

$$E^n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n}{7} & \dfrac{n^2+13n}{98} \\ 0 & 1 & \dfrac{n}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in N \sim \{0\}$$

**Exercise 4.1.18** *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ *comprobar que* $(A+I)^2 = O$ *(O es la matriz nula). Justifica que A admite inversa y obtén su matriz inversa*

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Como $(A+I)^2 = O; A^2 + AI + IA + I^2 = O; A^2 + 2AI + I = O$

Per ser $I$ la matriz identidad $IA = AI$

Entonces $-A^2 - 2AI = +I \rightarrow \left\{\begin{array}{l} -A^2 - 2AI = I \text{ @} \\ -A^2 - 2IA = I \text{ @@} \end{array}\right.$

Si en @ sacamos factor común $A$ por la izquierda y en @@ sacamos factor común $A$ por la derecha tendremos

$$\left.\begin{array}{l} A(-A-2I) = I \\ (-A-2I)A = I \end{array}\right\} \rightarrow A^{-1} = -A - 2I$$

[7] Hipótesis de inducción

$$E^n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n}{7} & \dfrac{n^2+13n}{98} \\ 0 & 1 & \dfrac{n}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[8] Por la hipótesis de inducción

$$A^{-1} = -A - 2I = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.19** *Sea B* $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *Demuestra que: a)* $B^3 + I = O$ *b) Justifica que B es invertible y obtén* $B^{-1}$ *c) Calcula razonadamente* $B^{10}$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observa que $B^3 = -I$. Si sumamos a los miembros de esta igualdad la matriz identidad tendremos:

$$B^3 + I = -I + I = O$$

Para calcular la inversa de $B$ he de tener presente que

$$\left.\begin{array}{l} B^2B = -I. \\ BB^2 = -I. \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} (-B^2)\,B = I. \\ B\,(-B^2) = I. \end{array}\right\} \to B^{-1} = -B^2$$

Así pues; $B^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Si nos piden ahora $B^{10}$ tendremos presente que:

$B^{10} = B^3B^3B^3B = (-I)(-I)(-I)B = -B = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$B^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.20** *Calcula los valores* $x_1$,$x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ *que satisfacen las ecuaciones siguientes:;* $\left\{\begin{array}{l} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{array}\right.$ *donde* $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$

En primer lugar calcularé la inversa de la matriz $A$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Dado el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{array}\right.$

Si multiplicamos la $2^a$ ecuación por 2 y le sumamos la $1^a$ obtendremos que: $-AY = B - 2C$.Multiplicando por -1 tendremos:

$$AY = -B + 2C = -\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Si multiplicamos la $2^a$ ecuación por $-3$ y le sumamos la $1^a$ obtendremos que: $-AX = B - 3C$.Multiplicando por -1 tendremos:

$$AX = -B + 3C = -\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Si multiplicamos las expresiones $*$ y $**$ por $A^{-1}$tendremos

$$A^{-1}(AY) = A^{-1}\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1}(AX) = A^{-1}\begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.21** *Calcula los valores de $\alpha$ tales que el determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *sea nulo*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3\alpha - 2 - \alpha^3 = 0$$

Si resolvemos la ecuación anterior tendremos que los valores del parámetro $\alpha$ que anulan el determinante de $A$ son 1 y $-2$

**Exercise 4.1.22** *Calcula los valores de $a$ tales que el determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$ *sea nulo*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4 - 4a = 0$$

Si resolvemos la ecuación anterior tendremos que el valor del parámetro $a$ que anula el determinante de $A$ es 1

**Exercise 4.1.23** *Calcula los valores de $m$ tales que el determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} m+1 & 3 & m \\ 3 & m+1 & 2 \\ m & 2 & m \end{pmatrix}$ *sea nulo*

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 3 & m \\ 3 & m+1 & 2 \\ m & 2 & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow m^2 - 4 = 0$$

Si resolvemos la ecuación anterior tendremos que los valores del parámetro $\alpha$ que anulan el determinante de $A$ son 2 y $-2$

**Exercise 4.1.24** *Encontrar el valor de $x$ (real) para el cual se cumple que el determinante de la matriz $B$ es 20, donde* $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} |B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 + x - 1 \\ \text{Como } |B| = 20 \end{array}\right\} \rightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 20$$

Transponiendo términos

$x^3 - x^2 + x - 21 = 0$

Si la resolvemos mediante la regla de Ruffini tendremos que las soluciones son:

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ x &= -1 + i\sqrt{6} \\ x &= -1 - i\sqrt{6} \end{aligned}$$

La única que vale es $x = 3$

**Exercise 4.1.25** *Calcula la inversa de la matriz* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$1^o$ Calculamos su determinante $|A| = -16$
$2^o$ Calculamos su matriz adjunta

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$3^o$ Calcularemos la traspuesta de la matriz anterior $(Adj(A))^t$

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$4^o$ Como $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$ entonces:

$$A^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

*Nota: Comprobemos si* $A \cdot A^{-1} = I$ *y que* $A \cdot A^{-1} = I$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.26** *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide obtener:

$$C + A \cdot B \;, C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} \;,\; (C + A \cdot B)^{-1}, \; |C| \,, \; \left|C^{-1}\right|$$

$$C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} =$ [9] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$(C + A \cdot B)^{-1} = I^{-1} = I$

[9] $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \to (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|C| = 1$

$\left|C^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. No hacía falta calcular $\left|C^{-1}\right|$, ya que $C \cdot C^{-1} = I$ y $\left|C \cdot C^{-1}\right| = |I| = 1 \to \left|C^{-1}\right| = \dfrac{1}{|C|} = 1$

**Exercise 4.1.27** *Calcula las inversas, si existen, de las siguientes matrices*

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

**Remark 7** *Recuerda que si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *es tal que* $ab - cd \neq 0$ *entonces* $A$ *admite inversa y* $A^{-1} = \dfrac{1}{ab - cd}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Por la nota anterior:

- $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $C$ no admet inversa ya que $|C| = 0$

**Remark 8** *Recuerda que si* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ *es tal que* $|A| \neq 0$ *entonces* $A$ *admite inversa y además* $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t$

donde $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ es la matriz adjunta de $A$

- $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \to |D| = 7$ por lo tanto $D$ tiene inversa

Calculemos su adjunta $Adj(D) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Como $D^{-1} = \dfrac{1}{|D|}\left(Adj(D)\right)^t = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \to |E| = -5$ por lo tanto $E$ tiene inversa

Comprueba tú que $E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to |F| = 1$ por lo tanto $F$ tiene inversa

Comprueba tú que $F^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -25 & -2 \\ -4 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.28** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *se pide*

*a) Calcular* $(A - I_3)^2 \cdot (A - 5I_3)$
*b) Obtener* $A^t$ *y razonar si existe* $A^{-1}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 \\ 4 & 9 & 4 \\ 5 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$
$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$(A - I_3)^2 \cdot (A - 5I_3) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 \\ 4 & 9 & 4 \\ 5 & 11 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 4 \to A$ admite inversa y además:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.29** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ *comprobar que* $A^2 = -2A - I_3$ *siendo* $I_3$ *la matriz identidad. Usando la fórmula anterior calcula* $A^{-1}$.

- $$\left.\begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I_3 = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow$$
  $A^2 = 2A - I_3$

- Como $A^2 = 2A - I_3 \rightarrow -A^2 + 2A = I_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} A(-A+2I_3) = I_3 \\ (-A+2I_3)A = I_3 \end{array}\right\} \rightarrow A^{-1} = -A + 2I_3$

  Así pues:

$$A^{-1} = -A + 2I_3 = -\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Remark 9** *Perfectamente puedes calcular $A^{-1}$ por otro procedimiento, pero explícitamente te han pedido que lo calcules con la relación que has demostrado*

**Exercise 4.1.30** *Demostrar usando las propiedades de los determinantes*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} =^{10} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} {}^{11} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} =^{12} 0$$

Otra manera de resolver esta cuestión.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} =^{13} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & -(b-a) \\ 0 & c-a & -(c-a) \end{vmatrix} =^{14} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =^{15} 0$$

**Exercise 4.1.31** *Calcular, sin desarrollar, el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

[10] Si a una columna le sumamos una combinación lineal de otras columnasel determinante no varía. Aquí en concreto $3^a col = 3^a col + 2^a col$

[11] Un determinante es lineal respecto de cada columna

[12] Si dos columnas son iguales el determinante es nulo

[13] Si a una fila le sumamos una combinación lineal de otras filas el determinante no varía. Aquí en concreto
$2^a fil = 2^a fil - 1^a col$
$3^a fil = 3^a fil - 1^a col$

[14] Un determinante es lineal respecto de cada fila. Lo aplico para las filas $2^a$ y $3^a$

[15] Un determinante que tenga dos filas iguales es nulo.

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} =^{16} abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} =^{17} abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} =^{18} abc(b- a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} =$$

$$=^{19} abc(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} =^{20} abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

**Exercise 4.1.32** *Calcula los siguientes determinantes por triangularización*

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -4 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & -2 & -4 \end{vmatrix} =^{21} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 5 & -7 \\ -2 & -5 & -2 & -4 \end{vmatrix} =^{22} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -27 & -4 & 17 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$=^{23} - \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & -27 & -4 & 17 \end{vmatrix} =^{24} - \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -58 & -199 \end{vmatrix} =$$

$$=^{25} - \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -1301 \end{vmatrix} = -1301$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =^{26} - \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =^{27} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

---

[16] Un determinante es lineal respecto de cada fila. Lo aplico para las filas $1^a$,$2^a$ y $3^a$

[17] Si a una fila le sumamos una combinación lineal de otras filas el determinante no varía. Aquí en concreto
$2^a fil = 2^a fil - 1^a col$
$3^a fil = 3^a fil - 1^a col$

[18] Teniendo presente que $z^2 - t^2 = (z-t)(z+t)$ y además que:

Un determinante es lineal respecto de cada fila. Lo aplico para las filas $2^a$ y $3^a$

[19] Si a una fila le sumamos una combinación lineal de otras filas el determinante no varía. Aquí en concreto.
$3^a fil = 3^a fil - 2^a col$

[20] $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$

[21] Modificamos la primera columna sumándole la segunda

[22] $2^a$fil′=$2^a$fil′+10·$1^a$fil ; $3^a$fil′=$3^a$fil′+2·$1^a$fil ; $4^a$fil′=$4^a$fil′-2·$1^a$fil

[23] Si intercambiamos la $2^a$fila con la $4^a$ el determinante cambia de signo

[24] $3^a$fil′=$3^a$fil′+2·$2^a$fil ; $4^a$fil′=$4^a$fil′+27·$2^a$fil

[25] $4^a$fil′=$4^a$fil′+58·$3^a$fil

[26] Si intercambiamos la $1^a$fila con la $4^a$ el determinante cambia de signo

[27] Si intercambiamos la $1^a$columna con la $4^a$ el determinante cambia de signo

$$=^{28}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & -11 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =^{29} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=^{30} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -43 & -19 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =^{31} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 24 & -19 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$=^{32} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & -19 & -43 \end{vmatrix} =^{33} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -91 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=^{34} -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -91 & 5 \end{vmatrix} =^{35} 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -91 \end{vmatrix} =$$

$$=^{36} 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56 \end{vmatrix} = -224$$

**Exercise 4.1.33** *Calcula el determinante* $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ *por la regla de Sarrus y mediante un desarrollo por adjuntos*

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 15 - 16 - 12 = -1$$

Si desarrollamos este determinante, por los adjuntos de la primera columna tendremos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

[28] $4^a$fila$'$=$4^a$fila-2·$1^a$fila
[29] Si intercambiamos la $2^a$columna con la $3^a$ el determinante cambia de signo
[30] $3^a$fila$'$=$3^a$fila-7·$2^a$fila; $4^a$fila$'$=$4^a$fila-$2^a$fila
[31] Si intercambiamos la $3^a$columna con la $5^a$ el determinante cambia de signo
[32] Si intercambiamos la $3^a$fila con la $5^a$ el determinante cambia de signo
[33] $5^a$fila$'$=$5^a$fila-24·$3^a$fila
[34] Por ser lineal el determinante con respecto a cada columna
[35] Si intercambiamos la $4^a$columna con la $5^a$ el determinante cambia de signo
[36] $5^a$fila$'$=$5^a$fila-5·$3^a$fila

**Exercise 4.1.34** *Calcular* $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *y* $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ *en función de* $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} =^{[37]} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} =^{[38]}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =^{[39]} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Exercise 4.1.35** *Probar sin desarrollar que* $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ p & q+r & r+p \\ x & y+z & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ q & q+r & r+p \\ y & y+z & z+x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ p & q+r & r \\ x & y+z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b+c & a \\ p & q+r & p \\ x & y+z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c+a \\ q & q & r+p \\ y & y & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ q & r & r+p \\ y & z & z+x \end{vmatrix} =^{[40]}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ p & r & r \\ x & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c \\ q & r & r \\ y & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} =^{[41]}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} =^{[42]} 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

**Exercise 4.1.36** *Probar sin desarrollar que* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

[37] Por ser el determinante lineal con respecto a cada fila

[38] Por ser el determinante lineal con respecto a cada fila

[39] Un determinante es nulo si hay filas repetidas

[40] El segundo y el tercer determinante son nulos por tener columnas repetidas

[41] El segundo y el tercer determinante son nulos por tener columnas repetidas

[42] Si en el segundo determinante intercambiamos la $3^a$ columna por la segunda y después la $2^a$ por la $1^a$ volvemos a obtener $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ al realizar dos cambios de columnas consecutivas

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =^{43} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} =^{44} 0$$

**Exercise 4.1.37** *Calcula los determinantes que a continuación se indican, aplicando convenientemente la regla de Chio a)* $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 10 & 1 \\ 4 & 10 & 20 & 1 \\ 5 & 15 & 35 & 1 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

*c)* $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -4 & 4 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 10 & 1 \\ 4 & 10 & 20 & 1 \\ 5 & 15 & 35 & 1 \end{vmatrix} =^{45} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 16 & 0 \\ 3 & 12 & 31 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} =$
  $- \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} =$

  $=^{46} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = -1$

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} =^{47} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 10 & 12 & 0 & -1 \\ 5 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 10 & 12 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} =$

  $= \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 10 & 12 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} =^{48} \begin{vmatrix} 3 & -8 & 0 \\ 15 & 7 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} = 141$

- $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 4(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} =^{49} 4 \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$
  $8 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 144$

---

[43] Si modificamos la $2^a$ columna restándole la primera y modificamos la $3^a$columna restándole la $1^a$ el determinante no varía

[44] Un determinante es nulo si hay columnas repetidas

[45] $2^a\ 'fila = 2^a fila - 1^a$
$3^a\ 'fila = 3^a fila - 1^a$
$4^a\ 'fila = 4^a fila - 1^a$

[46] $2^a\ 'fila = 2^a fila - 2 \cdot 1^a fila$
$3^a\ 'fila = 3^a fila - 3 \cdot 1^a fila$

[47] $3^a\ 'fila = 3^a fila + 2 \cdot 2^a fila$

[48] $1^a\ 'fila = 1^a fila + 3^a fila$
$2^a\ 'fila = 2^a fila + 3^a fila$

[49] $2^a\ 'fila = 2^a fila - 1^a fila$

**Exercise 4.1.38** *Si* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{vmatrix} = -5$ *calcula: a)* $\begin{vmatrix} a+4b & b & c \\ d+4e & e & g \\ h+4i & i & j \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & g \\ h & 5i & j \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} a+4b & 5b & c+5a \\ d+4e & 5e & g+5d \\ h+4i & 5i & j+5h \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} a+4b & b & c \\ d+4e & e & g \\ h+4i & i & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4b & b & c \\ 4e & e & g \\ 4i & i & j \end{vmatrix} =^{[50]} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{vmatrix} = -5$

- $\begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & g \\ h & 5i & j \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{vmatrix} = -25$

- $\begin{vmatrix} a+4b & 5b & c+5a \\ d+4e & 5e & g+5d \\ h+4i & 5i & j+5h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5b & c+5a \\ d & 5e & g+5d \\ h & 5i & j+5h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4b & 5b & c+5a \\ 4e & 5e & g+5d \\ 4i & 5i & j+5h \end{vmatrix} =^{[51]}$

$= \begin{vmatrix} a & 5b & c+5a \\ d & 5e & g+5d \\ h & 5i & j+5h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & g \\ h & 5i & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 5b & 5a \\ d & 5e & 5d \\ h & 5i & 5h \end{vmatrix} =^{[52]} \begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & g \\ h & 5i & j \end{vmatrix} = -25$

**Exercise 4.1.39** *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *determina a)*$|A|$ *b)* $(Adj(A))^t$ *c)* $A \cdot (Adj(A))^t$ *d)* $(Adj(A))^t \cdot A$ *y e)* $A^{-1}$

- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 12 + 8 + 24 - 2 = 42$

- $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 8 \\ 9 & 9 & -3 \\ -16 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -10 & 9 & -16 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 9 & -16 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

[50] El segundo determinante es nulo ya que la $1^a$col y la $2^a$ son L.D

[51] El segundo determinante es nulo ya que la $1^a$col y la $2^a$ son L.D

[52] El segundo determinante es nulo ya que la $2^a$col y la $3^a$ son L.D

$$A\cdot(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = 42I$$

- $(Adj(A))^t \cdot A = \begin{pmatrix} -10 & 9 & -16 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$(Adj(A))^t \cdot A = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = 42I$$

- Vamos a calcular $A^{-1}$

Por los apartados anteriores; podemos observar con facilidad que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$

Por lo tanto $A^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -10 & 9 & -16 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{21} & \frac{3}{14} & -\frac{8}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{21} \\ \frac{4}{21} & -\frac{1}{14} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.40** *Dadas las matrices* $D = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $I$ *la matriz identidad de orden 3, comprobar: a) Que* $D^2$ *es la matriz nula b) Que* $D$ *no tiene inversa c) Que* $D - I$ *si admite inversa. d) Demostrar que siempre que* $D^2$ *sea la matriz nula entonces se tiene que* $(D-I)^{-1} = -D - I$ *e) Calcula la inversa de* $D - I$

- $D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $D$ no es regular (no admite inversa); ya que $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ por tener una columna nula

- Calculemos $D-I = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

$D - I$ es regular (admite inversa); ya que $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -1$

- Veamos si es cierta la implicación. Si $D^2 = O \Longrightarrow (D-I)^{-1} = -D - I$

Para demostrar la tesis, bastará con comprobar que $\begin{cases} (-D-I)(D-I) = I \\ (D-I)(-D-I) = I \end{cases}$

Veamos la primera

$(-D-I)(D-I) = -D^2 + D \cdot I - I \cdot D + I^2 =^{53} O + O + I = I$
Veamos la segunda
$(D-I)(-D-I) = -D^2 - D \cdot I + I \cdot D + I^2 =^{54} O + O + I = I$
Con lo que queda demostrado que

$$(D-I)^{-1} = -D - I$$

- Calculemos ahora $(D-I)^{-1}$

Por el apartado anterior, sabemos que $(D-I)^{-1} = -D - I$ , por lo tanto
$(D-I)^{-1} = -D-I = -\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.41** *Dadala matriz* $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ *determina a)*$|A|$ *b)* $(Adj(A))^t$ *c)* $A \cdot (Adj(A))^t$ *d)* $(Adj(A))^t \cdot A$ *(Nota: Cuidado; porque B no admite inversa)*

**Exercise 4.1.42** *Calcula como quieras el determinante* $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} =^{55} \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} =$$
$$= (4a+1) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} ==^{56} (4a+1) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$4a+1$

**Exercise 4.1.43** *Calcula como quieras el determinante* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-2 & b+3 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-2 & b+3 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix} =^{57} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & b+3 & c-1 \\ a+b+c & b-3 & c+2 \end{vmatrix} =$$
$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+3 & c-1 \\ 1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix} =^{58} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

[53] Por hipótesis $D^2 = O$
Por ser $I$ la matriz identidad $\begin{cases} D \cdot I = I \cdot D \to DI - ID = O \\ I^2 = I \end{cases}$
[54] Por hipótesis $D^2 = O$
Por ser $I$ la matriz identidad $\begin{cases} D \cdot I = I \cdot D \to -DI + ID = O \\ I^2 = I \end{cases}$
[55] Si a la $1^a$col le sumamos la $2^a$col, la $3^a$col y la $4^a$ col el determinante no varía
[56] Si a la $2^a$ le restamos la $1^a$ , a la $3^a$ le restamos la $1^a$ y a la $4^a$ le restamos la $1^a$ el determinante no varía
[57] Si a la $1^a$col le sumamos la $2^a$col y la $3^a$col el determinante no varía
[58] Si a la $2^a$ le restamos la $1^a$ y a la $3^a$ le restamos la $1^a$ el determinante no varía

$$=^{59}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(a+b+c)$$

**Exercise 4.1.44** *Calcula el determinante de la matriz* $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

*Y si alguien se aburre que calcule* $C^{-1}$ *(¡Suerte!)*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =^{60} \begin{vmatrix} -11 & 8 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -11 & 8 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=^{61} 2\begin{vmatrix} -11 & 8 & 1 & -3 \\ 14 & -2 & 0 & 0 \\ 79 & -57 & 0 & 24 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 14 & -2 & 0 \\ 79 & -57 & 24 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=^{62} 2\begin{vmatrix} 14 & -2 & 0 \\ 7 & -9 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 14 & -2 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = 2(-14\cdot 9 + 2\cdot 7) = -224$$

Si alguien está aburrido que compruebe que

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{112} & \frac{9}{112} & -\frac{1}{56} & -\frac{5}{56} & \frac{3}{7} \\ \frac{13}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{8} & 3 \\ -\frac{15}{28} & \frac{1}{28} & \frac{3}{14} & \frac{15}{14} & -\frac{15}{7} \\ -\frac{45}{28} & \frac{3}{28} & \frac{1}{7} & \frac{26}{7} & -\frac{97}{14} \\ \frac{167}{112} & -\frac{13}{112} & -\frac{11}{56} & -\frac{167}{56} & \frac{40}{7} \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.45** *Calcula los siguientes determinantesa)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} =^{63} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 19 & 37 & 61 \end{vmatrix} =$

[59] Si a la $3^a$ le sumamos la $2^a$ el determinante no varía

[60] $1^{a\prime} = 1^a - 2\cdot 4^a$

[61] $2^{a}\prime = 2^a - 1^a$

$3^{a}\prime = 3^a - 7\cdot 1^a$

[62] $2^{a}\prime = 2^a - 24\cdot 3^a$

[63] $\begin{cases} 2^a col' = 2^a col - 1^a col \\ 3^a col' = 3^a col - 2^a col \\ 4^a col' = 4^a col - 3^a col \end{cases}$

$$=^{64}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 8 & 19 & 18 & 24 \end{vmatrix} =^{65}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 19 & 18 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} =^{66} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b & d-c \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 & d^2-c^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-b^3 & d^3-c^3 \end{vmatrix} =^{67}$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+b & d+c \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+cb+b^2 & d^2+dc+c^2 \end{vmatrix} =^{68}$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c-a & d-b \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+cb-ab-a^2 & d^2+dc-cb-b^2 \end{vmatrix} =^{69}$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c-a & d-b \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & (c-a)(c+a+b) & (d-b)(d+b+c) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c+a+b & d+b+c \end{vmatrix} =^{70}$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 & 0 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c+a+b & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)(d-a)$$

**Exercise 4.1.46** *Calcular el determinante* $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix}$ *en función del determinante* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$

---

[64] $\begin{cases} 3^a col'' = 3^a col' - 2^a col' \\ 4^a col'' = 4^a col' - 3^a col' \end{cases}$

[65] $4^a col''' = 4^a col'' - 3^a col''$

[66] Restando cada columna a la anterior

[67] $\begin{cases} b^2-a^2 = (b-a)(b+a) \\ b^3-a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2) \end{cases}$

$\begin{cases} c^2-b^2 = (c-b)(c+b) \\ c^3-b^3 = (c-b)(c^2+cb+b^2) \end{cases}$

$\begin{cases} d^2-c^2 = (d-c)(d+c) \\ d^3-c^3 = (d-c)(d^2+dc+c^2) \end{cases}$

[68] $3^a col' = 3^a col - 2^a col$

$4^a col' = 4^a col - 3^a col$

[69] $c^2+cb-ab-a^2 = c^2-a^2+cb-ab = (c-a)(c+a)+(c-a)b = (c-a)(c+a+b)$

$d^2+dc-cb-b^2 = d^2-b^2+dc-cb = (d-b)(d+b)+(d-b)c = (d-b)(d+b+c)$

[70] Restando $4^a$ columna a la anterior

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} =^{71} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(m+n+l) & n+l & l+m \\ 2(x+y+z) & y+z & z+x \end{vmatrix}$$

Por ser lineal el determinante con respecto a la $1^a$ col

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & c+a \\ m+n+l & n+l & l+m \\ x+y+z & y+z & z+x \end{vmatrix} =^{72}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b-a & c+a \\ m & n-m & l+m \\ x & y-x & z+x \end{vmatrix} =^{73} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

**Exercise 4.1.47** *Calcula utilizando las propiedades*

$$a)\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$a)\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$$

Restándole a cada fila la anterior tendremos

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & 0 & x-f \end{vmatrix} = x(x-a)(x-d)(x-f)$$

$$b)\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Restándole a cada columna la anterior tendremos

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-ab \\ 2a & b-a & b-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculando el determinante por los adjuntos de la $3^a$ fila

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-ab \\ 2a & b-a & b-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-ab \\ b-a & b-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,(b-a) & b\,(b-a) \\ b-a & b-a \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)^2\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)^2(a-b)$$

Como $(b-a)^2 = (a-b)^2$ entonces

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

---

[71] $1^a col' = 1^a col + 2^a col + 3^a col$

[72] Restando a cada columna la siguiente

[73] $2^a col' = 2^a col + 1^a col$
$3^a col\prime = 3^a col - 1^a$

c) $\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$

Hazlo como ejercicio

$$\text{Ayuda}\left\{ : \begin{array}{l} \begin{pmatrix} b+c \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b \\ c+a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c \\ c \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ b \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Con esta ayuda has de obtener que $\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & b & 0 \\ 0 & a & c \\ a & 0 & b \end{vmatrix}$

después, calcúlalo por los adjuntos de una fila(o columna). Has de obtener $4abc$

**Exercise 4.1.48** *Calcula los siguientes determinantes, ahora por la regla de Chio*

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -4 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & -2 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

**Exercise 4.1.49** *Resuelve la ecuación* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1-7x$

En primer lugar calcularemos el determinante.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 2(x-1)(x-2)-(x+3)+4(x-1)-(x-2)(x+3) = x^2-4x+3$

El problema queda reducido a resolver la ecuación

$$\begin{aligned} x^2-4x+3 &= 1-7x \to x^2+3x+2=0 \\ \textit{Cuyas soluciones son } x &= -1 \text{ y } x=-2 \end{aligned}$$

**Exercise 4.1.50** *Resuelve la ecuación* $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$

En primer lugar calcularemos el determinante.

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =^{\text{[74]}} \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 2x \\ 6+2x & x-1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} x+2 & 2x \\ 6+2x & 5 \end{vmatrix} = 4x^2+7x+10$$

El problema queda reducido a resolver la ecuación

$$\begin{aligned} 4x^2+7x+10 &= 67 \rightarrow 4x^2+7x-57=0 \\ \textit{Cuyas soluciones son } x &= 3 \text{ y } x=-\frac{19}{4} \end{aligned}$$

**Exercise 4.1.51** *Calcula el siguiente determinante* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} =^{\text{[75]}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$=^{\text{[76]}} - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -17 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -17 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{33}{2}$$

**Exercise 4.1.52** *Calcula el siguiente determinante* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}$ *triangularizando*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}^{\text{[77]}} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}^{\text{[78]}} =$$

[74] $1^a$col$'$ =1col+2·$2^a$ *col*

[75] $1^a$ fila$'$=$1^a$fila+$2^a$ fila

[76] $1^a$ fila$'$=$1^a$fila+$3^a$ fila
$4^a$ fila$'$=$4^a$fila+5·$3^a$ fila

[77] Intercambiamos $1^a$ fila y $2^a$ fila. El determinante cambia de signo

[78] $1^a$ fila$'$=$1^a$fila+$2^a$ fila

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} =^{79} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}^{80} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}^{81} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix} =$$

$$^{82} = -3\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix}^{83} = -3\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{vmatrix} =$$

$$-3\left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{33}{2}$$

**Exercise 4.1.53** *Determina los valores de m que anulan el determinante* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix}$

En primer lugar, calculamos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix} = (m+1)(2m+1)-2m^2+m(2m+1)-m(2m+1) = 3m+1$

Por lo tanto, el único valor que anula el determiante es la solución de la ecuación $3m+1=0 \to m = -\frac{1}{3}$

**Exercise 4.1.54** *Comprueba que el determinante* $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3560 \\ 1 & 7 & 4 & 1740 \\ 2 & 8 & 3 & 2830 \\ 7 & 9 & 9 & 7990 \end{vmatrix}$ *es nulo*

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3560 \\ 1 & 7 & 4 & 1740 \\ 2 & 8 & 3 & 2830 \\ 7 & 9 & 9 & 7990 \end{vmatrix}^{84} = 0$$

[79] Por ser lineal el determinante con respecto a la $2^a$ fila, introducimos el -1 multiplicando a la $2^a$ fila

[80] $3^a$ fila$'$=$3^a$fila-$2^a$ fila
$4^a$ fila$'$=$4^a$fila-5·$2^a$ fila

[81] $4^a$ fila$'$=$4^a$fila-4·$3^a$ fila
$5^a$ fila$'$=$5^a$fila-3·$3^a$ fila

[82] Por ser lineal el determinante con respecto a la $4^a$ fila

[83] $5^a$ fila$'$=$5^a$fila-$4^a$ fila

[84] Como la $4^a$ columna es combinación lineal de la $1^a$,$2^a$,$3^a$ entonces el determinante se

**Exercise 4.1.55** *Comprueba que* $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3563 \\ 1 & 7 & 4 & 1743 \\ 2 & 8 & 3 & 2833 \\ 7 & 9 & 9 & 7993 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3563 \\ 1 & 7 & 4 & 1743 \\ 2 & 8 & 3 & 2833 \\ 7 & 9 & 9 & 7993 \end{vmatrix} =^{[85]} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

**Exercise 4.1.56** *Determina la matriz $X$ que satisface la ecuación:* $3X + I_3 = A \cdot B - A^2$ *siendo* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{matrix}$

Como $3X + I_3 = A \cdot B - A^2 \rightarrow 3X = A \cdot B - A^2 - I_3 = A(B - A) - I_3$

$$B - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B - A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B - A) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Como $3X = A \cdot (B - A) - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow X = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.57** *Sea* $C = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix}$ *encontrar $k$ para que a)* $\exists C^{-1}$

*b)* $RangoC = 3$

Calculo $|C| = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} =^{[86]} -k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 1 & -k & -k & -1 \end{vmatrix} =$

$$=^{[87]} -k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =^{[88]} 3k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$=^{[89]} 3k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = 3k(-3k + k^2) = 3k^2(k - 3)$$

---

anula (*En concreto* , $4^a col = 1000 \cdot 1^a col + 100 \cdot 2^a col + 10 \cdot 3^a$)

[85] $4^a col' = 4^a col - 1000 \cdot 1^a col - 100 \cdot 2^a col - 10 \cdot 3^a col$

[86] Por ser lineal el determinante con respecto a cada columna

[87] $2^{a\prime} fil$=$2^a$fil-$1^a$fil; $3^{a\prime} fil$=$3^a$fil-$1^a$fil; $4^{a\prime} fil$=$4^a$fil-$1^a$fil

[88] Por ser lineal el determinante con respecto a cada fila

[89] Calculando el determinante por los adjuntos de la primera columna

Valores que anulan el determinante de $C$

$$3k^2(k-3) = 0 \to k = 0 \text{ y } k = 3$$

Casos:

$I)$ Si $k \neq 0$ y $k \neq 3 \to |C| \neq 0 \to RangoC = 4$ y además $C$ es regular ($C$ admite inversa)

$II)$Si $k = 0 \to |C| = 0 \to RangoC < 4$

Estudiemos su rango $rang \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$rang \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$= rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$

$II)$Si $k = 3 \to |C| = 0 \to RangoC < 4$

Estudiemos su rango $rang \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$

$= rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & -7 \\ 0 & -7 & -8 & -7 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & -7 \\ 0 & -7 & -8 & -7 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$

**Exercise 4.1.58** *Calcula el rango por columnas de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ *utilizando determinantes*

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \to RangoA \geq 2$ ya que la $1^a$y $2^a$columnas son L.Independientes

¿La $3^a$col es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$?

Para saberlo; tendré que orlar el menor anterior no nulo con la tercera columna y el resto de filas para obtener todos los menores de orden tres donde intervengan las columnas $1^a$,$2^a$ y $3^a$.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ .Si fuesen los dos nulos, la $3^a$ columna sería C.L de la $1^a$ y la $2^a$. En caso contrario (al menos uno no nulo) las tres columnas serían L.Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}, = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$la $3^a$ columna es C.L de la $1^a$ y la $2^a$

¿La $4^a$col es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$?

Para saberlo; tendré que orlar el menor anterior no nulo con la cuarta columna y el resto de filas para obtener todos los menores de orden tres donde intervengan las columnas $1^a$,$2^a$ y $4^a$.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ .Si fuesen nulos, la $4^a$ columna sería C.L de la $1^a$ y la $2^a$. En caso contrario (al menos uno no nulo) las tres columnas serían L.Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$la $4^a$ columna es C.L de la $1^a$ y la $2^a$

¿La $5^a$col es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$?

Para saberlo; tendré que orlar el menor anterior no nulo con la quinta columna y el resto de filas para obtener todos los menores de orden tres donde intervengan las columnas $1^a$,$2^a$ y $5^a$.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ .Si fuesen nulos, la $5^a$ columna sería C.L de la $1^a$ y la $2^a$. En caso contrario (al menos uno no nulo) las tres columnas serían L.Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}=1 \rightarrow$la $5^a$ columna no es C.L de la $1^a$ y la $2^a$

Las columnas $1^a$,$2^a$ y $5^a$ son L.I y además la $3^a$ es C.L. de la $1^a$ y la $2^a$ ; al igual que ocurre con la $4^a$

Por lo tanto $RangA = 3$

**Exercise 4.1.59** *Calcula el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ *según los valores del parámetro a*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a & 1+a & 1-2a \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 4 & a-8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 1-2a \\ -2 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & a-8 \end{vmatrix} = -2a^2 + 12a - 18 = -2(a-3)^2,$$

$I)$ Si $a \neq 3 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow RangoA = 4$

$II)$Si $a = 3 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow RangoA < 4$

$$Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} =$$
$$= Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

**Exercise 4.1.60** *Calcula el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ *según los valores del parámetro a*

$|A| = \begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)\begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)(a-a^2) == -a\,(a-1)\,(a+1)$

Valores que anulan $|A|$

$-a\,(a-1)\,(a+1) = 0 \to \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=-1 \end{cases}$

$I$)Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq -1 \to |A| \neq 0 \to RangoA = 3$

$II$) Si $a = 0 \to |A| = 0 \to RangoA < 3$

$$rang\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$III$)Si $a = 1 \to |A| = 0 \to RangoA < 3$

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$IV$)Si $a = -1 \to |A| = 0 \to RangoA < 3$

$$rang\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

**Exercise 4.1.61** *Dada la matriz* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *donde m es un parámetro real, se pide:*

*a) Determinar el rango de M según los valores de m*

*b) Calcular* $|M|$ *si* $m = 3$*.¿ Tiene inversa?*

*c) Dar un valor de m para que M sea singular (no admita inversa)*

*d) Si* $m = 0$*, calcula* $M^{-1}$

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix} \to |M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & m \\ m & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - m + 2m^2 = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m-1)$

<u>**Casos**</u>:

I) Si $m \neq 1$ y $m \neq -\dfrac{1}{2} \rightarrow |M| \neq 0 \rightarrow$Las tres filas (o columnas son L.I), por lo tanto el $RangM = 3$

II) Si $m = 1 \rightarrow |M| = 0 \rightarrow$Las tres filas de $M$ son L.Dependientes $\rightarrow$ $Rang(M) < 3$

$Rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ [90] $= Rang \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

III) Si $m = -\dfrac{1}{2} \rightarrow |M| = 0 \rightarrow$Las tres filas de $M$ son L.Dependientes $\rightarrow Rang(M) < 3$

$Rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}$ [91] $= Rang \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

b) Como $|M| = 2m^2 - m\ -1$,entonces si $m = 3 \rightarrow |M| = 14$

M es regular ya que $|M| \neq 0$

c) Para que $M$ sea singular (*no admita inversa*) su determinante ha de ser cero. Esto ocurre para los siguientes valores $m = 1$ y $m = -\dfrac{1}{2}$

d) Si $m = 0 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

- $|M| = -1$

- $Adj(M) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

- $(Adj(M))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

- $M^{-1} = \dfrac{1}{|M|}\,(Adj(M))^t = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.62** *Estudiar el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}$

<u>Por Gauss</u>

---

[90] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

[91] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix} =^{92} Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 1 & -k+4 \end{pmatrix} =^{93} Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -k+4 \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} =$

$^{94} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -k+4 \\ 0 & 0 & k^2-4k+3 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -k+4 \\ 0 & 0 & (k-1)(k-3) \end{pmatrix}$

Casos

I) Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \rightarrow RangA = 3$

II) Si $k = 1 \rightarrow RangA = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$

III) Si $k = 3 \rightarrow RangA = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$
2

Hazlo ahora tú; pero utilizando menores complementarios

**Exercise 4.1.63** *Calcular el valor de k para que el rango de A sea 2*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -1 & 6 & k \end{pmatrix} {}^{95} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & k \end{pmatrix}$$

Es evidente que el $RangA = 2$ si $k = -1$ ya que las dos últimas filas coincidirían.

**Exercise 4.1.64** Selectivo 2004 *Determinar el valor real x para el cual se cumple la propiedad siguiente:*

*el determinante de la matriz* $2B$ *es 160 donde* $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$

Sabemos que $\left.\begin{matrix} |2B| = 2^3\,|B| \\ y \\ |2B| = 160 \end{matrix}\right\} \rightarrow |B| = 20$

Como $|B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 + x - 1$,entonces tendremos que resolver la ecuación:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 20 \rightarrow x^3 - x^2 + x - 21 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son: $x = 3, x = -1 + i\sqrt{6}, x = -1 - i\sqrt{6}$

La que nos pide es $x = 3$; ya que las otras dos no son números reales.

[92] $3^a fila\prime = 3^a fila - 4 \cdot 1^a fila$
[93] Si intercambiamos la $2^a$ y $3^a$fila el rango no varía
[94] $3^a fila\prime = 3^a fila - k \cdot 2^a fila$
[95] $2^a fila\prime = 2^a fila - 2 \cdot 1^a fila$
$3^a fila\prime = 3^a fila - 4 \cdot 1^a fila$

**Exercise 4.1.65** Selectivo (2004) *Calcular la matriz X cuadrada de orden tal que* $A \cdot X = X \cdot A$ *siendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Si $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ como $A{\cdot}X = X{\cdot}A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$ Esta igualdad matricial da lugar al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2z = x+3y \\ y+2t = 2x+4y \\ 3x+4z = z+3t \\ 3y+4t = 2z+4t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y+2z = 0 \\ -2x-3y+2t = 0 \\ 3x+3z-3t = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{array}\right\}^{96} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z-t = 0 \\ -2x-3y+2t = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{array}\right\}$$

Si utilizamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{97} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow^{98}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+z-t = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{El sistema es compatible doblemente indeterminado}$$

El conjunto solución es $S = \left\{(-z+t, \frac{2}{3}z, z, t) \ / \ z, t \in \Re\right\}$
Otra manera de expresar el conjunto solución sería ésta:
$S = \{(-3\alpha+\beta, 2\alpha, 3\alpha, \beta) \ / \ \alpha, \beta \in \Re\} = \{\alpha(-3,2,3,0) + \beta(1,0,0,1) \ / \ \in \Re\}$
El conjunto de las matrices $X$ que conmutan con la matriz $A$ son de la forma:

$$S = \left\{\begin{pmatrix} -z+t & \frac{2}{3}z \\ z & t \end{pmatrix} \ / \ z, t \in \Re\right\}$$

También se puede expresar así:

$$\begin{aligned} S &= \left\{\begin{pmatrix} -3\alpha+\beta & 2\alpha \\ 3\alpha & \beta \end{pmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \Re\right\} \\ & \text{o así} \\ S &= \left\{\alpha\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \Re\right\} \end{aligned}$$

**Exercise 4.1.66** Selectivo 2004 *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*a) Justificad que existe la matriz* $A^{-1}$*, y calculad el determinante de* $A^{-1}$
*b) Calcula la matriz* $B = A(A+4I)$
*c) Setermina los números reales* $x, y, z, t$ *tales que* $A^{-1} = xA + yI, A^2 = zA + tI$

[96] la $1^a$ ecuación y la última son opuestas. Podemos prescindir de una de ellas
[97] $2^a fila\prime = 2^a fila + 2 \cdot 1^a fila$
[98] $3^a fila\prime = 3^a fila + 2^a fila$

a) Como $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow A$ admite inversa

En virtud de la regla de Laplace$\rightarrow |A \cdot B| = |A|\,|B|$

Como $A \cdot A^{-1} = I \rightarrow \left|A \cdot A^{-1}\right| = |I| = 1 \rightarrow |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1$

$\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{-1}{8}$

b) $B = A(A{+}4I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$

Calculem $(A + 4I) \cdot A = A^2 + 4IA = A^2 + 4AI = A(A + 4I) = -4I$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\left.\begin{array}{l} A(A + 4I) = -4I \\ (A + 4I)A = -4I \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} A\left[-\dfrac{1}{4}(A + 4I)\right] = I \\ \left[-\dfrac{1}{4}(A + 4I)\right] A = I \end{array}\right\} \rightarrow A^{-1} = -\dfrac{1}{4}(A+$
$4I) = -\frac{1}{4}A - I$

Por ser $A(A{+}4I) = -4I \rightarrow A^2{+}4AI = -4I \rightarrow A^2 = -4AI{-}4I = -4A{-}4I$

Por lo tanto $x = -\frac{1}{4}$, $y = -1$, $z = -4, t = -4$

No nos piden $A^{-1}$, pero si quisieramos calcularla:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}A{-}I = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.67** Selectivo (2002) *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 1 & z & -1 \end{pmatrix}$

*a) Calcula los determinantes de $A$ y de $B$*

*b) Para $x = y = z = 1$ calcular el determinante de $A \cdot B$*

*c) Obtener razonadamente, para qué valores de $x, y, z$ ninguna de las matrices $A$ y $B$ tiene inversa*

a) $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10x - 8y + 2z$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{vmatrix} = -4y + 3z - x$

b) Si $x = y = z = 1 \rightarrow \begin{array}{l} |A| = 4 \\ |B| = -2 \end{array} \rightarrow |A \cdot B| = |A|\,|B| = 4 \cdot (-2) = -8$

Otra forma de resolverlo más larga

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\3&5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3&-1\\1&1&1\\21&13&-7\end{pmatrix}$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}5&3&-1\\1&1&1\\21&13&-7\end{vmatrix}=-8$$

c) Ninguna de las dos matrices tiene inversa $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}|A|=0\\ y\\ |B|=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}10x-8y+2z=0\\ -x-4y+3z=0\end{array}\right\}$

La solución es $S=\left\{(\frac{1}{2}y,y,\frac{3}{2}y)\ /\ z\in\Re\right\}$

**Exercise 4.1.68** Selectivo (2002) *Para cada número real* $\lambda, M(\lambda)$ *es la matriz* $M(\lambda)=\begin{pmatrix}4&3&\lambda\\2&1&2\\\lambda&\lambda&-1\end{pmatrix}$ *Se pide:*

*a) Calcular*$|M(\lambda)|$*,y justificar que para cualquier valor de* $\lambda$ *existe la inversa* $(M(\lambda))^{-1}$

*b) Calcular* $(M(0))^{-1}$

*c) Si* $A=M(8), B=M(4)$ *y* $C=M(3)$ *calcúlese razonadamente, el determinante de la matriz producto* $A\cdot B^{-1}\cdot C^{-1}$

a)$|M(\lambda)|=\begin{vmatrix}4&3&\lambda\\2&1&2\\\lambda&\lambda&-1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2$

La ecuación $\lambda^2-2\lambda+2=0$ no tiene solución real; por lo tanto sea cual sea el valor de $\lambda$ el determinante de la matriz $M(\lambda)$ nunca se anula. Por lo que la matriz $M(\lambda)$ es regualar ( admite siempre inversa).

b) $M(0)=\begin{pmatrix}4&3&0\\2&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$|M(0)|=2$

$Adj(M(0))=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&-4&0\\6&-8&-2\end{pmatrix}$

$[Adj(M(0))]^t=\begin{pmatrix}-1&3&6\\2&-4&-8\\0&0&-2\end{pmatrix}$

$[M(0)]^{-1}=\dfrac{1}{|M(0)|}[Adj(M(0))]^t=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&6\\2&-4&-8\\0&0&-2\end{pmatrix}$

c) $|A|=|M(8)|=8^2-2\cdot 8+2=50, |B|=|M(4)|=16-8+2=10$ y$|C|=|M(3)|=9-6+2=5$

Además $\left|B^{-1}\right|=\dfrac{1}{10},\left|C^{-1}\right|=\dfrac{1}{5}$

Como $\left|A\cdot B^{-1}\cdot C^{-1}\right|=|A|\cdot\left|B^{-1}\right|\cdot\left|C^{-1}\right|=50\cdot\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{5}=1$

**Exercise 4.1.69** Selectivo (2002) *Dadas las matrices reales*

$A=\begin{pmatrix}5&8\\9&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\\1&4\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}3&7\\1&2\end{pmatrix}$

*a) Calcular la matriz $M = A - 2B \cdot C$*
*b) Justifica que existe la matriz $D^{-1}$, inversa de, D y calcular tal matriz*
*c) Calcular las matrices $X, Y$ que cumplen $D \cdot X = M = Y \cdot D$*

a) $M = A - 2B \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa ya que $|D| = -1$

Su inversa será $D^{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) Si $D \cdot X = M \rightarrow D^{-1} \cdot (D \cdot X) = D^{-1} \cdot M \rightarrow I \cdot X = D^{-1} \cdot M$

$X = D^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -165 & 0 \\ 72 & 2 \end{pmatrix}$

Si $Y \cdot D = M \rightarrow (Y \cdot D) D^{-1} = M \cdot D^{-1} \rightarrow Y \cdot I = M \cdot D^{-1}$

$Y = M \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 21 \\ 46 & -159 \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.70** Selectivo (2001) *Calcular el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifique $A \cdot X + B = C$ siendo:*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 \rightarrow A$ es regular (admite inversa)

Calculémosla:

$Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} [Adj(A)]^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

Para resolver la ecuación $A \cdot X + B = C \rightarrow A \cdot X = C - B$

Multiplicando esta igualdad por $A^{-1}$ tendremos

$A^{-1} (A \cdot X) = A^{-1} (C - B) \rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} (C - B)$

$I \cdot X = A^{-1} (C - B) \rightarrow X = A^{-1} (C - B)$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} (C - B) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{17}{6} \end{pmatrix} \to x = 1, y = -\frac{3}{2}, z = -\frac{17}{6}$$

**Exercise 4.1.71** (Valencia 2005) *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, *y* $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,*calcular razonadamente la matriz* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *que satisface la ecuación* $(A \cdot B' + C) \cdot X = (A' \cdot D) \cdot E$ *donde* $M'$ *significa la matriz traspuesta de la matriz* $M$

$$A \cdot B' + C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Llamamos a esta matriz $T = A \cdot B' + C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

$$(A' \cdot D) \cdot E = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Llamamos a esta matriz $H = (A' \cdot D) \cdot E = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$

El problema queda reducido a resolver la ecuación $T \cdot X = H$

Como $T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ es tal que $|T| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 7$; entonces $T$ es regular (admite inversa)

Multiplicando la relación $T \cdot X = H$ por $T^{-1}$ tendremos:

$T^{-1} \cdot (T \cdot X) = T^{-1} \cdot H \to \left(T^{-1} \cdot T\right) \cdot X = T^{-1} \cdot H \to I \cdot X = T^{-1} \cdot H$

Así pues; la matriz incógnita $X$ será igual a $T^{-1} \cdot H$

Calculemos pues $T^{-1}$

$$Adj(T) = \begin{pmatrix} -1 & -14 & -21 \\ -2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$[Adj(T)]^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} [Adj(T)]^t = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot H = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.72** (Valencia 2003)*Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$
*y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
*a) ¿Para qué valores reales de $m$ es $A$ invertible?*
*b) En la matriz $A$ con $m = 0$ obtened la matriz real cuadada $X$ de orden 3 que satisfaga la igualdad $B - A \cdot X = A \cdot B$*

- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$ calculemos su determinante

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3)$
Recuerda que una matriz cuadrada, $A$, es regular (admite inversa) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
Por lo tanto $A$ admite inversa $\Longleftrightarrow m \neq 1$ y $m \neq 3$
Suponiendo pues que $m \neq 1$ y $m \neq 3$,vamos a calcular sus inversa

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & m \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & m-4 & 1 \\ m^2+m+3 & -15 & 5m \\ -m & 3 & -m \end{pmatrix}$$

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(m-1)(m-3)} \begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix}$$

- Vamos ahora a resolver la ecuación $B - A \cdot X = A \cdot B$ cuando $m = 0$

$B - A \cdot X = A \cdot B \rightarrow B - A \cdot B = A \cdot X$
Como $B = I \cdot B$ entonces la ecuación queda así:
$I \cdot B - A \cdot B = A \cdot X$
Sacando factor común la matriz $B$, tendremos:
$(I - A) \cdot B = A \cdot X$
Multiplicando por la izquierda por $A^{-1}$ tendremos:

$A^{-1}\cdot[(I-A)\cdot B]=A^{-1}\cdot(A\cdot X)\to A^{-1}\cdot[(I-A)\cdot B]=(A\cdot A^{-1})\cdot X$
$A^{-1}\cdot[(I-A)\cdot B]=I\cdot X\to X=A^{-1}\cdot[(I-A)\cdot B]=\left[A^{-1}\cdot(I-A)\right]\cdot B$
De donde deducimos:

$$X=\left[A^{-1}\cdot(I-A)\right]\cdot B^{[99]}=\left[A^{-1}-I\right]\cdot B$$

Como $m=0\to A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&3&0\\-4&-15&3\\1&0&0\end{pmatrix}$ y por lo tanto, la matriz buscada es:

$$X=\left[A^{-1}-I\right]\cdot B=\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&3&0\\-4&-15&3\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&1&0\\-\frac{4}{3}&-6&1\\\frac{1}{3}&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}&0\\-6&-\frac{4}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$$

**Exercise 4.1.73** (Valencia 2003) *Dadas las matrices reales de orden 2* $P=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ *y* $Q=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ *calcular:*
*a) La matriz* $P^{-1}$
*b) La matriz real cuadrada* $X$*, de orden 2, tal que* $Q=P^{-1}\cdot X\cdot P$
*c) Calcular* $\left(P\cdot Q\cdot P^{-1}\right)^2$

- Como $P=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ y $|P|=-1\to P$ admite inversa y vale $P^{-1}=-\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

- ¿$X$? / $Q=P^{-1}\cdot X\cdot P$.

Multiplicamos, por la izquierda, por $P$
$P\cdot Q=P\cdot\left(P^{-1}\cdot X\cdot P\right)=\left(P\cdot P^{-1}\right)\cdot(X\cdot P)\to P\cdot Q=I\cdot(X\cdot P)=X\cdot P$
Multiplicando ahora, por la derecha, por $P^{-1}$
$(P\cdot Q)\cdot P^{-1}=(X\cdot P)\cdot P^{-1}\to P\cdot Q\cdot P^{-1}=X\cdot\left(P\cdot P^{-1}\right)$
$(P\cdot Q)\cdot P^{-1}=X\cdot I\to(P\cdot Q)\cdot P^{-1}=X$
$X=(P\cdot Q)\cdot P^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}=$
$X=\begin{pmatrix}2&6\\4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\6&-1\end{pmatrix}$

- $\left(P\cdot Q\cdot P^{-1}\right)^2=X^2=\begin{pmatrix}6&-2\\6&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-2\\6&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&-10\\30&-11\end{pmatrix}$

**Exercise 4.1.74** (Valencia 2003) *a)Calcular las matrices reales cuadradas de orden 3,* $X$ *y* $Y$*, que satisfacen las ecuaciones siguientes* $\left\{\begin{array}{l}2X+Y=B\\X-2Y=C\end{array}\right.$ *, Solution is :* $\left\{Y=\frac{1}{5}B-\frac{2}{5}C,X=\frac{2}{5}B+\frac{1}{5}C\right\}$ *donde* $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ *y* $C=$

[99] $A^{-1}\cdot I=A^{-1}$ y $A\cdot A^{-1}=I$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*b) Calcular la matriz* $(2X+Y)\,X-(2X+Y)\,2Y$

- $\left\{ \begin{array}{l} 2X+Y=B \\ X-2Y=C \end{array} \right.$ Resolviendo este sistema tendremos que:

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{5}B+\frac{1}{5}C=\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ Y &= \frac{1}{5}B-\frac{2}{5}C=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Título: Sistemas de ecuaciones lineales

Autor:© Juan José Isach Mayo

Fecha:04 Septiembre del 2007

# Contents

# Chapter 1

# Regla de cramer y Teorema de Rouche -Frobenius

## 1.1 Interpretación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right.$

resolverlo es equivalente a obtener la matriz columna $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ denominada matriz de las incógnitas tal que se verifica la relación matricial $A \cdot X = B$ donde $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ..... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & ...... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & ..... & a_{m,n} \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ..... \\ b_m \end{pmatrix}$ es la matriz columna de los términos independientes

**Example 1** *Resolver el sistema* $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y + z = -2 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right.$

Resolver el sistema anterior equivale a resolver la siguiente ecuación matricial $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resuelve este sistema por Gauss y comprueba que no admite solución. En este caso, no existe ninguna matriz columna $X$ que verifique la ecuación matricial $A \cdot X = B$

## 1.2 Regla de Cramer

*Hipótesis*

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right.$$

tal que $|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots.. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots.. & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0$ (la matriz $A$ admite inversa)

*Tesis*

El sistema es compatible determinado y además las soluciones vienen dadas por:_

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots.. & a_{1,n} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ b_n & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots.. & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} & \ldots.. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{n,1} & b_n & a_{n,3} & \ldots.. & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 & \ldots.. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & b_n & \ldots.. & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots.. & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & b_3 \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots.. & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

*Demostración*

Resolver el sistema es equivalente a resolver una ecuación matricial del tipo $A \cdot X = B$ esto es:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots.. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots.. & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots.. \\ b_n \end{pmatrix}$$

Como $A$ es regular por hipótesis; entonces $A$ admite inversa $A^{-1}$. Si multiplicamos la relación matricial $A \cdot X = B$ por $A^{-1}$ tendremos:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Por la propiedad asociativa del producto de matrices

$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Por ser $A^{-1}$ la matriz inversa sabemos que $A^{-1} \cdot A = I$ donde $I$ es la matriz identidad; por lo que:

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Como la matriz identidad, $I$, es el elemento neutro para el producto de matrices; entonces $I \cdot X = X$. Con lo que la solución del sistema es única (al ser $A^{-1}$única) y se obtiene a partir de :

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Con lo que queda demostrado que el sistema es compatible determinado

Obtengamos ahora las soluciones

Como $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t = \dfrac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & ..... & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & ...... & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & ...... & A_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & ..... & A_{n,n} \end{pmatrix}^t$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{1,1}}{|A|} & \dfrac{A_{2,1}}{|A|} & \dfrac{A_{3,1}}{|A|} & ..... & \dfrac{A_{n,1}}{|A|} \\ \dfrac{A_{1,2}}{|A|} & \dfrac{A_{2,2}}{|A|} & \dfrac{A_{3,2}}{|A|} & ...... & \dfrac{A_{n,2}}{|A|} \\ \dfrac{A_{1,3}}{|A|} & \dfrac{A_{2,3}}{|A|} & \dfrac{A_{3,3}}{|A|} & ...... & \dfrac{A_{n,3}}{|A|} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ \dfrac{A_{1,n}}{|A|} & \dfrac{A_{2,n}}{|A|} & \dfrac{A_{3,n}}{|A|} & ..... & \dfrac{A_{n,n}}{|A|} \end{pmatrix}$ donde $A_{i,j}$ es el adjunto del $a_{i,j}$ de la matriz $A$

Entonces; por ser $X = A^{-1} \cdot B$, tendremos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ...... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{1,1}}{|A|} & \dfrac{A_{2,1}}{|A|} & \dfrac{A_{3,1}}{|A|} & ..... & \dfrac{A_{n,1}}{|A|} \\ \dfrac{A_{1,2}}{|A|} & \dfrac{A_{2,2}}{|A|} & \dfrac{A_{3,2}}{|A|} & ...... & \dfrac{A_{n,2}}{|A|} \\ \dfrac{A_{1,3}}{|A|} & \dfrac{A_{2,3}}{|A|} & \dfrac{A_{3,3}}{|A|} & ...... & \dfrac{A_{n,3}}{|A|} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ \dfrac{A_{1,n}}{|A|} & \dfrac{A_{2,n}}{|A|} & \dfrac{A_{3,n}}{|A|} & ..... & \dfrac{A_{n,n}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ...... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Operando tendremos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots\ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{|A|}\cdot b_1 + \frac{A_{2,1}}{|A|}\cdot b_2 + \frac{A_{3,1}}{|A|}\cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,1}}{|A|}\cdot b_n \\ \frac{A_{1,2}}{|A|}\cdot b_1 + \frac{A_{2,2}}{|A|}\cdot b_2 + \frac{A_{3,2}}{|A|}\cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,2}}{|A|}\cdot b_n \\ \frac{A_{1,3}}{|A|}\cdot b_1 + \frac{A_{2,3}}{|A|}\cdot b_2 + \frac{A_{3,3}}{|A|}\cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,3}}{|A|}\cdot b_n \\ \ldots\ldots \\ \frac{A_{1,n}}{|A|}\cdot b_1 + \frac{A_{2,n}}{|A|}\cdot b_2 + \frac{A_{3,n}}{|A|}\cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,n}}{|A|}\cdot b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{A_{1,1}}{|A|}\cdot b_1 + \frac{A_{2,1}}{|A|}\cdot b_2 + \frac{A_{3,1}}{|A|}\cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,1}}{|A|}\cdot b_n = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots.. & a_{1,n} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ b_n & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots.. & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{A_{1,2}}{|A|}\cdot b_1 + \frac{A_{2,2}}{|A|}\cdot b_2 + \frac{A_{3,2}}{|A|}\cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,2}}{|A|}\cdot b_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} & \ldots.. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{n,1} & b_n & a_{n,3} & \ldots.. & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{A_{1,3}}{|A|}\cdot b_1 + \frac{A_{2,3}}{|A|}\cdot b_2 + \frac{A_{3,3}}{|A|}\cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,3}}{|A|}\cdot b_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 & \ldots.. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & b_n & \ldots.. & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$x_n = \frac{A_{1,n}}{|A|}\cdot b_1 + \frac{A_{2,n}}{|A|}\cdot b_2 + \frac{A_{3,n}}{|A|}\cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,n}}{|A|}\cdot b_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots.. & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & b_3 \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots.. & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

**Example 2** *Resolver matricialmente el sistema* $\left\{ \begin{array}{r} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{array} \right.$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver la siguiente ecuación matricial

$$A \cdot X = B \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es tal que $|A| = 49$; entonces $A$ admite inversa, y en concreto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Por el teorema anterior sabemos que $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{Las soluciones son} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = \frac{3}{7} \end{cases}$$

**Definition 3** *Denominaremos Sistema de Cramer a aquél que tenga el mismo número de ecuaciones que incógnitas y cuyo matriz de coeficientes sea regular (determinante no nulo)*

**Example 4** *Resolver ahora con la regla de Cramer el sistema anterior* $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$

Como $|A| = 49$ entonces podemos aplicar la regla de Cramer para obtener las soluciones del sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{49} = \frac{-4}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{49} = \frac{-4}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{49} = \frac{3}{7}$$

**Example 5** *Resolver ahora con la regla de Cramer el sistema anterior* $\begin{cases} 2x - 3y + z + t = 1 \\ 3x - y - 2z - 3t = -2 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + y - 3t = 2 \end{cases}$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -28$ estamos ante un Sistema de Cramer

Aplicando dicha regla

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-28} = -\frac{43}{7} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-28} = -\frac{73}{14}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{29}{7} \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-28} = -\frac{13}{2}$$

## 1.3 Interpretación vectorial de un sistema

Resolver un sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Equivale a determinar si el vector columna $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \in \Re^m$ es o no combinación lineal de los siguientes $n$ vectores de $\Re^m$ $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ . \\ . \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ . \\ . \\ b_{m,2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ . \\ . \\ a_{m,3} \end{pmatrix}$ $.....\overrightarrow{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ . \\ . \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$

Resumiendo:

Resolver $\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$ es

$$\Updownarrow$$

A determinar si $\exists x_1, x_2, .....x_n \in \Re / \overrightarrow{b} = x_1\overrightarrow{a}_1 + x_2\overrightarrow{a}_2 + .... + x_n\overrightarrow{a}_n$

*Casos*

:$\boxed{\text{El sistema es compatible determinado}}$ $\Longleftrightarrow$ El *vector* $\overrightarrow{b}$ *es C.Lineal única* de $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, .....\overrightarrow{a}_n$

$\boxed{\text{El sistema es compatible indeterminado}}$ $\Longleftrightarrow$El *vector* $\overrightarrow{b}$ *es C.Lineal no* *única* de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, .....\vec{a}_n$

$\boxed{\text{El sistema es incompatible}} \Longleftrightarrow$El *vector* $\vec{b}$ *no es C.Lineal* de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, .....\vec{a}_n$

### 1.3.1 Interpretación vectorial de un sistema de ecs. lineales homogéneo

Dado el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array} \right.$

Resolverlo equivale a determinar si el vector nulo $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ *de* $\Re^m$ es o no combinación lineal de los siguientes $n$ vectores de $\Re^m$ $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ . \\ . \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$ $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ . \\ . \\ b_{m,2} \end{pmatrix}$ $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ . \\ . \\ a_{m,3} \end{pmatrix}$ $.....\vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ . \\ . \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$

*Casos*

. $\boxed{\text{El sistema es compatible determinado ( tan sólo admite la solución trivial } x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)}$ $\Longleftrightarrow$ Los *vectores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, .....\vec{a}_n$ son *L.I*

$\boxed{\text{El sistema es compatible indeterminado ( admite soluciones distintas de la solución trivial )}}$ $\Longleftrightarrow$Los *vectores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, .....\vec{a}_n$ son *L.D*

## 1.4 Teorema de Rouche-Frobenius

Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$

Si llamamos $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ..... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & ...... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & ..... & a_{m,n} \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes del sistema y $A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ..... & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & ...... & a_{2,n} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & ...... & a_{3,n} & b_3 \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & ..... & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$ a la matriz ampliada entonces el sistema anterior puede presentar las siguientes situaciones:

- a) Compatible Determinado $\Longleftrightarrow$ $Rango\,(A) = Rango\,(A') = n$ (número de incógnitas)

  b) Compatible Indeterminado $\Longleftrightarrow$ $Rango\,(A) = Rango\,(A') < n$ (número de incógnitas)

  c) Incompatible $\Longleftrightarrow$ $Rango\,(A) \neq Rango\,(A')$

*Demostración*

Resolver $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$ *es*

$\Leftrightarrow$Si $\exists x_1, x_2, .....x_n \in \Re / \ \overrightarrow{b} = x_1\overrightarrow{a}_1 + x_2\overrightarrow{a}_2 + .... + x_n\overrightarrow{a}_n$

donde $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}, \overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ . \\ . \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ . \\ . \\ b_{m,2} \end{pmatrix}, .....\overrightarrow{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ . \\ . \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$ *son vectores de* $\Re^m$

Posibilidades:

- Si el sistema es C.D$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{b}$ es combinación lineal única de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, .....\overrightarrow{a}_n$ $\Longleftrightarrow$El sistema de vectores $S = \{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, .....\overrightarrow{a}_n\}$ es base de un subespacio vectorial $H$ de $\Re^m$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, .....\overrightarrow{a}_n > = < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, .....\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, .....\overrightarrow{a}_n > = \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, .....\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > = n \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow Rango\,(A) = Rango\,(A') = n$ (número de incógnitas)

- Si el sistema es C.I$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{b}$ es combinación lineal no única de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, .....\overrightarrow{a}_n$ $\Longleftrightarrow$El sistema de vectores $S = \{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, .....\overrightarrow{a}_n\}$ es ligado y además generador de un subespacio vectorial $H$ de $\Re^m$ cuya $\dim H = r$[1]$< n \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, .....\overrightarrow{a}_n > = < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, .....\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > = < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, .....\overrightarrow{a}_r > \Longleftrightarrow$
$\dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, .....\overrightarrow{a}_n > = \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, .....\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > = \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, .....\overrightarrow{a}_r > = r$
$\Longleftrightarrow Rango\,(A) = Rango\,(A') = r < n$ (número de incógnitas)

[1] De este conjunto de vectores $S$ podemos extraer r vectores linealmente independientes que formarán la base de $H$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que son los $r$ primeros

- Si el sistema es Incompatible$\Longleftrightarrow \overrightarrow{b}$ no es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ..... \overrightarrow{a}_n \Longleftrightarrow < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ..... \overrightarrow{a}_n > \subsetneq < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ..... \overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ..... \overrightarrow{a}_n > \neq \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ..... \overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > \Longleftrightarrow$ $Rango\,(A) < Rango\,(A')$

## 1.5 Procedimientos para resolver sistemas

1. Estudiaremos si el sistema dado es o no compatible utilizando el Teorema de Rouche-Frobenius
2. En caso de ser compatible $rang(A) = rang(A') = r$ , eliminaremos aquellas ecuaciones cuyos ecuaciones no intervengan en el menor principal, de orden $r$, no nulo encontrado

- 
  - Si el sistema fuese compatible determinado entonces ya podríamos aplicar la susodicha regla
  - Si el sistema fuese compatible indeterminado, entonces pasaremos al término independiente aquellas incógnitas cuyos coeficientes no aparezcan en el menor principal no nulo encontrado y procederemos a aplicar la regla de Cramer con respecto a las incógnitas que queden a la izquierda

**Example 6** *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1 \\ 4x - 5y + 5z = 3 \end{array}\right.$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Estudiemos el *rango* $A$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rang(A) < 3$ Las tres columnas son L.Dependientes

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow Rango(A) = 2$ .Las dos primeras columnas son L.Independientes y la $3^a$ columna es combinación lineal de las otras dos.

Determinemos el $rang(A')$

$rang \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} =^{2} rang \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{3} = 3$

Al ser $Rang(A) = 2$ y $Rang(A') = 3$ →El sistema es incompatible

**Example 7** *Resolver* $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right.$

[2] La $3^a$col es C.L. de las dos primeras

[3] $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$

Como $|A| = 49$ entonces $rang(A) = rang(A') = 3 \rightarrow$ el sistema es compatible determinado

Podemos aplicar la regla de Cramer para obtener las soluciones del sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{49} = \frac{-21}{49} = \frac{-3}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{49} = \frac{-21}{49} = \frac{-3}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{49} = \frac{28}{49} = \frac{4}{7}$$

**Example 8** *Resuelve el sistema* $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1 \\ 4x - 5y + 5z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right.$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Estudiemos el *rango A*

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow$ las dos primeras columnas son L.Independientes

Para saber si la $3^a$col de $A$ es o no C.L de la $1^a$ y la $2^a$ tendré que considerar los siguientes menores de orden tres:

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Como los dos son nulos$\rightarrow$ $Rango(A) = 2$ por ser las dos primeras columnas L.I y la $3^a$ C.L de las anteriores

Determinemos el $rang(A')$

$rang \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ =[4] $rang \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Al ser $Rang(A) = 2$ y $Rang(A') = 2$ $\rightarrow$El sistema es Compatible indeterminado

La matriz tiene de rango 2; entonces sólo hay dos ecuaciones L.Independientes$\rightarrow$La $1^a$ y la $2^a$

Por lo tanto, podemos eliminar las dos últimas ecuaciones

[4] La $3^a$col es C.L. de las dos primeras

Así pues, resolver el sistema inicial equivale a resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+3z=2 \\ x-3y+2z=-1 \end{array}\right.$

Pasando al otro lado de las ecuaciones el término en $z$ (observa que sus coeficientes no aparecen en el menor de orden 2 no nulo encontrado); tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y=2-3z \\ x-3y=-1-2z \end{array}\right.$$

Aplicando la regla de Cramer

$$x=\frac{\left|\begin{array}{cc} 2-3z & -2 \\ -1-2z & -3 \end{array}\right|}{-7}=\frac{8-5z}{7}$$
$$y=\frac{\left|\begin{array}{cc} 3 & 2-3z \\ 1 & -1-2z \end{array}\right|}{-7}=\frac{5+3z}{7}$$

**Example 9** *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} x-3y+2z=1 \\ 2x-3y+5z=2 \end{array}\right.$ *resuélvelo*

Como $\left|\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{array}\right|=3 \rightarrow RangoA=2=RangoA'$ el sistema es compatible indeterminado

Si deseamos resolverlo, aplicando la regla de Cramer; tendremos que pasar al otro lado de las igualdades la incógnita $z$ (sus coeficientes no intervienen en el menor principal no nulo encontrado), para obtener de este modo un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y=1-2z \\ 2x-3y=2-5z \end{array}\right.$$

Aplicando Cramer

$$x=\frac{\left|\begin{array}{cc} 1-2z & -3 \\ 2-5z & -3 \end{array}\right|}{3}=\frac{3-9z}{3}=1-3z$$
$$y=\frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & 1-2z \\ 2 & 2-5z \end{array}\right|}{3}=\frac{-z}{3}$$

**Example 10** *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} x-3y+2z-4t=1 \\ 2x-3y+5z-2t=2 \end{array}\right.$ *resuélvelo*

Como $\left|\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{array}\right|=3 \rightarrow RangoA=2=RangoA'$ el sistema es compatible indeterminado

Si deseamos resolverlo, aplicando la regla de Cramer; tendremos que pasar al otro lado de las igualdades las incógnita $z$ y $t$ (sus coeficientes no intervienen en el menor principal no nulo encontrado), para así considerar que tenemos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y=1-2z+4t \\ 2x-3y=2-5z+2t \end{array}\right.$$

Aplicando Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-2z+4t & -3 \\ 2-5z+2t & -3 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3-9z-6t}{3}=1-3z-2t$$
$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2z+4t \\ 2 & 2-5z-2t \end{vmatrix}}{3}=\frac{-z-6t}{3}$$

**Example 11** *Resolver el siguiente sistema* $\left\{\begin{array}{l} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \\ x-3y=8 \end{array}\right.$ *en caso de ser compatible*

Empezaremos estudiando el rango de la matriz ampliada $A'$ por ser cuadrada

Calculamos su determinante $\left|A'\right|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}=-24-18-2+9+32+3=0$

Como $\left|A'\right|=0$ entonces las tres columnas de $A'$ son L. D entre sí$\rightarrow Rango(A')<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-3+4=1\rightarrow$ las únicas columnas de $A'$ L.I son la $1^a$ y la$2^a$ $\rightarrow Rango(A')=2$

Es evidente que $rango(A)=rango\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=rango\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=2$

Por el teorema de Rouche- Frobenius sabemos que el sistema es compatible determinado; ya que $Rango(A)=Rango(A')=2=n^o$ de incógnitas

Para resolverlo, eliminamos aquellas ecuaciones cuyos coeficientes no intervienen en el menor principal $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ no nulo encontrado.Por lo tanto resolveremos el sistema $\left\{\begin{array}{l} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right.$

Aplicando la regla de Cramer al sistema $\left\{\begin{array}{l} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right.$ tendremos

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}=\tfrac{-7}{1}=-7 \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}=\tfrac{-5}{1}=-5$$

Nota: $\boxed{\text{Intenta resolverlo estudiando primero el } Rango(A) \text{ y después el de } A'}$

**Example 12** *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z+3t=1 \\ x-3y-2z+2t=2 \\ 4x-5y-z+3t=0 \end{array}\right.$ *resuélvelo*

Estudiemos el rango de $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7\rightarrow$ la $1^a$fila y la $2^a$ son L.I

Orlando el menor anterior con la tercera fila y resto de columnas obtendré todos los menores de orden tres donde aparezcan los coeficientes de las tres filas. Si los dos fuesen nulos el $rangoA$ sería dos ; en caso contrario valdría tres $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ya que la $3^a$col=$1^a$+$2^a$; pero como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 14 \to RangoA = 3 = RangoA'$ el sistema es compatible indeterminado (observa que hay cuatro incógnitas)

Si deseamos resolverlo, aplicando la regla de Cramer; tendremos que pasar al otro lado de las igualdades la incógnita $z$ (sus coeficientes no intervienen en el menor princuipal no nulo encontrado), para obtener de este modo un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ , $y$ y $t$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3t = 1 - z \\ x - 3y + 2t = 2 + 2z \\ 4x - 5y + 3t = z \end{cases}$$

Aplicando Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & -2 & 3 \\ 2+2z & -3 & 2 \\ z & -5 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{-17-14z}{14}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-z & 3 \\ 1 & 2+2z & 2 \\ 4 & z & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{-1z-14z}{14}$$
$$t = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1-z \\ 1 & -3 & 2+2z \\ 4 & -5 & z \end{vmatrix}}{14} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

**Example 13** *Discutir según los valores de a y b el sistema* $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1 \\ 4x - 5y + az = b \end{cases}$
*En los casos en que sea compatible, resuélvelo*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = -7a + 35$$

Valores que anulan el determinante de $A \to -7a + 35 = 0 \to a = 5$

### Posibilidades

I) Si $a = 5$ entonces $|A| = 0 \to RangoA < 3$ las tres columnas de $A$ son L.D.

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \to$ la $1^a col$ y la $2^a$ son L.I$\to RangoA = 2$

Pasemos a estudiar el rango de $A'$

$$Rang\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & a & b \end{pmatrix} =^5 rang\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & b \end{pmatrix} =^6 \begin{cases} 2 \text{ si } b=1 \rightarrow Rang(A')=2 \\ 3 \text{ si } b\neq 1 \rightarrow Rango(A')=3 \end{cases}$$

*Subcasos*

- Ia) Si $a=5 \wedge b=1 \rightarrow Rango(A)=Rango(A')=2$ →El sistema es compatible indeterminado

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema $\begin{cases} 3x-2y+3z=2 \\ x-3y+2z=-1 \end{cases}$

Pasando al otro lado de las ecuaciones el término en $z$ (observa que sus coeficientes no aparecen en el menor de orden 2 no nulo encontrado); tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$

$$\begin{cases} 3x-2y=2-3z \\ x-3y=-1-2z \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2-3z & -2 \\ -1-2z & -3 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{8-5z}{7}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2-3z \\ 1 & -1-2z \end{vmatrix}}{-7}=\frac{5+3z}{7}$$

- Ib) Si $a=5 \wedge b\neq 1 \rightarrow Rango(A)=2$ y $Rango(A')=3$ →El sistema es incompatible

II) Si $a\neq 5$entonces $|A|\neq 0 \rightarrow RangoA=3=Rang(A')$ las tres ecuaciones son L.I

El sistema es compatible determinado
Aplicando la regla de Cramer tendremos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ b & -5 & a \end{vmatrix}}{-7b+35}=\frac{-8a+35+5b}{-7b+35}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & b & a \end{vmatrix}}{-7b+35}=\frac{-5a-3b+28}{-7b+35}$$

$$t=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & b \end{vmatrix}}{-7b+35}=\frac{-7b+7}{-7b+35}$$

[5] La $3^a$col es C.L. de las dos primeras

[6] Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & b \end{vmatrix}=-7b+7$

### 1.5.1 Rouche aplicado a los sistemas de ecs. lineales homogéneos

Dado el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array}\right.$

Por ser homogéneo

$$Ran\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\cdots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3}\ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} = Ran\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\cdots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\cdots & a_{2,n} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\cdots & a_{3,n} & 0 \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3}\ldots & a_{m,n} & 0 \end{pmatrix}$$

ya que la última columna de la matriz ampliada es nula. Por lo tanto, en virtud del teorema de Rouche estos sistemas son siempre compatibles

*Casos*:

I) $rang\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots.. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots.. & a_{m,n} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible determinado y tan sólo admite la solución trivial } x_1 = ... = x_n = 0}$

II) $rang\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots.. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots.. & a_{m,n} \end{pmatrix} < n \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible indeterminado y admite soluciones distintas de la solución trivial}}$

**Example 14** *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{c} 3x - 2y + 3z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 4x - 5y + az = 0 \end{array}\right.$ *determina el valor de* $a$ *para que el sistema admita soluciones distintas de la trivial*

Este sistema al ser homogéneo admitirá soluciones distintas de la trivial($x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$) siempre que se verifique:

$$Rang\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & a \end{pmatrix} < 3 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a = 5$$

## 1.6 Problemas resueltos de sistemas ecuaciones lineales

**Exercise 1.6.1** *Resolver el siguiente sistema* $\left\{\begin{array}{c} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \\ 3x-4y=-1 \end{array}\right.$ *en caso de ser compatible*

Empezaremos estudiando el rango de la matriz ampliada $A^{'}$ por ser cuadrada

Calculamos su determinante $\left|A^{'}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{array}\right| = 0$

Como $\left|A^{'}\right| = 0$ entonces las tres columnas de $A^{'}$ son L. D entre sí$\rightarrow$ $Rango(A^{'}) <$ 3 y como $\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right| = -3+4 = 1 \rightarrow$ las únicas columnas de $A^{'}$ L.I son la $1^{a}$ y la$2^{a}$ $\rightarrow Rango(A^{'}) = 2$

Es evidente que $rango(A) = rango \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{array}\right) = rango \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right) = 2$

Por el teorema de Rouche- Frobenius sabemos que el sistema es compatible determinado; ya que $Rango(A) = Rango(A^{'}) = 2 = n^{o}$ de incógnitas

Para resolverlo, eliminamos aquellas ecuaciones cuyos coeficientes no intervienen en el menor principal $\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right|$ no nulo encontrado.Por lo tanto resolveremos el sistema $\left\{\begin{array}{c} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right.$

Aplicando la regla de Cramer al sistema $\left\{\begin{array}{c} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right.$ tendremos

$$x = \frac{\left|\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right|} = \frac{-7}{1} = -7 \; y = \frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right|} = \frac{-5}{1} = -5$$

Nota: $\boxed{\text{Intenta resolverlo estudiando primero el } Rango(A) \text{ y después el de } A^{'}}$

**Exercise 1.6.2** *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=-2 \\ 2x-y+3z=1 \\ x-2y+2z=3 \\ 3x+4z=-1 \end{array}\right.$ *en caso de ser compatible*

Empezaremos estudiando el rango de la matriz $A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{array}\right)$

Como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3$ es no nulo$\rightarrow$la $1^{a}$ y $2^{a}$ columnas de $A$ son L.I$\rightarrow$ $Rango(A) \geq 2$

?'La $3^a$ columna es C. L de la $1^a$ y $2^a$?

Para determinarlo, consideraremos todos los menores de orden tres que se pueden formar al orlar el menor de orden 2 anterior con la $3^a$ col. y las filas $3^a$ y $4^a$ de $A \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Si los dos fuesen nulos entonces $Rango(A) = 2$; en caso contrario $Rango(A) = 3$

Calculémoslos pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 3 + 1 - 4 + 6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 9 + 3 - 8 = 0$$

Al ser los dos nulos; entonces la $3^a$ columna es C. L de la $1^a$ y $2^a$ $\rightarrow$ $Rango(A) = 2$ ya que el número máximo de columnas L.I de $A$ es 2

?'Cuál es el $Rango(A')$?

$Rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} < 4$ ya que la $3^a$ columna es C. L de la $1^a$ y $2^a$

Fíjate que el rango de esta matriz como máximo puede ser tres

Para determinar su rango bastará con determinar si la $4^a$ columna es C. L de la $1^a$ y $2^{a.}$.

Para ello calcularemos los siguientes determinantes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ obtenidos al orlar el menor de orden 2 anterior, no nulo, con la $4^a$col y las filas $3^a$y $4^a$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 8 + 1 - 2 - 6 + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 3 - 6 + 2 = 0$$

Como los dos son nulos, entonces la $4^a$ columna es C. L de la $1^a$ y $2^a$ $\rightarrow Rango(A') = 2$

$Rango(A) = Rango(A') = 2 < 3$ n de incógnitas$\rightarrow$S.C.I

Para resolverlo, eliminamos aquellas ecuaciones cuyos coeficientes no intervienen en el menor principal $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ no nulo encontrado$\rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{array} \right.$

Pasamos la incógnita $z$ al término independiente y obtendremos de esta manera un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y = -2 - z \\ 2x - y = 1 - 3z \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2-z & 1 \\ 1-3z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -2-z & 1 \\ 1-3z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2+z-1+3z}{-3} = \frac{-1-4z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2-z \\ 2 & 1-3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} == \frac{-5+z}{3}$$

Nota: $\boxed{\text{Intenta resolverlo estudiando primero el } Rango(A^{'}) \text{ y después el de } A}$

CONSEJOS

A la hora de discutir un sistema de ecuaciones lineales que contiene parámetros, se pueden resolver sistematicamente siempre que una de las dos matrices $A$ o $A^{'}$ sea cuadrada

a) Si $\boxed{A \text{ es cuadrada}}$, empezaremos calculando $|A|$.

- Para aquellos valores que no anulan $|A|$ siempre se verificará que $\mathbf{Rango(A)} = \mathbf{Rango(A^{'})} = \mathbf{n}$

El *sistema* será *compatible determinado* y determinaremos sus soluciones aplicando la Regla de Cramer

- Para aquellos valores que anulan $|A|$ siempre se verificará que $\mathbf{Rango(A)} < \mathbf{n}$

Sustituiremos dichos valores en el sistema y estudiaremos si los rangos de $A$ y $A^{'}$ son iguales o distintos

b) Si $\boxed{A^{'} \text{ es cuadrada}}$, empezaremos calculando $\left|A^{'}\right|$.

- Para aquellos valores que no anulan $\left|A^{'}\right|$ siempre se verificará que $\mathbf{Rango(A)} < \mathbf{Rango(A^{'})}$

El *sistema* será *incompatible*

- Para aquellos valores que anulan $\left|A^{'}\right|$ sustituiremos dichos valores en el sistema y estudiaremos si los rangos de $A$ y $A^{'}$ son iguales o distintos

**Exercise 1.6.3** *Resolver el sistema* $\left.\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ ax+y+z=1 \\ x-y+3z=-3 \\ 4x+2y=a \end{array}\right\}$

Solución

Empezaremos calculando el determinante de la matriz ampliada

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{vmatrix} = -2(a^2-6a+9) = -2(a-3)^2$$

Casos:

I) Si $a \neq 3 \rightarrow |A'|$ es distinto de cero$\rightarrow Rango(A') = 4$

Como $A$ es una matriz de orden 4x3, entonces el máximo rango posible de $A$ es 3

Por lo tanto, $Rango(A) \neq Rango(A')$ →El sistema es Incompatible

II) Si $a = 3 \rightarrow |A'| = 0$ →Las cuatro columnas de $A'$ son L. Dependientes

$Rango(A') < 4$

Pasemos pues a estudiar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ →La $1^a$ y la $2^a$ columna de $A$ son L. Independiente $Rango(A) \geq 2$

?' La $3^a$ columna de A es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$?

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ y además $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Por lo tanto, $3^a$ columna de A es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a$

Así pues el $rango(A) = 2$

Determínemos ahora el rango de la matriz ampliada

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} {}^{7} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ entonces la $4^a$ columna de $A'$ es combinación lineal de la $1^a$ y la $2^a \rightarrow rango(A') = 2$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado

Resolverlo es equivalente a resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 1 \end{array}\right\}$

Pasando la incógnita $z$ al otro lado $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 + z \\ 3x + y = 1 - z \end{array}\right\}$ tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$

Aplicando, la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+z & 1 \\ 1-z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+2z}{-2}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+z \\ 3 & 1-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{+5+4z}{+2}$$

**Exercise 1.6.4** *Discutir y resolver en los casos en que sea compatible el sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} -x + ay + z = 2 \\ \quad 3x - z = 1 \\ 2x + y + 3z = b \end{array}\right.$$

[7] $3^a$ col $=1^a$col$-2\cdot2^a$ col

$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;$A' = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de $A$; $|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2a - 9a - 1 = -11a + 2$

<u>*POSIBILIDADES*</u>

- I) Si $-11a+2 \neq 0 \to |A| \neq 0$ las tres columnas de $A$ son L.I$\to$ $Rang(A) = 3 = Rang(A^{'})$

El Sistema será Compatible Determinado

Aplicamos la Regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ b & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3a-ab+3}{-11a+2},\ y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & b & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2b-27}{-11a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2a-3ab+7}{-11a+2}$$

- II) Si $-11a + 2 = 0 \to |A| = 0$ $\to$las tres columnas de $A$ son L.D$\to$ $Rang(A) < 3$

$Rang \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$ ( no nulo)

Por lo que la matriz $A$ tiene como máximo dos columnas L.I (la $1^a$ y la $2^a$)

Para este valor de $a = \frac{2}{11}$ pasemos a estudiar el rango de $A^{'}$

$Rang \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$ya que la $3^a$ columna L.D con la $1^a$ y la $2^a$

El rango de $A^{'}$ dependerá si es o no nulo el determinante $\begin{vmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix} = \frac{81-6b}{11}$

$$Rang \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } b = \frac{27}{2} \quad Rango(A^{'}) = Rango(A) = 2 \to S.C.I \\ 3 & \text{si } b \text{ no es } \frac{27}{2} \quad Rango(A^{'}) \text{ distinto } Rango(A) \to S.I \end{cases}$$

En el caso en que el sistema es compatible indeterminado, tenemos que eliminar la primera ecuación, ya que sus coeficientes no aparecen en el menor principal encontrado.

$\left\{\begin{array}{c} 3x - z = 1 \\ 2x + y + 3z = \frac{27}{2} \end{array}\right.$ →Pasamos la incógnita $z$ al término independiente en ambas ecuaciones; obteniendo un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$ → $\left\{\begin{array}{c} 3x = 1 + z \\ 2x + y = \frac{27}{2} - 3z \end{array}\right.$

Aplicando la Regla de Cramer; tendremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 0 \\ \frac{27}{2} - 3z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+z}{3} \to y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+z \\ 2 & \frac{27}{2} - 3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{77-22z}{6}$$

**Exercise 1.6.5** *Discutir y resolver en los casos en que sea compatible el sistema* $\left\{\begin{array}{l} ax + (a-1)y + z = a+1 \\ (a+2)x + y + z = a+1 \\ (a+1)x + (a+1)z = a+1 \end{array}\right.$

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{pmatrix} ;A' = \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 & a+1 \\ a+2 & 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de $A$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -a^3 + a = -a(a-1)(a+1)$$

Fíjate que los valores de $a$ que anulan el determinante son $0, 1, -1$

<u>*POSIBILIDADES*</u>

I) Si $a(a-1)(a+1) \neq 0 \to a \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq -1 \to |A|$ es no nulo; las tres columnas de $A$ son L.I.→ $Rango(A) = 3 = Rango(A^{'})$ →El sistema es C.D.

Aplicando la regla de Cramer tendremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & a-1 & 1 \\ a+1 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{-a^3+a^2+2a}{-a^3+a} = \frac{-a(a-2)(a+1)}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{a-2}{a-1},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a+1 & 1 \\ a+2 & a+1 & 1 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{-2a^2-2a}{-a^3+a} = \frac{2}{a-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & a-1 & a+1 \\ a+2 & 1 & a+1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{-a^2-a}{-a^3+a} = \frac{1}{a-1}$$

II) Si $a = 0 \rightarrow |A| = 0$; las tres columnas de $A$ son $\dot{\text{L}}$.D.$\rightarrow$ $Rango(A) < 3$

$Rango\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$ (no nulo)

Las columnas $1^a$ y $2^a$ son L.I y la $3^a$ es C.L de ellas

Pasemos pues a estudiar el rango de $A^{'}$

$Rango(A^{'}) = Rango\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Rango(A) = 2$

Por lo tanto, el sistema es Compatible.Indeterminado

Además al ser el rango de $A^{'}$ dos; entonces puedo eliminar la $3^a$ ecuación ya que es C.L de las otras dos ( En el menor principal de orden dos no nulo los coeficientes que aparecen son los de las incógnitas $x$ e $y$ de las dos primeras ecuaciones)

$\begin{cases} -y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ $\rightarrow$Pasando la incógnita $z$ al otro lado$\begin{cases} -y = 1 - z \\ 2x + y = 1 - z \end{cases}$ tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$e $y$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ 1-z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 1 - z \rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1-z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = z - 1$$

III) Si $a = 1 \rightarrow |A| = 0$; las tres columnas de $A$ son $\dot{\text{L}}$.D.$\rightarrow$ $Rango(A) < 3$

$Rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (no nulo)

Las columnas $1^a$ y $2^a$ son L.I y la $3^a$ es C.L de ellas

Pasemos pues a estudiar el rango de $A^{'}$

$Rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$ (no nulo)

Por lo tanto, el sistema es Incompatible

IV) Si $a = -1 \rightarrow |A| = 0$; las tres columnas de $A$ son $\dot{\text{L}}$.D.$\rightarrow$ $Rango(A) < 3$

$Rango\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (no nulo)

Las filas $1^a$ y $2^a$ son L.I y la $3^a$ es C.L de ellas (por ser nulos sus elementos)

Pasemos pues a estudiar el rango de $A^{'}$

$Rango\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Por lo tanto, el sistema es Compatible Indeterminado

Como la tercera ecuación del sistema es nula, tendremos que resolver el siguiente sistema
$\left\{\begin{array}{c} -x-2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$ →Pasando la incógnita $z$ al otro lado $\left\{\begin{array}{c} -x-2y=-z \\ x+y=-z \end{array}\right.$
tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$e $y$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -z & -2 \\ -z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=-3z \rightarrow y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=2z$$

**Exercise 1.6.6** *Resolver el sistema* $\left\{\begin{array}{c} -x-2y+z=2 \\ x+3y-2z=1 \\ 3x+4y-z=3 \\ x-y+3z=3 \end{array}\right.$ *en caso de ser compatible*

Como la matriz $A^{'}$ es cuadrada empezaremos calculando $\left|A^{'}\right|$
$$\left|A^{'}\right|=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{8}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{9}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$
Calculando este determinante por los adjuntos de la $1^a$ fila tendremos que
$$\left|A^{'}\right|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}=15$$
Por lo tanto $Rango(A^{'})=4 \rightarrow A^{'}$ tiene las cuatro columnas L.I.. Es evidente pues; que $A$ tendrá sus tres columnas L.I→ $Rango(A)=3$

Por lo tanto el sistema es *Incompatible*

**Exercise 1.6.7** *Enuncia una condición necesaria y suficiente para que el sistema homogéneo*

$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x+a_{1,2}y+a_{1,3}z=0 \\ a_{2,1}x+a_{2,2}y+a_{2,3}z=0 \\ a_{3,1}x+a_{3,2}y+a_{3,3}z=0 \end{array}\right.$ admita soluciones distintas de la trivial

Por ser homogéneo sabemos que siempre es compatible; ya que $Rango(A)=Rango(A^{'})$

Este sistema admitirá la solución trivial , $x=y=z=0$, si y sólo si es C.D, lo cual es equivalente a afirmar que $Rango(A)=Rango(A^{'})=3 \Longleftrightarrow |A|$ es no nulo. Por lo tanto, admitirá soluciones distintas de la trivial si y sólo si es compatible indeterminado$\Longleftrightarrow Rango(A)<3$ ($n^o$ *incógnitas*) $\Longleftrightarrow |A|=0$

[8]Modificamos la $1^a$*col* sumándole a ésta la $3^a$
Modificamos la $2^a$*col* sumándole a ésta la $4^a$
[9]Modificamos la $4^a$*col* restándole a ésta el doble de la $3^a$

**Exercise 1.6.8** *Dado el siguiente sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3 \end{array}\right.$ *tal que* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ *es no nulo*

a) Enuncia una condición necesaria y suficiente para que este sistema sea Incompatible

b) Enuncia una condición necesaria y suficiente para que este sistema sea Compatible Determinado

c) Enuncia una condición necesaria y suficiente para que este sistema sea Compatible Indeterminado

Solución

a) El sistema será incompatible $\Longleftrightarrow$ $Rango(A)$ no coincide con el $Rango(A')$

Como por hipótesis $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ es no nulo; entonces la única posibilidad para que ambos rangos no coinciden es que $Rango(A) = 2$ y $Rango(A^{'}) = 3$ y esta condición se verificará si y sólo si $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$ es no nulo

b) El sistema será Compatible Determi. $\Longleftrightarrow$ $Rango(A) = Rango(A') = 3$ ($n^o$ *incógnitas*)

Como por hipótesis $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ es no nulo; entonces la única posibilidad para que ambos rangos coincidan y valgan 3 es que $A$ tenga las tres columnas L.I. Condición que se verificará si y sólo si $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$ es no nulo

c) El sistema será Compatible Determi. $\Longleftrightarrow$ $Rango(A) = Rango(A') = 2$ ($n^o$ *incógnitas*)

Como por hipótesis $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ es no nulo; entonces la única posibilidad para que ambos rangos coincidan y valgan 2 es que $A$ y $A^{'}$ tengan como máximo dos columnas L.I ( las dos primeras). Condición que se verificará si y sólo si $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix} = 0$

**Exercise 1.6.9** *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:*

$$\left\{\begin{array}{c} ax + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + (a+1)z = 0 \end{array}\right.$$

Por ser homogéneo siempre es compatible ya que $Rango(A) = Rango(A')$.

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & a+1 \end{vmatrix} = -a^2 - a - 4 + 3 + 1 - 2a - 2 + 6a = -a^2 + 3a - 2 = -(a-1)(a-2)$

$\underline{\mathcal{POSIBILIDADES}}$

I) Si $a$ es distinta de 1 y distinta de 2 $\rightarrow |A|$ es no nulo$\rightarrow$ $Rango(A) = 3$.Por lo tanto,el sistema será C.Determinado (solución trivial $x = y = z = 0$)

II) Si $a = 1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow Rango(A) < 3$.El sistema será C.Indeterminado

$Rango. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = Rango \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Resolver el sistema es equivalente a resolver el siguiente:$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array} \right.$

Pasando la incógnita z al otro lado; tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y = -z \\ 2x - y = -3z \end{array} \right. \rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -3z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4z}{3}$; $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{3}$

III) Si $a = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow Rango(A) < 3$.El sistema será C.Indeterminado

$Rango. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = Rango \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$

Resolver el sistema es equivalente a resolver el siguiente:$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array} \right.$

Pasando la incógnita z al otro lado; tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x + y = -z \\ 2x - y = -3z \end{array} \right. \rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -3z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -z \rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 2 & -3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = z$

**Exercise 1.6.10** Discute el sistema $\left. \begin{array}{c} x - 3y + z = 2 \\ 2x + ay - 3z = 4 \\ 7x + 9y - 8z = b \end{array} \right\}$ en función de los parámetros $a$ y $b$ . En los casos en que sea compatible resuélvelo

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & a & -3 & 4 \\ 7 & 9 & -8 & b \end{pmatrix}$

Como $A$ es cuadrada empezaremos calculando $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{vmatrix} = -8a + 18 + 63 - 7a - 48 + 27 = -15a + 60$$

Casos:

- I) Si $a \neq 4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow Rango(A) = 3$ ya que las tres columnas de $A$ *son L.I* (las tres filas de $A$ también)

Al ser $A'$ una matriz de orden 3x4; entonces $Rango(A') = 3 \rightarrow Rango(A) = Rango(A') = 3$

Por el Teorema de Rouche Frobenius el sistema es compatible determinado

Para obtener sus soluciones aplicamos la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & a & -3 \\ b & 9 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-16a - 6 + 9b - ba}{-15a + 60}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 7 & b & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{5b - 70}{-15a + 60} = \frac{-b + 14}{3(a-4)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & a & 4 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{ba + 6b - 84 - 14a}{-15a + 60}$$

- II) Si $a = 4 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow Rango(A) < 3$ ya que las tres columnas de $A$ *son L.D* (las tres filas de $A$ también)

Como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \rightarrow La 1^a$ y la $2^a$ columnas son $L.I$

El $Rang(A) = 2$ y además sabemos que la $3^a$col de $A$ es combinación lineal de las otras dos

¿Cuál es el $Rang(A')$?

$Rang(A')$ coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir la $3^a$ col

$$\text{Es decir} \rightarrow Rang(A') = Rang \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 9 & b \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow S.C.I \\ 3 \text{ si } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow S.I \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix} = 10b - 140$ entonces resumiendo tendremos

- $-$ IIa) Si $a = 4$ y $b = 14$ el sistema es $C.I.$ ya que $Rang(A) = Rang(A') = 2 < 3$ (n$^o$ incógnitas)

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema formado por las dos primeras ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} x-3y+z=2 \\ 2x+4y-3z=4 \end{array}\right.$

Pasando la incógnita $z$ al otro lado como parámetro; podemos considerar que el sistema es de Cramer con respecto a $x$ e $y$

$$\left\{\begin{array}{c} x-3y=2-z \\ 2x+4y=4+3z \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\frac{\left|\begin{array}{cc} 2-z & -3 \\ 4+3z & 4 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{array}\right|}=\frac{20+5z}{10}=2+\frac{1}{2}z \\ y=\frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & 2-z \\ 2 & 4+3z \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{array}\right|}=\frac{5z}{10}=\frac{1}{2}z \end{array}\right.$$

En este caso el conjunto solución es $S=\{(2+\alpha,\alpha,2\alpha)\ /\ \alpha\in\Re\}$

- – ∗ Si $a=4$ y $b\neq 14$ el sistema es *Incompatible.* ya que $Rang(A)=2$ y $Rang(A')=3$

# Nota: Otra manera de hacer el problema anterior

- *Discute el sistema* $\left.\begin{array}{c} x-3y+z=2 \\ 2x+ay-3z=4 \\ 7x+9y-8z=b \end{array}\right\}$ *en función de los parámetros a y b . En los casos en que sea compatible resuélvelo*

Dado el sistema $\left.\begin{array}{c} x-3y+z=2 \\ 2x+ay-3z=4 \\ 7x+9y-8z=b \end{array}\right\}$

$$Rang\left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & a & -3 & 4 \\ 7 & 9 & -8 & b \end{array}\right)=Rang\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & a & 4 \\ 7 & -8 & 9 & b \end{array}\right)=Rang\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & -3a+12 & b-14 \end{array}\right)$$

Con lo que, resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -5z+(a+6)y=0 \\ (-3a+12)y=b-14 \end{array}\right\}$ donde aquí la matriz de coeficientes es $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & a+6 \\ 0 & 0 & -3a+12 \end{array}\right)$

y la matriz ampliada $A'=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & -3a+12 & b-14 \end{array}\right)$

Casos

$$\text{I) Si } a=4 \text{ y} b=14\rightarrow\left\{\begin{array}{c} RangA=Rang\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=2 \\ y \\ RangA'=Rang\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=2 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto; el sistema es Compatible Indeterminado

Resolverlo sería equivalente a resolver $\left\{\begin{array}{c} x+z-3y=2 \\ -5z+10y=0 \end{array}\right.$,

Si lo resuelves comprobarás que $S=\{(2+y,y,2y)/y\in\Re\}$

II) Si $a = 4$ y $b$ no es 14 $\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} RangA = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \\ y \\ RangA' = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-14 \end{pmatrix} = 3 \end{array} \right\}$

El sistema es Incompatible

III) Si $a$ no es 4; independientemente del valor de $b$;entonces

$$RangA = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & a+6 \\ 0 & 0 & -3a+12 \end{pmatrix} = 3$$
$$y$$
$$RangA' = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & -3a+12 & b-14 \end{pmatrix} = 3$$

El sistema es Compatible determinado

Si lo resuelves $\left. \begin{array}{c} x+z-3y=2 \\ -5z+(a+6)y=0 \\ (-3a+12)y=b-14 \end{array} \right\}$comprobarás que la solución es $S = \left\{ \left( \frac{-9b+6+ba+16a}{15(a-4)}, -\frac{b-14}{3(a-4)}, -\frac{(a+6)(b-14)}{15(a-4)} \right) \right\}$

**Exercise 1.6.11** Resuelve el sistema $\left. \begin{array}{l} x-2y+3z=3 \\ 3x+y-2z=1 \\ 4x+6y-10z=-4 \\ 12x+11y-19z=-4 \end{array} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -10 \\ 12 & 11 & -19 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & -10 & -4 \\ 12 & 11 & -19 & -4 \end{pmatrix}$$

Estudiemos primero el rango de $A$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \rightarrow RangoA \geq 2$ ya que las dos primeras columnas de $A$ *son L.I*

¿Es la $3^a$ col de $A$ combinación lineal de las anteriores?

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 12 & 11 & -19 \end{vmatrix} = 0$ entonces; podemos afirmar que sí.

Esto es; la $3^a$ col de $A$ es combinación lineal de las dos primeras$\rightarrow RangoA = 2$

Pasemos ahora a estudiar el rango de $A'$

$RangA'$ coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir la $3^a$ col por lo visto anteriormente

$RangA' = Rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \\ 12 & 11 & -4 \end{pmatrix}$

¿Es la col de términos independientes combinación lineal de la $1^a$ y $2^a$?

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 12 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 0$ entonces; podemos afirmar que sí.

Es decir; la col de términos independientes de $A'$ es combinación lineal de las dos primeras$\rightarrow RangoA' = 2$

Como $RangoA = RangoA' = 2 < 3(n^o\ incóg)$ por el teorema de Rouche -Frobenius el sistema es compatible indeterminado

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema formado por las dos primeras ecuaciones (son las únicas L.I)

$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=3 \\ 3x+y-2z=1 \end{array}\right\}$ Al resolverlo; obtendremos $S = \left\{ \left( \frac{5}{7} + \alpha, -\frac{8}{7} + 11\alpha, 7\alpha \right) / \alpha \in \Re \right\}$

**Exercise 1.6.12** *Eliminar los parámetros de las siguientes ecuaciones*

$\left\{ \begin{array}{r} x = -1+2r+s+3t \\ y = 2+r-2s-t \\ z = 1-r+s \\ u = r+s+2t \end{array} \right.$ $\rightarrow$Escribiendo este sistema en forma vectorial pasando previamente al otro lados los números que no son coeficientes de los párametros tendremos la siguiente igualdad vectorial

$\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-1 \\ u \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que nos indica que:

$Rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & x+1 \\ 1 & -2 & -1 & y-2 \\ -1 & 1 & 0 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 & u \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =^{10} Rango\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Por lo tanto en la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & x+1 \\ 1 & -2 & -1 & y-2 \\ -1 & 1 & 0 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 & u \end{pmatrix}$ cuyo rango es dos (ya sabemos que la tercera columna depende de las otras dos) se ha de verificar que la $4^a$ columna también ha de ser combinación lineal de las dos primeras, lo que se traduce en la siguiente condición:

$$Rango\begin{pmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 1 & -2 & y-2 \\ -1 & 1 & z-1 \\ 1 & 1 & u \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 1 & -2 & y-2 \\ -1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \\ y \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 1 & -2 & y-2 \\ 1 & 1 & u \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

[10] ya que la $3^a$ columna es la suma de las otras dos

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} -x-3y-5z+10=0 \\ 3x-y-5u+5=0 \end{array} \right.$$

## 1.7 Problemas propuestos

**Exercise 1.7.1** *Resolver los siguientes sistemas lineales, utilizando Cramer*

a)$\left\{ \begin{array}{l} 3x-y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x-y+2z=0 \end{array} \right.$ b)$\left\{ \begin{array}{l} x-2y+z=2 \\ -x+2y-2z=1 \end{array} \right.$ c)$\left\{ \begin{array}{l} x-2y+3z-t=1 \\ 2x+y-z+t=2 \\ x+3y+4z=5 \end{array} \right.$

d)$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z-t=2 \\ 2x+2y-2z+5t=1 \end{array} \right.$

Soluciones

a)S.C.D $H=\{(1,-3,-3)\}$ b)S.C.I $H=\{(2y+5,y,-3)\ /\ y\in\Re\}$

c)S.C.I $H=\left\{\left(\frac{-5t+18}{20},\frac{-5t+14}{20},\frac{t+2}{4},t\right)\ /\ t\in\Re\right\}$

d)S.C. doblemente Indeter. $H=\left\{\left(x,y,\frac{11-7x-7y}{3},\frac{5-4x-4y}{3}\right)\ /\ x,y\in\Re\right\}$

**Exercise 1.7.2** *Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius. En los casos en que sean compatibles, obtener sus soluciones aplicando la Regla de Cramer*

a)$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-3y-2z=1 \\ 3x+y+5z=3 \end{array} \right.$ b)$\left\{ \begin{array}{c} x+3y-z=1 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+5y=4 \end{array} \right.$ c)$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-3y-2z=1 \\ 3x+y+4z=3 \end{array} \right.$

d)$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=2 \\ 3x+4z=8 \end{array} \right.$

a)S.C.D $H=\{(1,0,0)\}$ b)S.C.I $H=\left\{\left(\frac{7-5z}{4},\frac{3z-1}{4},z\right)\ /\ z\in\Re\right\}$

c)S.C.I $H=\{(1-z,-z,z)\ /\ z\in\Re\}$ d)S.I

**Exercise 1.7.3** *Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, según los valores de a, aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius. En los casos en que sean compatibles, obtener sus soluciones aplicando la Regla de Cramer*

a)$\left\{ \begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array} \right.$ b)$\left\{ \begin{array}{c} x+ay-z=-2 \\ (a+1)x+y+z=a+2 \\ 5x-y-z=-2 \end{array} \right.$ c)$\left\{ \begin{array}{c} 3x+y+2z=1-a \\ (1+a)x+2y+z=a \\ ax-y+z=1-a \end{array} \right.$

d)$\left\{ \begin{array}{c} 5x-11y+9z=a \\ x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \end{array} \right.$, e)$\left\{ \begin{array}{l} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{array} \right.$ f), $\left\{ \begin{array}{c} 3x+y+2z=3 \\ 2x+2y+z=1 \\ ax+3y+3z=a-1 \end{array} \right.$

Soluciones
a) Si $a = 1$ S.C.I $H = \{(1 - y - z, y, z) \ / \ y, z \in \Re\}$
Si $a = -2$ S. Incompatible
Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ S.C.D $H = \left\{ \left( \frac{-a-1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2} \right) \right\}$
b) Si $a = -1$ S. Incompatible
Si $a = -6$ S. Incompatible
Si $a \neq -1$ y $a \neq -6$ S.C.D $H = \left\{ \left( \frac{a}{a+6}, \frac{4a}{(a+6)(a+1)}, \frac{7a^2+15a+12}{(a+6)(a+1)} \right) \right\}$
c) Si $a = 1$ S. Incompatible
Si $a \neq 1$ S.C.D $H = \left\{ \left( \frac{3a}{6a-6}, \frac{4a^2-7a+2}{6a-6}, \frac{-5a^2+5a-4}{6a-6} \right) \right\}$
d) Si $a = 4$ S.C.I $H = \left\{ \left( \frac{-5+14z}{2}, \frac{-3+8z}{2}, z \right) /z \in \Re \right\}$
Si $a \neq 4$ S.Incompatible
e) Si $a = 1$ S.C.I $H = \{(1 - y - z, y, z) \ / \ y, z \in \Re\}$
Si $a = -2$ S. Incompatible
Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ S.C.D $H = \left\{ \left( \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right) \right\}$
f)Si $a \neq 5$ S.C.D $H = \left\{ \left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$
Si $a = 5$ S.C.I $H = \{(-3y - 1, y, 4y + 3)\}$

**Exercise 1.7.4** *¿Para qué valores de m el sistema* $\left\{ \begin{array}{c} mx - y + z = 2x \\ x + 2my - mz = y \\ x + my - z = 0 \end{array} \right.$ *tiene solución no nula?*

**Exercise 1.7.5** *Hallar para qué valores de m el sistema* $\left\{ \begin{array}{c} x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + 3y + mz = 2 \end{array} \right.$ *es compatible*

**Exercise 1.7.6** *Demostrar que el sistema* $\left\{ \begin{array}{c} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + y + az = 6 \end{array} \right.$ *, tiene solución única si* $a \neq 8$ *. Hallar todas las soluciones cuando a)* $a = 6$*, b)* $a = 7$

**Exercise 1.7.7** *Dado el sistema* $\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 = b_3 \end{array} \right.$ *tal que* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0$ *¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que sea incompatible este sistema?*

**Exercise 1.7.8** *Dado el sistema* $\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3 \\ a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 = b_4 \end{array} \right.$ *donde* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0$ *¿Cuándo el sistema anterior puede ser incompatible?*

**Exercise 1.7.9** *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = 0 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = 0 \\ a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 = 0 \end{array}\right.$ *del cual sabemos que* $\left|\begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{array}\right| \neq 0$ *¿Cuándo el sistema anterior admitirá soluciones distintas de la trivial?*

**Exercise 1.7.10** *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 = 0 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 = 0 \end{array}\right.$ *tal que* $\left|\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}\right| \neq 0$ *¿Este sistema admite sólo la solución trivial?. Razona tu respuesta aplicando el teorema de Rouche-Frobenius*

**Exercise 1.7.11** *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \end{array}\right.$ *Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius explica todas las posibilidades que se pueden presentar (utiliza para ello determinantes)*

**Exercise 1.7.12** *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = 0 \end{array}\right.$ *Enuncia una condición necesaria y suficiente para que el sistema admita soluciones distintas de la trivial (utiliza determinantes)*

**Exercise 1.7.13** *¿Para qué valores de $k$ el sistema* $\left\{\begin{array}{c} (k+3)x + y + 2z = k \\ kx + (k-1)y + z = 2k \\ 3(k+1)x + ky + (k+3)z = 5 \end{array}\right.$ *, tiene solución ?. En los casos en que sea compatible, determina sus soluciones*

*Solución del ejercicio 4.13*

Como la matriz $A$ es cuadrada empezaremos calculando su determinante

$|A| = \left|\begin{array}{lll} k+3 & 1 & 2 \\ k & k-1 & 1 \\ 3k+3 & k & k+3 \end{array}\right|, =:\ k^3 - k^2 =:\ k^2\,(k-1)$

Los valores que anulan el determinante son 0 y 1

<u>Posibilidades</u>

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow RangoA = 3 = RangoA'$

El sistema es compatible determinado y las soluciones son

$$x = \frac{\left|\begin{array}{lll} k & 1 & 2 \\ 2k & k-1 & 1 \\ 5 & k & k+3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{lll} k+3 & 1 & 2 \\ k & k-1 & 1 \\ 3k+3 & k & k+3 \end{array}\right|} = \frac{k^2+4k-15}{k^2}$$

# Geometría afín

Juan José Isach Mayo

20 de Septiembre de 2007

# Contents

# Chapter 1

# Geometría afín

**Definicion 1** *Espacio afín tridimensional*

LLamaremos espcio afín tridimensional a la terna $(R^3, V^3, \varphi)$ donde:
$R^3$es el espacio tridimensional considerado como conjunto de puntos
$V^3$ el espacio vectorial de los vectores libres de $R^3$
$\varphi$ es una aplicación de $R^3 x R^3$ en $V^3$ que a todo par de puntos de $R^3$ $A$ y $B$ respectivamente le asocia un único vector libre $\varphi((A, B)) = \overrightarrow{AB}$ .Esta aplicación verifica las siguientes propiedades

1) Relación de Chasles

$$\varphi((A, B)) + \varphi((B, C)) = \varphi((A, C)) \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

2) Vector libre nulo

$$\varphi((A, A)) = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \ \forall A \in R^3$$

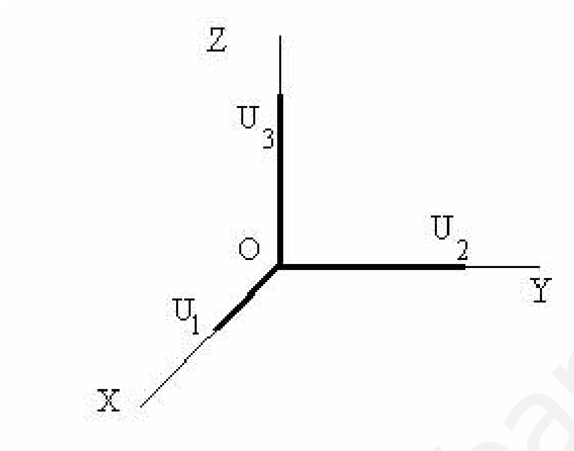
3) Fijado un punto $O$ denominado origen, la aplicación $\varphi_O : R^3 \rightarrow V^3$que a todo punto $A \in R^3$ le asocia su vector de posición $\varphi_O(A) = \overrightarrow{OA}$ ,con respecto al origen $O$ , es biyectiva

### 1.0.1 Sistemas de referencia

**Definicion 2** *Sistema de referencia afín*

Llamaremos sistema de referencia afín del espacio afín tridimensional al siguiente conjunto $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ donde $O$ es un punto de $R^3$ y $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ son tres vectores libres, que forman base del espacio vectorial $V^3$ tales que $\overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{OU_2}, \overrightarrow{OU_3}$ son representantes de estos vectores

Las rectas $OX, OY, OZ$ que pasan por O y son paralelas respectivamente a los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ se llaman ejes de coordenadas del sistema de referencia $S$ y los planos $XOY, YOZ, ZOX$ se llaman planos coordenados. El punto $O$ se denomina origen de coordenadas




**Comentario** Dados el sistema de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y un punto $P$ de $R^3$; nosotros sabemos que existe un único vector (libre) de posición $\overrightarrow{OP}$ según el sistema de referencia $S$ dado. Por ser los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ una base de $V^3$ ,entonces existirán tres únicos escalares $\alpha, \beta$ y $\gamma$ tales que $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} + \gamma\overrightarrow{u_3}$ ( Recuerda que las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto a la base $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ son $(\alpha, \beta, \gamma)$)

Recíprocamente a toda terna $(\alpha, \beta, \gamma)$ corresponde, respecto del sistema de referencia $S$ un único punto $P$ tal que su vector de posición $\overrightarrow{OP}$ tiene de componentes $(\alpha, \beta, \gamma)$ con respecto a la base $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ de $V^3$

**Definicion 3** _Sistema de referencia canónico_

Llamaremos sistema de referencia canónico del espacio afín tridimensional al siguiente conjunto $S = \{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ donde $O$ es un punto de $R^3$ y $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ son los tres vectores de la base canónica del espacio vectorial $V^3$

### 1.0.2 Coordenadas de un punto

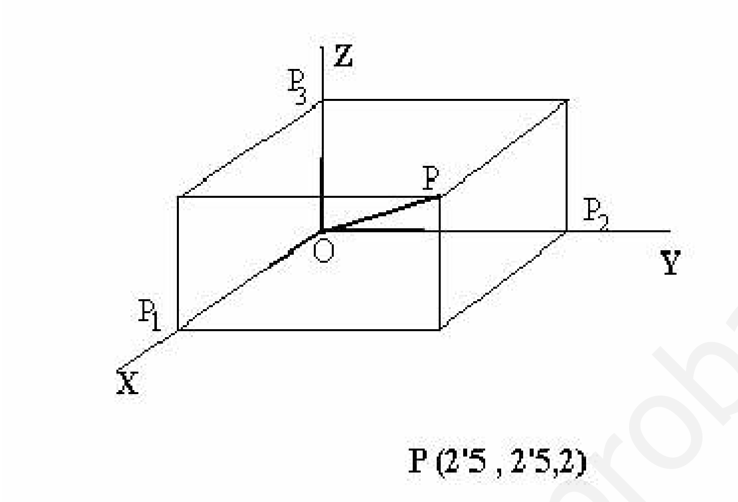
**Definicion 3** _Coordenadas de un punto en un sistema de referencia_

Diremos que las coordenadas de un punto $P$ en el sistema de referencia $S$ son $(\alpha, \beta, \gamma)$ y lo representaremos por

$$\boxed{P = (\alpha, \beta, \gamma)_S \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} + \gamma\overrightarrow{u_3}}$$

Nota : En todo el tema supondremos que estamos trabajando con el sistema de referencia $S$

**Ejemplo** Dado el sistema de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ ; el punto $P$ de coordenadas $(2'5, 2'5, 2)$ es el extremo de la diagonal $OP$ del paralelepípedo de la siguiente figura:




*Es evidente; que un mismo punto en distintos sistemas de referencia tendrá distintas componentes*

**Nota** Cuando nos den las coordenadas de un punto y no nos especifiquen en qué sistema vienen expresadas; entenderemos siempre que vienen referidas en el sistema de referencia canónico

### 1.0.3 Fórmulas de cambio de sistema de referencia

Dados los siguientes sistemas de referencia $\left.\begin{array}{l} S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\} \\ S' = \{O', \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\} \end{array}\right\}$

donde las componentes de $O'$ en el sistema $S$ son $(x_0, y_0, z_0)$ $(OO' = x_0\overrightarrow{u_1} + y_0\overrightarrow{u_2} + z_0\overrightarrow{u_3})$

y los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ tienen de componentes en la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ del sistema $S$

$$\overrightarrow{v_1} = (a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1} = \sum_{k=1}^{3} a_{k,1}\overrightarrow{u_k}$$

$$\overrightarrow{v_2} = (a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_2} = \sum_{k=1}^{3} a_{k,1}\overrightarrow{u_k}$$

$$\overrightarrow{v_1} = (a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_3} = \sum_{k=1}^{3} a_{k,1}\overrightarrow{u_k}$$

Si un punto $P$ tiene de coordenadas en el sistema $S$ $(a, b, c)$ y en el sistema $S'$ son$(a', b', c')$ entonces las fórmulas de cambio de sistema de referencia vienen dadas por la relación matricial

$$\boxed{\begin{pmatrix} a-x_0 \\ b-y_0 \\ c-z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}}$$

(Formulas de cambio de sistema)

A la matriz $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$, cuyas columnas son las componentes de los vectores de la base $\beta' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ de $S'$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ de $S$,se le denomina **matriz de cambio de sistema de referencia y la representaremos por A**. Esta matriz A admite inversa ; ya que su determinante es no nulo

**Demostración** Si conocemos las componentes de un punto ,$P$, en los dos sistemas de referencia. Esto es:

$$\begin{array}{l} a)\ P(a,b,c)_S \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (a,b,c)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + c\overrightarrow{u_3} \\ a')\ P(a',b',c')_{S'} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'P} = (a',b',c')_{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}} = a'\overrightarrow{v_1} + b'\overrightarrow{v_2} + c'\overrightarrow{v_3} \end{array}$$

Por ser $\overrightarrow{O'P} = (a',b',c')_{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}} = a'\overrightarrow{v_1} + b'\overrightarrow{v_2} + c'\overrightarrow{v_3}$ y como por hípotesis

$$\left( \begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = (a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1} = \sum_{k=1}^{3} a_{k,1}\overrightarrow{u_k} \\ \overrightarrow{v_2} = (a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_2} = \sum_{k=1}^{3} a_{k,1}\overrightarrow{u_k} \\ \overrightarrow{v_1} = (a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_3} = \sum_{k=1}^{3} a_{k,1}\overrightarrow{u_k} \end{array} \right) \text{entonces tendremos que}$$

$$\overrightarrow{O'P} = a'\overrightarrow{v_1} + b'\overrightarrow{v_2} + c'\overrightarrow{v_3} = a'\sum_{k=1}^{3} a_{k,1}\overrightarrow{u_k} + b'\sum_{k=1}^{3} a_{k,2}\overrightarrow{u_k} + c'\sum_{k=1}^{3} a_{k,3}\overrightarrow{u_k}$$

Expresión que después de agrupar nos quedará de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{O'P} = (a'a_{1,1} + b'a_{1,2} + c'a_{1,3})\,\overrightarrow{u_1} + (a'a_{2,1} + b'a_{2,2} + c'a_{2,3})\,\overrightarrow{u_2} + (a'a_{3,1} + b'a_{3,2} + c'a_{3,3})\,\overrightarrow{u_3}$$

Así pues las componentes del vector $\overrightarrow{O'P}$ en la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ de $S$ son

$$\overrightarrow{O'P} = (a'a_{1,1} + b'a_{1,2} + c'a_{1,3}, a'a_{2,1} + b'a_{2,2} + c'a_{2,3}, a'a_{3,1} + b'a_{3,2} + c'a_{3,3})_\beta$$

(Relacion a)

Por otra parte, si tenemos presente que $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$y como además sabemos que $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = (a,b,c)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}} \\ \overrightarrow{OO'} = (x_0, y_0, z_0)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}} \end{array} \right\}$;entonces las componentes del vector

$\overrightarrow{O'P}$ en la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ de $S$ son

$$\overrightarrow{O'P} = (a - x_0, b - y_0, c - z_0)_\beta \qquad \text{(Relacion b)}$$

Igualando las relaciones a y b tendremos las siguientes igualdades

$$\begin{array}{l} a - x_0 = a'a_{1,1} + b'a_{1,2} + c'a_{1,3} \\ b - y_0 = a'a_{2,1} + b'a_{2,2} + c'a_{2,3} \\ c - z_0 = a'a_{3,1} + b'a_{3,2} + c'a_{3,3} \end{array} \qquad \text{(Cambio de sistema)}$$

Expresiones que se reducen a la siguiente igualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} a - x_0 \\ b - y_0 \\ c - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \qquad \text{(c.q.d)}$$

**Problemas de cambio de sistema de referencia**

1) Dados los sistemas de referencia $S = \left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ y $S' = \{O, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ tales que $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = (2, -1, 1)_S \\ \overrightarrow{v_2} = (1, 1, 1)_S \\ \overrightarrow{v_3} = (1, -2, 3)_S \end{array}\right.$

a) Si el punto $P$ tiene con respecto a $S$ las siguientes coordenadas $(2, -3, 5)$ determina sus coordenadas en $S'$

b) Si el punto $Q$ tiene con respecto a $S'$ las siguientes coordenadas $(-3, 0, 1)$; determina sus coordenadas con respecto a $S$

*Solución*

a) Por ser $P(\alpha, \beta, \gamma)_{S'}$ entonces $\overrightarrow{OP}$ tiene con respecto a la base $\beta' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ del sistema $S'$ las siguientes componentes $\overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)_{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}}$. Es decir $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} + \gamma\overrightarrow{v_3}$ teniendo presente ahora las relaciones de cambio entre ambas bases entonces:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} + \gamma\overrightarrow{v_3} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_S + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_S$$

Operando tendremos:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha + \beta - 2\gamma \\ \alpha + \beta + 3\gamma \end{pmatrix}_S$$

Como las coordenadas de $P$ en $S$ son $(2, -3, 5) \to \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}_S$

Igualando ambas expresiones componente a componente tendremos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{c} 2\alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -\alpha + \beta - 2\gamma = -3 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 5 \end{array}\right\}$$

Cuyas soluciones son

$$\alpha = \frac{1}{9}; \beta = \frac{2}{9}; \gamma = \frac{14}{9}$$

Por lo tanto, las coordenadas de $P$ en el sistema de referencia $S'$ son:

$$P\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{14}{9}\right)_{S'}$$

*Nota*: Este ejercicio, también se puede resolver con la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$ [1]

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

b)Por ser $Q(-3,0,1)_{S'} \rightarrow \overrightarrow{OQ} = -3\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3} = -3(2,-1,1)_S + (1,-2,3)_S = (-5,1,0)_S$

Como $\overrightarrow{OQ} = (-5,1,0)_S$ $\rightarrow$El punto $Q$ tiene de coordenadas en $S$ $(-5,1,0)$

*Nota*: Este ejercicio, también se puede resolver con la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ donde } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ coordenadas de } Q \text{ en } S$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2) Dados los sistemas de referencia $S = \left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ y $S' = \left\{O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ tales que $O' = (1,2,3)_S$

a) Si el punto $P$ tiene con respecto a $S$ las siguientes coordenadas $(2,3,2)$ determina sus coordenadas en $S'$

b) Si el punto $Q$ tiene con respecto a $S'$ las siguientes coordenadas $(-3,0,1)$; determina sus coordenadas con respecto a $S$

*Solución*

[1] $|A|$ es siempre no nulo $\Longleftrightarrow A$ es regular$\Longleftrightarrow A$ admite inversa
A la matriz $A$ se le denomina matriz de cambio de base

a) Por ser $\left.\begin{array}{l} O' = (1,2,3)_S \to \overrightarrow{OO'} = (1,2,3) \\ P = (2,3,2)_S \to \overrightarrow{OP} = (2,3,2) \end{array}\right\}$

Sabemos que $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} \to \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} =^{2} (2,3,2) - (1,2,3) = (1,1,-1)$$

Por lo que , las coordenadas de $P$ en $S'$ son $(1,1,-1)$

**Nota:** Para resolverlo matricialmente; bastará resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Por ser $\left.\begin{array}{l} O' = (1,2,3)_S \to \overrightarrow{OO'} = (1,2,3) \\ Q = (-3,0,1)_{S'} \to \overrightarrow{O'Q} = (-3,0,1) \end{array}\right\}$

Sabemos que $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'Q} = \overrightarrow{OQ}$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'Q} = (1,2,3) + (-3,0,1) = (-2,2,4)$$

Por lo que , las coordenadas de $Q$ en $S$ son $(-2,2,4)$

**Nota:** Para resolverlo matricialmente; bastará resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3) Dados los sistemas de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y $S^{'} = \{O, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ tales que $\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{v_1} = 3\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{v_3} = 2\overrightarrow{u_1} - 3\overrightarrow{u_3} \end{array}\right.$ [3]

a) Si el punto P tiene con respecto a $S$ las siguientes coordenadas $(-2,1,3)$; determina sus coordenadas con respecto a $S'$

---

[2] Las bases de los dos sistemas son la misma; la base canónica

[3] Las componentes de los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ son

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} ; \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} ; \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}}$$

b) Si el punto Q tiene con respecto a $S'$ las siguientes coordenadas $(-3, 2, 1)$; determina sus coordenadas con respecto a $S$

*Solución*

a) Por ser $P(\alpha, \beta, \gamma)_{S'}$ entonces $\overrightarrow{OP}$ tiene con respecto a la base $\beta^{'} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ del sistema $S^{'}$ las siguientes componentes $\overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)_{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}}$. Es decir $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} + \gamma\overrightarrow{v_3}$ teniendo presente ahora las relaciones de cambio entre ambas bases entonces:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} :$$

Calculando tendremos las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ del sistema $S$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3\alpha + \beta + 2\gamma \\ 2\alpha + 2\beta \\ -\alpha + \beta - 3\gamma \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} \quad @$$

Como por hipótesis $P(-2, 1, 3)_S$ entonces $\overrightarrow{OP}$ tiene con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ del sistema $S$ las siguientes componentes

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} \quad .@@$$

Igualando ahora las expresiones @ y @@ tendremos el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 3\alpha + \beta + 2\gamma = -2 \\ 2\alpha + 2\beta = 1 \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 3 \end{array} \right. \quad \text{cuyas soluciones son } \alpha = \tfrac{-5}{4} \ \beta = \tfrac{7}{4} \ \gamma = 0$$

Por lo tanto las coordenadas de $P$ en el sistema $S^{'}$ son $P\left(\frac{-5}{4}, \frac{7}{4}, 0\right)$

**Nota 1** Para resolver el problema utilizando matrices , bastará con resolver la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot P' = P$$ [4]

Observa que:

En la primera columna de $A$ te aparecen las componentes de $\overrightarrow{v_1}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$

[4] $|A|$ es siempre no nulo $\Longleftrightarrow A$ es regular$\Longleftrightarrow A$ admite inversa
A la matriz $A$ se le denomina matriz de cambio de base

En la segunda columna de $A$ te aparecen las componentes de $\overrightarrow{v_2}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$

En la tercera columna de $A$ te aparecen las componentes de $\overrightarrow{v_3}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$

La columna $P'$ son las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto a la base $\beta^{'}$

La columna $P$ son las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto a la base $\beta$

Como $A$ es siempre una matriz regular, entonces multiplicando la ecuación matricial por $A^{-1}$

tendremos que:

$A^{-1} \cdot (A \cdot P') = A^{-1} \cdot P \rightarrow \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot P' = A^{-1} \cdot P \rightarrow I \cdot P' = \boxed{P' = A^{-1} \cdot P}$

Asi pues procederemos a calcular:

$1^o$ La inversa de $A$

$2^o$Calcularemos $A^{-1} \cdot P$.

$3^o$Dicha matriz columna serán las componentes del punto P con respecto al sistema $S^{'}$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{4} & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculando, tendremos:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = \frac{-5}{4} \ \beta = \frac{7}{4} \ \gamma = 0$$

b) Por ser $Q(-3,2,1)_{S'}$ entonces $\overrightarrow{OQ}$ tiene con respecto a la base $\beta^{'} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ del sistema $S^{'}$ las siguientes componentes $\overrightarrow{OQ} = (-3,2,1)_{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}}$. Es decir $\overrightarrow{OQ} = -3\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ teniendo presente ahora las relaciones de cambio entre ambas bases entonces:

$\overrightarrow{OQ} = -3\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} = -3\left(3\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}\right) + 2\left(\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}\right) + 1\left(2\overrightarrow{u_1} - 3\overrightarrow{u_3}\right)$

Reordenando esta última expresión en función de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ tendremos las componentes del vector $\overrightarrow{OQ}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ del sistema $S$

$\overrightarrow{OQ} = (-3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2)\,\overrightarrow{u_1} + (-3 \cdot 2 + 2 \cdot 2)\,\overrightarrow{u_2} + (-3 \cdot (-1) + 2.1 - 3 \cdot 1)\,\overrightarrow{u_3}$

$\overrightarrow{OQ} = -5\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + 2\overrightarrow{u_3}$@

Si $Q(\alpha, \beta, \gamma)_S$ entonces $\overrightarrow{OQ}$ tiene con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ del sistema $S$ las siguientes componentes $\overrightarrow{OQ} = (\alpha, \beta, \gamma)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}}$. Es decir $\overrightarrow{OQ} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} + \gamma\overrightarrow{u_3}$ @@

Igualando ahora las expresiones @ y @@ tendremos $\alpha = -5$ , $\beta = -2$ , $\gamma = 2$

**Nota 2** Para resolver el problema utilizando matrices , bastará con resolver la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \to \alpha = -5 \ , \ \beta = -2 \ , \ \gamma = 2$$

### 1.0.4 Componentes de un vector

*Componentes de un vector si conocemos origen y extremo*

Si las coordenadass de dos puntos $P$ y $Q$ son respectivamente $(\alpha, \beta, \gamma)_S$ y $\left(\alpha', \beta', \gamma'\right)_S$ entonces las componentes del vector libre $\overrightarrow{PQ}$, con respecto a la base $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$, que los une son:

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma\right)_S$$

*Demostración*

Si $\left\{ \begin{array}{c} P = (\alpha, \beta, \gamma)_S \\ Q = \left(\alpha', \beta', \gamma'\right)_S \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} \\ \overrightarrow{OQ} = \left(\alpha', \beta', \gamma'\right)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} \end{array} \right.$. Por la relación de Chasles, sabemos que $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$. Despejando el vector $\overrightarrow{PQ}$ tendremos que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Por lo tanto, las componentes del vector $\overrightarrow{PQ}$ con respecto a la base $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ son

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \left(\alpha', \beta', \gamma'\right)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} - (\alpha, \beta, \gamma)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} = \left(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma\right)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}}}$$

**Ejemplo a)** Dado el sistema de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y dados los puntos $P$ y $Q$ cuyas coordenadas en $S$ son respectivamente $P(-2, -1, 3), Q(4, -3, -2)$. Determina las componentes de los siguientes vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$

*Solución*

$$\left\{ \begin{array}{c} P(-2, -1, 3)_S \\ Q(4, -3, -2)_S \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{OP}(-2, -1, 3)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} \\ \overrightarrow{OQ}(4, -3, -2)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} \end{array} \right.$$

Como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (4, -3, -2) - (-2, -1, 3) = (6, -2, -5)$
Como $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = -\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = -\ \overrightarrow{PQ} = (-6, +2, 5)$

**Ejemplo b)** Dado el sistema de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$ cuyas componentes en la base $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ , $\overrightarrow{PQ}(4, -3, -2)$. Determina las coordenadas del punto $Q$ si sabemos que las de $P$ son $P(-2, -1, 3)$

*Solución*

$$\left\{ \begin{array}{c} P(-2, -1, 3)_S \\ Q(a, b, c)_S \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{OP}(-2, -1, 3)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} \\ \overrightarrow{OQ}(a, b, c)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}} \end{array} \right.$$

Como

$$\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (a,b,c) - (-2,-1,3) = (a+2, b+1, c-3) \\ \overrightarrow{PQ}(4,-3,-2)\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} a+2=4 \\ b+1=-3 \\ c-3=-2\end{array}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{c} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{array}\right\} \rightarrow Q(2,-4,1)$$

**Proposicion 2** *Componentes del pto medio de un segmento de extremos $P$ y $Q$*

Si las coordenadas de dos puntos $P$ y $Q$ son respectivamente $(\alpha,\beta,\gamma)_S$ y $\left(\alpha^{'},\beta',\gamma'\right)_S$ entonces las coordenadas del pto medio $I$ del segmento$\overline{PQ}$ son:

$$I = \left(\frac{\alpha+\alpha^{'}}{2}, \frac{\beta+\beta^{'}}{2}, \frac{\gamma+\gamma^{'}}{2}\right)_S$$

<u>*Demostración*</u>

Si $\left\{\begin{array}{c} P = (\alpha,\beta,\gamma)_S \\ Q = \left(\alpha^{'},\beta',\gamma'\right)_S \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{OP} = (\alpha,\beta,\gamma)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}} \\ \overrightarrow{OQ} = \left(\alpha^{'},\beta',\gamma'\right)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}} \end{array}\right.$ Por ser $I$ el pto medio del segmento $\overline{PQ}$ se verifica que $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{0}$

En virtud de la relación de Chasles $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{0}$. Despejando el vector $\overrightarrow{OI}$ tendremos:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$$

Trabajando con componentes

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}\left((\alpha,\beta,\gamma) + \left(\alpha',\beta',\gamma'\right)\right) = \left(\frac{\alpha+\alpha^{'}}{2}, \frac{\beta+\beta^{'}}{2}, \frac{\gamma+\gamma^{'}}{2}\right)$$

Por lo que, el punto $I$ tiene de coordenadas en el sistema de referencia $S$

$$I = \left(\frac{\alpha+\alpha^{'}}{2}, \frac{\beta+\beta^{'}}{2}, \frac{\gamma+\gamma^{'}}{2}\right)_S$$

**Ejemplo a)** Dado el sistema de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y dados los puntos $P$ y $Q$ cuyas coordenadas en $S$ son respectivamente $P(-2,-1,3)$, $Q(4,-3,-2)$. Determina las coordenadas de su punto medio $I$

*Solución*

$$\left\{\begin{array}{l} P(-2,-1,3)_S \\ Q(4,-3,-2)_S \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OP}(-2,-1,3)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}} \\ \overrightarrow{OQ}(4,-3,-2)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}} \end{array}\right.$$

Como $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$ entonces $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left((-2,-1,3)+(4,-3,-2)\right) = \left(1,-2,\frac{1}{2}\right)$

Por lo que, el punto $I$ tiene de coordenadas en el sistema de referencia $S$

$$I = \left(1,-2,\frac{1}{2}\right)$$

**Ejemplo b)** Dado el sistema de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y dados los puntos $P$ y $I$ cuyas coordenadas en $S$ son respectivamente $P(-2,-1,3)$, $I(4,-3,-2)$. Determina las coordenadas del punto $Q$ sabiendo que $I$ es el pto medio del segmento $\overline{PQ}$

$$\left\{\begin{array}{c} P(-2,-1,3)_S \\ Q(a,b,c)_S \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{OP}(-2,-1,3)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}} \\ \overrightarrow{OQ}(a,b,c)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}} \end{array}\right.$$

Como $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$ entonces

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left((-2,-1,3)+(a,b,c)\right) = \left(-1+\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}c\right)$$

:Al ser $I = (4,-3,-2) \rightarrow \overrightarrow{OI} = (4,-3,-2)$ Igualando componente a componente con la expresión anterior tendremos

$$\left.\begin{array}{l} -1+\frac{1}{2}a = 4 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b = -3 \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}c = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} a = 10 \\ b = -5 \\ c = -7 \end{array}\right\} \rightarrow Q(10,-5,-7)$$

## 1.1 El Plano

### 1.1.1 El Plano (Ecs vectorial y paramétricas)

Un plano en $\Re^3$ queda unívocamente determinado si conocemos un punto $P$ y dos vectores no paralelos $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ denominados vectores directores del plano
$\pi = \left\{X \in \Re^3 \ / \ \overrightarrow{PX} \in < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >\right\} =^5 \left\{X \in \Re^3 \ / \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}\right\}$

Despejando el vector $\overrightarrow{OX}$ tendremos

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w} \qquad \text{(Ecuacion vectorial del plano)}$$

Si $\pi \equiv \begin{cases} P(a_1, a_2, a_3) \\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ \overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3) \end{cases}$ y el pto genérico $X$ del plano tiene por coordenadas $(x, y, z)$;entonce sustituyendo en la ecuación vectorial tendremos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{(Ecuacion vectorial plano bis)}$$

Operando e igualando componente a componente, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 + \beta w_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 + \beta w_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 + \beta w_3 \end{array}\right\} \qquad \text{(Ecuaciones parametricas)}$$

### 1.1.2 Ecuación cartesiana del plano

De la ecuación vectorial del plano $\overrightarrow{PX} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Lo cual significa que:

$$Rango(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) =^6 2 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x - a_1 & v_1 & w_1 \\ y - a_2 & v_2 & w_2 \\ z - a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} (x - a_1) - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} (y - a_2) + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} (z - a_3) = 0$$
(Ecuacion cartesiana del plano)

[5] Como $\overrightarrow{PX} \in < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} > \rightarrow$existirán dos únicos escalares $\alpha$ y $\beta \in \Re$ / $\overrightarrow{PX} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}$
Por la relación de Chasles $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$

[6] Ya que el vector $\overrightarrow{PX}$ es C.L (única) de los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$

**Ejemplo a)** Determina la ecuación cartesiana del plano que pasa por $A(1,3,2)$ sabiendo que sus vectores directores son $\overrightarrow{v}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{w}=(-3,0,1)$

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(1,3,2) \\ \overrightarrow{v}=(1,2,3) \\ \overrightarrow{w}=(-3,0,1) \end{array} \right. \quad \rightarrow \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{v}+\beta\overrightarrow{w}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Trabajando con matrices, obtendremos las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1+\alpha-3\beta \\ y = 3+2\alpha \\ z = 2+3\alpha+\beta \end{array} \right.$$

Para obtener la ecuación cartesiana del plano, has de fijarte de (1) que:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow Rango \begin{pmatrix} x-1 & 1 & -3 \\ y-3 & 2 & 0 \\ z-2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

ya que el primer vector columna es combinación lineal del segundo y tercero. Lo que es equivalente a afirmar que:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -3 \\ y-3 & 2 & 0 \\ z-2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(x-1)-10(y-3)+6(z-2)=0$$

$$2x+16-10y+6z=0$$

**Nota 1** Un plano en $\Re^3$ también queda determinado si conocemos de éste tres puntos $A, B, C$ no alineados

Si de un plano conocemos $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \right.$ Necesitamos dos vectores directores del plano $\pi$.

Podemos considerar los siguientes: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AC} \rightarrow \pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} A \\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{w}=\overrightarrow{AC} \end{array} \right.$

**Ejemplo b)** Determina la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4), B(7,2,5), C(0,3,1)$

*Solución*

$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(2,3,4) \\ B(7,2,5) \\ C(0,3,1) \end{array} \right.$ Necesitamos dos vectores directores del plano $\pi$. Podemos considerar los siguientes: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AC} \rightarrow \pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(2,3,4) \\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}=(5,-1,1) \\ \overrightarrow{w}=\overrightarrow{AC}=(-2,0,-3) \end{array} \right.$

Como la ecuación vectorial del plano es $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{w}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad @$$

Trabajando con matrices, obtendremos las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$

$$\begin{cases} x = 2 + 5\alpha - 2\beta \\ y = 3 - \alpha \\ z = 4 + \alpha - 3\beta \end{cases}$$

Para obtener la ecuación cartesiana del plano, has de fijarte de @ que:
$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z-4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \to Rango \begin{pmatrix} x-2 & 5 & -2 \\ y-3 & -1 & 0 \\ z-4 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$
2 ya que el primer vector columna es combinación lineal del segundo y tercero. Lo que es equivalente a afirmar que:
$\begin{vmatrix} x-2 & 5 & -2 \\ y-3 & -1 & 0 \\ z-4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \to 3(x-2) + 13(y-3) - 2(z-4) = 0$

$$\pi \equiv 3x + 13y - 2z = 37$$

**Nota 2** Un plano en $\Re^3$ también queda determinado si conocemos de éste dos puntos $A, B$ y un vector director $\overrightarrow{w}$

Si de un plano conocemos $\pi \equiv \begin{cases} A \\ B \\ \overrightarrow{w} \end{cases}$ Necesitamos otros vector director del plano. Podemos considerar el siguiente: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$
$\pi \equiv \begin{cases} A \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{w} \end{cases}$

**Ejemplo c)** Determina la ecuación del plano que pasa por $A(1,3,2), B(4,5,6)$ sabiendo que un vector director de este plano es $\overrightarrow{v} = (1,2,0)$

*Solución*
$\pi \equiv \begin{cases} A(1,3,2) \\ B(4,5,6) \\ \overrightarrow{v} = (1,2,0) \end{cases}$ Necesitamos otro vector director del plano $\pi$. Podemos considerar el siguiente: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} \to \pi \equiv \begin{cases} A(1,3,2) \\ \overrightarrow{v} = (1,2,0) \\ \overrightarrow{w} = (3,2,4) \end{cases}$

Como la ecuación vectorial del plano es $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{w}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad @$$

Trabajando con matrices, obtendremos las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha + 3\beta \\ y = 3 + 2\alpha + 2\beta \\ z = 2 + 4\beta \end{array} \right.$$

Para obtener la ecuación cartesiana del plano, has de fijarte de @ que:
$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow Rango \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-3 & 2 & 2 \\ z-2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$ ya que el primer vector columna es combinación lineal del segundo y tercero. Lo que es equivalente a afirmar que:
$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-3 & 2 & 2 \\ z-2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 8(x-1) - 4(y-3) - 4(z-2) = 0$

$$\pi \equiv 2x - y - z = -3$$

*Nota*: **Dada la ecuación cartesiana de un plano; a veces nos interesa determinar sus ecuaciones paramétricas para de esta manera conocer de él un punto y sus dos vectores directores. Para ello, bastará con resolver el sistema formado por la única ecuación que tenemos**

**Ejemplo 1** Dado el plano $\pi \equiv 2x + y - z = -3$, obtén sus ecuaciones paramétricas

Despejando de esta ecuación la incógnita $y$ tendremos$\rightarrow$ $y = -3 - 2x + z$
Así pues, las ecuaciones paramétricas de este plano son:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -3 - 2\alpha + \beta \\ z = \beta \end{array} \right.$$

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(0, -3, 0) \\ \overrightarrow{v} = (1, -2, 0) \\ \overrightarrow{w} = (0, 1, 1) \end{array} \right.$$

**Ejemplo 2** Dado el plano $\pi \equiv 2x + y = -3$, obtén sus ecuaciones paramétricas

Despejando de esta ecuación la incógnita $y$ tendremos$\rightarrow$ $y = -3 - 2x$
Así pues, las ecuaciones paramétricas de este plano son:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -3 - 2\alpha \\ z = \beta \end{array} \right. \text{[6]}$$

[6] Oserva que aunque no aparezca la incógnita $z$ a esta le hemos asignado el parámetro $\beta$

$$\pi \equiv \begin{cases} A(0,-3,0) \\ \overrightarrow{v} = (1,-2,0) \\ \overrightarrow{w} = (0,0,1) \end{cases}$$

### 1.1.3 Subespacio vectorial asociado al plano $\pi$

Dado el plano $\pi \equiv \begin{cases} P(a_1,a_2,a_3) \\ \overrightarrow{v} = (v_1,v_2,v_3) \\ \overrightarrow{w} = (w_1,w_2,w_3) \end{cases}$ su ecuación cartesiana es:

$$\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}(x-a_1) - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}(y-a_2) + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}(z-a_3) = 0$$

Es evidente que al plano anterior siempre le podemos asociar el siguiente plano vectorial

$$< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >= \left\{ \overrightarrow{t} \in V^3 \ / \overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w} \right\}$$

Comprueba detenidamente que la ecuación cartesiana de este subespacio vectorial de $V^3$ es:

$$\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} z = 0$$

### 1.1.4 Posición relativa de dos planos

Dados dos planos en $\Re^3$ las únicas posibilidades geométricas son las siguientes:

1. $\pi$ y $\pi'$ se corten en una recta $r$ ($\pi \cap \pi' = r$)
2. $\pi$ y $\pi'$ sean paralelos y distintos ($\pi \cap \pi' = \emptyset$)
3. $\pi$ y $\pi'$sean paralelos e iguales ($\pi \cap \pi' = \pi$)

Para determinar la posición relativa de dos planos $\pi \equiv Ax+By+Cz = D$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z = D'$ bastará con discutir el sistema formado por ambas ecuaciones aplicando el Teorema de Rouche -Frobenius

$\pi\cap\pi' \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz = D \\ A'x+B'y+C'z = D' \end{cases}$ donde la matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$

Por el teorema de Rouche-Frobenius si $Rang\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow S.C.I \Longleftrightarrow$ $\pi$ y $\pi'$ se corten en una recta $r$ ($\pi \cap \pi' = r$)

Los puntos de la recta $r$ definida como intersección de estos dos planos son la solución del sistema anterior(Ecuaciones paramétricas de $r$). También se dice que las ecuaciones cartesianas de $r$ son $\begin{cases} Ax+By+Cz = D \\ A'x+B'y+C'z = D' \end{cases}$

$Rang\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 1 \Longleftrightarrow S.C.I(doblemente) \Longleftrightarrow$ $\pi$ y $\pi'$sean paralelos e iguales $(\pi \cap \pi' = \pi)$

$Rang\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$ y $Rang\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow S.Incompatible \Longleftrightarrow$ $\pi$ y $\pi'$ sean paralelos y distintos $(\pi \cap \pi' = \emptyset)$

**Ejemplo 1)** Determina la posición relativa de los siguientes planos : $\pi_1 \equiv x - y + 3z + 4 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y + 2z + 3 = 0$

*Solución*

$\pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Como $rango(A) = rango(A') = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\rightarrow$El sistema es compatible indeterminado.Los planos se intersectan determinando una recta $r$ cuyas ptos son la solución del sistema

$$\pi \cap \pi' = r \equiv \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Pasando la incógnita $z$ al otro lado como parámetro $\begin{cases} x - y = -4 - 3z \\ x + y = -3 - 2z \end{cases}$ tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas $x$ e $y$

Aplicando la regla de Cramer

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -4-3z & -1 \\ -3-2z & 1 \end{vmatrix}}{2}, = \dfrac{-7-5z}{2} = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}z \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -4-3z \\ 1 & -3-2z \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{1+z}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \end{array}\right\} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}\alpha \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

**Ejemplo2** Idem con los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 3x - 3y + 9z + 3 = 0$

*Solución*

$\pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0 \\ 3x - 3y + 9z + 3 = 0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

Como $rango(A) = rago(A') = 1$ $\rightarrow$El sistema es compatible doblemente indeterminado. Ambos planos son paralelos y coincidentes ($\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1$ ó $\pi_2$)

**Ejemplo 3** Idem con los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 3x - 3y + 9z + 4 = 0$

*Solución*

$\pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0 \\ 3x - 3y + 9z + 4 = 0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

Como $rango(A) = 1$ y $rango(A') = 2$ $\rightarrow$El sistema es incompatible ($\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$) . Ambos planos son paralelos y distintos

### 1.1.5 Condición necesaria y suficiente para que $\pi \mid\mid \pi'$

De la pregunta anterior podemos deducir fácilmente que dados los planos $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z = D'$

$$\pi \mid\mid \pi'$$
$$\Updownarrow$$
$$Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{w}(A, B, C) \text{ } y \text{ } \overrightarrow{w'}(A', B', C') \text{ } son \text{ } proporcionales \text{ } (paralelos)$$

### 1.1.6 Haz de Planos paralelos a uno dado

Dado el plano $\pi \equiv Ax+By+Cz = D$ .La ecuación de todos los planos paralelos a $\pi$ es de la forma

$$Ax + By + Cz = K \text{ siendo } K \in \Re$$

ya que el subespacio vectorial asociado a todos es el mismo

**Ejemplo 1)** Halla la ecuación de un plano paralelo a $\pi \equiv 3x - y + 2z = 5$ sabiendo que pasa por el punto $P(1, -4, 3)$

La ecuación de todos los planos paralelos a a $\pi$ es de la forma:

$$3x - y + 2z = K$$

De todos ellos sólo nos interesa el que pasa por $P(1, -4, 3)$

$$3\,(1) - (-4) + 2\,(3) = K \rightarrow 13 = K$$

El plano pedido es $\pi' \equiv 3x - y + 2z = 13$

**Ejemplo 2)** Halla la ecuación de un plano paralelo a $\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 5\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = 4 + \alpha - 3\beta \end{cases}$ sabiendo que pasa por el punto $P(1, 4, 2)$

Primero, determinamos la ecuación cartesiana del plano dado
$$\begin{vmatrix} x-2 & 5 & 0 \\ y-3 & -1 & 0 \\ z-4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3(x-2)+15(y-3) = 0 \rightarrow x-2+5(y-3) = 0$$

$$\pi \equiv x + 5y - 17 = 0$$

La ecuación de todos los planos paralelos a $\pi$ es de la forma

$$x + 5y = K$$

De todos ellos sólo nos interesa el que pasa por $P(1, 4, 2)$

$$1 + 5\,(4) = K \rightarrow K = 21$$

El plano pedido es :$\pi' \equiv x + 5y = 21$

**Otra manera de resolverlo** Por pedirnos un plano $\pi'$ paralelo a $\pi$ y que pase por $P$; podemos considerar que los vectores directores de $\pi$ también lo son de $\pi'$; puesto que el subespacio vectorial asociado a ambos ha de ser el mismo

$$\pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1,4,2) \\ \overrightarrow{v} = (5,-1,1) \\ \overrightarrow{w}(0,0,-3) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 5\alpha \\ y = 4 - \alpha \\ z = 2 + \alpha - 3\beta \end{array} \right.$$

Luego, su ecuación cartesiana es:

$$\left| \begin{array}{ccc} x-1 & 5 & 0 \\ y-4 & -1 & 0 \\ z-2 & 1 & -3 \end{array} \right| = 0 \rightarrow 3(x-1) + 15(y-4) = 0$$

El plano pedido es :$\pi' \equiv x + 5y = 21$

### 1.1.7 Planos importantes

Plano $XY \rightarrow z = 0$
Plano $XZ \rightarrow y = 0$
Plano $YZ \rightarrow x = 0$
Plano paralelo al plano $XY \rightarrow z = c$
Plano paralelo al plano $XZ \rightarrow y = b$
Plano paralelo al plano $YZ \rightarrow x = a$

## 1.2 La recta

### 1.2.1 La recta (ecs. vectorial y paramétricas)

Una recta, $r$, en $\Re^3$ queda unívocamente determinado si conocemos un punto $P$ y un vector $\overrightarrow{v}$ (paralelo a $r$) denominado vector director de la recta
$r = \left\{ X \in \Re^3 \ / \ \overrightarrow{PX} \in < \overrightarrow{v} > \right\} =^7 \left\{ X \in \Re^3 \ / \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{v} \right\}$
Despejando el vector $\overrightarrow{OX}$ tendremos

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha \overrightarrow{v} \qquad \text{(Ecuacion vectorial de la recta)}$$

Si $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(a_1, a_2, a_3) \\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{array} \right.$ y el pto genérico $X$ del plano tiene por coordenadas $(x, y, z)$;entonce sustituyendo en la ecuación vectorial tendremos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(Ecuacion vectorial recta bis)}$$

[7] Como $\overrightarrow{PX} \in < \overrightarrow{v} > \rightarrow$existirá un único escalar $\alpha \in \Re \ / \ \overrightarrow{PX} = \alpha \overrightarrow{v}$
Por la relación de Chasles $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$

Operando e igualando componente a componente, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{array}\right\} \qquad \text{(Ecuaciones parametricas)}$$

*Nota:Una recta , también queda univocamente determinada si conocemos dos puntos $A$ y $B$ de ésta. Bastará con considerar como vector director* $\overrightarrow{AB}$ o el vector $\overrightarrow{BA}$

### 1.2.2 Ecuaciones cartesianas de la recta

De la ecuación vectorial del plano $\overrightarrow{PX} = \alpha \overrightarrow{v}$ obtenemos $\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \to Rang \begin{pmatrix} x-a_1 & v_1 \\ y-a_2 & v_2 \\ z-a_3 & v_3 \end{pmatrix} = 1$ puesto que la $1^a$col es C.L de la $2^a$

Teniendo presente que el rango de una matriz coincide por filas o por columnas; entonces podemos afirmar que la matriz $\begin{pmatrix} x-a_1 & v_1 \\ y-a_2 & v_2 \\ z-a_3 & v_3 \end{pmatrix}$ sólo tiene una fila L.Independiente

*Posibilidades*

- Si supusieramos que la única fila L.I es la $1^a$, entonces las otras dos serían C.L de la primera$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-a_1 & v_1 \\ y-a_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x-a_1 & v_1 \\ z-a_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$ Ec cartesianas (reducidas en $x$)
- Si supusieramos que la única fila L.I es la $2^a$,entonces las otras dos serían C.L de la segunda$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-a_1 & v_1 \\ y-a_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} y-a_2 & v_2 \\ z-a_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$ Ec cartesianas (reducidas en $y$)
- Si supusieramos que la única fila L.I es la $3^a$,entonces las otras dos serían C.L de la segunda$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-a_1 & v_1 \\ z-a_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} y-a_2 & v_2 \\ z-a_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$ Ec cartesianas (reducidas en $z$)

*Bastará con que consideres una de las tres posibilidades*

Sea cual sea la elección que escojas; siempre obtendrás las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

Recuerda que una recta, siempre viene definida como intersección de dos planos. Luego $Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$

### 1.2.3 Rectas importantes

$EjeX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Observa que es la intersección de los planos $XZ(y = 0)$ y $XY(z = 0)$

$EjeY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Observa que es la intersección de los planos $YZ(x = 0)$ y $XY(z = 0)$

$EjeZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Observa que es la intersección de los planos $YZ(x = 0)$ y $XZ(y = 0)$

*Recta paralela al eje X* $\rightarrow \begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$

*Recta paralela al eje Y* $\rightarrow \begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$

*Recta paralela al eje Z* $\rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

### 1.2.4 Ecuación continua de la recta

*Sólo existe si* $v_1, v_2$ *y* $v_3$ *son no nulos*

Despejando $\alpha$ de las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{cases}$ tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - a_1}{v_1} = \alpha \\ \dfrac{y - a_2}{v_2} = \alpha \\ \dfrac{z - a_3}{v_3} = \alpha \end{array}\right\}$$ e igualando posteriormente el parámetro $\alpha$

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \qquad \text{(Ecuacion continua de la recta)}$$

**Nota** A partir de la ecuación continua, también podemos obtener las ecuaciones cartesianas de la recta. Recuerda que hay tres distintas

- – ∗ Ecuaciones reducidas en $x$ $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}\\ \dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{z-a_3}{v_3}\end{array}\right.$

  ∗ Ecuaciones reducidas en $y$ $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}\\ \dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}\end{array}\right.$

  ∗ Ecuaciones reducidas en $z$ $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{z-a_3}{v_3}\\ \dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}\end{array}\right.$

**Ejemplo a)** Calcular las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y cuyo vector director es $\overrightarrow{v}=(-2,3,1)$

De la ecuación vectorial $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{v} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x=1-2\alpha\\ y=2+3\alpha\\ z=3+\alpha\end{array}\right\} Ec.Paramétricas$

Despejando $\alpha$, e igualando$\rightarrow \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ $Ec.continua$

Considerando dos de las tres igualdades anteriores

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}\\ \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}3x+2y=7\\ x+2z=7\end{array}\right. \quad Ec.cartesianas\ (reducidas\ \ en\ x)$$

*Nota*:Las ecuaciones cartesianas, también las podemos obtener a partir de la ecuación vectorial $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{v}$

$$\begin{pmatrix}x-1\\ y-2\\ z-3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\rightarrow Rang\begin{pmatrix}x-1 & -2\\ y-2 & 3\\ z-3 & 1\end{pmatrix}=1$$

Si suponemos que la $2^a$ fila es la única L. Independiente, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}x-1 & -2\\ y-2 & 3\end{vmatrix}=0\\ \\ \begin{vmatrix}y-2 & -2\\ z-3 & 3\end{vmatrix}=0\end{array}\right. \quad Ec\ cartesianas\ (reducidas\ en\ y)$$

$$\left\{\begin{array}{l}3x+2y=7\\ \\ 3y+2z=12\end{array}\right. \quad Ec\ cartesianas\ (reducidas\ en\ y)$$

Fíjate que no son las mismas obtenidas con anterioridad. Utiliza este último procedimiento, para obtener las ecuaciones cartesianas reducidas en $x$, y en $z$

**Ejemplo b)** Calcular las distintas ecuaciones de la recta $\left\{\begin{array}{l}x-z=2\\ 2x+y-z=3\end{array}\right.$

Para obtener las ecuaciones paramétricas de esta recta , tendremos que resolver el sistema

$$\begin{cases} x = 2 + z \\ y = 3 - 2(2+z) + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - z \end{cases}$$

Si llamamos a $z = \alpha$ obtendremos las ecuaciones paramétricas dela recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A_r(2,-1,0) \\ \overrightarrow{v}_r = (1,-1,1) \end{array}$$

La ecuación continua la obtendremos, despejando $\alpha$ en las ecuaciones anteriores e igualando

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

*Nota:Una recta , también queda univocamente determinada si conocemos dos puntos $A$ y $B$ de ésta. Bastará con considerar como vector director $\overrightarrow{AB}$* o el vector $\overrightarrow{BA}$

**Ejemplo c)** Calcular las distintas ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(-2,3,1), B(1,-4,4)$

*Solución*
$r\begin{cases} A(-2,3,1) \\ B(1,-4,4) \end{cases} \rightarrow r\begin{cases} A(-2,3,1) \\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (3,-7,3) \end{cases}$
Las ecuaciones paramétricas de $r$ son:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = 3 - 7\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$$

La ecuación continua es:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-1}{3}$$

Escogiendo dos de las tres igualdades anteriores; obtendremos las ecuaciones cartesianas de $r$

$$r\begin{cases} -7x - 3y = 5 \\ 3x - 3z = -9 \end{cases} \quad (\textit{Reducidas en } x)$$

**Ejemplo d)** Calcular las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(3,-2,0)$ y cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = (-2,0,1)$

De la ecuación vectorial $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{v}\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3-2\alpha \\ y=-2 \\ z=\alpha \end{array}\right\}$ *Ec.Parámetricas*

Despejando $\alpha$ de la $1^a$ y $\cdot 3^a$ e igualando$\rightarrow \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{z}{1}\rightarrow x+2z=3$

$\left\{\begin{array}{l} y=-2 \\ x+2z=3 \end{array}\right.$ *Ec.cartesianas*

*Nota*:Las ecuaciones cartesianas, también las podemos obtener a partir de la ecuación vectorial $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{v}$

$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rightarrow Rang\begin{pmatrix} x-3 & -2 \\ y+2 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}=1$

En este ejercicio, **no podemos suponer que la $2^a$ fila es la única L. Independiente** (¿Cuál es el motivo?)

Supongamos que lo es la $1^a$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ y+2 & 0 \end{vmatrix}=0 \\ \\ \begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ z & 1 \end{vmatrix}=0 \end{array}\right. \quad Ec\ cartesianas\ (reducidas\ en\ x)$$

$$\left\{\begin{array}{l} y=-2 \\ \\ x+2z=3 \end{array}\right. \quad Ec\ cartesianas\ (reducidas\ en\ x)$$

**Ejemplo e)** Calcular las distintas ecuaciones de la recta $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{-z-1}{3}$

$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{-z-1}{3}\rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2}=\alpha \\ \dfrac{y-4}{1}=\alpha \\ \dfrac{-z-1}{3}=\alpha \end{array}\right\}$ Despejando en cada ecuación $x,y,z$ tendremos las ecuaciones paramétricas

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=3+2\alpha \\ y=4+\alpha \\ z=-1-3\alpha \end{array}\right. \quad \text{Ec paramétricas}$$

De la ecuación continua $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{-z-1}{3}$ si escogemos dos igualdades, tendremos

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1} \\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{-z-1}{3} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2y=-5 \\ 3x+2z=7 \end{array}\right. \quad Ec.cartesianas\ (reducidas\ \ en\ x)$$

**Ejemplo f)** Calcular las distintas ecuaciones de la recta $\dfrac{2x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{-3z-1}{3}$

$$\frac{2x-3}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{-3z-1}{3}\rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{2x-3}{2}=\alpha\\ \dfrac{y-4}{1}=\alpha\\ \dfrac{-3z-1}{3}=\alpha\end{array}\right\}\text{Despejando en cada ecuación}$$

$x, y, z$ tendremos las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}+\alpha\\ y=4+\alpha\\ z=\frac{-1}{3}-\alpha\end{array}\right.$$

De la ecuación continua $\dfrac{2x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{-3z-1}{3}$ si escogemos dos igualdades, tendremos

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}\\ \dfrac{2x-3}{2}=\dfrac{-3z-1}{3}\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x-2y=-5\\ 6x+6z=7\end{array}\right. \quad \textit{Ec.cartesianas (reducidas en } x)$$

**Ejemplo g)** Calcular las distintas ecuaciones de la recta $s\equiv\left\{\begin{array}{l}x=2\\ y=3\end{array}\right.$

$$s\equiv\left\{\begin{array}{l}x=2\\ y=3\end{array}\right.\rightarrow s\equiv\left\{\begin{array}{l}x=2\\ y=3\\ z=\alpha\end{array}\right. \quad \text{Ecs. paramétricas}\rightarrow s\equiv\left\{\begin{array}{l}A_s(2,3,0)\\ \overrightarrow{v_s}(0,0,1)\end{array}\right.$$

Esta recta no tiene ecuación continua

**Ejemplo h)** Calcular las distintas ecuaciones de la recta $s\equiv\left\{\begin{array}{l}x+z=2\\ y-z=3\end{array}\right.$

Resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{l}x+z=2\\ y-z=3\end{array}\right.$ tendremos como solución

$$s\equiv\left\{\begin{array}{l}x=2-\alpha\\ y=3+\alpha\\ z=\alpha\end{array}\right. \quad \textit{Ecs. paramétricas}$$

Despejando e igualando el paramétro $\alpha$ obtendremos la ec. continua

$$\frac{x-2}{-1}=y-3=z$$

### 1.2.5 Subespacio vectorial asociado a la recta $r$

Dado la recta $r \equiv \begin{cases} P(a_1, a_2, a_3) \\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$

Sus ecuaciones cartesianas son de la forma: $\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$

A la recta anterior siempre le podemos asociar la siguiente recta vectorial

$$< \overrightarrow{v} >= \left\{ \overrightarrow{t} \in V^3 \ / \overrightarrow{t} = \alpha \overrightarrow{v} \right\}$$

Comprueba detenidamente que la ecuación cartesiana de este subespacio vectorial de $V^3$ es:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0 \end{cases}$$

**Ejemplo a)** Dada la recta $r \begin{cases} A(-2, 3, 1) \\ B(1, -4, 4) \end{cases}$ determina la ecuación cartesiana de su subespacio vectorial asociado

$r \equiv \begin{cases} A(-2, 3, 1) \\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (3, -7, 3) \end{cases}$ Como el vector director de $r$ es $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (3, -7, 3)$

Entonces , el subespacio vectorial asociado a $r$ es:
$< \overrightarrow{v_r} >= \left\{ \overrightarrow{t}(x, y, z) \in V^3 / \overrightarrow{t} = \alpha \overrightarrow{v} \right\}$

Como $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{r} x = 3\alpha \\ y = -7\alpha \\ z = 3\alpha \end{array} \right\}$ Ec paramétricas del subespacio

Eliminando el parámetro $\alpha$ tendremos $\left. \begin{array}{l} y = -7\left(\dfrac{x}{3}\right) \\ z = 3\left(\dfrac{x}{3}\right) \end{array} \right\}$

$$\begin{cases} 7x + 3y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \text{(Ecuaciones cartesianas del subespacio)}$$

*Nota*:Otra manera, sería obtener las ecuaciones cartesianas de $r$ ( Comprueba que $r \equiv \begin{cases} 7x + 3y = -5 \\ x - z = -3 \end{cases}$ ) y después indicar que las ecuaciones cartesianas del subespacio asociado a esta recta son $\begin{cases} 7x + 3y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

## 1.3 Posición relativa de dos rectas

Dadas dos rectas en $\Re^3$ las únicas posibilidades geométricas son las siguientes:

1. $r$ y $r'$ se corten en un punto $r$ $(r \cap r' = P)$
2. $r$ y $r'$ sean paralelas y distintas $(r \cap r' = \emptyset)$

3. $r$ y $r'$sean paralelas e iguales $(r \cap r' = r)$

4. $r$ y $r'$ sean rectas de distinta dirección y contenidas en planos paralelos distintos $(r \cap r' = \emptyset)$ .Se dice en este caso que $r$ y $r'$ se cruzan

**Rectas en paramétricas**

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = b_1 + \beta w_1 \\ y = b_2 + \beta w_2 \\ z = b_3 + \beta w_3 \end{cases}$

Para determinar la posición relativa de ambas rectas, bastará con resolver el sistema formado por las ecuaciones de $r$ y $s$

$r \cap s \equiv \begin{cases} a_1 + \alpha v_1 = b_1 + \beta w_1 \\ a_2 + \alpha v_2 = b_2 + \beta w_2 \\ a_3 + \alpha v_3 = b_3 + \beta w_3 \end{cases} \rightarrow r \cap s \equiv \begin{cases} \alpha v_1 - \beta w_1 = b_1 - a_1 \\ \alpha v_2 - \beta w_2 = b_2 - a_2 \\ \alpha v_3 - \beta w_3 = b_3 - a_3 \end{cases}$

Posibilidades:

- Si *rango* $\begin{pmatrix} v_1 & -w_1 \\ v_2 & -w_2 \\ v_3 & -w_3 \end{pmatrix} = 1$ $\Leftrightarrow$Los vectores directores de $r$ y $s$ $\overrightarrow{v_r} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{v_s} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ son proporcionales$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son paralelos$\Leftrightarrow$las rectas $r$ y $s$ son paralelas

Subcaso a)

Si *rango* $\begin{pmatrix} v_1 & -w_1 & b_1 - a_1 \\ v_2 & -w_2 & b_2 - a_2 \\ v_3 & -w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 1$; entonces el sistema $r \cap s$ es compatible indeterminado; es decir ambas rectas tienen infinitos puntos en común. Por lo tanto, además de ser paralelas son la misma recta (coincidentes)$\rightarrow r \cap s = r$

Subcaso b)

Si *rango* $\begin{pmatrix} v_1 & -w_1 & b_1 - a_1 \\ v_2 & -w_2 & b_2 - a_2 \\ v_3 & -w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2$; entonces el sistema $r \cap s$ es incompatible; es decir ambas rectas no tienen puntos en común$\rightarrow r \cap s = \emptyset$. Por lo tanto,son paralelas y distintas

- Si *rango* $\begin{pmatrix} v_1 & -w_1 \\ v_2 & -w_2 \\ v_3 & -w_3 \end{pmatrix} = 2$ $\Leftrightarrow$Los vectores directores de $r$ y $s$ $\overrightarrow{v_r} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{v_s} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ no son proporcionales$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ no son paralelos$\Leftrightarrow$las rectas $r$ y $s$ no son paralelas

Subcaso a)

Si además $rango\begin{pmatrix} v_1 & -w_1 & b_1-a_1 \\ v_2 & -w_2 & b_2-a_2 \\ v_3 & -w_3 & b_3-a_3 \end{pmatrix}=2$; entonces el sistema $r\cap s$ es compatible determinado; es decir ambas rectas tienen un único punto $P$ en común. Se dice que $r$ y son secantes en un punto $P\to r\cap s=P$ (Se resuelve el sistema y los valores obtenidos para $\alpha$ y $\beta$ se sustituyen respectivamente en las ecuaciones paramétricas de $r$ y $s$ para obtener $P$

Subcaso b)

Si además $rango\begin{pmatrix} v_1 & -w_1 & b_1-a_1 \\ v_2 & -w_2 & b_2-a_2 \\ v_3 & -w_3 & b_3-a_3 \end{pmatrix}=3$; entonces el sistema $r\cap s$ es incompatible; es decir ambas rectas no tienen puntos en común$\to r\cap s=\emptyset$. Por lo tanto,son rectas que se cruzan

**Resumen** Dadas dos rectas $r$ y $s$ de las cuales conocemos

$$r\left\{\begin{array}{l} A_r(a_1,a_2,a_3) \\ \overrightarrow{v_r} \end{array}\right. \quad \text{y } s\left\{\begin{array}{l} A_s(b_1,b_2,b_3) \\ \overrightarrow{v_s} \end{array}\right.$$

Las diferentes posiciones relativas de ambas rectas son:

$$\left\{\begin{array}{l}
r \text{ y } s \text{ son paralelas y distintas} \Leftrightarrow rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s})=1 \text{ y } rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s})=2 \\
r \text{ y } s \text{ son paralelas e iguales} \Leftrightarrow rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s})=rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s})=1 \\
r \text{ y } s \text{ son secantes en un punto } P \Leftrightarrow rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s})=rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s})=2 \\
r \text{ y } s \text{ se cruzan} \Leftrightarrow rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s})=2 \text{ y } rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s})=3
\end{array}\right.$$

**Ejemplo a)** Dadas las rectas $r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=1+\alpha \\ y=2-2\alpha \\ z=3+3\alpha \end{array}\right.$ y $s\equiv\left\{\begin{array}{l} x=3+2\beta \\ y=4-4\beta \\ z=1+6\beta \end{array}\right.$

*Solución*

De ambas rectas conocemos $r\left\{\begin{array}{l} A_r(1,2,3) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,-2,3) \end{array}\right.$ y $s\left\{\begin{array}{l} A_s(3,4,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(2,-4,6) \end{array}\right.$ y $\overrightarrow{A_rA_s}=(2,2,-2)$

Como $rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s})=rango\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=1$ (por ser $\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s}$ vectores proporcionales) y además $rango(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s})=rango\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}=2$ ($\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ no son proporcionales). Entonces $r$ y $s$ son paralelas y distintas

**Ejemplo b)** Determina la posición relativa de las rectas

a) $r\equiv\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{5}$ y $s\equiv\left\{\begin{array}{l} x=1+3\beta \\ y=3+2\beta \\ z=-2-\beta \end{array}\right.$

b) $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{5}$ y $t \equiv \begin{cases} x = 5+3\beta \\ y = 2+2\beta \\ z = 2-\beta \end{cases}$

*Solución a)*

De ambas rectas conocemos $r \begin{cases} A_r(3,1,-3) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,1,5) \end{cases}$ y $s \begin{cases} A_s(1,3,-2) \\ \overrightarrow{v_s} = (3,2,-1) \end{cases}$ y $\overrightarrow{A_rA_s} = (-2,2,1)$

Como $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = rango \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 2$ (por ser $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}$ vectores no proporcionales)

y además $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = rango \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$[8] $= 3$

Entonces $r$ y $s$ son rectas que se cruzan

*Solución b)*

$r \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{5}$ y $t \equiv \begin{cases} x = 5+3\beta \\ y = 2+2\beta \\ z = 2-\beta \end{cases}$

De ambas rectas conocemos $r \begin{cases} A_r(3,1,-3) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,1,5) \end{cases}$ y $t \begin{cases} A_s(5,2,2) \\ \overrightarrow{v_s} = (3,2,-1) \end{cases}$ y $\overrightarrow{A_rA_t} = (2,1,5)$

Como $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_t}) = rango \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 2$ (por ser $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}$ vectores no proporcionales)

y además $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_t}, \overrightarrow{A_rA_t}) = rango \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$[8] $= 2$

Las rectas son secantes en un punto $P$ que es la solución del sistema siguiente

$$r \cap t \equiv \begin{cases} r \begin{cases} x = 3+2\alpha \\ y = 1+1\alpha \\ z = -3+5\alpha \end{cases} \\ t \begin{cases} x = 5+3\beta \\ y = 2+2\beta \\ z = 2-\beta \end{cases} \end{cases} \rightarrow r \cap t \equiv \begin{cases} 5+3\beta = 3+2\alpha \\ 2+2\beta = 1+1\alpha \\ 2-\beta = -3+5\alpha \end{cases}$$

$$r \cap t \equiv \begin{cases} -2\alpha + 3\beta = -2 \\ -\alpha + 2\beta = -1 \\ -5\alpha - \beta = -5 \end{cases} \rightarrow \beta = 0,\ \alpha = 1$$

Por lo tanto, sustituyendo estos parámetros obtenidos en las ecuaciones paramétricas de $r$ y $s$ obtendremos las coordenadas de $P(5,2,2)$

---

[8] $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 57$ (no nulo)

[8] $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 57$ (no nulo)

**Rectas en cartesianas**

Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{array} \right.$ y $r' \equiv \left\{ \begin{array}{l} A''x + B''y + C''z = D'' \\ A'''x + B'''y + C'''z = D''' \end{array} \right.$

Para determinar la posición relativa de ambas rectas, bastará con resolver el sistema formado por las ecuaciones de $r$ y $s$

$$r \cap s \left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \\ A''x + B''y + C''z = D'' \\ A'''x + B'''y + C'''z = D''' \end{array} \right. \quad \text{donde } Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \geq 2$$

Posibilidades

- $Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow$El sistema es compatible determinado$\Leftrightarrow$ $r$ y $r'$ son secantes en un punto $P$ , que se obtiene resolviendo el sistema

- $Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$El sistema es compatible indeterminado$\Leftrightarrow$ $r$ y $r'$ son paralelas e iguales

- $Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} = 2$ y $Rang \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow$El sistema es incompatible porque $r$ y $r'$ son paralelas y distintas

- $Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} = 3$ y $Rang \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix} = 4 \Leftrightarrow$El sistema es incompatible porque $r$ y $r'$ se cruzan

**Ejemplo c)** Determina la posición relativa de las rectas

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{4}$ y $s \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$

b) $t \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = -3 \\ 4x + y - 2z = 4 \end{array} \right.$ y $v \equiv \left\{ \begin{array}{l} -x - 2y = 3 \\ 2x - 2z = 4 \end{array} \right.$

c) $t \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = -3 \\ 4x + y - 2z = 4 \end{array} \right.$ y $p \equiv \left\{ \begin{array}{l} -x - 2y = 1 \\ 2x - 2z = 4 \end{array} \right.$

*Solución de a)*

De ambas rectas conocemos $r \left\{ \begin{array}{l} A_r(1,-1,0) \\ \vec{v_r} = (2,1,4) \end{array} \right.$ y $s \left\{ \begin{array}{l} A_s(3,-4,1) \\ \vec{v_s} = (2,-1,2) \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{A_rA_s} = (2,-3,1)$

Como $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = rango \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$ (por ser $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}$ vectores no proporcionales)

y además $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_r A_s}) = rango \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$[9] $= 3$

Las rectas $r$ y $s$ se cruzan

*Solución de b)*

$t \cap p \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 4x + y - 2z = 4 \\ 2x - 2z = 4 \\ -x - 2y = 3 \end{cases}$ Vamos a discutir el sistema utilizando Gauss para calcular el rango de las matrices $A$ y $B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & -2 & 16 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & -2 & 16 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Si te fijas, observarás que el $rangoA = 3$ y que el $rango(B) = 3$ →Sistema compatible determinado

Las rectas $t$ y $p$ son secantes en un punto

Determinémoslo

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$\left.\begin{array}{c} x + 2y = -3 \\ -7y - 2z = 16 \\ 6z = -6 \end{array}\right\}$ cuyas soluciones son:

$$z = -1; y = -2, x = -3 - 2(-2) = 1$$

Por lo tanto $P(1, -2, -1)$

*Solución de c)*

$t \cap p \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 4x + y - 2z = 4 \\ 2x - 2z = 4 \\ -x - 2y = 1 \end{cases}$ Vamos a discutir el sistema utilizando Gauss para calcular el rango de las matrices $A$ y $B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & -2 & 16 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si te fijas, observarás que el $rangoA = 3$ y que el $rango(B) = 4$ →Sistema incompatible

Las rectas $t$ y $p$ son rectas que se cruzan en el espacio.

---

[9] Ya que $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

### 1.3.1 Condición necesaria y suficiente para que $r \,||\, s$

$r$ y $s$ son paralelas$\Leftrightarrow$ $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 1$

Dos rectas $r$ y $s$ son paralelas$\Leftrightarrow$El subespacio vectorial asociado a ambos es el mismo$\Leftrightarrow < \overrightarrow{v_r} >=< \overrightarrow{v_s} >$

### 1.3.2 Haz de rectas paralelas a una dada

**Recta en paramétricas**

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas de todas las rectas, $s$, paralelas a $r$ son de la forma

$s \equiv \begin{cases} x = a + \alpha v_1 \\ y = b + \alpha v_2 \\ z = c + \alpha v_3 \end{cases}$ donde $H(a, b, c)$ es un punto cualesquiera

Esto es así, porque el vector director de $r$, también puede ser vector director de $s$ al ser ambas rectas paralelas

También puedes considerar como vector director de $s$ cualquier vector que sea múltiplo del vector director de $s$

**Recta en cartesianas**

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$

Las ecuaciones de todas las rectas , $s$, paralelas a $r$ son de la forma

$s \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = k \\ A'x + B'y + C'z = k' \end{cases}$ donde $k, k'$ son números cualesquiera

Esto es así, porque los subespacios vectoriales asociados a ambos, han de ser iguales por ser las rectas paralelas

**Ejemplo a)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = 3 - 7\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$ determina las ecuaciones paramétricas de una recta $s$ paralela a la anterior, sabiendo que pasa por el punto $P(1, 0, -4)$

$s \equiv \left. \begin{array}{l} P(1,0,-4) \\ \overrightarrow{v_s}? \end{array} \right\}$ Como $r \,||\, s \rightarrow$puedo considerar que $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r}$

$s \equiv \left. \begin{array}{l} P(1,0,-4) \\ \overrightarrow{v_s} = (3,-7,3) \end{array} \right\} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = -7\alpha \\ z = -4 + 3\alpha \end{cases}$

**Ejemplo b)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 12 \end{cases}$ determina las ecuaciones cartesianas de una recta $s$ paralela a la anterior, sabiendo que pasa por el punto $P(1, 1, -3)$

Las ecuaciones cartesianas de todas las rectas paralelas a $r$ son de la forma

$$\begin{cases} 3x + y + z = k \\ x - y + 2z = k' \end{cases}$$

De todas ellas, sólo nos interesa la que pasa por $P(1, 1, -3)$

$$\begin{cases} 3\,(1) + 1 + (-3) = k \\ 1 - 1 + 2\,(-3) = k' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = k \\ -6 = k' \end{cases}$$

La recta pedida es:

$$s \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$$

## 1.4 Plano determinado por dos rectas

Un plano puede ser determinado de forma única por dos rectas, cuando éstas sean

1. Rectas paralelas y diferentes
2. Rectas secantes

**Ejemplo a)** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 4x + y - 2z = 4 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} -x - 2y = 3 \\ 2x - 2z = 4 \end{cases}$

¿Existe algún plano que las contiene?. En caso afirmativo, calcúlalo

Primero estudiamos su posición relativa

$$r \cap s \equiv \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 4x + y - 2z = 4 \\ -x - 2y = 3 \\ 2x - 2z = 4 \end{cases} \rightarrow r \cap s = P(1, -2, -1)$$

Como las dos rectas son secantes en $P$,existe un único plano $\pi$ que las contiene.

Bastará con determinar del plano los dos vectores directores (el de la recta $r$ y el de la recta $s$)

Para determinar el vector director de $r$ vamos a considerar $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{A_rP}$ donde $A_r$ es un punto de $r$

Si asignamos en $r$ a $y$ el valor $0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ 4x - 2z = 4 \end{cases} \rightarrow z = -8 \rightarrow A_r(-3, 0, -8)$

Con lo que $r \equiv \begin{cases} A_r(-3, 0, -8) \\ P(1, -2, -1) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{A_rP} = (4, -2, 7)$

Para determinar el vector director de $s$ vamos a considerar $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{A_sP}$ donde $A_s$ es un punto de $s$

Si asignamos en $s$ a $y$ el valor $0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ 2x - 2z = 4 \end{cases} \rightarrow z = -5 \rightarrow A_s(-3, 0, -5)$

Con lo que $s \equiv \begin{cases} A_s(-3, 0, -5) \\ P(1, -2, -1) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{A_sP} = (4, -2, 4)$

El plano $\pi$ que contiene a las dos rectas es

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,-2,-1) \\ \vec{v_r}(4,-2,7) \\ \vec{v_s} = (4,-2,4) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 4 \\ y+2 & -2 & -2 \\ z-1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 2y = -3$$

**Nota1:** *El plano pedido también se puede obtener con los siguientes puntos*

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,-2,-1) \\ A_r(-3,0,-8) \\ A_s(-3,0,-5) \end{cases}$$

**Nota2**:*Este resultado era evidente después de haber comprobado quee son secantes.*

*Fíjate en los planos que definen ambas rectas. El único que contiene a las dos a la vez es* $x + 2y = -3$

**Ejemplo b)** Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{5}$ y $t \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 2 - \beta \end{cases}$

¿Existe algún plano que las contiene?. En caso afirmativo, calcúlalo

Primero determinamos la posición relativa de ambas

$r \equiv \begin{cases} A_r(3,1,-3) \\ \vec{v_r}(2,1,5) \end{cases}$ $\qquad t \equiv \begin{cases} A_t(5,2,2) \\ \vec{v_t}(3,2,-1) \end{cases}$

Como los vectores directores no son paralelos, ambas rectas no lo son.

Determinamos si son rectas secantes en un punto o rectas que se cruzan

Como $\overrightarrow{A_rA_t} = (2,1,5)$ y $Rang(\vec{v_r}, \vec{v_r}, \overrightarrow{A_rA_t}) =$ [7] $2$ Las rectas $r$ y $t$ son secantes en un punto (para este ejercicio no es necesario determinarlo explícitamente)

Así pues; el plano que las contiene es:

$$\pi \equiv \begin{cases} A_r(3,1,-3) \\ \vec{v_r}(2,1,5) \\ \vec{v_t}(3,2,-1) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 2 & 3 \\ y-1 & 1 & 2 \\ z+3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -11x + 17y + z = -19$$

**Ejemplo c)** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = 3 + 3\alpha \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\beta \\ y = 4 - 4\beta \\ z = 1 + 6\beta \end{cases}$

¿Existe algún plano que las contiene?. En caso afirmativo, calcúlalo

Las rectas dadas son paralelas ya que sus vectores directores son proporcionales. Ahora bien; ¿son la misma o son diferentes?

Para ello, bastará con determinar si el punto de $r$ $A_r(1,2,3)$ pertenece o no a $s$

---

[7] $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$

Sustituimos las coordenadas de $A_r$ en las ecuaciones paramétricas de $s$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 3 + 2\beta \\ 2 = 4 - 4\beta \\ 3 = 1 + 6\beta \end{array}\right\} \text{obtenemos un absurdo}$$

Luego $A_r \notin s \to r$ y $s$ son paralelas y diferentes
El único plano que las contiene es:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{c} A_r(1,2,3) \\ A_s(3,4,1) \\ \overrightarrow{v_t}(1,-2,3) \end{array} \right. \to \pi \equiv \left\{ \begin{array}{c} A_r(1,2,3) \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{A_r A_s}(1,1,-1) \\ \overrightarrow{v_t}(1,-2,3) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ccc} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 1 & -2 \\ z-3 & -1 & 3 \end{array} \right| = 0 \to x - 4y - 3z = -16$$

## 1.5 Posición relativa de recta y plano

Dadas una recta $r$ y el plano $\pi$ de $\Re^3$ las únicas posibilidades geométricas son las siguientes:

1. $r$ y $\pi$ se corten en un punto $r$ $(r \cap \pi = P)$
2. $r$ y $\pi$ sean paralelas y $r$ no esté contenida en $\pi$ $(r \cap \pi = \emptyset)$
3. $r$ y $\pi$sean paralelas y $r \subset \pi$ $(r \cap \pi = r)$

**Recta en paramétricas y plano en cartesianas**

**Ejercicio 1** *Dada la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{array} \right.$ *y el plano* $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0.$

Para determinar su posición relativa, bastará con resolver el siguiente sistema:

$$\pi \cap r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{array} \right. \to A(a_1 + \alpha v_1) + B(a_2 + \alpha v_2) + C(a_3 + \alpha v_3) + D = 0$$

Reagrupando términos tendremos :

$$(Av_1 + Bv_2 + Cv_3)\alpha = -D - (Aa_1 + Ba_2 + Ca_3) \text{ @}$$

*Posibilidades*

- – Para que $r$ y $\pi$ tengan un único punto en común, el sistema $\pi \cap r$ ha de ser compatible determinado. Esto ocurrirá cuando la ecuación @ tenga una única solución; es decir cuando:

$$Av_1 + Bv_2 + Cv_3 \neq 0$$

En cuyo caso el punto común se obtendrá sustituyendo el parámetro $\alpha = \dfrac{-D-(Aa_1+Ba_2+Ca_3)}{Av_1+Bv_2+Cv_3}$ en las ecuaciones paramétricas de $r$
$P\left(a_1 + \frac{-D-(Aa_1+Ba_2+Ca_3)}{Av_1+Bv_2+Cv_3} \cdot v_1, a_2 + \frac{-D-(Aa_1+Ba_2+Ca_3)}{Av_1+Bv_2+Cv_3} \cdot v_2, a_3 + \frac{-D-(Aa_1+Ba_2+Ca_3)}{Av_1+Bv_2+Cv_3} \cdot v_3\right)$

- – Para que $r$ y $\pi$ sean paralelos y $r$ no esté $\subset$ en $\pi$, el sistema $\pi \cap r$ ha de ser incompatible . Esto ocurrirá cuando la ecuación @ no tenga una solución; es decir cuando:

$$Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0 \text{ y } -D-(Aa_1+Ba_2+Ca_3) \neq 0$$

- – Para que $r$ y $\pi$ sean paralelos y $r \subset \pi$ , el sistema $\pi \cap r$ ha de ser compatible indeterminado. Esto ocurrirá cuando la ecuación @ sea una identidad; es decir cuando:

$$Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0 \text{ y } -D-(Aa_1+Ba_2+Ca_3) = 0$$

Es evidente, que en este caso $\pi \cap r = r$

**Recta y plano en cartesianas**

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv A''x+B''y+C''z=D''$

Para determinar su posición relativa, bastará con discutir y en su caso resolver el sistema siguiente:
$r \cap \pi \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \\ A''x+B''y+C''z=D'' \end{cases}$ donde $Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \geq 2$
Posibilidades

- $Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow$El sistema es compatible determinado$\Leftrightarrow$ $r$ y $\pi$ son secantes en un punto $P$ , que se obtiene resolviendo el sistema
- $Rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$El sistema es compatible indeterminado$\Leftrightarrow$ $r$ es paralela a $\pi$ y además está contenida en él

- $Rang\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2$ y $Rang\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow$El sistema es incompatible porque $r$ es paralela a $\pi$ y además no está contenida en él

### 1.5.1 Condición necesaria y suficiente para que una recta y un plano sean paralelos

1. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$.

$$r \,||\, \pi \Longleftrightarrow Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$$

2. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv A''x + B''y + C''z = D''$

$$r \,||\, \pi \Leftrightarrow Rang\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

**Ejemplo a)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - 2\alpha \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x+y-2z=3$

Determina su posición relativa

*Solución*
Para determinar su posición relativa, resolveremos el sistema $r \cap \pi$

$$r \cap \pi \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - 2\alpha \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases} \to 3\,(1-\alpha) + (2+\alpha) - 2\,(3-2\alpha) = 3 \to \alpha = 2$$

Por lo tanto; $r \cap \pi = P(1-2, 2+2, 3-4) = P(-1, 4, -1)$

**Ejemplo b)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x+y-2z=3$

Determina su posición relativa

*Solución*
Para determinar su posición relativa, resolveremos el sistema $r \cap \pi$

$$r \cap \pi \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases} \to 3\,(1+\alpha) + (2+\alpha) - 2\,(3+2\alpha) = 3 \to 0\alpha = 4$$

Esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto $r \cap \pi = \varnothing$
La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y no está contenida en él

**Ejemplo c)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 3+2\alpha \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x+y-2z = -1$

Determina su posición relativa

*Solución*

Para determinar su posición relativa, resolveremos el sistema $r \cap \pi$

$$r \cap \pi \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 3+2\alpha \\ 3x+y-2z = -1 \end{cases} \rightarrow 3(1+\alpha)+(2+\alpha)-2(3+2\alpha) = -1 \rightarrow$$

$0\alpha = 0$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones Por lo tanto $r \cap \pi = r$

La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y está contenida en él

**Ejemplo d)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z = -2 \\ x+y = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y+2z = 0$. Determina su posición relativa

*Solución*

Discutimos el sistema $r \cap \pi \equiv \begin{cases} x+y+z = -2 \\ x+y = 1 \\ x+y+2z = 0 \end{cases}$

Resolviéndolo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible $RangA = 2$ y $RangA' = 3 \rightarrow r \cap \pi = \emptyset$

La recta $r$ y el plano $\pi$ son paralelos y además $r$ no está contenida en $\pi$

**Ejemplo e)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z = -2 \\ x+y = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x+3y+z = 0$. Determina su posición relativa

Discutimos el sistema $r \cap \pi \equiv \begin{cases} x+y+z = -2 \\ x+y = 1 \\ 3x+3y+z = 0 \end{cases}$

Resolviéndolo por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que el sistema es compatible indeterminado ($RangA = RangA' = 2$). Como la recta $r$ y el plano $\pi$ tienen infinitos puntos en comun $\rightarrow r \cap \pi = r$

La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y está contenida en él

**Ejemplo f)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x+y=1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 4x-2y+z=1$. Determina su posición relativa y si existe algún punto en común , calcúlalo

Discutimos el sistema $r \cap \pi \equiv \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x+y=1 \\ 4x-2y+z=1 \end{cases}$

Resolviéndolo por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & -6 & -3 & | & 9 \\ 0 & 0 & -1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Vemos que el sistema es compatible determinado ($RangA = RangA' = 3$).
La recta $r$ y el plano $\pi$ sólo tienen un punto en común$\rightarrow r \cap \pi = P$ siendo $P$ la solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -6y-3z=9 \\ -z=3 \end{cases} \rightarrow x=1, y=0, z=-3$$

$P$ tiene de coordenadas $(1,0,-3)$

**Ejemplo g)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y+z=-2 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x+\alpha y+3z=4$. Halla el valor de $\alpha$ para que la recta $r$ sea paralela al plano $\pi$. ¿ La recta $r$ puede estar contenida en $\pi$?

*Solución*

$r \cap \pi \equiv \begin{cases} x+2y+z=-2 \\ 2x-y-z=0 \\ 3x+\alpha y+3z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y+z=-2 \\ -5y-3z=4 \\ (\alpha-6)\, y=10 \end{cases}$

Posibilidades:

- Si $\alpha \neq 6 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado. La recta $r$ y el plano $\pi$ se cortan en un punto $P$
- Si $\alpha = 6 \rightarrow$ El sistema es incompatible . La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y no está contenida en el plano

**Ejemplo h)** Dada la recta $r \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$ y el plano $2x+y+\alpha z=\beta$. Estudiar según los valores de $\alpha$ y $\beta$ la posición relativa de ambos

*Solución*

$r \cap \pi \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y+z=0 \\ 2x+y+\alpha z=\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 7y+3z=-1 \\ 5y+(\alpha+4)\, z=\beta-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 7y+3z=-1 \\ (7\alpha+13)\, z=7\beta-9 \end{cases}$

Posibilidades:

- Si $\alpha \neq -\dfrac{13}{7}$ y $\beta \in \Re$ el sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto $P$ (solución del sistema). Determínalo tú

- Si $\alpha = -\dfrac{13}{7}$ y $\beta \neq \dfrac{9}{7}$ el sistema es incompatible$\rightarrow r \cap \pi = \emptyset$ . La recta es paralela al plano y no está contenida en él

- Si $\alpha = -\dfrac{13}{7}$ y $\beta = \dfrac{9}{7}$ el sistema es compatible indeterminado$\rightarrow r \cap \pi = r$ . La recta es paralela al plano y está contenida en él

**Ejemplo i)** Dada la recta $r\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+4y+z=-1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x+2y+az=b$. Discutir según los valores de $a$ y $b$ la posición relativa de ambos

$$r \cap \pi \equiv \begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+4y+z=-1 \\ 3x+2y+az=b \end{cases}$$

Resolvemos el sistema aplicando el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 4 \\ 2 & 4 & 1 & | & -1 \\ 3 & 2 & a & | & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 8 & -1 & | & -9 \\ 0 & 8 & a-3 & | & b-12 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 8 & -1 & | & -9 \\ 0 & 0 & a-2 & | & b-3 \end{pmatrix}$$

Es evidente que:

1. Si $a \neq 2 \rightarrow RangA = RangA' = 3 \rightarrow$El sistema es compatible determinado. La recta $r$ y el plano $\pi$ tienen en común un punto $P$ que es la solución del sistema. En concreto:
$$r \cap \pi = P\left(\frac{7a-3b-5}{4a-8}, \frac{-9a+b+15}{8a-16}, \frac{b-3}{a-2}\right)$$

2. Si $a = 2 \wedge b = 3 \rightarrow RangA = RangA' = 2 \rightarrow$El sistema es compatible indeterminado
La recta $r$ y el plano $\pi$ tienen infinitos puntos en común$\rightarrow$La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y además está contenida en él.
Si resolviesemos el sistema obtendríamos las ecs paramétricas de la recta $r$
$$r \cap \pi = r \equiv \begin{cases} x = \frac{7}{4} - 6t \\ y = -\frac{9}{8} + t \\ z = 8t \end{cases}$$

3. Si $a = 2 \wedge b \neq 3 \rightarrow RangA = 2$ y $RangA' = 3 \rightarrow$El sistema es incompatible
La recta $r$ y el plano $\pi$ no tienen puntos en común$\rightarrow$La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y no está contenida en él

**Ejemplo j)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + a{\cdot}t \\ y = -1 - a{\cdot}t \\ z = 1 + t \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x - 2y + az = 5$.

Estudia según los valores de $a$ la posición relativa de ambos

**Primer procedimiento**

$$r \cap \pi = \begin{cases} x = 1 + a{\cdot}t \\ y = -1 - a{\cdot}t \\ z = 1 + t \\ 3x - 2y + az = 5 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de $x, y, z$ de la recta en el plano, obtenemos la siguiente ecuación de primer grado (incógnita $t$)

$$3\,(1 + at) - 2(-1 - at) + a(1 + t) = 5 \rightarrow 6at = -a$$

Esta ecuación sólo tiene dos opciones:

1. Si $a \neq 0 \rightarrow t = -\frac{1}{6} \rightarrow r$ y $\pi$ tienen en común un punto $P\left(1 + a\left(-\frac{1}{6}\right), -1 - a\left(-\frac{1}{6}\right), 1 + \left(-\frac{1}{6}\right)\right)$
$$r \cap \pi = P\left(1 - \frac{1}{6}a, \frac{1}{6}a - 1, \frac{5}{6}\right)$$
2. Si $a = 0 \rightarrow 0t = 0 \rightarrow r$ y $\pi$ tienen infinitos puntos en común. La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y además está contenido en él

**Segundo procedimiento**

Resolvemos el ejercicio trabajando con las ecs cartesianas de $r$. Según los valores de $a$ se pueden presentar sólo dos casos.

Casos:

1. Si $a \neq 0 \rightarrow r \equiv \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y+1}{-a} = z - 1 \rightarrow r \equiv \begin{cases} \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y+1}{-a} \\ \dfrac{x-1}{a} = z - 1 \end{cases}$
$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - az = 1 - a \end{cases}$
$r \cap \pi = \begin{cases} x + y = 0 \\ x - az = 1 - a \\ 3x - 2y + az = 5 \end{cases}$ Como $a \neq 0 \rightarrow r \cap \pi = P\left(1 - \frac{1}{6}a, \frac{1}{6}a - 1, \frac{5}{6}\right)$
2. Si $a = 0 \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$
$r \cap \pi \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \rightarrow r \cap \pi = r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y además está contenido en él

## 1.6 Haz de planos de base una recta dada

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$

La ecuación cartesiana de todos los planos que contienen a la recta $r$ es de la forma

$$\alpha\,(Ax + By + Cz - D) + \beta\,(A'x + B'y + C'z - D') = 0 \text{ donde } \alpha, \beta \in \Re$$

*Nota 1:A veces en la práctica se considera el siguiente haz de planos de base la recta $r$*

$$Ax + By + Cz - D + \alpha\,(A'x + B'y + C'z - D') = 0 \text{ donde } \alpha \in \Re$$

*Fíjate, que son todos los planos que contienen a la recta $r$ dada a excepción del plano $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z = D'$*

*Nota 2:Otras veces se considera el siguiente haz de planos de base la recta $r$*

$$\alpha\,(Ax + By + Cz - D) + A'x + B'y + C'z - D' = 0 \text{ donde } \alpha \in \Re$$

*Fíjate, que son todos los planos que contienen a la recta $r$ dada a excepción del plano $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$*

**Ejemplo a)** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(1, 3, -2)$

*Solución utilizando haz de planos*

La ecuación de todos los planos[10] que contienen a la recta $r \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ es de la forma:

$x - z - 2 + \alpha\,(2x + y - z - 3) = 0 \to (1 + 2\alpha)x + \alpha y + (-1 - \alpha)z - 2 - 3\alpha = 0$

De todos ellos, sólo nos interesa el que pasa por $P(1, 3, -2)$

$(1 + 2\alpha) \cdot 1 + \alpha \cdot 3 + (-1 - \alpha) \cdot (-2) - 2 - 3\alpha = 0 \to 4\alpha = -1 \to \alpha = -\dfrac{1}{4}$

Por lo tanto el plano pedido es $(1 - \dfrac{1}{2})x - \dfrac{1}{4}y + (-1 + \dfrac{1}{4})z - 2 + 3 \cdot \dfrac{1}{4} = 0$

Multiplicando por 4 obtendremos:

$$2x - y - 3z - 5 = 0$$

**Ejemplo b)** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$ y que es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases}$

[10] Exceptuando el plano $2x + y - z - 3 = 0$

*Solución utilizando haz de planos*

La ecuación de todos los planos que contienen a la recta $r\left\{\begin{array}{l} x-z-2=0 \\ 2x+y-z-3=0 \end{array}\right.$ es de la forma:

$\alpha\,(x-z-2)+\beta\,(2x+y-z-3)=0 \rightarrow (\alpha+2\beta)x+\beta y+(-\alpha-\beta)z-2\alpha-3\beta=0$

De todos ellos, sólo nos interesa el que sea paralelo a la recta $s$ (su vector director es $\overrightarrow{v_s}=(-1,1,2)$)

**Nota 2** *Dada la recta* $s\equiv\left\{\begin{array}{l} x=a_1+\alpha v_1 \\ y=a_2+\alpha v_2 \\ z=a_3+\alpha v_3 \end{array}\right.$ *y el plano* $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$.

$$s\,||\,\pi \Longleftrightarrow Av_1+Bv_2+Cv_3=0$$

Utilizando esta condición (al ser $\pi$ paralelo a $s$) ;ha de verificarse:

$$(\alpha+2\beta)\cdot(-1)+\beta\cdot 1+(-\alpha-\beta)\cdot 2=0 \rightarrow -3\alpha=3\beta$$

Si $\beta=1\rightarrow\alpha=-1$

Por lo tanto el plano pedido es $x+y-1=0$

*Segundo procedimiento*

De la recta $r\left\{\begin{array}{l} x-z-2=0 \\ 2x+y-z-3=0 \end{array}\right.$ tenemos que conocer un punto y su vector director

$\left.\begin{array}{l} Si\ z=0\rightarrow x=2\ ,\ y=-1\rightarrow P_r(2,-1,0) \\ Si\ x=0\rightarrow z=-2\ ,\ y=1\rightarrow Q_r(0,1,-2) \end{array}\right. \rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{Q_rP_r}=(2,-2,2)$

Como nos piden un plano ,$\pi$, que contenga a la recta $r$ y sea paralelo a la recta $s$. Este plano queda definido de forma única con un punto de la recta $r$, el vector director de $r$ y el vector director de $s$

$\pi\equiv\left\{\begin{array}{l} P_r(2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{Q_rP_r}=(2,-2,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,1,2) \end{array}\right. \rightarrow \overrightarrow{P_rX}=\alpha\overrightarrow{v_r}+\beta\overrightarrow{v_s}\rightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -1 \\ y+1 & -2 & 1 \\ z & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$

Su ecuación cartesiana es $-6x+6-6y=0$. Dividiendo por -6

$$x+y-1=0$$

*Tercer procedimiento (utilizando las cartesianas de la recta $s$*[8]*)*

---

[8] $s\equiv\left\{\begin{array}{l} x=1-\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=3+2\alpha \end{array}\right. \rightarrow \dfrac{x-1}{-1}=y-2=\dfrac{z-3}{2}$

$s\equiv\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2y-z=1 \end{array}\right.$

La ecuación de todos los planos que contienen a la recta $r\left\{\begin{array}{l}x-z-2=0\\2x+y-z-3=0\end{array}\right.$ es de la forma:

$\alpha\,(x-z-2)+\beta\,(2x+y-z-3)=0$

$$\pi\equiv(\alpha+2\beta)x+\beta y+(-\alpha-\beta)z-2\alpha-3\beta=0$$

De todos ellos, sólo nos interesa el que sea paralelo a la recta $s\equiv\left\{\begin{array}{l}x+y=3\\2y-z=1\end{array}\right.$

Dada la recta $s\equiv\left\{\begin{array}{l}Ax+By+Cz=D\\A'x+B'y+C'z=D'\end{array}\right.$ y el plano $\pi\equiv$ $A''x+B''y+C''z=D''$. Recuerda que $s\mid\mid\pi\Leftrightarrow Rang\begin{pmatrix}A&B&C\\A'&B'&C'\\A''&B''&C''\end{pmatrix}=$ $2\Leftrightarrow\begin{vmatrix}A&B&C\\A'&B'&C'\\A''&B''&C''\end{vmatrix}=0$

Utilizando esta condición (al ser $\pi$ paralelo a $s$) ;ha de verificarse:

$$\begin{vmatrix}\alpha+2\beta&\beta&-\alpha-\beta\\1&1&0\\0&2&-1\end{vmatrix}=0\rightarrow\alpha=-\beta$$

Si $\beta=1\rightarrow\alpha=-1$

Por lo tanto el plano pedido, $\pi$ , es $x+y-1=0$

**Ejemplo c)** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r\equiv\left\{\begin{array}{l}x+y+z=2\\2x+y-z=3\end{array}\right.$ y que es paralelo a la recta $s\equiv\left\{\begin{array}{l}x-2y+3z=0\\y+z=3\end{array}\right.$

La ecuación de todos los planos que contienen a la recta $r\left\{\begin{array}{l}x+y+z-2=0\\2x+y-z-3=0\end{array}\right.$ es de la forma:

$\alpha\,(x+y+z-2)+\beta\,(2x+y-z-3)=0$

$$\pi\equiv(\alpha+2\beta)x+(\alpha+\beta)\,y+(\alpha-\beta)z-2\alpha-3\beta=0$$

De todos ellos, sólo nos interesa el que sea paralelo a la recta $s\equiv\left\{\begin{array}{l}x-2y+3z=0\\y+z=3\end{array}\right.$

Como $\pi$ es paralelo a $s\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\alpha+2\beta&\alpha+\beta&\alpha-\beta\\1&-2&3\\0&1&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-5\alpha-12\beta=0$

Si $\beta=5\rightarrow\alpha=-12$

$\pi\equiv2x+7y+17z-9=0$

*Segundo procedimiento*

Previamente he de calcular de $r$ dos puntos

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$

$Si\ y=0 \rightarrow x=\dfrac{5}{3}, z=2-\dfrac{5}{3}=\dfrac{1}{3} \rightarrow P_r(\dfrac{5}{3},0,\dfrac{1}{3})$

$Si\ x=0 \rightarrow y=\dfrac{5}{2}, z=2-\dfrac{5}{2}=-\frac{1}{2} \rightarrow Q_r(0,\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2})$

Ahora quiero determinar de $s$ su vector director

$$s \equiv \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ y+z=3 \end{cases} \rightarrow y=3-z;\ x=6-5z$$

$$s \equiv \begin{cases} x=6-5t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_s}=(-5,-1,1)$$

Como nos piden un plano que contenga a $r$ y sea paralelo a $s$; ya tenemos dos puntos de éste y uno de sus vectores directores

$$\pi \equiv \begin{cases} P_r(\dfrac{5}{3},0,\dfrac{1}{3}) \\ Q_r(0,\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}) \\ \overrightarrow{v_s}=(-5,-1,1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} P_r(\dfrac{5}{3},0,\dfrac{1}{3}) \\ \dfrac{6}{5}\overrightarrow{P_rQ_r}(-2,3,-1) \\ \overrightarrow{v_s}=(-5,-1,1) \end{cases}$$

La ecuación cartesiana de $\pi$ es:

$$\begin{vmatrix} x-\dfrac{5}{3} & -2 & -5 \\ y & 3 & -1 \\ z-\dfrac{1}{3} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x+7y+17z=9$$

**Ejemplo d)** Ecuación del plano que contiene a la recta $r \begin{cases} 3x+y-4z=1 \\ 2x+3y+z=-1 \end{cases}$ y es paralelo al plano $\pi \equiv x-2y-5z=3$

*Solución utilizando haz de planos*

**Este problema tiene solución única cuando el plano y la recta dada son paralelos**

Veamos pues si lo son

Recuerda que la recta r$\equiv \begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B\,'y+C\,'z=D\,' \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv A''x+B''y+C''z=D''$ son paralelos si y sólo si:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$,$= 0 \rightarrow$La recta y el plano dados son paralelos

Por lo tanto; existe un único plano que contiene a $r$ y es paralelo a $\pi$

**Primer procedimiento**

La ecuación de todos los planos que contienen a la recta $r$ es de la forma

$$\alpha\,(3x+y-4z-1)+\beta\,(2x+3y+z+1)=0$$
$$(3\alpha+2\beta)x+(\alpha+3\beta)y+(-4\alpha+\beta)z-\alpha+\beta=0$$

De todos, sólo nos interesa el que sea paralelo al plano $x-2y-5z=3$

Como los dos planos han de ser paralelos; se tiene que verificar que los vectores $\overrightarrow{w}(3\alpha+2\beta,\alpha+3\beta,-4\alpha+\beta)$, $\overrightarrow{w'}(1,-2,-5)$ sean paralelos.

Si fuesen iguales, tendríamos:

$\left\{\begin{array}{l} 3\alpha+2\beta=1 \\ \alpha+3\beta=-2 \\ -4\alpha+\beta=-5 \end{array}\right. \quad \to \alpha=1;\beta=-1 \to$La solución es $x-2y-5z=2$

**Segundo procedimiento**

La ecuación de todos los planos paralelos al plano $x-2y-5z=3$ es de la forma:

$$x-2y-5z=D \; \text{\$\$}$$

Sólo me interesa el que contiene a la recta $r$ y por lo tanto a $A_r$ (punto a determinar de $r$)

Para obtener un punto de $r\left\{\begin{array}{l} 3x+y-4z=1 \\ 2x+3y+z=-1 \end{array}\right.$ bastará con asignar a $x$ el valor 0 y resolver el correspondiente sistema $\left\{\begin{array}{l} y-4z=1 \\ 3y+z=-1 \end{array}\right. \to y=\dfrac{-3}{13};x=\dfrac{-4}{13}$

Como un punto de $r$ es $A_r\left(0,\dfrac{-3}{13},\dfrac{-4}{13}\right)$, éste ha de ser del plano \$\$ y por lo tanto ha de verificar su ecuación

$$0-2\cdot\left(\frac{-3}{13}\right)-5\cdot\left(\frac{-4}{13}\right)=D\to D=2$$

El plano pedido es:

$$x-2y-5z=2$$

**Ejemplo e)** Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,2,1)$, $B(1,-3,-2)$ y es paralelo a la recta $r\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=4 \\ 2x+4y+z=-1 \end{array}\right.$

*Solución*

**Primer procedimiento**

Como la recta $r$ es paralela al plano $\pi$ que nos piden; entonces un vector director de $\pi$ será el vector director de $\overrightarrow{v}_r$

$\pi\left\{\begin{array}{l} A(1,2,1) \\ B(1,-3,-2) \\ ¿\overrightarrow{v}_r? \end{array}\right.$

Para obtener $\overrightarrow{v}_r$ tendremos que resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=4 \\ 2x+4y+z=-1 \end{array}\right.$

Aplicando Gauss, tendremos:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=4 \\ +8y-z=-9 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2y+z=4 \\ z=8y+9 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-5-6y \\ z=8y+9 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-5-6\alpha \\ y=\alpha \\ z=9+8\alpha \end{array}\right.$$

El vector director de $r$ es $\overrightarrow{v}_r=(-6,1,8)$

Nota: Para obtener el vector director de $r$ también podíamos haber determinado dos puntos de la recta de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \text{Si } y & = & 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=4 \\ 2x+z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow x=-5, z=9 \rightarrow A(-5,0,9) \\ \text{Si } x & = & 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} -2y+z=4 \\ 4y+z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow y=-\dfrac{5}{6}, z=\dfrac{7}{3} \rightarrow A'(0,-\dfrac{5}{6},\dfrac{7}{3}) \end{array}$$

Y después considerar $\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AA'}=\dfrac{6}{5}\left[(0,-\frac{5}{6},\frac{7}{3})-(-5,0,9)\right]=(6,-1,-8)$ como vector director de $r$

Por lo que $\rightarrow \pi \left\{\begin{array}{l} A(1,2,1) \\ B(1,-3,-2) \\ \overrightarrow{v}_r=(-6,1,8) \end{array}\right. \rightarrow \pi \equiv \left\{\begin{array}{l} A(1,2,1) \\ \overrightarrow{AB}(0,-5,-3) \\ \overrightarrow{v}_r=(-6,1,8) \end{array}\right.$

Las ecuaciones paramétricas de $\pi$ son:

$$\pi \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1-6\beta \\ y=2-5\alpha+\beta \\ z=1-3\alpha+8\beta \end{array}\right.$$

La ecuaciones cartesiana es:

$$\left|\begin{array}{lll} x-1 & 0 & -6 \\ y-2 & -5 & 1 \\ z-1 & -3 & 8 \end{array}\right| = 0 \rightarrow -37(x-1)+18(y-2)-30(z-1)=0$$

$$\pi \equiv -37x+18y-30z=-31$$

**Segundo procedimiento**

.Dicho plano ha de ser, obviamente, paralelo al plano que contiene a la recta $r$.Calculemos pues; un plano paralelo al plano que contiene a $r$ y pasa por $A$ y $B$

La ecuación de todos los planos que contienen a la recta $r\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=4 \\ 2x+4y+z=-1 \end{array}\right.$ es de la forma

$$\alpha\,(x-2y+z-4)+\beta\,(2x+4y+z+1)=0$$
$$(\alpha+2\beta)x+(-2\alpha+4\beta)y+(\alpha+\beta)z-4\alpha+\beta=0$$

Cualquier plano paralelo a éste será de la forma:

$$(\alpha+2\beta)x+(-2\alpha+4\beta)y+(\alpha+\beta)z=K$$

Como nos interesa el que pase por $A(1,2,1), B(1,-3,-2)$ tendremos:

$$\left\{\begin{array}{l}(\alpha+2\beta)+2(-2\alpha+4\beta)+(\alpha+\beta)=K\\(\alpha+2\beta)-3(-2\alpha+4\beta)-2(\alpha+\beta)=K\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}-2\alpha+11\beta-K=0\\5\alpha-12\beta-K=0\end{array}\right. ,$$

Al resolver este sistema de 2 ecuaciones con tres incógnitas, obtenemos:

$$K=\frac{31}{7}\beta \text{ y } \alpha=\frac{23}{7}\beta$$

Si $\beta=7 \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=23\\K=31\end{array}\right.$ $\rightarrow$El plano pedido tiene como ec. cartesiana:

$$37x-18y+30z=31$$

## 1.7 Recta que pasa por P y se apoya en $r$ y $s$

**Nota a):** Este problema tendrá solución única, solamente en los siguientes casos:

- Cuando las rectas $r$ y $s$ se crucen , $P\notin$plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$ (es evidente que $P\notin r$) y $P\notin$plano que contiene a $s$ y es paralelo a $r$ (es evidente que $P\notin s$)
- Cuando las rectas $r$ y $s$ sean secantes y el punto dado $P$ no pertenezca al plano que contenga a ambas rectas (La recta pedida pasa por $P$ y por el punto $H=r\cap s$)

**Nota b):** Este problema tendrá infinitas soluciones en los siguientes casos

- Cuando las rectas $r$ y $s$ sean secantes y el punto dado $P$ pertenezca al plano que contenga a ambas rectas
- Cuando las rectas $r$ y $s$ sean paralelas y distintas , y el punto dado $P$ pertenezca al plano que contenga a ambas rectas
- Cuando $r=s$ y el punto dado $P$ no pertenezca a $r$
- Cuando $r=s$ y el punto dado $P\in r$
- Cuando las rectas $r$ y $s$ se crucen y $P\in r$
- Cuando las rectas $r$ y $s$ se crucen y $P\in s$

**Nota c):** Este problema no tendrá solución cuando:

- Cuando las rectas $r$ y $s$ sean paralelas y distintas , y el punto dado $P$ no pertenezca al plano que contenga a ambas rectas
- Cuando las rectas $r$ y $s$ se crucen y $P\in$plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$ pero $P\notin r$

- Cuando las rectas $r$ y $s$ se crucen y $P\in$plano que contiene a $s$ y es paralelo a $r$ pero $P\notin s$

**Ejemplo a)** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,2,1)$ y se apoya en las rectas

$r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ y $s\equiv\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{4}$

*Solución*

En primer lugar, determinaremos la posición relativa de estas rectas

De ambas rectas conocemos $r\left\{\begin{array}{l}A_r(1,-2,3)\\ \vec{v_r}=(3,2,4)\end{array}\right.$ y $s\left\{\begin{array}{l}A_s(-2,-1,0)\\ \vec{v_s}=(-1,2,4)\end{array}\right.$ y $\overrightarrow{A_rA_s}=(-3,1,-3)$

Como $rango(\vec{v_r},\vec{v_s})=rango\begin{pmatrix}3&-1\\2&2\\4&4\end{pmatrix}=2$ (por ser $\vec{v_r},\vec{v_s}$ vectores no proporcionales)

y además $rango(\vec{v_r},\vec{v_s},\overrightarrow{A_rA_s})=rango\begin{pmatrix}3&-1&-3\\2&2&1\\4&4&-3\end{pmatrix}$[11]$=3$

Las rectas $r$ y $s$ se cruzan

Para determinar la recta que pasa por el punto $P$ y se apoya en las rectas $r$ y $s$ utilizaremos dos procedimientos

**Primer procedimiento**

Llamemos $t$ a la recta pedida$\rightarrow t\equiv\left\{\begin{array}{l}P_t(2,2,1)\\ \vec{v_t}(a,b,c)\end{array}\right.$ $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ y $s\equiv\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{4}$

$\left.\begin{array}{c}A_r(1,-2,3)\\P_t(2,2,1)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{A_rP_t}(1,4,-2)$

Como $t$ y $r$ han de ser secantes en un punto $\Longleftrightarrow Rang(\vec{v_r},\vec{v_t},\overrightarrow{A_rP_t})=2$

Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix}3&a&1\\2&b&4\\4&c&-2\end{vmatrix}=0\rightarrow 2a-b-c=0 \qquad \text{(a)}$$

$\left.\begin{array}{c}A_s(-2,-1,0)\\P_t(2,2,1)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{A_sP_t}\ (4,3,1)$

Como $t$ y $s$ han de ser secantes en un punto $\Longleftrightarrow Rang(\vec{v_s},\vec{v_t},\overrightarrow{A_sP_t})=2$

Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix}-1&a&4\\2&b&3\\4&c&1\end{vmatrix}=0\rightarrow 10a-17b+11c=0 \qquad \text{(b)}$$

---

[11] ya que $\begin{vmatrix}3&-1&-3\\2&2&1\\4&4&-3\end{vmatrix}=-18-24-4+24-6-12=-40$

Resolviendo ahora el sistema formado por las ecuaciones $(a)$ y $(b)$

$$\left.\begin{array}{c} 2a-b-c=0 \\ 10a-17b+11c=0 \end{array}\right\} \to a=\frac{7}{6}c, b=\frac{4}{3}c$$

Si asignamos a $c$ el valor 6 tendremos$\to a=7, b=8$
Luego $t \equiv \left\{ \begin{array}{l} P_t(2,2,1) \\ \overrightarrow{v_t}(7,8,6) \end{array} \right. \to t \equiv \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y-2}{8} = \dfrac{z-1}{6}$
siendo sus ecs cartesianas reducidas en $x$

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{l} 8x-7y=2 \\ 6x-7z=5 \end{array} \right.$$

**Segundo procedimiento:**
a) Determinaremos el plano que contiene a la recta $r$ y pasa por $P$ $(\pi)$
b) Determinaremos el plano que contiene a la recta $s$ y pasa por $P$ $(\pi')$
c) La recta pedida viene definida como intersección de los planos anteriores
Determinemos pues, el plano $\pi$ del apartado a)

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,2,1) \\ A_r=(1,-2,3) \\ \overrightarrow{v_r}=(3,2,4) \end{array} \right. \to \pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,2,1) \\ \overrightarrow{A_rP}=(1,4,-2) \\ \overrightarrow{v_r}=(3,2,4) \end{array} \right.$$

La ecuación cartesiana de $\pi$ es: $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y-2 & 4 & 2 \\ z-1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$20(x-2)-10(y-2)-10(z-1)=0$$
$$\pi \equiv 2x-y-z=1$$

Determinemos ahora, el plano $\pi'$ del apartado b)

$$\pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,2,1) \\ A_s(-2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,2,4) \end{array} \right. \to \pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,2,1) \\ \overrightarrow{A_sP}=(4,3,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,2,4) \end{array} \right.$$

La ecuación cartesiana de $\pi'$ es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 4 & -1 \\ y-2 & 3 & 2 \\ z-1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$
$$10(x-2)-17(y-2)+11(z-1)=0$$
$$\pi' \equiv 10x-17y+11z=-3$$

La recta que pasa por el punto $P$ y se apoya en las rectas $r$ y $s$ tiene por ecuaciones cartesianas:

$$\pi \cap \pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x-y-z=1 \\ 10x-17y+11z=-3 \end{array} \right.$$

**Nota:** *Comprueba como ejercicio que la recta obtenida con los dos procedimientos es la misma*

**Ejemplo b)** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,-1,2)$ y se apoya en las rectas

$r \equiv \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 4x-y+z=1 \end{cases}$

*Solución*

En primer lugar, determinaremos la posición relativa de estas rectas

Para ello, necesito conocer de la recta $s$ un punto $A_s$ y su vector director $\overrightarrow{v_s}$.

Para ello, resolveremos el sistema $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 4x-y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -9y+5z=1 \end{cases}$.

Si $z=9\alpha$ entonces tendremos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{9}-\alpha \\ y = -\dfrac{1}{9}+5\alpha \\ z = 9\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A_s(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 0) \\ \overrightarrow{v_s}(-1,5,9) \end{array}$$

De ambas rectas conocemos $r \begin{cases} A_r(-1,0,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(2,3,2) \end{cases}$ y $s \begin{cases} A_s(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 0) \\ \overrightarrow{v_s}(-1,5,9) \end{cases}$

y $\overrightarrow{A_rA_s} = (\frac{11}{9}, -\frac{1}{9}, -1)$

Como $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = rango \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = 2$ (por ser $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}$ vectores no proporcionales)

y además $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = rango \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{11}{9} \\ 3 & 5 & -\frac{1}{9} \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ [12] $= 3$

Las rectas $r$ y $s$ se cruzan

Para determinar la recta que pasa por el punto $P$ y se apoya en las rectas $r$ y $s$ utilizaremos dos procedimientos

**Primer procedimiento**

Llamemos $t$ a la recta pedida$\rightarrow t \equiv \begin{cases} P_t(1,-1,2) \\ \overrightarrow{v_t}(a,b,c) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} A_r(-1,0,1) \\ P_t(1,-1,2) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{A_rP_t}(2,-1,1)$

Como $t$ y $r$ han de ser secantes en un punto $\Longleftrightarrow Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_t}, \overrightarrow{A_rP_t}) = 2$

Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & b & -1 \\ 2 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -5a-2b+8c=0 \qquad \text{(a)}$$

---

[12] $\begin{vmatrix} 2 & -1 & \frac{11}{9} \\ 3 & 5 & -\frac{1}{9} \\ 2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 11 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 9 & -9 \end{vmatrix} =$
$\frac{1}{9}(-90+297+2-110-27+18) = 12 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} A_s(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 0) \\ P_t(1,-1,2) \end{array}\right\} \rightarrow 9\overrightarrow{A_sP_t}\ (7,-8,18,)$$

Como $t$ y $s$ han de ser secantes en un punto $\Longleftrightarrow Rang(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_t}, 9\overrightarrow{A_sP_t}) = 2$
Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 7 \\ 5 & b & -8 \\ 9 & c & 18 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -162a - 81b + 27c = 0 \qquad \text{(b)}$$

Resolviendo ahora el sistema formado por las ecuaciones $(a)$ y $(b)$

$$\left.\begin{array}{r} -5a - 2b + 8c = 0 \\ -162a - 81b + 27c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{22}{3}c, b = -\frac{43}{3}c$$

Si asignamos a $c$ el valor 3 tendremos$\rightarrow a = 22, b = -43$
Luego $t \equiv \left\{ \begin{array}{c} P_t(1,-1,2) \\ \overrightarrow{v_t}(22,-43,2) \end{array} \right. \rightarrow t \equiv \dfrac{x-1}{22} = \dfrac{y+1}{-43} = \dfrac{z-2}{3}$
siendo sus ecs cartesianas reducidas en $x$

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{l} 43x + 22y = 21 \\ 3x - 22z = -41 \end{array} \right.$$

**Segundo procedimiento**
a) Determinaremos el plano que contiene a la recta $r$ y pasa por $P$ $(\pi)$
b) Determinaremos el plano que contiene a la recta $s$ y pasa por $P$ $(\pi')$
c) La recta pedida $t = \pi \cap \pi'$
Determinemos pues, el plano $\pi$ del apartado a)

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1,-1,2) \\ A_r(-1,0,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,3,2) \end{array} \right. \rightarrow \pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1,-1,2) \\ \overrightarrow{A_rP} = (2,-1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,3,2) \end{array} \right.$$

La ecuación cartesiana de $\pi$ es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y+1 & -1 & 3 \\ z-2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-5(x-1) - 2(y+1) + 8(z-2) = 0$$

$$\pi \equiv -5x - 2y + 8z = 13$$

Determinemos ahora, el plano $\pi'$ del apartado b)

$$\pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} A_s(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 0) \\ P(1,-1,2) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,5,9) \end{array} \right. \rightarrow \pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1,-1,2) \\ 9 \cdot \overrightarrow{A_sP} = (7,-8,18) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,5,9) \end{array} \right.$$

La ecuación cartesiana de $\pi'$ es: $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 7 \\ y+1 & 5 & -8 \\ z-2 & 9 & 18 \end{vmatrix} = 0$

$$162(x-1) + 81(y+1) - 27(z-2) = 0$$

$$\pi' \equiv 6x + 3y - z - 1 = 0$$

La recta $t$ que pasa por el punto $P$ y se apoya en las rectas $r$ y $s$ tiene por ecuaciones cartesianas:

$$t \equiv \pi \cap \pi' \equiv \begin{cases} -5x - 2y + 8z = 13 \\ 6x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

**Nota:** *Comprueba como ejercicio que la recta obtenida con los dos procedimientos es la misma*

**Ejemplo c)** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2, 2, 1)$ y se apoya en las rectas

$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = 4 \end{cases}$

En primer lugar estudiamos su posición relativa

Para ello; determinamos sus ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = \alpha \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A_r(2,3,0) \\ \overrightarrow{v_r}(0,0,1) \text{ vector director} \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \beta \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A_s(1,0,4) \\ \overrightarrow{v_s}(0,1,0) \text{ vector director} \end{cases}$$

Es evidente que $\overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{v_s} \rightarrow Rang(\overrightarrow{v_r}\,, \overrightarrow{v_s}) = 2$ y además el vector $\overrightarrow{A_rA_s}(-1, -3, 4)$ es tal que $Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = 3$ debido a que $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1$(no nulo)

consiguientemente las rectas $r$ y $s$ son rectas que se cruzan.

**Primer procedimiento**

Llamemos $t$ a la recta pedida$\rightarrow t \equiv \begin{cases} P_t(-2,2,1) \\ \overrightarrow{v_t}(a,b,c) \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} A_r(2,3,0) \\ P_t(-2,2,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{A_rP_t}(-4,-1,1)$$

Como $t$ y $r$ han de ser secantes en un punto $\Longleftrightarrow Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_t}, \overrightarrow{A_rP_t}) = 2$

Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -4 \\ 0 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -a + 4b = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\left.\begin{matrix} A_s(1,0,4) \\ P_t(-2,2,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{A_sP_t}\ (-3,2,-3)$$

Como $t$ y $s$ han de ser secantes en un punto $\Longleftrightarrow Rang(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_t}, \overrightarrow{A_sP_t}) = 2$

Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -3 \\ 1 & b & 2 \\ 0 & c & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a - c = 0 \qquad \text{(b)}$$

Resolviendo ahora el sistema formado por las ecuaciones $(a)$ y $(b)$

$$\left.\begin{matrix} -a + 4b = 0 \\ a - c = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow a = c, b = \frac{1}{4}c$$

Si asignamos a $c$ el valor 4, tendremos$\rightarrow a=4, b=1$
Luego $t \equiv \left\{ \begin{array}{c} P_t(-2,2,1) \\ \overrightarrow{v_t}(4,1,4) \end{array} \right. \rightarrow t \equiv \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{4}$
siendo sus ecs cartesianas reducidas en $x$

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{c} x-4y=-10 \\ x-z=-3 \end{array} \right.$$

**Segundo procedimiento**
$1^o$ Calculamos el plano ,$\pi$,que contenga a $r$ y pase por $P$
$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(-2,2,1) \\ A_r(2,3,0) \\ \overrightarrow{v_r}(0,0,1) \end{array} \right. \rightarrow \pi \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(-2,2,1) \\ \overrightarrow{PA_r}(4,1,-1) \\ \overrightarrow{v_r}(0,0,1) \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{ccc} x+2 & 4 & 0 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{array} \right|$,=0
Su ecuación cartesiana es::

$$x-4y=-10$$

$2^o$ Calculamos el plano ,$\pi'$,que contenga a $s$ y pase por $P$
$\pi' \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(-2,2,1) \\ A_s(1,0,4) \\ \overrightarrow{v_s}(0,1,0) \end{array} \right. \rightarrow \pi' \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(-2,2,1) \\ \overrightarrow{PA_s}(3,-2,3) \\ \overrightarrow{v_s}(0,1,0) \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{ccc} x+2 & 3 & 0 \\ y-2 & -2 & 1 \\ z-1 & 3 & 0 \end{array} \right|$
Su ecuación cartesiana es::

$$x-z=-3$$

$3^o$ La recta ,$t$, que pasa por $P$ y se apoya en $r$ y $s$, viene definida como intersección de los dos planos anteriores

$$j \equiv \left\{ \begin{array}{c} x-4y=-10 \\ x-z=-3 \end{array} \right.$$

## 1.8 Problemas resueltos de Geometría afín

**Ejercicio 3** *Determina la ecuación del plano que pasa por* $A(2,3,4), B(7,2,5), C(2,3,1)$

*Solución*

$\pi \equiv \begin{cases} A(2,3,4) \\ B(7,2,5) \\ C(2,3,1) \end{cases}$ Necesitamos dos vectores directores del plano $\pi$. Podemos considerar los siguientes: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} \to \pi \equiv \begin{cases} A(2,3,4) \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (5,-1,1) \\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} = (0,0,-3) \end{cases}$

Como la ecuación vectorial del plano es $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{w}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad @$$

Trabajando con matrices, obtendremos las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$

$$\begin{cases} x = 2 + 5\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = 4 + \alpha - 3\beta \end{cases}$$

Para obtener la ecuación cartesiana del plano, has de fijarte de @ que: $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z-4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \to Rango \begin{pmatrix} x-2 & 5 & 0 \\ y-3 & -1 & 0 \\ z-4 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$ 2 ya que el primer vector columna es combinación lineal del segundo y tercero. Lo que es equivalente a afirmar que:

$\begin{vmatrix} x-2 & 5 & 0 \\ y-3 & -1 & 0 \\ z-4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \to 3(x-2) + 15(y-3) = 0 \to x - 2 + 5(y-3) = 0$

$$\pi \equiv x + 5y - 17 = 0$$

**Ejercicio 4** *Determina la ecuación del plano que pasa por* $A(1,3,2), B(4,5,6)$ *sabiendo que un vector director de este plano es* $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$

*Solución*

$\pi \equiv \begin{cases} A(1,3,2) \\ B(4,5,6) \\ \overrightarrow{v} = (1,2,3) \end{cases}$ Necesitamos otro vector director del plano $\pi$. Podemos considerar el siguiente: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} \to \pi \equiv \begin{cases} A(1,3,2) \\ \overrightarrow{v} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{w} = (3,2,4) \end{cases}$

Como la ecuación vectorial del plano es $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{w}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad @$$

Trabajando con matrices, obtendremos las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + 3\beta \\ y = 3 + 2\alpha + 2\beta \\ z = 2 + 3\alpha + 4\beta \end{cases}$$

Para obtener la ecuación cartesiana del plano, has de fijarte de @ que: $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \to Rango \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-3 & 2 & 2 \\ z-2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$ ya que el primer vector columna es combinación lineal del segundo y tercero. Lo que es equivalente a afirmar que:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-3 & 2 & 2 \\ z-2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to 2(x-1) + 5(y-3) - 4(z-2) = 0$$

$$\pi \equiv 2x + 5y - 4z - 9 = 0$$

**Ejercicio 5** *Determina la ecuación del plano que contiene a la recta* $r \equiv \begin{cases} x - z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$ *y que pasa por el punto* $P(1, 3, -2)$

*Solución sin utilizar haz de planos*

Como la recta $r$ está contenida en el plano $\pi$ entonces un punto $A_r \in r$ y el vector director, $\overrightarrow{v}_r$, de $r$, lo son del plano $\pi$

$$\pi \equiv \begin{cases} ?`A_r? \\ P(1,3,-2) \\ ?`\overrightarrow{v}_r? \end{cases} \to \pi \equiv \begin{cases} P(1,3,-2) \\ \overrightarrow{A_rP} \\ ?`\overrightarrow{v}_r? \end{cases}$$

Para calcular $A_r$ y $\overrightarrow{v}_r$ tendremos que resolver el sistema $\begin{cases} x - z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 + z \\ y = 3 - 2(2+z) + z \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - z \end{cases}$ Si llamamos a $z = \alpha$ obtendremos las ecuaciones paramétricas de $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \to \begin{matrix} A_r(2,-1,0) \\ \overrightarrow{v}_r = (1,-1,1) \end{matrix}$

Como del plano que nos piden ya conocemos dos puntos y un vector director $\pi \equiv \begin{cases} A_r(2,-1,0) \\ P(1,3,-2) \\ \overrightarrow{v}_r = (1,-1,1) \end{cases} \to \pi \equiv \begin{cases} P(1,3,-2) \\ \overrightarrow{A_rP} = (-1,4,-2) \\ \overrightarrow{v}_r = (1,-1,1) \end{cases}$ ; entonces las ecuaciones paramétricas del plano son:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha + \beta \\ y = 3 + 4\alpha - \beta \\ z = -2 - 2\alpha + \beta \end{cases}$$

La ecuación cartesiana de dicho plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-3 & 4 & -1 \\ z+2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(x-1)-(y-3)-3(z+2)=0$$

$$2x-y-3z-5=0$$

**Ejercicio 6** *Determina la ecuación de un plano que pasa por los puntos* $A(2,-1,3)$ $B(1,0,4)$ *y es paralelo a la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-2z=1 \\ 2x+3y-z=2 \end{array} \right.$

Como la recta $r$ es paralela al plano; entonces el vector director de $r$ podemos considerarlo como vector director del plano pedido. Como además de este plano conocemos dos puntos$A$ y$B$ ; el plano quedará determinado de forma única si $\overrightarrow{v}_r$ es no paralelo con $\overrightarrow{AB}$

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(2,-1,3) \\ B(1,0,4) \\ ?`\overrightarrow{v}_r? \end{array} \right. \rightarrow \pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(2,-1,3) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,1,1) \\ ?`\overrightarrow{v}_r? \end{array} \right.$$

Determinemos pues $\overrightarrow{v_r}$ resolviendo el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x-2z=1 \\ 2x+3y-z=2 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=1+2z \\ y=\dfrac{2-2(1+2z)+z}{3} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1+2z \\ y=-z \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1+2\alpha \\ y=-\alpha \\ z=\alpha \end{array} \right. \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2,-1,1)$$

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(2,-1,3) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,-1,1) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x=2-\alpha+2\beta \\ y=-1+\alpha-\beta \\ z=3+\alpha+\beta \end{array} \right. \text{Ecuaciones paramétricas de } \pi \\ \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 2 \\ y+1 & 1 & -1 \\ z-3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ Ecuación cartesiana de } \pi \end{array} \right.$$

La ecuación cartesiana de $\pi$ ,después de desarrollar el determinante es:

$$2x+3y-z+2=0$$

**Ejercicio 7** *Determina la posición relativa de los siguientes planos :* $\pi_1 \equiv x-y+3z+4=0$ *y* $\pi_2 \equiv x+y+z+6=0$

*Solución*

$$\pi_1 \cap \pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-y+3z+4=0 \\ x+y+z+6=0 \end{array} \right. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Como $rango(A) = rago(A') = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow$El sistema es compatible indeterminado.Los planos se intersectan determinando una recta cuyas ecuaciones cartesianas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y+3z+4=0 \\ x+y+z+6=0 \end{array} \right.$$

**Ejercicio 8** *Idem con los planos* $\pi_1 \equiv x-y+3z+1=0$ *y* $\pi_2 \equiv 2x-2y+6z+2=0$

*Solución*

$\pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} x-y+3z+1=0 \\ 2x-2y+6z+2=0 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Como $rango(A) = rago(A') = 1$ →El sistema es compatible doblemente indeterminado. Ambos planos son paralelos y coincidentes ($\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1$ ó $\pi_2$)

**Ejercicio 9** *Idem con los planos* $\pi_1 \equiv x-y+3z+1=0$ *y* $\pi_2 \equiv 2x-2y+6z-3=0$

*Solución*

$\pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} x-y+3z+1=0 \\ 2x-2y+6z-3=0 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

Como $rango(A) = 1$ y $rango(A') = 2$ →El sistema es incompatible ($\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$) . Ambos planos son paralelos y distintos

**Ejercicio 10** *Determina la posición relativa de los tres planos siguientes:*

$\pi_1 \equiv x+2y+3z=2$
$\pi_2 \equiv 4x-5y+7z=0$
$\pi_3 \equiv 6x-y-z=4$

*Solución*

$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \equiv \begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 4x-5y+7z=0 \\ 6x-y-z=4 \end{cases}$

Resolvemos el sistema por el método de Gausss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 7 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 2^a f - 4\cdot 1^a \\ 3^a f - 6\cdot 1^a \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -13 & -5 & -8 \\ 0 & -13 & -19 & -8 \end{array}\right) \; 3^a f - 2^a$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -13 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que el sistema es compatible determinado; por lo tanto los tres planos se cortan en un único punto, que es la solución del sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ -13y-5z=-8 \\ -14z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2-\dfrac{16}{13}=\dfrac{10}{13} \\ y=\dfrac{8}{13} \\ z=0 \end{cases} \to \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = P(\frac{10}{13}, \frac{8}{13}, 0)$$

**Ejercicio 11** *Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto* $A(5,-1,2)$ *y contiene a la recta* $r$

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{-2}$$

*Solución*

Como $r \subset \pi$; entonces $A_r \in \pi$ y $\overrightarrow{v}_r$(vector director de $r$) es vector director de$\pi$

$\pi \begin{cases} A(5,-1,2) \\ A_r(3,1,5) \\ \overrightarrow{v}_r = (1,2,-2) \end{cases} \rightarrow \pi \begin{cases} A(5,-1,2) \\ \overrightarrow{AA_r}(-2,2,3) \\ \overrightarrow{v}_r = (1,2,-2) \end{cases}$ Las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$ son:

$$\begin{cases} x = 5 - 2\alpha + \beta \\ y = -1 + 2\alpha + 2\beta \\ z = 2 + 3\alpha - 2\beta \end{cases}$$

Y su ecuación cartesiana es:

$\begin{vmatrix} x-5 & -2 & 1 \\ y+1 & 2 & 2 \\ z-2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -10(x-5) - (y+1) - 6(z-2) = 0$

$$10x + y + 6z - 61 = 0$$

**Ejercicio 12** *Calcular la ecuación del plano que pasa por* $A(3,2,7)$ *y por la intersección de los planos*

$\pi \equiv x + y + z - 4 = 0$ y $\pi' \equiv x + y - z + 7 = 0$

*Solución utilizando haz de planos*

Como $\pi$ y $\pi'$ definen una recta $r$. En definitiva, nos están pidiendo la ecuación de un plano que contiene a $r$ y pasa por $A$

La ecuación de todos los planos ( exceptuando $\pi'$) que contienen a la recta intersección de los planos $\pi$ y $\pi'$ es de la forma:

$x+y+z-4+\alpha\,(x+y-z+7) = 0 \rightarrow (1+\alpha)x+(1+\alpha)y+(1-\alpha)z-4+7\alpha = 0$

De todos ellos, sólo me interesa el que pasa por $A(3,2,7)$

$$(1+\alpha)\cdot 3 + (1+\alpha)\cdot 2 + (1-\alpha)\cdot 7 - 4 + 7\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-8}{5}$$

Con lo que el plano pedido es:

$$(1-\frac{8}{5})x + (1-\frac{8}{5})y + (1+\frac{8}{5})z - 4 - \frac{56}{5} = 0 \rightarrow -3x - 3y + 13z - 76 = 0$$

**Nota 13** *Resuleve tú este ejercicio anterior, sin utilizar haz de planos*

**Ejercicio 14** *Calcular las distintas ecuaciones de la recta que pasa por los puntos* $A(-2,3,1), B(1,-4,5)$

*Solución*

$r \begin{cases} A(-2,3,1) \\ B(1,-4,5) \end{cases} \rightarrow r \begin{cases} A(-2,3,1) \\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (3,-7,4) \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas de $r$ son:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = 3 - 7\alpha \\ z = 1 + 4\alpha \end{cases}$$

La ecuación continua es:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-7}=\frac{z-1}{4}$$

Escogiendo dos de las tres igualdades anteriores; obtendremos las ecuaciones cartesianas de $r$

$$r\left\{\begin{array}{l}-7x-3y=5\\ 4x-3z=-11\end{array}\right. \quad (\textit{Reducidas en } x)$$

**Ejercicio 15** *Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,0)$ y es paralelo a las rectas:*

$r\equiv\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{4}$
$s\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$
*Solución*
Como el plano ha de pasar por $P$ y además es paralelo a las rectas $r$ y $s$; entonces los vectores directores de ambas rectas serán los vectores directores del plano

$$\pi\left\{\begin{array}{l}P(1,0,0)\\ \overrightarrow{v_r}(2,2,4)\\ \overrightarrow{v_s}=(3,1,-1)\end{array}\right. \rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1+2\alpha+3\beta\\ y=2\alpha+\beta\\ z=4\alpha-\beta\end{array}\right. \quad (\textit{Ec. Paramétricas})$$

La ecuación cartesiana es:
$$\left|\begin{array}{lll}x-1 & 2 & 3\\ y & 2 & 1\\ z & 4 & -1\end{array}\right|=0\rightarrow -6(x-1)+14y-4z=0$$

$$\pi\equiv 3x-7y+2z=3$$

**Ejercicio 16** *Calcular las ecuaciones de la recta que pasa por $A(-1,1,1)$ y es paralela a la recta*

$s\equiv x-3=2y-1=\dfrac{z}{3}$
*Solución*
Si la recta que buscamos, la denominamos $r$. Es evidente que al ser $r$ y $s$ paralelas el vector director de $r$ puede ser el mismo que el de $s$ (también puede ser cualquier múltiplo de $\overrightarrow{v_s}$)

Pero, mucho cuidado con la ecuación de $s$ ; porque no aparece en forma continua. Para obtener su ecuación continua, fíjate bien lo que hay que hacer

$$s\equiv x-3=2y-1=\frac{z}{3}\rightarrow s\equiv x-3=\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{3}\ \left(\overrightarrow{v_s}=(1,\frac{1}{2},3)\right)$$

$$r\left\{\begin{array}{l} A(-1,1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=2\overrightarrow{v_s}=2\cdot(1,\frac{1}{2},3)=(2,1,6)\end{array}\right.$$

Las ecuaciones paramétricas de $r$ son:

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=-1+2\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=1+6\alpha\end{array}\right.$$

La ecuación continua es:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{6}$$

Escogiendo dos de las tres igualdades anteriores; obtendremos las ecuaciones cartesianas de $r$

$$r\left\{\begin{array}{l} x-2y=-3 \\ 3x-z=-4\end{array}\right. \quad (\textit{Reducidas en } x)$$

**Ejercicio 17** *Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,2,1)$ y es paralelo a las rectas:*

$$r\left\{\begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0\end{array}\right. \text{ y } s\left\{\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ y+z=0\end{array}\right.$$

*Solución*

Los vectores directores de las rectas $r$ y $s$ son los vectores directores del plano buscado. Como no los conocemos, vamos a determinarlos

$$r\left\{\begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0\end{array}\right. \to r\left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=z\end{array}\right. \to r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha\end{array}\right. \overrightarrow{v_r}=(1,1,1)$$

$$s\left\{\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ y+z=0\end{array}\right. \to s\left\{\begin{array}{l} x=\frac{z}{2} \\ y=-z\end{array}\right. \to s\equiv\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\alpha}{2} \\ y=-\alpha \\ z=\alpha\end{array}\right. \overrightarrow{v_s}=(\frac{1}{2},-1,1)$$

Luego del plano buscado, ya conocemos un punto y sus vectores directores

$$\pi\equiv\left\{\begin{array}{l} A(1,2,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(\frac{1}{2},-1,1)\end{array}\right.$$ Si $\overrightarrow{v_s}$ es director de $\pi$; también lo será $2\cdot\overrightarrow{v_s}$.Así pues:

$$\pi\equiv\left\{\begin{array}{l} A(1,2,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ 2\cdot\overrightarrow{v_s}=(1,-2,2)\end{array}\right. \to\left\{\begin{array}{l} x=1+\alpha+\beta \\ y=2+\alpha-2\beta \\ z=1+\alpha+2\beta\end{array}\right. (\textit{Ec. Paramétricas})$$

$$\left|\begin{array}{ccc} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 1 & -2 \\ z-1 & 1 & 2\end{array}\right|=0\to 4(x-1)-(y-2)-3(z-1)=0$$

$$\pi\equiv 4x-y-3z=-1$$

**Ejercicio 18** *Calcular las ecuaciones de la recta que pasa por $A(1,3,4)$ y es paralela a la recta*

$s \equiv \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+5}{2}$

*Solución*

Si la recta que buscamos, la denominamos $r$. Es evidente que al ser $r$ y $s$ paralelas el vector director de $r$ puede ser el mismo que el de $s$ (también puede ser cualquier múltiplo de $\overrightarrow{v_s}$)

$$r \left\{ \begin{array}{l} A(1,3,4) \\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} = (-3,1,2) \end{array} \right.$$

Las ecuaciones paramétricas de $r$ son:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 3\alpha \\ y = 3 + \alpha \\ z = 4 + 2\alpha \end{array} \right.$$

La ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$$

Escogiendo dos de las tres igualdades anteriores; obtendremos las ecuaciones cartesianas de $r$

$$r \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 10 \\ 2x + 3z = 14 \end{array} \right. \quad (\textit{Reducidas en } x)$$

**Ejercicio 19** *Ecuación de la recta que pasa por $A(1,2,-3)$ y es paralela a la recta*

$s \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 3 \\ x - y + 2z = 1 \end{array} \right.$

*Solución*

Observa que la recta $s$ viene definida como intersección de los planos siguientes

$\pi \equiv 3x + 2y + z = 3$ y $\pi' \equiv x - y + 2z = 1$.

Es evidente; que la intersección de dos planos paralelos a cada uno de ellos siempre definirá una recta, que siempre será paralela a $s$

Por lo tanto, la ecuación de todas las rectas , $r$ , paralelas a $s$ es de la forma:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = D \\ x - y + 2z = D' \end{array} \right.$$

De todas ellas, sólo me interesa la que pase por $A(1,2,-3)$

$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 = D \\ 1 - 2 + 2 \cdot (-3) = D' \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 = D \\ -7 = D' \end{array} \right.$

La recta pedida, tiene de ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x-y+2z=-7 \end{cases}$$

**Ejercicio 20** *Ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $P(1,-2,3)$ y es paralelo al plano $\pi \equiv 2x-y+z=3$*

*Solución*
La ecuación cartesiana de todos los planos paralelos a $\pi$ es de la forma:

$$2x-y+z=D$$

De todos ellos, sólo nos interesa el que pasa por $P(1,-2,3)$

$$2\cdot(1)-(-2)+3=D \to D=7$$

Por lo tanto; el plano buscado es:

$$2x-y+z=7$$

**Ejercicio 21** *Posición relativa de $\pi \equiv x-y+z=2$ y $\pi \equiv 2x-2y+z=1$*

*Solución*
$\pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Como $rango(A)=rago(A')=2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$ $\to$El sistema es compatible indeterminado.Los planos se intersectan determinando una recta cuyas ecuaciones cartesianas son

$$\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$$

Si deseasemos, conocer sus ecuaciones paramétricas; tendríamos que resolver el sistema anterior
$\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$ $\to$Aplicando Gauss $\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ -z+3=0 \end{cases}$ $\to \begin{cases} x=-1+y \\ z=3 \end{cases}$
$\pi_1 \cap \pi_2 = r \equiv \begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=3 \end{cases}$

**Ejercicio 22** *Dada la recta $r\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$ y el plano $2x+y+\alpha z=\beta$. Estudiar según los valores de $\alpha$ y $\beta$ la posición relativa de ambos*

*Solución*
$r\cap\pi \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y+z=0 \\ 2x+y+\alpha z=\beta \end{cases} \to \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 7y+3z=-1 \\ 5y+(\alpha+4)z=\beta-2 \end{cases} \to \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 7y+3z=-1 \\ (7\alpha+13)z=7\beta-9 \end{cases}$
Posibilidades:

- Si $\alpha \neq -\dfrac{13}{7}$ y $\beta \in \Re$ el sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto $P$ (solución del sistema). Determínalo tú
- Si $\alpha = -\dfrac{13}{7}$ y $\beta \neq \dfrac{9}{7}$ el sistema es incompatible$\rightarrow r \cap \pi = \emptyset$ . La recta es paralela al plano y no está contenida en él
- Si $\alpha = -\dfrac{13}{7}$ y $\beta = \dfrac{9}{7}$ el sistema es compatible indeterminado$\rightarrow r \cap \pi = r$ . La recta es paralela al plano y está contenida en él

**Ejercicio 23** *Ecuación del plano que contiene a la recta* $r \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{array} \right.$ *y pasa por el punto* $P$ *de coordenadas* $(1,1,1)$

*Solución utilizando haz de planos*
La ecuación de todos los planos que contienen a la recta $r$ es de la forma

$$\alpha\,(2x - y + z - 1) + x + 2y - z - 2 = 0$$
$$(2\alpha + 1)x + (-\alpha + 2)y + (\alpha - 1)z - \alpha - 2 = 0$$

De todos ellos, sólo nos interesa el que pasa por el punto $P(1,1,1)$

$$2\alpha + 1 - 1\alpha + 2 + 1\alpha - 1 - 1\alpha - 2 = 0$$
$$\alpha = 0$$

El plano pedido tiene de ecuación

$$x + 2y - z - 2 = 0$$

**Nota:** Si hubiesemos comprobado si el punto $P$ verificaba las ecuaciones de alguno de los dos planos, hubiesemos obtenido la solución sin necesidad de realizar ningún otro cálculo

**Ejercicio 24** *Ecuación del plano que contiene a la recta* $r \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 4z = 1 \\ 2x + 3y + z = -1 \end{array} \right.$ *y es paralelo al plano* $x - 2y - 5z = 2$

*Solución utilizando haz de planos*
La ecuación de todos los planos que contienen a la recta $r$ es de la forma

$$\alpha\,(3x + y - 4z - 1) + \beta\,(2x + 3y + z + 1) = 0$$
$$(3\alpha + 2\beta)x + (\alpha + 3\beta)y + (-4\alpha + \beta)z - \alpha + \beta = 0$$

De todos, sólo nos interesa el que sea paralelo al plano $x - 2y - 5z = 2$
Como los dos planos han de ser paralelos; se tiene que verificar que los vectores
$\overrightarrow{w}(3\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, -4\alpha + \beta)$, $\overrightarrow{w'}(1,-2,-5)$ han de ser paralelos. Si fuesen iguales, tendríamos:

$\left\{\begin{array}{l} 3\alpha+2\beta=1 \\ \alpha+3\beta=-2 \\ -4\alpha+\beta=-5 \end{array}\right. \quad \rightarrow \alpha=1; \beta=-1 \rightarrow$La solución es $x-2y-5z=2$ (!'Qué curioso!)

*Otra manera de resolverlo*

La ecuación de todos los planos paralelos al plano $x-2y-5z=2$ es de la forma:

$$x-2y-5z=D \; \$\$$$

Sólo me interesa el que contiene a la recta $r$ y por lo tanto a $A_r$ (punto a determinar de $r$)

Para obtener un punto de $r\left\{\begin{array}{l} 3x+y-4z=1 \\ 2x+3y+z=-1 \end{array}\right.$ bastará con asignar a $x$ el valor 0 y resolver el correspondiente sistema $\left\{\begin{array}{l} y-4z=1 \\ 3y+z=-1 \end{array}\right. \rightarrow y=\dfrac{-3}{13}; x=\dfrac{-4}{13}$

Como un punto de $r$ es $A_r\left(0, \dfrac{-3}{13}, \dfrac{-4}{13}\right)$, éste ha de ser del plano $\$\$$ y por lo tanto ha de verificar su ecuación

$$0-2\cdot\left(\frac{-3}{13}\right)-5\cdot\left(\frac{-4}{13}\right)=D \rightarrow D=2$$

El plano pedido es:

$$x-2y-5z=2$$

**Ejercicio 25** *Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(1,2,1), B(1,-3,-2)$ *y es paralelo a la recta* $r\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=4 \\ 2x+4y+z=-1 \end{array}\right.$

*Solución*

Como la recta $r$ es paralela al plano $\pi$ que nos piden; entonces un vector director de $\pi$ será el vector director de $\overrightarrow{v}_r$

$\pi\left\{\begin{array}{l} A(1,2,1) \\ B(1,-3,-2) \\ ?`\overrightarrow{v}_r? \end{array}\right.$

Para obtener $\overrightarrow{v}_r$ tendremos que resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=4 \\ 2x+4y+z=-1 \end{array}\right.$

Aplicando Gauss, tendremos:

$\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=4 \\ +8y-z=-9 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2y+z=4 \\ z=8y+9 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-5-6y \\ z=8y+9 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-5-6\alpha \\ y=\alpha \\ z=9+8\alpha \end{array}\right.$

Como $\overrightarrow{v}_r=(-6,1,8)$ entonces $\pi\left\{\begin{array}{l} A(1,2,1) \\ B(1,-3,-2) \\ \overrightarrow{v}_r=(-6,1,8) \end{array}\right. \rightarrow \pi\equiv\left\{\begin{array}{l} A(1,2,1) \\ \overrightarrow{AB}(0,-5,-3) \\ \overrightarrow{v}_r=(-6,1,8) \end{array}\right.$

Las ecuaciones paramétricas de $\pi$ son:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - 6\beta \\ y = 2 - 5\alpha + \beta \\ z = 1 - 3\alpha + 8\beta \end{cases}$$

La ecuaciones cartesiana es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -6 \\ y-2 & -5 & 1 \\ z-1 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 0 \to -37(x-1) + 18(y-2) - 30(z-1) = 0$$

$$-37x + 18y - 30z = -31$$

**Ejercicio 26** *Determina la ecuación del plano que contiene a la recta* $r \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}$ *y pasa por el punto* $P(1,3,-2)$

*Solución*

La ecuación de todos los planos que contienen a la recta $r$ es de la forma

$$x - y + 3z - 1 + \beta\,(2x + 3y - z - 4) = 0$$
$$(1+2\beta)x + (-1+3\beta)y + (3-\beta)z - 1 - 4\beta = 0$$

De todos, sólo nos interesa el que pasa por $P(1,3,-2)$

$1 + 2\beta + (-1+3\beta)\cdot 3 - 2(3-\beta) - 1 - 4\beta = 0 \to \beta = 1$

El plano pedido es :

$$3x + 2y + 2z = 5$$

**Ejercicio 27** *Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto* $P(2,2,1)$ *y se apoya en las rectas*

$r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ y $s \equiv \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{4}$

*Solución*

En primer lugar, determinaremos la posición relativa de estas rectas

De ambas rectas conocemos $r \begin{cases} A_r(1,-2,3) \\ \overrightarrow{v_r} = (3,2,4) \end{cases}$ y $s \begin{cases} A_s(-2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,2,4) \end{cases}$ y $\overrightarrow{A_rA_s} = (-3,1,-3)$

Como $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = rango \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 2$ (por ser $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}$ vectores no proporcionales)

y además $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = rango \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$[11] $= 3$

Las rectas $r$ y $s$ se cruzan

Para determinar la recta que pasa por el punto $P$ y se apoya en las rectas $r$ y $s$ procederemos de la siguiente manera:

[11] ya que $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 24 - 4 + 24 - 6 - 12 = -40$

a) Determinaremos el plano que contiene a la recta $r$ y pasa por $P$ $(\pi)$
b) Determinaremos el plano que contiene a la recta $s$ y pasa por $P$ $(\pi')$
c) La recta pedida viene definida como intersección de los planos anteriores
Determinemos pues, el plano $\pi$ del apartado a)

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,2,1) \\ A_r = (1,-2,3) \\ \overrightarrow{v_r} = (3,2,4) \end{array} \right. \rightarrow \pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,2,1) \\ \overrightarrow{A_rP} = (1,4,-2) \\ \overrightarrow{v_r} = (3,2,4) \end{array} \right.$$

La ecuación cartesiana de $\pi$ es: $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y-2 & 4 & 2 \\ z-1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$20(x-2) - 10(y-2) - 10(z-1) = 0$$
$$\pi \equiv 2x - y - z = 1$$

Determinemos ahora, el plano $\pi'$ del apartado b)

$$\pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,2,1) \\ A_s(-2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,2,4) \end{array} \right. \rightarrow \pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,2,1) \\ \overrightarrow{A_sP} = (4,3,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,2,4) \end{array} \right.$$

La ecuación cartesiana de $\pi'$ es: $\begin{vmatrix} x-2 & 4 & -1 \\ y-2 & 3 & 2 \\ z-1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$10(x-2) - 17(y-2) + 11(z-1) = 0$$
$$\pi' \equiv 10x - 17y + 11z = -3$$

La recta que pasa por el punto $P$ y se apoya en las rectas $r$ y $s$ tiene por ecuaciones cartesianas:

$$\pi \cap \pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 1 \\ 10x - 17y + 11z = -3 \end{array} \right.$$

**Ejercicio 28** *Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto* $P(1,-1,2)$ *y se apoya en las rectas*

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2} \text{ y } s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + z = 1 \end{array} \right.$$

*Solución*

En primer lugar, determinaremos la posición relativa de estas rectas

Para ello, necesito conocer de la recta $s$ un punto $A_s$ y su vector director $\overrightarrow{v_s}$.

Para ello, resolveremos el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + z = 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ -9y + 5z = 1 \end{array} \right.$.

Si $z = 9\alpha$ entonces tendremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{9} - \alpha \\ y = -\frac{1}{9} + 5\alpha \\ z = 9\alpha \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} A_s(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 0) \\ \overrightarrow{v_s}(-1,5,9) \end{array}$$

De ambas rectas conocemos $r \begin{cases} A_r(-1,0,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,3,2) \end{cases}$ y $s \begin{cases} A_s(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 0) \\ \overrightarrow{v_s}(-1,5,9) \end{cases}$

y $\overrightarrow{A_rA_s} = (\frac{11}{9}, -\frac{1}{9}, -1)$

Como $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = rango \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = 2$ (por ser $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}$ vectores no proporcionales)

y además $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = rango \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{11}{9} \\ 3 & 5 & -\frac{1}{9} \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$[12]$= 3$

Las rectas $r$ y $s$ se cruzan

Para determinar la recta que pasa por el punto $P$ y se apoya en las rectas $r$ y $s$ procederemos de la siguiente manera:

a) Determinaremos el plano que contiene a la recta $r$ y pasa por $P$ ($\pi$)

b) Determinaremos el plano que contiene a la recta $s$ y pasa por $P$ ($\pi'$)

c) La recta pedida viene definida como intersección de los planos anteriores

Determinemos pues, el plano $\pi$ del apartado a)

$\pi \equiv \begin{cases} P(1,-1,2) \\ A_r(-1,0,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,3,2) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} P(1,-1,2) \\ \overrightarrow{A_rP} = (2,-1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,3,2) \end{cases}$

La ecuación cartesiana de $\pi$ es: $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y+1 & -1 & 3 \\ z-2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$-5(x-1) - 2(y+1) + 8(z-2) = 0$$
$$\pi \equiv -5x - 2y + 8z = 13$$

Determinemos ahora, el plano $\pi'$ del apartado b)

$\pi' \equiv \begin{cases} P(1,-1,2) \\ A_s(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,5,9) \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} P(1,-1,2) \\ 9 \cdot \overrightarrow{A_sP} = (7,-8,18) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,5,9) \end{cases}$

La ecuación cartesiana de $\pi'$ es: $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 7 \\ y+1 & 5 & -8 \\ z-2 & 9 & 18 \end{vmatrix} = 0$

$$162(x-1) + 81(y+1) - 27(z-2) = 0$$
$$\pi' \equiv 6x + 3y - z - 1 = 0$$

---

[12] $\begin{vmatrix} 2 & -1 & \frac{11}{9} \\ 3 & 5 & -\frac{1}{9} \\ 2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 11 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 9 & -9 \end{vmatrix} =$
$\frac{1}{9}(-90 + 297 + 2 - 110 - 27 + 18) = 12 \neq 0$

La recta que pasa por el punto $P$ y se apoya en las rectas $r$ y $s$ tiene por ecuaciones cartesianas:

$$\pi \cap \pi' \equiv \begin{cases} -5x - 2y + 8z = 13 \\ 6x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 29** *Demuestra que la ecuación cartesiana de un plano que corta a los tres ejes de coordenadas en los puntos* $A(a,0,0), B(0,b,0)$ *y* $C(0,0,c)$ *es* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

*Solución*
$\pi \equiv \begin{cases} A(a,0,0) \\ B(0,b,0) \\ C(0,0,c) \end{cases}$ Necesitamos dos vectores directores del plano $\pi$. Podemos considerar los siguientes: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} \to \pi \equiv \begin{cases} A(a,0,0) \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (-a,b,0) \\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} = (-a,0,c) \end{cases}$

Su ecuación cartesiana es
$\begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \to bc\,(x-a) + acy + abz = 0$
Eliiminando paréntesis y transponiendo términos

$$bcx + acy + abz = abc$$

Dividiendo por $abc$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ (ecuación segmentaria o canónica)}$$

## 1.9 Problemas propuestos de Geometría afín

**Ejercicio 30** *Calcular las ecuaciones del plano que contiene a los puntos* $A(2,3,4)$, $B(7,2,5)$, $C(2,3,1)$ *en forma paramétrica y cartesiana (o general, o implícita)*

**Ejercicio 31** *Calcula la ec. cartesiana del plano que pasa por los puntos* $A(1,0,-1)$, $B(1,1,1)$, $C(1,3,1)$

**Ejercicio 32** *Estudiar la posición relativa de los siguientes planos* $\pi \equiv x-y+3z+4=0$ *y* $\pi \equiv x+y+z+6=0$

**Ejercicio 33** *Estudiar la posición relativa de los siguientes planos* $\pi \equiv x-y+3z+4=0$ *y* $\pi \equiv 2x-2y+6z+8=0$

**Ejercicio 34** *Estudiar la posición relativa de los siguientes planos* $\pi \equiv x-y+3z+4=0$ *y* $\pi \equiv 2x-2y+6z+7=0$

**Ejercicio 35** *a) Determina la ecuación del plano que pasa por* $A(0,0,4), B(3,3,3), C(2,3,4)$

b) Demuestra que $A(0,0,4), B(3,3,3), C(2,3,4), D(3,0,1)$ son coplanarios (están en el mismo plano)

**Ejercicio 36** *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:* $\begin{array}{r} \pi \equiv x-y+3z=4 \\ \pi' \equiv x+2y+3z=2 \\ \pi'' \equiv 2x+y+6z=6 \end{array}$ *.En caso de existir punto o puntos comunes a los tres, determínalos*

**Ejercicio 37** *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:* $\begin{array}{r} \pi \equiv x-y+3z=4 \\ \pi' \equiv x+2y+3z=2 \\ \pi'' \equiv 2x+y+6z=7 \end{array}$ *.En caso de existir punto o puntos comunes a los tres, determínalos*

**Ejercicio 38** *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:* $\begin{array}{r} \pi \equiv x-y+3z=4 \\ \pi' \equiv x+2y+3z=2 \\ \pi'' \equiv 2x+y+7z=6 \end{array}$ *.En caso de existir punto o puntos comunes a los tres, determínalos*

**Ejercicio 39** *Calcula la ecuación cartesiana del plano* $\pi'$ *que pasa por* $P(-1,2,3)$ *y es paralelo a* $\pi \equiv 2x-y+3z=5$

**Ejercicio 40** *Calcula la ecuación cartesiana del plano* $\pi'$ *que pasa por* $P(1,0,-3)$ *y es paralelo a* $\pi \equiv 2x-3y=5$

**Ejercicio 41** *Calcula la ecuación cartesiana del plano* $\pi'$ *que pasa por* $P(2,3,5)$ *y es paralelo a* $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+\alpha-\beta \\ z=-2\alpha+3\beta \end{array} \right.$

**Ejercicio 42** *Calcula la ecuación cartesiana del plano $\pi'$ que pasa por $P(1,-3,2)$ y es paralelo a* $\pi \equiv \begin{cases} x = 1+\beta \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = 3 - 2\alpha \end{cases}$

**Ejercicio 43** *Estudia la posición relativa de los siguientes planos* $\pi \equiv \begin{cases} x = 2-\alpha+\beta \\ y = 3+\alpha-\beta \\ z = -2\alpha+3\beta \end{cases}$ *y* $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1+\beta' \\ y = \alpha' - 2\beta' \\ z = 3 - 2\alpha' \end{cases}$ *.En caso de existir punto o puntos comunes a los dos, determínalos*

**Ejercicio 44** *Estudia la posición relativa de los siguientes planos* $\pi \equiv \begin{cases} x = 2-\alpha+\beta \\ y = 3+\alpha-\beta \\ z = -2\alpha+3\beta \end{cases}$ *y* $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha'-2\beta' \\ y = -\alpha'+2\beta' \\ z = 3+4\alpha'-5\beta' \end{cases}$ *.En caso de existir punto o puntos comunes a los dos, determínalos*

**Ejercicio 45** *Estudia la posición relativa de los siguientes planos* $\pi \equiv \begin{cases} x = 2-\alpha+\beta \\ y = 3+\alpha-\beta \\ z = -2\alpha+3\beta \end{cases}$ *y* $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha'-2\beta' \\ y = 4-\alpha'+2\beta' \\ z = -3+4\alpha'-5\beta' \end{cases}$ *.En caso de existir punto o puntos comunes a los dos, determínalos*

**Ejercicio 46** *Estudia la posición relativa de los planos* $\pi \equiv \begin{cases} x = a_1+\alpha v_1+\beta w_1 \\ y = a_2+\alpha v_2+\beta w_2 \\ z = a_3+\alpha v_3+\beta w_3 \end{cases}$ *y* $\pi' \equiv \begin{cases} x = b_1+\alpha' v_1'+\beta' w_1' \\ y = b_2+\alpha' v_2'+\beta' w_2' \\ z = b_3+\alpha' v_3'+\beta' w_3' \end{cases}$

**Ejercicio 47** *Calcula la ecuación de la recta que pasa por $A(2,3,4), B(7,2,5)$ (Ec paramétricas, continua y cartesiana)*

**Ejercicio 48** *Calcula la ecuación de la recta que pasa por $A(1,0,2)$ y cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = (1,-3,0)$(Ec paramétricas, continua y cartesiana)*

**Ejercicio 49** *Calcula la ecuación de una recta $r$ que pasa por $A(1,-3,2)$ sabiendo que es paralela a la recta* $r' \equiv \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = 3+\alpha \\ z = -2\alpha \end{cases}$

**Ejercicio 50** *Calcula la ecuación de una recta r que pasa por* $A(0,3,0)$ *sabiendo que es paralela a la recta* $r' \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+3}{-5}$

**Ejercicio 51** *Calcula la ecuación de una recta r que pasa por* $A(-2,1,2)$ *sabiendo que es paralela a la recta* $r'$ *definida por los planos* $\pi \equiv x - y + 3z = 4$ *y* $\pi' \equiv x + 2y + 3z = 2$

**Ejercicio 52** *Determina la posición relativa de las rectas* $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ *y* $r' \equiv \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = -3 + 2\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases}$ *.En caso de ser secantes, determina su punto de intersección*

**Ejercicio 53** *Determina la posición relativa de las rectas* $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$ *y* $r' \equiv \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 5 + 2\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases}$ *.En caso de ser secantes, determina su punto de intersección*

**Ejercicio 54** *Determina la posición relativa de las rectas* $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$ *y* $r' \equiv \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 5 - 3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$ *.En caso de ser secantes, determina su punto de intersección*

**Ejercicio 55** *Determina la posición relativa de las rectas* $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$ *y* $r' \equiv \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 5 - 3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$ *.En caso de ser secantes, determina su punto de intersección*

**Ejercicio 56** *Determina la posición relativa de las rectas* $r \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + 6z = 6 \end{cases}$ *y* $r' \equiv \begin{cases} 3x + 3y + 9z = 8 \\ x - y + 4z = 5 \end{cases}$ *.En caso de ser secantes, determina su punto de intersección*

**Ejercicio 57** *Calcula la ecuación del plano que pasa por* $A(5,-3,2)$ *y contiene a la recta* $\begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 5 - 3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$

**Ejercicio 58** *Calcula la ecuación del plano que pasa por* $A(1,1,1)$ *y por la intersección de los planos* $\pi \equiv x - y + 3z = 4$ *y* $\pi' \equiv x + 2y + 3z = 2$

**Ejercicio 59** *Calcula la ecuación de la recta que pasa por* $A(-2,0,0)$ *y es paralela a los planos* $\pi \equiv x - y + 3z = 4$ *y* $\pi' \equiv x + y = 2$ *a la vez*

**Ejercicio 60** *Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(0,1,2)$ *y* $B(1,4,2)$ *y es paralelo a la recta* $r \equiv \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 5 - 3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$

**Ejercicio 61** *Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(3,1,0)$ *y* $B(1,1,1)$ *y es paralelo a la recta* $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$

**Ejercicio 62** *Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto* $A(3,1,0)$ *y es paralelo a las rectas* $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ *y* $s \equiv x-2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$

**Ejercicio 63** *Determina, si existe, el punto de intersección de la recta* $r \equiv \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 5 - 3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$ *y el plano* $\pi' \equiv x + y = 2$

**Ejercicio 64** *Determina, si existe, el punto de intersección de la recta* $r \equiv \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 5 + \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$ *y el plano* $\pi' \equiv x + y = 2$

**Ejercicio 65** *Determina, si existe, el punto de intersección de la recta* $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$ *y el plano* $\pi' \equiv x + y = 2$

**Ejercicio 66** *Estudia la posición relativa de las rectas* $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{cases}$ *y* $s \equiv \begin{cases} x = b_1 + \beta w_1 \\ y = b_2 + \beta w_2 \\ z = b_3 + \beta w_3 \end{cases}$.

a)Enuncia una condición necesaria y suficiente para que r y s sean paralelas y distintas

b)Enuncia una condición necesaria y suficiente para que r y s sean coincidentes

c)Enuncia una condición necesaria y suficiente para que r y s sean secantes

d)Enuncia una condición necesaria y suficiente para que r y s se cruzen

**Ejercicio 67** *Estudia la posición relativa de la recta* $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{cases}$ *y el plano* $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$

a) Enuncia una condición necesaria y suficiente para que $r$ y $\pi$ sean incidentes en un punto

b)Enuncia una condición necesaria y suficiente para que $r$ esté contenida en $\pi$ $(r \parallel \pi)$

c)Enuncia una condición necesaria y suficiente para que $r$ no esté contenida en $\pi$ y $r \parallel \pi$

**Ejercicio 68** *Determina el plano que contiene a la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 3 - \alpha \\ y = 5 - 3\alpha \\ z = 2\alpha \end{array} \right.$ *y pasa por el punto de intersección de los siguientes planos:* $\pi \equiv x - y + 3z = 4, \pi' \equiv x + y + z = 4, \pi'' \equiv 2x + 3z = 4$

**Ejercicio 69** *Determina la recta que pasa por el punto de intersección de los planos* $\pi \equiv x - y + 3z = 4$ *,* $\pi' \equiv 2x - y + z = 4$ *y* $\pi'' \equiv x - y + 3z = 0$ *y por el punto* $P(1,1,1)$

**Ejercicio 70** *Determina* $a$ *y* $b$ *para que la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + 6z = 6 \end{array} \right.$ *esté contenida en el plano* $\pi \equiv x - y + az = b$.

**Ejercicio 71** *Idem (problema anterior), para que* $r$ *sea paralelo a* $\pi$ *y no esté contenida en* $\pi$

**Ejercicio 72** *Dadas las rectas* $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ *y* $r' \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 2 - \alpha \\ y = -3 + 2\alpha \\ z = 4\alpha \end{array} \right.$.

a) Determina la ecuación de un plano que contenga a $r$ y pase por $P(1,1,1)$

b) Determina la ecuación de un plano que contenga a $r'$ y pase por $P(1,1,1)$

c)a) Determina la ecuación de una recta que pase por $P(1,1,1)$ y se apoye en las otras dos

**Ejercicio 73** *Determina el plano definido por las rectas* $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$ *y* $r' \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 3 - \alpha \\ y = 5 - 3\alpha \\ z = 2\alpha \end{array} \right.$.

**Ejercicio 74** *Calcula las ecuaciones del plano que pasa por el punto* $A(1,3,2)$ *sabiendo que contiene a la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 2 - \alpha \\ y = -3 + 2\alpha \\ z = 4\alpha \end{array} \right.$

**Ejercicio 75** *Calcula las ecuaciones del plano que pasa por los puntos* $A(1,3,2)$ $B(4,5,6)$ *sabiendo que es paralelo al eje* $Ox$

**Ejercicio 76** *Dadas las rectas* $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ *y* $r' \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 2 - \alpha \\ y = -3 + 2\alpha \\ z = 4\alpha \end{array} \right.$.

*Determina :*

a) Plano que contiene a $r$ y que pase por $P(1,1,0)$
b) Plano que contiene a $r'$ y que pase por $P(1,1,0)$
c) Recta que pasa por $P$ y se apoya en $r$ y $r'$

## 1.10 Problemas adicionales

**Ejercicio 77** *Determinar todas las ecuaciones de una recta que pasa por los puntos* $P(1,2,-3)$ $Q(2,-1,4)$

**Ejercicio 78** *Determina todas las ecuaciones de un plano que pasa por los puntos* $P(1,-4,3)$ $Q(2,-1,0)$ $R(1,1,1)$

**Ejercicio 79** *Dado el plano* $\pi \equiv 2x-3y+z=2$. *Obtén las ecuaciones paramétricas de este plano y, después determina la ecuación cartesiana de un plano paralelo al anterior sabiendo que pasa por el punto* $P(1,-3,4)$

**Ejercicio 80** *Dado el plano* $\pi \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha-\beta \\ y = 2-\alpha+3\beta \\ z = 3+2\alpha-\beta \end{cases}$ *Determina la ecuación cartesiana de un plano paralelo al antrerior que pase por el punto* $Q(2,3,-2)$

**Ejercicio 81** *Dada la recta* $r \equiv \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-2y+3z=4 \end{cases}$ *Determina la ecuación de una recta paralela a la anterior que pase por* $T(2,3,-1)$

**Ejercicio 82** *Dadas las rectas* $r \equiv \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 2-3\alpha \\ z = 3+\alpha \end{cases}$ *y* $s \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1+3\alpha \\ z = 4-2\alpha \end{cases}$ *determina su posición relativa. En caso de ser secantes en un punto determínalo*

**Ejercicio 83** *Dada la recta* $r \equiv \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 3+2\alpha \\ z = 1-\alpha \end{cases}$ *y el plano* $\pi \equiv x+3y+5z=14$ *determina su posición relativa. Si tienen algun punto en común determínalo*

**Ejercicio 84** *Dada la recta* $r \equiv \begin{cases} x = 1-3\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = -3-2\alpha \end{cases}$ *Obtén la ecuación cartesiana de un plano que contenga a dicha recta y además pase por el punto* $P(1,-2,-5)$

**Ejercicio 85** *Dada la recta* $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ *y el plano* $\pi \equiv 3x+y+az=b$ *determina su posición relativa según los valores de los parámetros a y b*

**Ejercicio 86** *Dada la recta* $r \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ x-z=b \end{cases}$ *y el plano* $\pi \equiv 2x+ay-z=5$ *Hallar los valores de a y b para que la recta r sea paralela al plano* $\pi$. *¿Puede estar la recta contenida en el plano?*

**Ejercicio 87** *Dada la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{array} \right.$ *Determina la ecuación cartesiana de un plano* $\pi$ *que contiene a dicha recta y además pasa por el punto* $P(1,1,1)$

**Ejercicio 88** *Dadas las rectas* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - z = 4 \end{array} \right.$ *y* $s \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + az = b \end{array} \right.$ *discutir según los valores de a y b la posición relativa de estas dos rectas*

**Ejercicio 89** *Dadas las rectas* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 5 - \alpha \end{array} \right.$ *y* $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + \alpha \\ y = 7 - 3\alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{array} \right.$ *determina la posición relativa de estas rectas*

**Ejercicio 90** *Dada la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ 4x - 2y - z = 2 \end{array} \right.$ *y el plano* $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = 3 + \alpha - 3\beta \end{array} \right.$ *determina su posición relativa. En caso de que tengan algún punto en común determínalo*

**Ejercicio 91** *Dada la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 3\alpha \\ y = 2 + 4\alpha \\ z = 3 + a\alpha \end{array} \right.$ *y el plano* $\pi \equiv x + 2y + 3z = b$ *discutir según los valores de a y b su posición relativa*

**Ejercicio 92** *Dadas las rectas* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{array} \right.$ *y* $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x + y + az = 3 \\ x - 3y + 4z = b \end{array} \right.$ *Discutir según los valores de a y b la posición relativa de ambas. En el caso en que secantes en un punto, determínalo*

**Ejercicio 93** *Dada la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{array} \right.$ *determina el plano que contenga a* $r$ *y que pase por* $P(-4, 3, -3)$

**Ejercicio 94** *Dada la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{array} \right.$ *y el plano* $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = 3 + 2\alpha - \beta \\ z = 4 - 5\alpha + 3\beta \end{array} \right.$ *determina su posición relativa*

**Ejercicio 95** *Dada la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{array} \right.$ *y el plano* $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = b_1 + \beta w_1 + \gamma t_1 \\ y = b_2 + \beta w_2 + \gamma t_2 \\ z = b_3 + \beta w_3 + \gamma t_3 \end{array} \right.$ *determina su posición relativa*

**Ejercicio 96** *Dadas las rectas* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right.$ *y* $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ z = -2 \end{array} \right.$ *demuestra que estas rectas se cruzan*

- – Plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$

– Plano que contiene a $s$ y es paralelo a $r$
– Plano que contiene a $r$ y pasa por $P(-5,4,-3)$
– Plano que contiene a $s$ y pasa por $P(-5,4,-3)$
– Recta que pasa por $P$ y se apoya en $r$ y en $s$

**Ejercicio 97** *Dadas las rectas* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1-\alpha \\ y = 2-3\alpha \\ z = 3+\alpha \end{array} \right.$ *y* $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -1+3\alpha \\ z = 4-2\alpha \end{array} \right.$ *determina su punto común*

- – Calcula la ecuación de la recta que pasa por $P(-5,1,0)$ y se apoya en $r$ y $s$
  – Plano que contiene a ambas rectas
  – Plano paralelo a las dos que pasa por $Q(1,-3,-2)$
  – Plano que contiene a $r$ y pasa por $P$
  – Plano que contiene a $s$ y pasa por $P$
  – Posición relativa de estos dos últimos planos
  – Demuestra que la recta definida en el apartado anterior es la misma que la ecuación de la recta que pasa por $P(-5,1,0)$ y se apoya en $r$ y $s$

# Geometría afín euclídea

Juan José Isach Mayo

23 de Septiembre de 2007

# Contents

# GEOMETRÍA MÉTRICA O EUCLÍDEA

## 0.1 GEOMETRÍA MÉTRICA O EUCLÍDEA

En la geometría afín estudiada en el tema anterior vimos:
_Ecuaciones de rectas y planos
_Posiciones relativas de dos rectas, dos planos, recta y plano ,y de tres planos
_Condiciones de paralelismo entre rectas, recta y plano y dos planos
Sin embargo, todavía no hemos visto ni el concepto de perpendicularidad ni el de distancia ni , por supuesto, todos aquéllos que se derivan de éstos (ángulos, áreas, volúmenes,etc)

Para conseguir este objetivo, procederemos de la siguiente manera:

1. Definiremos en el espacio vectorial $V_3$ el producto escalar (a dicho espacio lo denominaremos espacio vectorial euclídeo)

2. Gracias al producto escalar, definiremos en el espacio afín (que ahora se llamará euclídeo) los conceptos de perpendicularidad, distancias y de ángulos

3. Después definiremos " el producto vectorial", lo que nos permitirá hallar áreas de figuras planas y también la distancia de un punto a una recta

4. Para determinar volúmenes definiremos el concepto de producto mixto (también nos sirve para calcular la distancia entre dos rectas)

| | | | |
|---|---|---|---|
| E.V.Euclídeo | ........................................................................ | .. | E. afín euclídeo |
| P. Escalar $\left\{ \right.$ | módulo de un vector | ................................ | Distancia |
| | ángulo entre dos vectores | ................................ | Ángulos |

### 0.1.1 Producto escalar de 2 vectores de $V_3$

Sean $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ dos vectores pertenecientes a $V_3$. Definimos como producto escalar de $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ al siguiente número real

$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = \begin{cases} ||\overrightarrow{x}||\cdot||\overrightarrow{y}||\cdot\cos\alpha & \text{donde } ||\overrightarrow{x}|| \text{ es el módulo del vector } \overrightarrow{x} \\ 0 \text{ si } \overrightarrow{x}=\overrightarrow{0} \text{ o } \overrightarrow{y}=\overrightarrow{0} & \alpha \text{ es el ángulo entre los vectores } \overrightarrow{x} \text{ e } \overrightarrow{y} \end{cases}$$

**Ejemplo 1** *Determina el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ si sabemos que $||\overrightarrow{x}|| = 3, ||\overrightarrow{y}|| = 2$ siendo $\alpha = \frac{\pi}{3}$*

Por la definición de producto escalar $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{x}||\cdot||\overrightarrow{y}||\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot2\cdot\frac{1}{2} = 3$

**Ejemplo 2** *Determina el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ si sabemos que $||\overrightarrow{x}|| = 4, ||\overrightarrow{y}|| = 2$ siendo $\alpha = \frac{2\pi}{3}$*

Por la definición de producto escalar $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{x}||\cdot||\overrightarrow{y}||\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot2\cdot\frac{-1}{2} = -4$

**Ejemplo 3** *Determina el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ si sabemos que $||\overrightarrow{x}|| = 5, ||\overrightarrow{y}|| = 2$ siendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$*

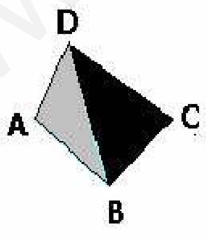
Por la definición de producto escalar $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{x}||\cdot||\overrightarrow{y}||\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 5\cdot2\cdot0 = 0$

**Nota 4** *Es interesante observar que el producto escalar puede ser positivo ( si $\alpha$ es agudo), negativo (si $\alpha$ es obtuso) y nulo ( si $\alpha$ es recto o alguno de los vectores es el vector nulo)*

**Ejemplo 5** *Sea ABCD un tetraedro regular cuya arista mide 1 cm. Sean $\overrightarrow{u_1}$ =[$\overrightarrow{AB}$] $\overrightarrow{u_2}$ =[AC] $\overrightarrow{u_3}$ =[$\overrightarrow{AD}$]*

Determina $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}$ , $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_3}$ , $\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{u_3}$

Por ser ABCD un tetraedro regular, sabemos que todas sus caras son triángulos equiláteros ( $||\overrightarrow{u_1}|| = 1$, $||\overrightarrow{u_2}|| = 1, ||\overrightarrow{u_3}|| = 1$). Por lo tanto, todos sus ángulos interiores son iguales y valen $\frac{\pi}{3}$




$$ang(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = \tfrac{\pi}{3} \to \overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} = ||\overrightarrow{u_1}||\cdot||\overrightarrow{u_2}||\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$ang(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_3}) = \tfrac{\pi}{3} \to \overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_3} = ||\overrightarrow{u_1}||\cdot||\overrightarrow{u_2}||\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$ang(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}) = \tfrac{\pi}{3} \to \overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{u_3} = ||\overrightarrow{u_1}||\cdot||\overrightarrow{u_2}||\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

### 0.1.2 Interpretación geométrica del producto escalar

El producto escalar de dos vectores es igual al producto escalar del primer vector con el vector que se obtiene al proyectar el segundo vector sobre el primero

$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y})}$

<u>Demostración:</u>

a) Si $\alpha = ang(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ es agudo.

Si te fijas en el dibujo $\overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y})}$ coincide con $\overrightarrow{OC}$

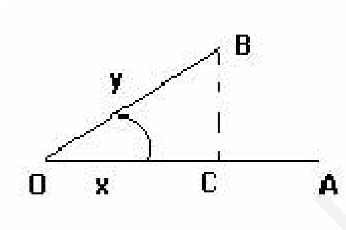



Figure 1:

$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}|| \cdot \cos\alpha =$[1] $||\overrightarrow{x}|| \cdot \left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right|$

$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y})} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{OC} = ||\overrightarrow{x}|| \cdot \left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right|$ ya que ambos vectores tienen la misma dirección y sentido

Por lo tanto $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y})}$

b) Si $\alpha = ang(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ es obtuso

Si te fijas en el dibujo $\overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y})}$ coincide con $\overrightarrow{OC}$

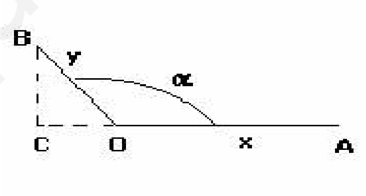



Figure 2:

$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}|| \cdot \cos\alpha =$[2] $- ||\overrightarrow{x}|| \cdot \left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right|$

---

[1] En el triángulo rectángulo OCB se tiene que $\cos\alpha = \dfrac{\left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right|}{||\overrightarrow{y}||}$. Despejando $\left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right|$; tendremos que $\left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right| = ||\overrightarrow{y}|| \cdot \cos\alpha$

[2] En el triángulo rectángulo OBC se tiene que $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{\left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right|}{||\overrightarrow{y}||}$. Despejando

$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y})} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{OC} = ||\overrightarrow{x}|| \cdot \left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right| \cdot \cos(180^0) = -\,||\overrightarrow{x}|| \cdot \left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right|$ ya que ambos vectores tienen la misma dirección y distinto sentido

c) Si $\alpha = ang(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 90^0$ demuéstralo tú como ejercicio

### 0.1.3 Propiedades del producto escalar

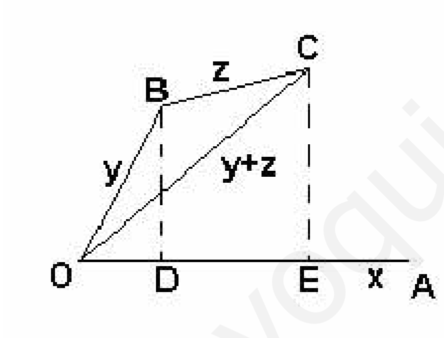
1. $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$ →Conmutativa
2. $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z}$ →Distributiva con respecto a la suma de vectores
3. $\overrightarrow{x} \cdot (\alpha \overrightarrow{y}) = (\alpha \overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = \alpha\ (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})$ →Pseudoasociatividad
4. $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} \geq 0\ \forall\ \overrightarrow{x} \in V_3$ (Además $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$)
5. Si $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ no son el vector nulo y $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ son perpendiculares

Demostración 1

Si $\alpha = ang(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ entonces -$\alpha = ang(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}|| \cdot \cos\alpha \\ \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x} = ||\overrightarrow{y}|| \cdot ||\overrightarrow{x}|| \cdot \cos(-\alpha) =^{3} ||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}|| \cdot \cos\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$$

Demostración 2




$\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})} =^{4} \overrightarrow{x} \cdot \left(\overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{y})} + \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{z})}\right) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{y})} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{z})}$

Utilizando la interpretación geométrica del producto escalar sabemos que

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{y})} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{z})} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Por lo que } \boxed{\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z}}$$

Demostración 5

Si $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ no son el vector nulo

$\Longrightarrow$

---

$\left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right|$; tendremos que $\left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right| = -\,||\overrightarrow{y}|| \cdot \cos\alpha$

[4] Si te fijas en el dibujo $\overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{y})} + \overrightarrow{P_{\overrightarrow{x}}\ (\overrightarrow{z})}$

$\vec{x}\cdot\vec{y}=0 \Longrightarrow^{5} \cos\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 90^0 \Longrightarrow \vec{x}\perp\vec{y}$
$\Longleftarrow$
$\vec{x}\perp\vec{y} \Longrightarrow \alpha = 90^0 \Longrightarrow \cos\alpha = 0 \Longrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y}=0$

**Expresión analítica del producto escalar**

Sea $\beta=\{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$ una base de $V_3$ y sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores cuyas componentes en la base dada son respectivamente $(x_1,x_2,x_3)$ e $(y_1,y_2,y_3)$.

Si conocemos los módulos de los vectores de dicha base así como el ángulo determinado por éstos ; entonces conoceremos los siguientes productos escalares $\vec{u_1}\cdot\vec{u_1}$ , $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}$ , $\vec{u_1}\cdot\vec{u_3}$ , $\vec{u_2}\cdot\vec{u_2}$ , $\vec{u_2}\cdot\vec{u_3}$ , $\vec{u_3}\cdot\vec{u_3}$ y por lo tanto podremos determinar el producto escalar $\vec{x}\cdot\vec{y}$ de la siguiente manera

$\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1\vec{u_1}+x_2\vec{u_2}+x_3\vec{u_3})\ (y_1\vec{u_1}+y_2\vec{u_2}+y_3\vec{u_3})=$
$(x_1y_1)(\vec{u_1}\cdot\vec{u_1})+(x_1y_2+x_2y_1)(\vec{u_1}\cdot\vec{u_2})+(x_1y_3+x_3y_1)(\vec{u_1}\cdot\vec{u_3})+(x_2y_2)(\vec{u_2}\cdot\vec{u_2})+(x_2y_3+x_3y_2)(\vec{u_2}\cdot\vec{u_3})+(x_3y_3)(\vec{u_3}\cdot\vec{u_3})$

Utilizando matrices, el producto escalar se calculará así:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}\vec{u_1}\cdot\vec{u_1} & \vec{u_1}\cdot\vec{u_2} & \vec{u_1}\cdot\vec{u_3}\\ \vec{u_2}\cdot\vec{u_1} & \vec{u_2}\cdot\vec{u_2} & \vec{u_2}\cdot\vec{u_3}\\ \vec{u_3}\cdot\vec{u_1} & \vec{u_3}\cdot\vec{u_2} & \vec{u_3}\cdot\vec{u_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

A esta matriz G, cuyos elementos son $g_{i,j}=\vec{u_i}\cdot\vec{u_j}$, se le denomina matriz asociada al producto escalar. Esta matriz es siempre simétrica ya que $g_{i,j}=g_{j,i}$

**Ejemplo 6** *Sea $\beta=\{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$ una base de $V_3$ tal que $||\vec{u_1}||=1$, $||\vec{u_2}||=2, ||\vec{u_3}||=1$ y ang( $\vec{u_1},\vec{u_2}$) $=\frac{\pi}{6}$, ang( $\vec{u_1},\vec{u_2}$) $=\frac{\pi}{4}$, ang( $\vec{u_1},\vec{u_2}$) $=\frac{\pi}{3}$ . Determina la matriz G y también $\vec{x}\cdot\vec{y}$ si sabemos que $\vec{x}=(2,-1,0)_\beta$ e $\vec{y}(3,0,4)_\beta$*

Primero calculamos los elementos de la matriz G

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_1}=||\vec{u_1}||^2=1 \qquad \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=||\vec{u_1}||\,||\vec{u_2}||\cos\frac{\pi}{6}=1\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$
$\vec{u_2}\cdot\vec{u_2}=||\vec{u_2}||^2=4 \qquad \vec{u_1}\cdot\vec{u_3}=||\vec{u_1}||\,||\vec{u_3}||\cos\frac{\pi}{3}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
$\vec{u_3}\cdot\vec{u_3}=||\vec{u_3}||^2=1 \qquad \vec{u_2}\cdot\vec{u_3}=||\vec{u_2}||\,||\vec{u_3}||\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$$G=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & \frac{1}{2}\\ \sqrt{3} & 4 & \sqrt{2}\\ \frac{1}{2} & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(2,-1,0)\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & \frac{1}{2}\\ \sqrt{3} & 4 & \sqrt{2}\\ \frac{1}{2} & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 4\end{pmatrix}=$$

$$(2-\sqrt{3},2\sqrt{3}-4,-\sqrt{2}+1)\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y}=3\cdot(2-\sqrt{3})+0\cdot(2\sqrt{3}-4)+4(-\sqrt{2}+1)=10-3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$$

[5] al ser los módulos de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ no nulos

### 0.1.4 Base ortogonal

Sea $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ una base de $V_3$, diremos que es ortogonal si dichos vectores son ortogonales entre si.

Por ser la base ortogonal, la matriz asociada al producto escalar con respecto a esta base siempre tendrá la forma

$$G = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} & 0 & 0 \\ 0 & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} & 0 \\ 0 & 0 & \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3} \end{pmatrix}$$

### 0.1.5 Base normal

Sea $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ una base de $V_3$, diremos que es normal si dichos vectores son unitarios todos ellos

Por ser la base normal, la matriz asociada al producto escalar con respecto a esta base siempre tendrá la forma:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_1} & 1 & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_2} & 1 \end{pmatrix}$$

### 0.1.6 Base ortonormal

Sea $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ una base de $V_3$, diremos que es ortonormal si dichos vectores son ortogonales entre sí y además todos ellos son unitarios.

Por ser la base ortonormal, la matriz asociada al producto escalar con respecto a esta base siempre será la matriz identidad

$$G = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y además si los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ tienen de componentes con respecto a esta base $(x_1, x_2, x_3)$ e $(y_1, y_2, y_3)$ respectivamente entonces la expresión analítica de su producto escalar viene dada por:

$$\boxed{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}$$

A la expresión del producto escalar con respecto a la base canónica se le denomina producto escalar canónico

**Ejemplo 7** *Dados los vectores* $\overrightarrow{x}\,(-1, 3, 4)$ $\overrightarrow{y}\,(2, -1, 0)$ $\overrightarrow{z}\,(1, 4, -2)$ *expresados en una base ortonormal. Determina los productos escalares indicados a)*$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ *b)* $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$ *c)*$(2\overrightarrow{y} - 3\overrightarrow{z})\,(\overrightarrow{x} + 4\overrightarrow{z})$

### 0.1.7 Definición de espacio vectorial euclídeo

El espacio vectorial $V_3$ después de definir en él el producto escalar se le denomina "Espacio Vectorial Euclídeo"

### 0.1.8 Definición de norma o módulo de un vector.

De la definición de producto escalar sabemos que:
$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = ||\overrightarrow{x}||^2$. Por lo tanto, podemos afirmar que el módulo o norma de un vector se define de la siguiente manera: $\boxed{||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}}$

#### Propiedades del módulo o norma de un vector

1. $||\overrightarrow{x}|| \geq 0$ (Además $||\overrightarrow{x}|| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$)
2. Si $\alpha \in \Re$ entonces $||\alpha \overrightarrow{x}|| = |\alpha| \, ||\overrightarrow{x}|| \; \forall \overrightarrow{x} \in V_3$
3. $|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq ||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}||$ Desigualdad de Cauchy-Schwartz
4. $||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}|| \leq ||\overrightarrow{x}|| + ||\overrightarrow{y}||$ Desigualdad triangular de Minkowsky

Demostración 1
Por definición de producto escalar $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = ||\overrightarrow{x}||^2 \geq 0 \; \forall \overrightarrow{x} \in V_3$.
Por lo tanto $||\overrightarrow{x}|| \geq 0 \; \forall \overrightarrow{x} \in V_3$.
Demostración 2
$||\alpha \overrightarrow{x}|| = \sqrt{(\alpha \overrightarrow{x}) \cdot (\alpha \overrightarrow{x})} =^6 \sqrt{\alpha^2 (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x})} = |\alpha| \sqrt{(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x})} = |\alpha| \, ||\overrightarrow{x}||$
Demostración 3
Como $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}|| \cdot \cos\alpha \rightarrow |\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| = ||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}|| \cdot |\cos\alpha|$
Como para todo ángulo $\alpha$ siempre se verifica que $|\cos\alpha| \leq 1$; entonces podemos afirmar que:

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq ||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}||$$

**Nota 8** *La igualdad se verificará siempre que $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ tengan la misma dirección (sean linealmente dependientes)*

Demostración 4
$||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}||^2 = (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) =^7 \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}$
Como siempre se verifica que $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \leq |\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}|$ tendremos
$||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}||^2 \leq^8 ||\overrightarrow{x}||^2 + 2\,|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| + ||\overrightarrow{y}||^2 \leq^9 ||\overrightarrow{x}||^2 + 2\,||\overrightarrow{x}|| \, ||\overrightarrow{y}|| + ||\overrightarrow{y}||^2$
Con lo que $||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}||^2 \leq (||\overrightarrow{x}|| + ||\overrightarrow{y}||)^2 \rightarrow ||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}|| \leq ||\overrightarrow{x}|| + ||\overrightarrow{y}||$

**Nota 9** *La igualdad se verificará siempre que $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ sean de la misma dirección y sentido*

[6] Por la propiedad pseudoasociativa del producto escalar
[7] Por las propiedades distributiva y conmutativa del producto escalar
[8] $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = ||\overrightarrow{x}||^2$
$\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{y}||^2$
[9] Por la desigualdad de Cauchy -Schwartz

**Expresión analítica de la norma de un vector en una base ortonormal.**

Dado un vector $\overrightarrow{x}$ de componentes $(x_1, x_2, x_3)$ en una base ortonormal; nosotros sabemos que el producto escalar de dicho vector consigo mismo viene dado por la expresión
$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ y como por definición $||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}$ entonces

$$\boxed{||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

**Nota 10** *Dado un vector $\overrightarrow{x}$ cuya norma o módulo no valga 1. El vector $\dfrac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||}$ tienen la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{x}$ y el vector $\dfrac{-\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||}$ tienen la misma dirección y sentido contrario que $\overrightarrow{x}$. Siendo ambos unitarios*

**Ejemplo 11** *Dado el vector $\overrightarrow{x}\,(-1, 3, 4)$ determina $||\overrightarrow{x}||$ y los vectores $\dfrac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||}$ , $\dfrac{-\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||}$*

$$||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$
$$\frac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||} = \left(\frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}\right)$$
$$\frac{-\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||} = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{-4}{\sqrt{26}}\right)$$

### 0.1.9 Ángulo entre dos vectores

Por definición de producto escalar de dos vectores, sabemos que $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = ||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}|| \cdot \cos\alpha$. Despejando $\cos\alpha$ tendremos: $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}||}}$

**Expresión analítica del ángulo entre dos vectores en una base ortonormal**

Sean los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ cuyas componentes con respecto a la base canónica son $(x_1, x_2, x_3)$ $(y_1, y_2, y_3)$ respectivamente. Por ser $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}||}$entonces

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}}$$

**Ejemplo 12** *Dados los vectores $\overrightarrow{x}\,(-1, 3, 4)$ e $\overrightarrow{y}\,(1, 0, -3)$ . Determina el ángulo que forman*

$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = (-1) \cdot (1) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) = -13$
$||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$
$||\overrightarrow{y}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$
$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{||\overrightarrow{x}|| \cdot ||\overrightarrow{y}||} = \dfrac{-13}{\sqrt{260}} \to \alpha = \arcsin\left(\dfrac{-13}{\sqrt{260}}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

**Ejemplo 13** *Dados los vectores $\overrightarrow{x}\,(2,\lambda,3)$ e $\overrightarrow{y}\,(4,2,-1)$ determina $\lambda$ para que estos vectores sean ortogonales*

$$\left.\begin{array}{c} \text{Para que sean ortogonales se ha de verificar que } \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \\ \text{Como } \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 8 + 2\lambda - 3 = 5 + 2\lambda \end{array}\right\} \to 5 + 2\lambda$$
$= 0 \to \lambda = \dfrac{-5}{2}$

**Ángulos directores de un vector.Cosenos directores**

Sea el vector cuyas componentes con respecto a la base canónica[10] son $(x_1, x_2, x_3)$

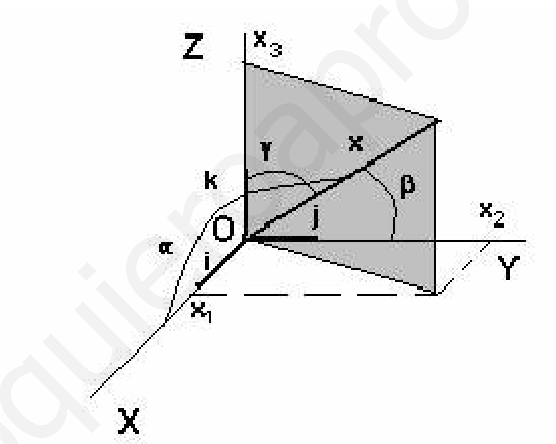



Figure 3:

Si llamamos

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha = ang(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{i}) & \to & \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{i}}{||\overrightarrow{x}||\left|\left|\overrightarrow{i}\right|\right|} = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \beta = ang(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{j}) & \to & \cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{j}}{||\overrightarrow{x}||\left|\left|\overrightarrow{j}\right|\right|} = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \gamma = ang(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{k}) & \to & \cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{k}}{||\overrightarrow{x}||\left|\left|\overrightarrow{k}\right|\right|} = \dfrac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \end{array}\right\} \text{A estos}$$

[10] $\overrightarrow{i}\,(1,0,0)$ $\overrightarrow{j}\,(0,1,0)$ $\overrightarrow{k}\,(0,0,1)$

ángulos se les denomina ángulos directores del vector $\overrightarrow{x}$

Por otra parte, dado el vector $\overrightarrow{x}(x_1, x_2, x_3)$ sabemos que el vector $\dfrac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||}$ es unitario y tiene la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{x}$. Siendo sus componentes en la base canónica precisamente los cosenos directores del vector $\overrightarrow{x}$

$$\frac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Al ser unitario este vector $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$

### 0.1.10 Producto vectorial de dos vectores

Sea $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ una base ortonormal (puede ser la canónica $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$) de $V_3$ y sean los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ cuyas componentes en dicha base son $(x_1, x_2, x_3)$ $(y_1, y_2, y_3)$ respectivamente

Se define el producto vectorial de estos dos y se representará por $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$ (o $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ ) al siguiente vector .

$$\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y} = \left( \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

**Nota 14** *Aunque no sea correcto, lo puedes determinar también con el siguiente determinante*

$$\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

**Propiedades del producto vectorial**

1. $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{x}$
2. $\mu(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \wedge (\mu \overrightarrow{y}) = (\mu \overrightarrow{x}) \wedge \overrightarrow{y}$
3. $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \wedge \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{z}$
4. $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ son linealmente dependientes
5. $\overrightarrow{x} \wedge (\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z})\, \overrightarrow{y} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})\, \overrightarrow{z}$
6. $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$ es ortogonal a los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$
7. $||\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}|| = ||\overrightarrow{x}||\, ||\overrightarrow{y}|| \sin\alpha$ siendo $\alpha = ang(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.
8. El módulo o norma del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo determinado por éstos

Nota: Las demostraciones 1,2 y 3 están basadas en las propiedades de los determinantes

Demostración 1

Por definición sabemos que

$$\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\y_1&y_2&y_3\\x_1&x_2&x_3\end{vmatrix}=-\overrightarrow{y}\wedge\overrightarrow{x}$$

Demostración 2

$$\mu(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y})=\mu\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\\mu x_1&\mu x_2&\mu x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=(\mu\overrightarrow{x})\wedge\overrightarrow{y}$$

$$\mu(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y})=\mu\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1&x_2&x_3\\\mu y_1&\mu y_2&\mu y_3\end{vmatrix}=\overrightarrow{x}\wedge(\mu\overrightarrow{y})$$

Demostración 3

$$(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\wedge\overrightarrow{z}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1+y_1&x_2+y_2&x_3+y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}$$ Por ser el determinante lineal con respecto a cada fila tendremos

$$(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\wedge\overrightarrow{z}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1&x_2&x_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}=(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{z})+(\overrightarrow{y}\wedge\overrightarrow{z})$$

Demostración 4

Para demostrar que el vector $\overrightarrow{x}$ es ortogonal al vector $\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}$ bastará con comprobar que el producto escalar de ambos es nulo. Veámoslo

$$\overrightarrow{x}\cdot(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y})=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\right)=$$

$$=x_1\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}-x_2\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}$$ [11] $$=0$$

Comprueba tú que el vector $\overrightarrow{y}$ es ortogonal a $\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}$

Demostración 7

Vamos a comprobar que $||\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}||^2=||\overrightarrow{x}||^2\,||\overrightarrow{y}||^2\,(1-\cos^2(\alpha))=||\overrightarrow{x}||^2\,||\overrightarrow{y}||^2\sin^2(\alpha)$

Por definición de producto vectorial sabemos que:

$$\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\right)$$

Por definición de módulo de un vector en una base ortonormal (base canónica)

$$||\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}||^2=\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}^2+\left(-\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix}\right)^2+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}^2$$

Si desarrollamos esta expresión, obtendremos

$$||\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}||^2=(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2=$$

[11] Un determinante es nulo si hay dos filas iguales

$= (x_2y_3)^2 + (x_3y_2)^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + (x_1y_3)^2 + (x_3y_1)^2 - 2x_1x_3y_1y_3 + (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 - 2x_1x_2y_1y_2$

Reordenando términos tendremos que $||\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}||^2$ coincide con la expresión $(x_1y_2)^2+(x_1y_3)^2+(x_2y_1)^2+(x_2y_3)^2+(x_3y_1)^2+(x_3y_2)^2-2\left(x_1x_2y_1y_2 + x_1x_3y_1y_3 + x_2x_3y_2y_3\right)$

Por otra parte, si calculamos

$||\overrightarrow{x}||^2\, ||\overrightarrow{y}||^2 \left(1 - \cos^2(\alpha)\right)$ [12] tendremos que coincide con:

[13] $\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)\left(1 - \dfrac{\left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\right)^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)}\right)$

Desarrollando esta última expresión

$$||\overrightarrow{x}||^2\, ||\overrightarrow{y}||^2 \left(1 - \cos^2(\alpha)\right) =$$
$$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) - \left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\right)^2 =$$

$= (x_1y_2)^2+(x_1y_3)^2+(x_2y_1)^2+(x_2y_3)^2+(x_3y_1)^2+(x_3y_2)^2-2\left(x_1x_2y_1y_2 + x_1x_3y_1y_3 + x_2x_3y_2y_3\right)$

Con lo que queda demostrado que $||\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}|| = ||\overrightarrow{x}||\, ||\overrightarrow{y}|| \sin\alpha$

Demostración 8

Por la propiedad anterior sabemos que $||\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}|| = ||\overrightarrow{x}||\, ||\overrightarrow{y}|| \sin\alpha$

Si te fijas en el paralelogramo, del dibujo, engendrado por los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$

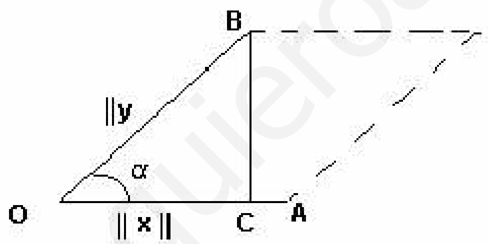



Figure 4:

El área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ coincide con

$S = ||\overrightarrow{x}|| \,.\, \left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right|$ donde $\left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right|$ es la altura del paralelogramo

Como el triángulo OCB es rectángulo en C se verifica que

$$\sin\alpha = \frac{\left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right|}{||\overrightarrow{y}||} \rightarrow \left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right| = ||\overrightarrow{y}|| \sin\alpha$$

[12] Siendo $\alpha$ el ángulo entre $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$

[13] $||\overrightarrow{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $||\overrightarrow{y}||^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ,$\cos^2\alpha = \dfrac{\left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\right)^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)}$

Por lo que podemos concluir que $S = ||\overrightarrow{x}||\,||\overrightarrow{y}|| \sin\alpha = ||\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}||$

**Nota 15** *De la propiedad anterior se puede demostrar facilmente que el área del triángulo determinado por los vectores* $\overrightarrow{x}$ *e* $\overrightarrow{y}$ *coincide con* $S = \frac{1}{2}\,||\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}||$. *Hazlo como ejercicio*

### 0.1.11 Producto mixto de tres vectores

Se denomina producto mixto de los vectores $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$, al producto escalar de $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$ con el vector

$$\boxed{(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z}}$$

El producto mixto de tres vectores es un número al ser un producto escalar. Por regla general; el producto mixto $(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z}$ se representa por $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}]$

#### Expresión analítica del producto mixto de tres vectores

Sea $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ una base ortonormal (puede ser la canónica $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$) de $V_3$ y sean los vectores $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ cuyas componentes en dicha base son $(x_1, x_2, x_3)$ $(y_1, y_2, y_3)$ $(z_1, z_2, z_3)$ respectivamente

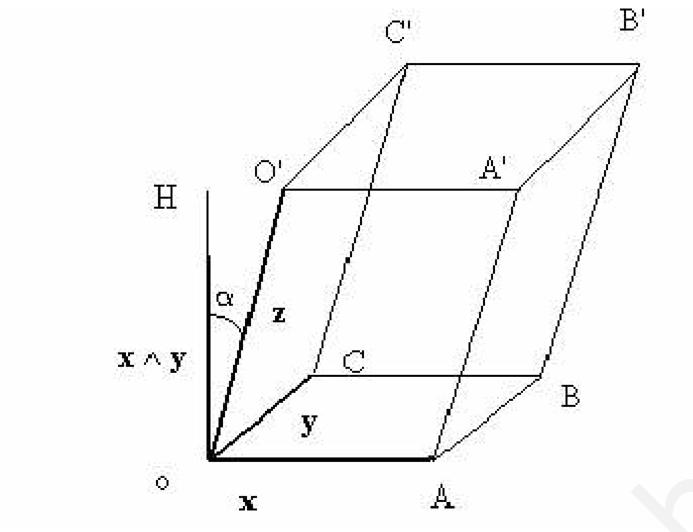
Se puede demostrar que el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ viene dado por el siguiente número

$$. \ [\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \text{ (demuéstralo)}$$

#### Propiedades del producto mixto de tres vectores

1) $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}] = -\,[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{y}] = [\overrightarrow{z}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] = -\,[\overrightarrow{z}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}] = [\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x}] =$
$= -\,[\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}]$

2) El valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ coincide con el volumen del paralelepípedo determinado por éstos




Por definición $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}] = (\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z}$. Por lo tanto, al calcular el valor absoluto de esta expresión tendremos

$$|[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}]| = |(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z}| = ||\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}|| \cdot ||\overrightarrow{z}|| \cdot \cos\alpha \text{ siendo}$$
$$\alpha = ang(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$$

Sabemos que $||\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}||$ coincide con el área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ (área de la base del paralelepípedo de la figura anterior)

Por otra parte $||\overrightarrow{z}|| \cdot \cos\alpha$ coincide con la altura $\overline{OH}$ del paralelepípedo de la figura anterior

Así pues; $|[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}]|$ coincide con el producto del área de la base por la altura del paralelepípedo anterior.

En defintiva:

$|[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}]|$ *es el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ *no coplanarios*

### 0.1.12 Ecuación cartesiana de un plano si conocemos un vector perpendicular y un punto

Sea $\pi$ un plano del que conocemos un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y además un vector $\overrightarrow{w}$ perpendicular al plano $\pi$ cuyas componentes en la base canónica son $(A, B, C)$

Con estos datos podemos deducir que la ecuación cartesiana de $\pi$ es:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

<u>Deducción:</u>

Consideremos un punto $X(x, y, z)$ genérico del plano $\pi$ . Como el punto $P$ pertenece al plano, entonces el vector $\overrightarrow{PX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ también está contenido en el plano y por lo tanto ha de ser ortogonal al vector $\overrightarrow{w}$

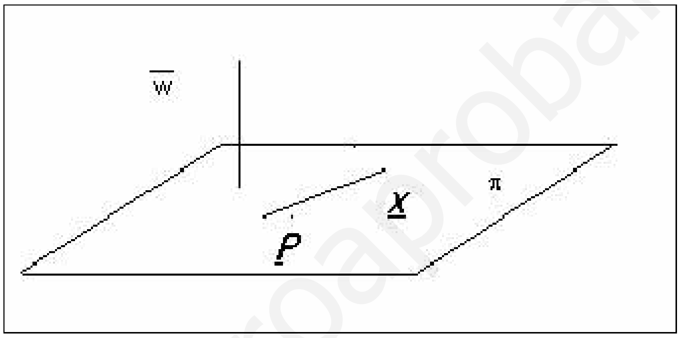



Figure 5:

Así pues, el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\overrightarrow{w}$ es nulo $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{w} = 0$

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \Longleftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

**Nota 16** *Dada la ecuación cartesiana de un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$ un vector ortogonal a dicho plano es el vector $\overrightarrow{w}(A, B, C)$; (vector quese denomina vector normal al plano)*

<u>Deducción</u>:

Consideramos dos puntos del plano $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x_0', y_0', z_0')$. Por ser del plano, ambos verifican las relaciones $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$ (@)y $Ax_0' + By_0' + Cz_0' = D$ (@@)respectivamente.

Para demostrar que el vector $\overrightarrow{w}(A, B, C)$ es ortogonal a $\pi$ tendremos que comprobar que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{w}$ es nulo

$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PQ} = (A, B, C) \cdot (x_0' - x_0, y_0' - y_0, z_0' - z_0) = A(x_0' - x_0) + B(y_0' - y_0) + C(z_0' - z_0)$

Por (@) y (@@) sabemos que $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$ y $Ax_0' + By_0' + Cz_0' = D$; por lo tanto:

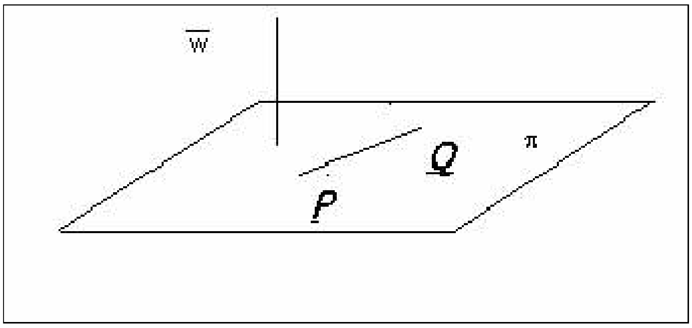



Figure 6:

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PQ} = Ax'_0 + By'_0 + Cz'_0 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D - D = 0$$

C. q. d. que $\overrightarrow{w}$ es $\perp$ al plano $\pi$; ya que es ortogonal a todo vector contenido en él

**Ecuación normal de un plano**

Si dividimos la ecuación cartesiana de un plano por $||\overrightarrow{w}|| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ obtendremos lo que se denomina ecuación normal del plano $\pi$

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{Cz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

El vector $\overrightarrow{w} = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)$ es perpendicular al plano y además unitario

**Nota 17** *Si de un plano conocemos sus vectores directores* $\overrightarrow{v}$ *y* $\overrightarrow{t}$ *, su vector ortogonal será el producto vectorial de éstos:* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{t}$

*Dado el plano* $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = 3 + \alpha + 3\beta \\ z = -1 - 5\alpha + 2\beta \end{cases}$

$\pi \equiv \begin{cases} P(1, 3, -1) \in \pi \\ \overrightarrow{v_1} = (-2, 1, -5) \quad \textit{donde } \overrightarrow{v_1} \textit{ y } \overrightarrow{v_2} \textit{ son los vectores directores de } \pi \\ \overrightarrow{v_2} = (1, 3, 1) \end{cases}$

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 16\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j} - 7\,\overrightarrow{k}$ *es un vector perpendicular al plano*

*Así pues;* $\pi \equiv \begin{cases} P(1, 3, -1) \in \pi \\ \overrightarrow{w} = (16, -3, -7) \quad \overrightarrow{w} \perp \pi \end{cases}$

*Su ecuación cartesiana será* $\pi \equiv 16(x - 1) - 3(y - 3) - 7(z + 1) = 0$

**Nota 18** *La ecuación de todos los planos perpendiculares al vector* $\overrightarrow{w}(A, B, C)$ *es de la forma*

$$Ax + By + Cz = K$$

**Ejercicio 19** *Determina la ecuación cartesiana de un plano del que conocemos el vector* $\overrightarrow{w}(2, 3, 5)$ *ortogonal a éste y además el punto* $P(-1, 1, 0)$

La ecuación de todos los planos cuyo vector ortogonal es $\overrightarrow{w}(2, 3, 5)$ es de la forma:

$$2x + 3y + 5z = K$$

De todos ellos, sólo nos interesa el que pase por P

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot (1) + 5 \cdot 0 = K \rightarrow K = 1$$

Por lo tanto, el plano pedido es $\boxed{2x + 3y + 5z = 1}$

### 0.1.13 Recta que pasa por un punto y es perpendicular a un plano

Se trata de determinar las ecuaciones de una recta, de la cual conocemos el punto $P(x_o, y_o, z_o)$ y que además es perpendicular al plano $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$

Un vector director de la recta puede ser el vector ortogonal al plano $\pi$ $\overrightarrow{w_\pi} = (A, B, C)$ (al ser $r$ perpendicular a $\pi$)

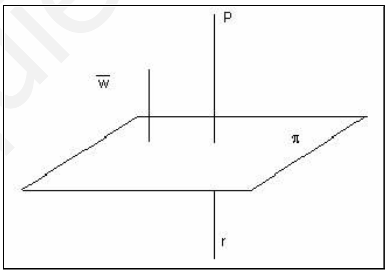



Figure 7:

**Ejercicio 20** *a) Determina la ecuación de la recta "r" que es perpendicular al plano*$\pi \equiv x - y + 3z = 1$ *sabiendo además que pasa por el punto* $P(3, 1, 1)$

El vector director de la recta $r$ puede ser el vector ortogonal al plano $\pi($ $\overrightarrow{w_\pi} = (1, -1, 3)$

$$r \equiv \begin{cases} P(3,1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{w_\pi} \text{ donde } \overrightarrow{w_\pi} = (1,-1,3) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{PX} = \alpha\ \overrightarrow{v_r}$$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} x = 3+\alpha \\ y = 1-\alpha \\ z = 1+3\alpha \end{array} \right. \text{ Ecuaciones paramétricas de } r$$

$$x-3 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3} \text{ Ecuación continua de } r$$

Escogiendo dos de estas tres igualdades, tendremos las ecuaciones cartesianas de la recta $r$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3 = \dfrac{y-1}{-1} \\ x-3 = \dfrac{z-1}{3} \end{array} \right. \to r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y=4 \\ 3x-z=8 \end{array} \right.$$

**Proyección ortogonal de un punto $P$ sobre un plano $\pi$**

Llamaremos proyección ortogonal de un punto $P$ sobre un plano $\pi$ al punto, $H$, obtenido como intersección de $r$ y $\pi$ ; siendo $r$ la perpendicular al plano $\pi$ que pasa por $P$

**Ejercicio 21** *a) Determina la ecuación de la recta "r" que es perpendicular al plano*$\pi \equiv 2x - y + 3z = 1$ *sabiendo además que pasa por el punto* $P(3, -2, 1)$

b) Calcula la intersección entre la recta "r" del apartado anterior y el plano $\pi$ (punto $H$ denominado proyección ortogonal del punto $P$ sobre el plano $\pi$ )

c) Determina $\left\| \overrightarrow{PH} \right\|$

d) Determina el simétrico del punto P respecto del plano $\pi$

*Solución:*

a) Por ser "r" perpendicular a $\pi$ entonces el vector director de "r" $\overrightarrow{v_r}$ puede ser cualquier vector paralelo al vector $\overrightarrow{w}(2, -1, 3)$ que es ortogonal a $\pi$

En particular, podemos considerar que $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{w}$

Como de la recta $r$ ya conocemos su vector director $\overrightarrow{v_r}(2, -1, 3)$ y un punto $P(3, -2, 1)$, entonces sus ecuaciones paramétricas son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3+2\alpha \\ y = -2-\alpha \\ z = 1+3\alpha \end{array} \right.$$

b) Para determinar la intersección de r con $\pi$, tendremos que resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambos

$$r \cap \pi \left\{ \begin{array}{c} x = 3+2\alpha \\ y = -2-\alpha \\ z = 1+3\alpha \\ 2x-y+3z = 1 \end{array} \right. \text{ Sustituyendo las tres primeras en la cuarta ecuación}$$

$2(3+2\alpha) - (-2-\alpha) + 3(1+3\alpha) = 1 \to 14\alpha = -10 \to \alpha = \frac{-5}{7}$

Fíjate que hemos obtenido el parámetro $\alpha$ asociado al punto común $H$. Para calcular $H$ sustituye el parámetro en las ecuaciones paramétricas de "r"

$$\left.\begin{array}{r} x=3+2\cdot\left(\frac{-5}{7}\right)=\frac{11}{7} \\ y=-2-\left(\frac{-5}{7}\right)=\frac{-9}{7} \\ z=1+3\left(\frac{-5}{7}\right)=\frac{-8}{7} \end{array}\right\} \rightarrow H\left(\frac{11}{7},\frac{-9}{7},\frac{-8}{7}\right)$$ (proyección ortogonal de $P$ sobre el plano $\pi$)

c) El vector $\overrightarrow{PH}=\left(\frac{11}{7}-3,\frac{-9}{7}+2,\frac{-8}{7}-1\right)=\left(\frac{-10}{7},\frac{5}{7},\frac{-15}{7}\right)$ [14]

$\left\|\overrightarrow{PH}\right\|=\sqrt{\left(\frac{-10}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{-15}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{350}}{7}=\frac{5\cdot\sqrt{14}}{7}$

Este valor coincide con la distancia del punto $P$ al plano $\pi$. Más adelante ya lo calcularemos con otros procedimientos

d) Si te fijas en el dibujo. observarás que $H$ es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ siendo $P'$ el simétrico de $P$ respecto del plano

$$\left.\begin{array}{c} P(3,-2,1) \\ P'(a,b,c) \end{array}\right\} \rightarrow H\left(\frac{3+a}{2},\frac{-2+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)$$ igualando con las coordenadas obtenidas en el apartado anterior

$$\left.\begin{array}{c} \frac{3+a}{2}=\frac{11}{7} \\ \frac{2+b}{2}=\frac{-9}{7} \\ \frac{1+c}{2}=\frac{-8}{7} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} a=\frac{1}{7} \\ b=\frac{-32}{7} \\ c=\frac{-23}{7} \end{array}\right\} \rightarrow P'\left(\frac{1}{7},\frac{-32}{7},\frac{-23}{7}\right)$$

### 0.1.14 Plano que pasa por un punto y es perpendicular a una recta

Se trata de determinar las ecuaciones de un plano $\pi$, del cual conocemos el punto $P(x_o,y_o,z_o)$ y que además es perpendicular a una recta $r$ conocida

Un vector ortogonal al plano puede ser el vector director de la recta dada $r$ (al ser $\pi$ perpendicular a $r$)

### 0.1.15 Proyección ortogonal de un punto $P$ sobre la recta $r$

Llamaremos proyección ortogonal de un punto $P$ sobre la recta $r$ al punto, $H$, obtenido como intersección de $r$ y $\pi$ ; siendo $\pi$ el plano perpendicular a $r$ que pasa por $P$

**Ejercicio 22** *a) Determina la ecuación del plano $\pi$ perpendicular a la recta* $r\equiv\left\{\begin{array}{c} x=3+\alpha \\ y=-2+3\alpha \\ z=1+5\alpha \end{array}\right.$ *sabiendo además que pasa por el punto $P(1,1,1)$*

b) Calcula la intersección entre el plano $\pi$ del apartado anterior y la recta "r" (punto $H$ denominado proyección ortogonal del punto $P$ sobre la recta "r" )

c) Determina $\left\|\overrightarrow{PH}\right\|$

d) Determina el simétrico del punto P respecto de la recta "r"

Solución:

[14] Fíjate que $\overrightarrow{PH}=\left(\frac{-10}{7},\frac{5}{7},\frac{-15}{7}\right)=\frac{-5}{7}\overrightarrow{v_r}$

a) Por ser $\pi$ perpendicular a "r" entonces el vector normal de $\pi$ puede ser cualquier vector paralelo al vector director de r $\overrightarrow{v_r}(1,3,5)$ que es ortogonal a $\pi$

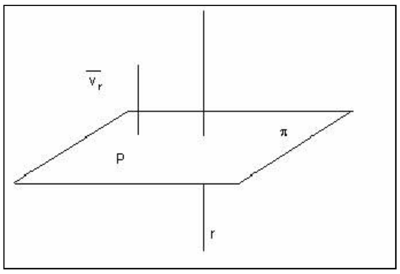



Figure 8:

En particular, podemos considerar que$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_r}$

Como del plano $\pi$ conocemos su vector normal $\overrightarrow{w}(1,3,5)$ y un punto $P(1,1,1)$, entonces la ecuación cartesiana de este plano es: $1(x-1)+3(x-1)+5(z-1) = 0$

$$\pi \equiv x + 3y + 5z = 9$$

b) Para determinar la intersección de r con $\pi$, tendremos que resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambos

$r \cap \pi \left\{ \begin{array}{c} x = 3 + \alpha \\ y = -2 + 3\alpha \\ z = 1 + 5\alpha \\ x + 3y + 5z = 9 \end{array} \right.$ Sustituyendo las tres primeras en la cuarta ecuación

$1(3+\alpha) + 3(-2+3\alpha) + 5(1+5\alpha) = 9 \rightarrow 35\alpha = 7 \rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$

Fíjate que hemos obtenido el parámetro $\alpha$ asociado al punto común $H$. Para calcular $H$ sustituye el parámetro en las ecuaciones cartesianas de "r"

$\begin{array}{c} x = 3 + \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{16}{5} \\ y = -2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{-7}{5} \\ z = 1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 2 \end{array} \rightarrow H(\frac{16}{5}, \frac{-7}{5}, 2)$ (proyección ortogonal de $P$ sobre la recta "r")

c) El vector $\overrightarrow{PH} = \left(\frac{16}{5} - 3, \frac{-7}{5} + 2, 2 - 1\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$ [15]

$\left|\left|\overrightarrow{PH}\right|\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + (1)^2} = \frac{\sqrt{35}}{5}$

Este valor coincide con la distancia del punto $P$ al la recta "r". Más adelante; ya lo calcularemos con otros procedimientos

d) Si te fijas en el dibujo, observarás que $H$ es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ siendo $P'$ el simétrico de P respecto de la recta "r"

$\begin{array}{c} P(1,1,1) \\ P'(a,b,c) \end{array} \rightarrow H\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right)$ igualando con las coordenadas obtenidas en el apartado anterior

[15] Fíjate que $\overrightarrow{PH} = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right) = \frac{1}{5}\overrightarrow{v_r}$

$$\begin{array}{c} \frac{1+a}{2}=\frac{16}{5} \\ \frac{1+b}{2}=\frac{-7}{5} \\ \frac{1+c}{2}=2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} a=\frac{31}{5} \\ b=\frac{-15}{5}=-3 \\ c=3 \end{array} \rightarrow P'\left(\frac{31}{5},-3,3\right)$$

**Nota 23** *Dada la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \end{array} \right.$ *Fíjate que* $r=\pi_1 \cap \pi_2$ *viene definida como intersección de los planos* $\pi_1 \equiv Ax+By+Cz=D$ *y* $\pi_1 \equiv A'x+B'y+C'z=D'$
*Si necesitamos un vector director de ésta, tan sólo tendremos que considerar el vector* $\overrightarrow{w_1} \wedge \overrightarrow{w_2}$ *donde* $\overrightarrow{w_1}=(A,B,C)$ *es el vector ortogonal a* $\pi_1$ *y* $\overrightarrow{w_2}=(A',B',C')$ *es el vector ortogonal a* $\pi_2$

**Ejercicio 24** *Dada la recta* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{array} \right.$
*a) Ecuación cartesiana de un plano que pasa por* $P(-2,1,3)$ *y es perpendicular a* $r$
*b) Proyección ortogonal de* $P$ *sobre la recta* $r$ *(Punto* $H$*)*
*c)* $\left\| \overrightarrow{PH} \right\|$
*d) Simétrico de* $P$ *sobre la recta* $r$

a) Dada la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{array} \right.$

La recta $r=\pi_1 \cap \pi_2$ viene definida como intersección de los planos $\pi_1 \equiv x-2z=1$ y $\pi_2 \equiv 2x-3y+z=2$. Los vectores ortogonales a cada plano son $\overrightarrow{w_1}=(1,0,-2)$ y $\overrightarrow{w_1}=(2,-3,1)$

Por lo tanto; el vector director de la recta será:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_r} &= \overrightarrow{w_1} \wedge \overrightarrow{w_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{v_r} &= (-6,-5,-3) \end{aligned}$$

Como nos piden un plano $\pi$ que pasa por $P(-2,1,3)$ y es perpendicualr a la recta $r$. El vector ortogonal al plano será el vector director de $r$

$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(-2,1,3) \\ \overrightarrow{v_r}=(-6,-5,-3)=\overrightarrow{w} \text{ vector ortogonal al plano} \end{array} \right.$

$\pi \equiv -6(x+2)-5(y-1)-3(z-3)=0 \rightarrow 6x+5y+3z=2$

b) La proyección ortogonal del punto $P(-2,1,3)$ sobre la recta $r$ es el punto $H$ intersección de $r$ y el plano anterior $\pi$

$$H=r \cap \pi \equiv \begin{array}{l} 6x+5y+3z=2 \\ x-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{array} \rightarrow H\left(\frac{23}{35},-\frac{2}{7},-\frac{6}{35}\right)$$

c) El simétrico del punto $P$ sobre $r$ es el punto $P'$ tal que $H$ es el punto medio del segmento de extremos $P$ y $P'$

$$\left. \begin{array}{c} P(-2,1,3) \\ P'(a,b,c) \end{array} \right\} \rightarrow \text{El punto medio } H=\left(\frac{a-2}{2},\frac{b+1}{2},\frac{c+3}{2}\right)$$

Como $H(\frac{23}{35},-\frac{2}{7},-\frac{6}{35}) \rightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{a-2}{2}=\frac{23}{35} \\ \dfrac{b+1}{2}=-\frac{2}{7} \\ \dfrac{c+3}{2}=-\frac{6}{35} \end{array}\right\} \rightarrow a=\frac{116}{35}, b=-\frac{11}{7},\ c=-\frac{117}{35}$

El punto $P'=(\frac{116}{35},-\frac{11}{7},-\frac{117}{35})$

**Ejercicio 25** *Dado el plano* $\pi \equiv x-2y+z=-1$ *y la recta* $r \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$. *Determina la ecuación de una recta* $s$ *contenida en* $\pi$ *y que corta perpendicularmente a* $r$

Como la recta que nos piden está contenida en $\pi$ y además corta perpendicularmente a "$r$" entonces su vector director $\overrightarrow{v_s}(A,B,C)$ ha de verificar las siguientes condiciones:

$\overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{w}(\overrightarrow{w}(1-2,1)$vector normal del plano $\pi)^{16} \Longleftrightarrow A-2B+C=0$

$\overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_r}(\overrightarrow{v_r}(1,2,-1)$ vector director de r$)^{17} \Longleftrightarrow A+2B-C=0$

Resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{c} A-2B=-C \\ A+2B=C \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{c} A=0 \\ B=\frac{C}{2} \end{array}$

Así pues, todos los vectores que verifican las dos condiciones son de la forma $(0,\frac{C}{2},C)$ (hay infinitos). Sólo nos interesa uno; para ello asignamos a $C$ el valor 2,y entonces

$\overrightarrow{v_s}(0,1,2)$

Nos hace falta ahora un punto de $s$

Como $s$ corta perpendicularmente a $r$ Un punto de $s$ será el punto $J$ común a $r$ y a $\pi$

Calculémoslo $r\cap\ \pi \left\{\begin{array}{c} x-2y+z=-1 \\ x=-1+\alpha \\ y=1+2\alpha \\ z=-\alpha \end{array}\right. \rightarrow \alpha=\frac{-1}{2}$

Fíjate que hemos obtenido el parámetro $\alpha$ asociado al punto común $J$. Para calcular $J$ sustituye el parámetro en las ecuaciones cartesianas de "r"

$\begin{array}{c} x=-1+\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-3}{2} \\ y=1+2\left(\frac{-1}{2}\right)=0 \\ z=-\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2} \end{array} \rightarrow J(\frac{-3}{2},0,\frac{1}{2})$

De la recta pedida, conocemos $\overrightarrow{v_s}(0,1,2)$ y un punto $J(\frac{-3}{2},0,\frac{1}{2})$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$s \equiv \left\{\begin{array}{c} x=\frac{-3}{2} \\ y=0+\alpha \\ z=\frac{1}{2}+2\alpha \end{array}\right.$$

**Nota 26** *Otra manera de obtener un vector director de* $s$ *será calculando* $\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{v_r}$ *por ser* $s$ *perpendicular a la vez a* $\overrightarrow{w}$ *y a* $\overrightarrow{v_r}$

[16] $\overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{w}=0$

[17] $\overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{v_r}=0$

$$\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2j + 4k \rightarrow \overrightarrow{v_s} = (0,2,4)$$

**Ejercicio 27** *Plano que contiene* $A(1,0,-1)$ $B(3,0,2)$ *y es perpendicular a* $\pi' \equiv x - 2y + z + 1 = 0$

Supongamos que el plano $\pi$ buscado es $Ax + By + Cz + D = 0$
Por $A(1,0,-1) \in \pi \rightarrow A - C + D = 0$
Por $B(3,0,2) \in \pi \rightarrow 3A + 2C + D = 0$
Como $\pi$ es perpendicular a $\pi'$ entonces el vector $\overrightarrow{w}(A,B,C)$ es ortogonal a $\overrightarrow{w'}(1,-2,1)$ . Su producto escalar es nulo$\rightarrow$ $A - 2B + C = 0$

Resolviendo el sistema homogéneo $\begin{cases} A - C + D = 0 \\ 3A + 2C + D = 0 \\ A - 2B + C = 0 \end{cases}$ por el método de Gauss $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right)$ El sistema es C.I y las soluciones del sistema vendrán expresadas en función de $D$

En concreto son:
$C = \frac{2D}{5}$
$B = \frac{-D}{10}$ $\rightarrow$sustituyendo estos valores en la ecuación del plano, tendremos
$A = \frac{-3D}{5}$

$$\frac{-3D}{5}x + \frac{-D}{10}y + \frac{2D}{5}z + D = 0$$

Si asignamos a $D = 10 \rightarrow \boxed{\pi \equiv -6x - y + 4z + 10 = 0}$

**Nota 28** *Otra manera de resolverlo*

Por ser el plano $\pi$ perpendicular a $\pi' \equiv x - 2y + z + 1 = 0$ entonces el vector ortogonal a $\pi'$ ,$\overrightarrow{w} = (1,-2,1)$, puedo considerarlo como vector director de $\pi$

Como conocemos dos puntos $A(1,0,-1)$, $B(3,0,2)$ del plano ; entonces $\overrightarrow{AB}(2,0,3)$ es el otro vector director de $\pi$

$\pi \begin{cases} A(1,0,-1) \\ \overrightarrow{w} = (1,-2,1) \\ \overrightarrow{AB}(2,0,3) \end{cases}$ $\rightarrow$Sus ecuaciones paramétricas son $\pi \begin{cases} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha \\ z = -1 + \alpha + 3\beta \end{cases}$

Su ecuación cartesiana es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & -2 & 0 \\ z+1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -6(x-1) + 2y + 4(z+1) - 3y = 0 \rightarrow \boxed{-6x - y + 4z + 10 = 0}$$

**Ejercicio 29** *Plano que pasa por* $A(1,2,-1)$ *y es perpendicular a los planos* $\pi' \equiv 2x - y + z = 0$ *y* $\pi \equiv x - z = 2$

Si el plano es perpendicular a los planos $\pi' \equiv 2x - y + z = 0$ y $\pi \equiv x - z = 2$.También lo será con respecto a la recta $r = \pi' \cap \pi \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases}$

Los vectores ortogonales a cada plano son $\overrightarrow{\pi'} = (2,-1,1)$ y $\overrightarrow{\pi} = (1,0,-1)$
Por lo tanto; el vector director de la recta $r$ será:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_r} &= \overrightarrow{\pi'} \wedge \overrightarrow{\pi} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \\
\overrightarrow{v_r} &= (1,3,1)
\end{aligned}$$

Este será el vector ortogonal del plano pedido y como además sabemos que pasa por el punto $A(1,2,-1)$
entonces su ecuación es:

$$1(x-1) + 3(y-2) + 1(z+1) = 0 \to x + 3y + z = 6$$

*Otra manera de resolverlo:*
Supongamos que el plano $\pi''$ buscado es $Ax + By + Cz + D = 0$
Por $A(1,2,-1) \in \pi \to A + 2B - C + D = 0$
Como $\pi''$ es perpendicular a $\pi'$ entonces el vector $\overrightarrow{w}(A,B,C)$ es ortogonal a $\overrightarrow{w'}(2,-1,1)$ . Su producto escalar es nulo$\to 2A - 1B + C = 0$
Como $\pi''$ es perpendicular a $\pi$ entonces el vector $\overrightarrow{w}(A,B,C)$ es ortogonal a $\overrightarrow{w'}(1,0,-1)$ . Su producto escalar es nulo$\to A - C = 0$
Resolviendo el sistema homogéneo $\left\{\begin{array}{c} A + 2B - C + D = 0 \\ 2A - 1B + C = 0 \\ A - C = 0 \end{array}\right.$ por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} A + 2B - C + D = 0 \\ -5B + 3C - 2D = 0 \\ 6C + D = 0 \end{array}\right.$$

El sistema es C.I y las soluciones del sistema vendrán expresadas en función de $C$
En concreto son:
$D = -6C$
$B = 3C$ $\to$sustituyendo estos valores en la ecuación del plano, tendremos
$A = C$

$$Cx + 3Cy + Cz - 6C = 0$$

Si asignamos a $D = 1 \to \boxed{\pi'' \equiv x + 3y + z - 6 = 0}$

**Ejercicio 30** *Determina el plano que contenga a la recta* $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x - z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{array}\right.$ *y sea perpendicular a* $s \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$

La ecuación de todos los planos que son perpendiculares a $s\equiv\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-3}$son de la forma

$$\pi\equiv x+2y-3z=k$$

De todos, interesa sólo el que contenga a $r$. Si contiene a $r$, ha de contener a un punto de $r$ ([18] $A_r=(0,-1,-1)$)

Como $A_r\in\pi\rightarrow 0+2\cdot(-1)-3(-1)=k\rightarrow k=1$

El plano pedido es

$$\pi\equiv x+2y-3z=1$$

**Ejercicio 31** *Recta $s$ que pasa por $A(1,0,-1)$ y que corte perpendicularmente a $r\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$*

Dicha recta es la que pasa por $A$ y por $H$ (proyección ortogonal de $A$ sobre $r$)

Para calcular $H$ procederemos de la siguiente manera

$1^o$ Determinamos el plano perpendicular a $r$ y que pasa por $A$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a $r$ es de la forma

$$x+2y-z=K$$

De todos ellos nos interesa el que pase por $A$

$$1+2\cdot(0)-(-1)=K\rightarrow K=2$$

Dicho plano es $\pi\equiv x+2y-z=2$

$2^o$ $H$ es la intersección entre $r$ y $\pi$

$$r\cap\pi\left\{\begin{array}{c}x+2y-z=2\\ x=-1+\alpha\\ y=1+2\alpha\\ z=-\alpha\end{array}\right.\rightarrow -1+\alpha+2\left(1+2\alpha\right)-(-\alpha)=2\rightarrow\alpha=\frac{1}{6}$$

Fíjate que hemos obtenido el parámetro $\alpha$ asociado al punto común $H$. Para calcular $H$ sustituye el parámetro en las ecuaciones cartesianas de $r$

$$H\left\{\begin{array}{c}x=-1+\frac{1}{6}=\frac{-5}{6}\\ y=1+2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{8}{6}\\ z=-\frac{1}{6}\end{array}\right.\rightarrow H(\tfrac{-5}{6},\tfrac{8}{6},\tfrac{-1}{6})$$

La recta pedida $s\left\{\begin{array}{c}A(1,0,-1)\\ H(\frac{-5}{6},\frac{8}{6},\frac{-1}{6})\end{array}\right.\rightarrow s\left\{\begin{array}{c}A(1,0,-1)\\ \overrightarrow{AH}(\frac{-11}{6},\frac{8}{6},\frac{5}{6})\end{array}\right.\rightarrow s\left\{\begin{array}{c}A(1,0,-1)\\ 6\overrightarrow{AH}(-11,8,5)\end{array}\right.$

Las paramétricas de $s$ son pues $\left\{\begin{array}{c}x=+1-11\alpha\\ y=8\alpha\\ z=-1+5\alpha\end{array}\right.$

---

[18] $r\equiv\left\{\begin{array}{c}x-z=1\\ 2x-3y+z=2\end{array}\right.$

Si $x=0\rightarrow\left\{\begin{array}{c}-z=1\\ -3y+z=2\end{array}\right.\rightarrow y=-1,z=-1$

Un punto de $r$ es $A_r=(0,-1,-1)$

### 0.1.16 Proyección ortogonal de una recta $r$ sobre un plano $\pi$

Casos:

**I)** Si la recta $r$ dada es incidente ( no perpendicularmente) con el plano $\pi$ en un punto $J$ ($\overrightarrow{v_r}$ no es paralelo al vector ortogonal a $\pi$ $\overrightarrow{w_\pi}$ ). Entonces; la proyección ortogonal de $r$ sobre el plano $\pi$ será una recta $r'$.
Esta recta $r'$ pasa por $J$ y un vector director de ésta es $\overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{w_\pi} \wedge (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{w_\pi})$ donde $\overrightarrow{v_r}$ es el vector director de $r$ y $\overrightarrow{w_\pi}$ es el vector ortogonal al plano$\rightarrow$
$r' \equiv \begin{cases} J = r \cap \pi \\ \overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{w_\pi} \wedge (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{w_\pi}) \text{ vector director} \end{cases}$
*Otra manera de determinar* $r'$ : $r' = \pi \cap \pi'$ donde $\pi'$ es el plano que contiene a $r$ y es perpendicular al plano $\pi$

**II)** Si la recta incide con el plano en un punto $P$ perpendicularmente (esto ocurrirá cuando el vector director de la recta $r$ y el vector ortogonal ,$\overrightarrow{w_\pi}$ ,al plano $\pi$ sean paralelos). Entonces; la proyección ortogonal de la recta $r$ sobre el plano $\pi$ será $P = r \cap \pi$.

**III)** Si la recta , $r$,está contenida en el plano $\pi$.Entonces; la proyección ortogonal de la recta $r$ sobre el plano $\pi$ será la propia recta $r$

**IV)** Si la recta , $r$,es paralela al plano $\pi$pero no está contenida en él . Entonces; la proyección ortogonal de la recta $r$ sobre el plano $\pi$ será la recta $r' = \pi \cap \pi$ donde $\pi'$ es el plano que contiene a $r$ y es perpendicular al plano $\pi$

**Ejercicio 32** *Determina la proyección ortogonal de* $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -2 + 3\alpha \\ z = 3 \end{cases}$ *sobre el plano* $\pi \equiv x - y + 2z + 4 = 0$

Solución:
*Primer procedimiento*
Determinemos primero la posición relativa de $r$ y $\pi$
Calculamos primero $J = r \cap \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -2 + 3\alpha \\ z = 3 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow 1 + \alpha - (-2 + 3\alpha) + 6 + 4 = 0$
Como $\alpha = \frac{13}{2} \rightarrow J = \left(1 + \frac{13}{2}, -2 + \frac{39}{2}, 3\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{35}{2}, 3\right)$
La recta $r$ es incidente con el plano $\pi$ en el punto $J$
Ahora bien, ¿lo hace perpendicularmente?
Fíjate que $\overrightarrow{v_r} = (1, 3, 0)$ y $\overrightarrow{w_\pi} = (1, -1, 2)$. Como $\overrightarrow{v_r}$ no es paralelo al vector ortogonal a $\pi$ $\overrightarrow{w_\pi}$ es evidente que la recta $r$ es incidente con el plano; pero no perpendicularmente,

Por lo tanto, la proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$ será la recta $r'$ definida por el punto $J$ y su vector director será $\overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{w_\pi} \wedge (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{w_\pi})$

Ahora, calculamos $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{w_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$

Y a continuación $\overrightarrow{v_{r'}}$

$\overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{w_\pi} \wedge (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{w_\pi}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 8i + 16j + 4k$

$r' \equiv \begin{cases} J = r \cap \pi = \left(\frac{15}{2}, \frac{35}{2}, 3\right) \\ \overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{w_\pi} \wedge (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{w_\pi}) = (8, 16, 4) \text{ vector director} \end{cases}$

$r' \equiv \begin{cases} x = \frac{15}{2} + 8\alpha \\ y = \frac{35}{2} + 16\alpha \quad \text{Ecs paramétricas.} \\ z = 3 + 4\alpha \end{cases}$

$r' \equiv \dfrac{x - \frac{15}{2}}{8} = \dfrac{y - \frac{35}{2}}{16} = \dfrac{z-3}{4}$

o $r' \equiv \dfrac{x - \frac{15}{2}}{2} = \dfrac{y - \frac{35}{2}}{4} = \dfrac{z-3}{1}$ Ec continua

$r' \equiv \begin{cases} \dfrac{x - \frac{15}{2}}{2} = \dfrac{y - \frac{35}{2}}{4} \\ \dfrac{x - \frac{15}{2}}{2} = \dfrac{z-3}{1} \end{cases} \rightarrow r' \equiv \begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ 2x - 4z = 3 \end{cases}$

*Segundo procedimiento*

$r' = \pi \cap \pi'$ donde $\pi$ es el plano dado y $\pi'$ es el plano que contiene a $r$ y es perpendicular al plano $\pi$

Calculemos pues; $\pi'$ el plano que contiene a $r$ y es perpendicular al plano $\pi$

Fíjate que el vector ortogonal al plano $\pi(\overrightarrow{w_\pi})$,puedo considerarlo como vector director del plano $\pi'$ (al ser $\pi' \perp \pi$)

$\pi' \equiv \begin{cases} A_r = (1, -2, 3) \\ \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1, 3, 0) \\ \overrightarrow{w_\pi} = (1, -1, 2) \end{array}\right\} \text{vectores directores de } \pi' \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & 3 & -1 \\ z-3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\pi' \equiv 6x + 2 - 2y - 4z = 0 \rightarrow \pi' \equiv 3x - y - 2z = -1$

Como $r' = \pi \cap \pi' \equiv \begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - y - 2z = -1 \end{cases}$

*Nota: Hemos calculado la misma recta de dos formas diferentes*

Determina pues; si son o no misma recta estudiando su posición relativa:

Para ello; tendrás que estudiar el sistema siguiente:

$$l \cap l' \equiv \begin{cases} l \equiv \begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ 2x - 4z = 3 \end{cases} \\ l' \equiv \begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - y - 2z = -1 \end{cases} \end{cases}$$

donde $T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes y $T^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz ampliada

Has de comprobar que el $RangoT = RangoT* = 2$

**Ejercicio 33** *Determina la proyección ortogonal de* $r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -2-\alpha \\ z = 3 \end{cases}$ *sobre el plano* $\pi \equiv x - y + 4 = 0$

Solución:

Determinemos primero la posición relativa de $r$ y $\pi$

Calculamos primero $J = r \cap \pi \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -2-\alpha \\ z = 3 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow 1+\alpha-(-2-\alpha)+4 = 0$

Como $\alpha = -\frac{7}{2} \rightarrow J = \left(1 - \frac{7}{2}, -2 + \frac{7}{2}, 3\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$

La recta $r$ es incidente con el plano $\pi$ en el punto $J$

Ahora bien, ¿lo hace perpendicularmente?

Fíjate que $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{w_\pi} = (1, -1, 0)$. Como $\overrightarrow{v_r}$ es paralelo al vector ortogonal a $\pi$ $\overrightarrow{w_\pi}$ es evidente que la recta $r$ es incidente con el plano, pero perpendicularmente,

Por lo tanto, la proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$ será el punto $J = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$

**Ejercicio 34** *Determina las ecuaciones de la recta $r'$ proyección ortogonal de* $r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -2+3\alpha \\ z = 3+\alpha \end{cases}$ *sobre el plano* $\pi \equiv x - y + 2z + 4 = 0$

Solución:

Determinemos primero la posición relativa de $r$ y $\pi$

Calculamos primero $J = r \cap \pi \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -2+3\alpha \\ z = 3+\alpha \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow 1+\alpha-(-2+3\alpha)+ 6 + 2\alpha + 4 = 0$

Como $0\alpha = -13$ →La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y no está contenida en él.

Por lo tanto, la proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$ es la recta $r'$

$r' = \pi \cap \pi'$ donde $\pi$ es el plano dado y $\pi'$ es el plano que contiene a $r$ y es perpendicular al plano $\pi$

Calculemos pues; $\pi'$ el plano que contiene a $r$ y es perpendicular al plano $\pi$

Fíjate que el vector ortogonal al plano $\pi(\overrightarrow{w_\pi})$,puedo considerarlo como vector director del plano $\pi'$ (al ser $\pi' \perp \pi$)

$\pi' \equiv \begin{cases} A_r = (1, -2, 3) \\ \left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (1, 3, 1) \\ \overrightarrow{w_\pi} = (1, -1, 2) \end{matrix}\right\} \text{vectores directores de } \pi' \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & 3 & -1 \\ z-3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\pi' \equiv 7x - y - 4z = -3$

Como $r' = \pi \cap \pi' \to r' \equiv \begin{cases} 7x - y - 4z = -3 \\ 3x - y - 2z = -1 \end{cases}$

**Ejercicio 35** *Determina las ecuaciones de la recta $r'$ proyección ortogonal de* $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -2 + 3\alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$ *sobre el plano* $\pi \equiv x - y + 2z - 9 = 0$

Solución:

Determinemos primero la posición relativa de $r$ y $\pi$

Calculamos primero $J = r \cap \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -2 + 3\alpha \\ z = 3 + \alpha \\ x - y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \to 1 + \alpha - (-2 + 3\alpha) + 6 + 2\alpha - 9 = 0$

Como $0\alpha = 0 \to$La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ y está contenida en él.

Por lo tanto, la proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$ es la propia recta $r$

### 0.1.17 *Recta perpendicular común a dos rectas $r$ y $s$ dadas y que además pase por un punto $P$*

Casos

- I Si $\left\{ \begin{array}{l} r \text{ y } s \text{ son paralelas y distintas} \\ P \notin \text{ plano definido por } r \text{ y } s \end{array} \right\}$

En esta situación hay infinitas rectas que son perpendiculares a la vez a $r$ y $s$ y que además pasan por $P$

En concreto; son **todas aquellas rectas que pasan por $P$ y además están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por** $P$.

Sin embargo, no existe ninguna recta que las corte perpendicularmente a las dos y que además pase por $P$

- II) Si $\left\{ \begin{array}{l} r \text{ y } s \text{ son paralelas y distintas} \\ P \in \text{ plano definido por } r \text{ y } s \end{array} \right\}$

En esta situación. hay infinitas rectas que son perpendiculares a la vez a $r$ y $s$ y que además pasan por $P$

En concreto; son **todas aquellas rectas que pasan por $P$ y además están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por** $P$.

Sin embargo, existe una única recta, $t$ ,que las corta perpendicularmente a las dos y que además pasa por $P$.Dicha recta viene definida como intersección de los siguientes planos $\pi$ (plano que contiene a $r$ y $s$) y $\pi_1$(Plano perpendicular a $r$ y que pasa por $P$)

Nota: Observa que $t$ es la recta que pasa por $P$ y por el punto , $J$, proyección ortogonal de $P$ sobre $r$

A dicha recta $t$ se le denomina **recta que corta perpendicularmente a $r$ y $s$ y además pasa por $P$**

- III) Si $r = s$

En esta situación hay infinitas rectas que sean perpendiculares a la vez a $r$ y $s$ y que además pasen por $P$

En concreto; son **todas aquellas rectas que pasan por $P$ y además están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por** $P$(Da lo mismo que el punto $P$ pertenezca o no a la recta $r$)

Sin embargo si $P \notin r$, existe una única recta $t$ que las corta perpendicularmente a las dos y que además pasa por $P$. Dicha recta , $t$, viene definida como intersección del plano $\pi_1$(Plano perpendicular a $r$ y que pasa por $P$) y el plano $\pi_2$ que contiene a $r$ y pasa por $P$

A dicha recta $t$ se le denomina **recta que corta perpendicularmente a $r$ y además pasa por $P$**

Nota: Observa que $t$ es la recta que pasa por $P$ y por el punto , $J$, proyección ortogonal de $P$ sobre $r$

- IV) Si $r$ y $s$ son secantes

Subcasos

a) Que $P$ pertenezca a la recta $t$ que corta perpendicularmente a $r$ y $s \rightarrow (t \equiv \begin{cases} P \\ \overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \end{cases}$

La recta pedida es, $t$ ,**recta que corta perpendicularmente a** $r$ **y** $s$ (también denominada recta perpendicular común a $r$ y a $s$)

*Otros procedimientos para determinar $t$*

*1r procedimiento:*

Podemos calcular el punto en común entre las rectas $H = r \cap s$

$t \equiv \begin{cases} H = r \cap s \\ \overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \end{cases}$

*2º Procedimiento*

La recta pedida es $t = \pi' \cap \pi''$ siendo $\pi'$ [19]plano que contiene a $r$ y contiene a $t$ y $\pi''$[20] plano que contiene a $s$ y contiene a $t$

Fíjate que $\pi' \equiv \begin{cases} A_r \\ \overrightarrow{v_r} \text{ (un vector director)} \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \text{(el otro vector director)} \end{cases}$ y que $\pi'' \equiv \begin{cases} A_s \\ \overrightarrow{v_s} \text{ (un vector director)} \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \text{(el otro vector director)} \end{cases}$

- – b) Que el punto $P$ no pertenezca a la recta $t$ que corta perpendicularmente a $r$ y $s \rightarrow \left( t \equiv \begin{cases} H = r \cap s \\ \overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \end{cases} \right)$

  La recta pedida ,$h$, es paralela a $t$ y además pasa por $P \rightarrow \left( h \equiv \begin{cases} P \\ \overrightarrow{v_h} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \end{cases} \right)$

V) Si $r$ y $s$ son rectas que se cruzan

Subcasos

a) Que el punto $P$ pertenezca a la recta $t$ que corta perpendicularmente a $r$ y $s$ (también denominada **recta perpendicular común a** $r$ **y a** $s$)

En este caso, la recta $t \rightarrow t \equiv \begin{cases} P \\ \overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \end{cases}$

Otros procedimientos para calcular $t$

*1r procedimiento*

La recta pedida es $t = \pi' \cap \pi''$ siendo $\pi'$ [21]plano que contiene a $r$ y contiene a $t$ y $\pi''$[22] plano que contiene a $s$ y contiene a $r$

Fíjate que $\pi' \equiv \begin{cases} A_r \\ \overrightarrow{v_r} \text{ (un vector director)} \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \text{(el otro vector director)} \end{cases}$ y que $\pi'' \equiv \begin{cases} A_s \\ \overrightarrow{v_s} \text{ (un vector director)} \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \text{(el otro vector director)} \end{cases}$

*2º Procedimiento*

[19] $\pi'$ es el plano que contiene a $r$ y es paralelo al vector $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$

[20] $\pi''$ es el plano que contiene a $s$ y es paralelo al vector $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$

[21] $\pi'$ es el plano que contiene a $r$ y es paralelo al vector $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$

[22] $\pi''$ es el plano que contiene a $s$ y es paralelo al vector $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$

La recta , $t$, perpendicular común a $r$ i a $s$; también se puede determinar a partir de dos puntos $B$ y $T$ tales que $B$ sea de $r$, $T$ sea de $s$ y el vector que los une $\overrightarrow{BT}$ sea perpendicular a $r$ y a $t$. $\rightarrow t \equiv \begin{cases} B \in r \\ T \in s \\ \overrightarrow{BT} \perp \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{BT} \perp \overrightarrow{v_s} \end{cases}$

- – b) Que el punto $P$ no pertenezca a la recta $t$ que corta perpendicularmente a $r$ y $s$

La recta pedida, $h$ ,es paralela a $t$ y además pasa por $P \rightarrow \left( h \equiv \begin{cases} P \\ \overrightarrow{v_h} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \end{cases} \right)$

**Ejercicio 36** *Dadas las rectas* $r \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{cases}$ *y* $s \begin{cases} x = -1 - \beta \\ y = 1 + 2\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}$ *determina las ecuaciones paramétricas de una recta que sea perpendicular a las dos y pase por* $P(-3, 5, 6)$

El vector director de la recta que nos piden ha de ser

$$\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} = (-5, -1, -3)$$

Como la recta pedida ha de pasar por $P(-3, 5, 6)$; entonces sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -3 - 5\alpha \\ y = 5 - \alpha \\ z = 6 - 3\alpha \end{cases}$$

**Ejercicio 37** *Dadas las rectas* $r \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{cases}$ *y* $s \begin{cases} x = -1 - \beta \\ y = 1 + 2\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}$

a) Determina $r \cap s$ (te ha de salir el punto $(-1, 1, 1)$)
b) Determina las ecuaciones paramétricas de una recta que sea perpendicular a las dos y pase por el punto común de ambas

### 0.1.18 Recta perpendicular común a dos rectas $r$ y $s$

Si lees con detenimiento la pregunta anterior observarás que solamente cuando $r$ y $s$ sean rectas secantes o rectas que se crucen ; existe una única recta , $t$ ,perpendicular común a las dos.

I) Si $r$ y $s$ son secantes en un punto $H$

– $*$ $t \equiv \begin{cases} H = r \cap s \\ \overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \text{ vector director de } t \end{cases}$

*Otra manera de calcular t:* $t = \pi' \cap \pi''$ *siendo* $\pi'$ [23]*plano que contiene a r y contiene a t y* $\pi''$[24] *plano que contiene a s y contiene a t*

*Fíjate que* $\pi' \equiv \begin{cases} A_r \\ \overrightarrow{v_r} \text{ (un vector director)} \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \text{(el otro vector director)} \end{cases}$ *y que* $\pi'' \equiv \begin{cases} A_s \\ \overrightarrow{v_s} \text{ (un vector director)} \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \text{(el otro vector director)} \end{cases}$

II) Si $r$ y $s$ son rectas que se cruzan en el espacio

*La recta pedida es* $t = \pi' \cap \pi''$ *siendo* $\pi'$ [25]*plano que contiene a r y contiene a t y* $\pi''$[26] *plano que contiene a s y contiene a t*

*Fíjate que* $\pi' \equiv \begin{cases} A_r \\ \overrightarrow{v_r} \text{ (un vector director)} \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \text{(el otro vector director)} \end{cases}$ *y que* $\pi'' \equiv \begin{cases} A_s \\ \overrightarrow{v_s} \text{ (un vector director)} \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} \text{(el otro vector director)} \end{cases}$

*Nota: La recta , t, perpendicular común a r i a s; (cuando r y s sean rectas que se cruzan en el espacio) también se puede determinar a partir de dos puntos B y T tales que B sea de r, T sea de s y el vector que los une* $\overrightarrow{BT}$ *sea perpendicular a r y a s.* $\rightarrow t \equiv \begin{cases} B \in r \\ T \in s \\ \overrightarrow{BT} \perp \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{BT} \perp \overrightarrow{v_s} \end{cases}$

**Ejercicio 38** *Dadas las rectas* $r \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{cases}$ *y* $s \begin{cases} x = -1 - \beta \\ y = 1 + 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$ *demuestra que son rectas que se cruzan. Calcula la ecuación de la recta perpendicular común a ambas; determinando también la distancia entre ellas*

$r \begin{cases} A_r(1, 0, -2) \\ \overrightarrow{v_r}(-2, 1, 3) \end{cases}$ $s \begin{cases} A_s(-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{v_s}(-1, 2, 1) \end{cases}$ [27]Es evidente que el $Rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 2$ (no son paralelos)

y como el $Rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = Rango \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$[28]$= 3$ entonces las rectas $r$ y se cruzan (no son paralelas y están contenidas en planos paralelos distintos)

Para determinar la perpendicular común a ambas tendré que determinar un punto $B$ de $r$ y un punto $T$ de $s$ tal que el vector $\overrightarrow{BT}$ sea perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y a $\overrightarrow{v_s}$ a la vez

[23] $\pi'$ es el plano que contiene a $r$ y es paralelo al vector $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$
[24] $\pi''$ es el plano que contiene a $s$ y es paralelo al vector $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$
[25] $\pi'$ es el plano que contiene a $r$ y es paralelo al vector $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$
[26] $\pi''$ es el plano que contiene a $s$ y es paralelo al vector $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$
[27] $\overrightarrow{A_rA_s} = (-2, 1, 2)$
[28] $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 3 + 12 + 2 + 2 = 3$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Por ser } B\in r \rightarrow B(1-2\alpha,\alpha,-2+3\alpha)\\ \text{Por ser } T\in s \rightarrow T(-1-\beta,1+2\beta,\beta)\end{array}\right\}\overrightarrow{BT}(-2-\beta+2\alpha,1+2\beta-\alpha,2+\beta-3\alpha)$$

$$Como\overrightarrow{BT}\perp\overrightarrow{v_r}\text{[29]}\rightarrow -2(-2-\beta+2\alpha)+(1+2\beta-\alpha)+3(2+\beta-3\alpha)=0$$
$$Como\overrightarrow{BT}\perp\overrightarrow{v_s}\text{[30]}\rightarrow -(-2-\beta+2\alpha)+2(1+2\beta-\alpha)+1(2+\beta-3\alpha)=0$$

De ambas condiciones, obtenemos el sistema $\left.\begin{array}{r}-14\alpha+7\beta=-11\\ -7\alpha+6\beta=-6\end{array}\right\}$cuyas soluciones son

$$\alpha=\tfrac{24}{35}\ ,\ \beta=\tfrac{-1}{5}$$

Sustituyendo el parámetro $\alpha$ en las ecuaciones paramétricas de $r$ tendremos el punto $B$

$$\left.\begin{array}{r}x=1-2\left(\frac{24}{35}\right)=\frac{-13}{35}\\ y=\frac{24}{35}\\ z=-2+3\left(\frac{24}{35}\right)=\frac{2}{35}\end{array}\right.\rightarrow B(\tfrac{-13}{35},\tfrac{24}{35},\tfrac{2}{35})$$

Sustituyendo el parámetro $\beta$ en las ecuaciones paramétricas de $s$ tendremos el punto $T$

$$\left.\begin{array}{r}x=-1-\left(\frac{-1}{5}\right)\\ y=1+2\left(\frac{-1}{5}\right)\\ z=\frac{-1}{5}\end{array}\right.\rightarrow T(\tfrac{-4}{5},\tfrac{3}{5},\tfrac{-1}{5})$$

La perpendicular común a $r$ y a $s$ es la recta $t\left\{\begin{array}{c}B(\frac{-13}{35},\frac{24}{35},\frac{2}{35})\\ T(\frac{-4}{5},\frac{3}{5},\frac{-1}{5})\end{array}\right.$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{c}B(\frac{-13}{35},\frac{24}{35},\frac{2}{35})\\ \overrightarrow{TB}(\frac{-13}{35}+\frac{28}{35},\frac{24}{35}-\frac{21}{35},\frac{2}{35}+\frac{7}{35})\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{c}B(\frac{-13}{35},\frac{24}{35},\frac{2}{35})\\ \overrightarrow{TB}(\frac{15}{35},\frac{3}{35},\frac{9}{35})\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{c}B(\frac{-13}{35},\frac{24}{35},\frac{2}{35})\\ \frac{35}{3}\cdot\overrightarrow{TB}(5,1,3)\end{array}\right.$$

Por lo tanto, sus ecuaciones paramétricas son.

$$t\equiv\left\{\begin{array}{r}x=\frac{-13}{35}+5\alpha\\ y=\frac{24}{35}+\alpha\\ z=\frac{2}{35}+3\alpha\end{array}\right.\quad Ecs.\ Paramétricas$$

$$t\equiv\frac{x+\dfrac{13}{35}}{5}=\frac{y-\dfrac{24}{35}}{1}=\frac{z-\dfrac{2}{35}}{3}\,Ec\ Continua$$

$$t\equiv\left\{\begin{array}{l}x-5y=-\dfrac{133}{35}\\ 3x-5z=-\dfrac{49}{35}\end{array}\right.\quad Ecs.\ Cartesianas$$

Si nos piden la distancia entre $r$ y $s$

$$d(r,s)=d(B,T)=\left\|\overrightarrow{TB}\right\|=\sqrt{\left(\tfrac{15}{35}\right)^2+\left(\tfrac{3}{35}\right)^2+\left(\tfrac{9}{35}\right)^2}=\tfrac{\sqrt{315}}{35}$$

<u>*Otra forma de obtener la recta t*</u>

[29] $\overrightarrow{BT}\cdot\overrightarrow{v_r}=0$

[30] $\overrightarrow{BT}\cdot\overrightarrow{v_s}=0$

La recta $t$ perpendicular común a $r$ y a $s$ viene definida como intersección de los planos $\pi$ y $\pi'$

Donde $\left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ es el plano que contiene a } r \text{ y también a } t \\ \pi' \text{ es el plano que contiene a } s \text{ y también a } t \end{array} \right.$

Determinemos $\pi$ y $\pi'$en el ejercicio anterior

- Como $\pi$ es el plano que contiene a $r$ y también a $t$; entonces un punto de $\pi$ será el punto conocido de $r$, $A_r$, y sus vectores directores serán $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$

$$\pi \left\{ \begin{array}{c} A_r(1,0,-2) \\ \overrightarrow{v_r}(-2,1,3) \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} = (-5,-1,-3) \end{array} \right.$$

Las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$ son $\left\{ \begin{array}{c} x = 1 - 2\alpha - 5\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = -2 + 3\alpha - 3\beta \end{array} \right.$

Las ecuaciones cartesianas de $\pi$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -5 \\ y & 1 & -1 \\ z+2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \boxed{-3y + z = -2}$$

- Como $\pi'$ es el plano que contiene a $s$ y y también a $t$; entonces un punto de $\pi'$ será el punto conocido de $s$, $A_s$, y sus vectores directores serán $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$

$$\pi' \left\{ \begin{array}{c} A_s(-1,1,0) \\ \overrightarrow{v_s}(-1,2,1) \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} = (-5,-1,-3) \end{array} \right.$$

Las ecuaciones paramétricas del plano $\pi'$ son $\left\{ \begin{array}{c} x = -1 - \alpha - 5\beta \\ y = 1 + 2\alpha - \beta \\ z = \alpha - 3\beta \end{array} \right.$

Las ecuaciones cartesianas de $\pi'$

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & -5 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{\pi \equiv 5x + 8y - 11z = 3}$$

La recta pedida es $\boxed{t \equiv \left\{ \begin{array}{c} -3y + z = -2 \\ 5x + 8y - 11z = 3 \end{array} \right.}$

*Nota: Hemos calculado la misma recta de dos formas diferentes*

Determina pues; si son o no misma recta estudiando su posición relativa:

Para ello tendrás que estudiar el sistema siguiente:

$$l \cap l' \equiv \left\{ \begin{array}{l} l \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - 5y = -\dfrac{133}{35} \\ 3x - 5z = -\dfrac{49}{35} \end{array} \right. \\ l' \equiv \left\{ \begin{array}{l} -3y + z = -2 \\ 5x + 8y - 11z = 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

donde $T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -11 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes y $T^* = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & -\dfrac{133}{35} \\ 3 & 0 & -5 & -\dfrac{49}{35} \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & -11 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz ampliada

Has de comprobar que el $RangoT = RangoT^* = 2$

**Ejercicio 39** *Dadas las rectas* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{array} \right.$ *y* $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z = 1 \\ x + y + 4z = 2 \end{array} \right.$

a) Demostrad que $r$ y $s$ son rectas que se cruzan

Necesitamos de cada recta un punto y su vector director

Resolviendo el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{array} \right.$ tendremos las ecuaciones paramétricas de $r$

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -2\alpha + 3 \\ y = -2\alpha + 1 \\ z = \alpha \end{array} \right. \to r \equiv \left\{ \begin{array}{l} A_r = (3, 1, 0) \\ \overrightarrow{v_r} = (-2, -2, 1) \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z = 1 \\ x + y + 4z = 2 \end{array} \right.$ tendremos las ecuaciones paramétricas de $s$

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -5\alpha + \frac{3}{4} \\ y = -11\alpha + \frac{5}{4} \\ z = 4\alpha \end{array} \right. \to s \equiv \left\{ \begin{array}{l} A_s = (\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}, 0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-5, -11, 4) \end{array} \right.$$

Como $\overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{v_s} \Leftrightarrow Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 2 \Leftrightarrow r$ y $s$ no son paralelas

Calculemos ahora $\overrightarrow{A_rA_s} = (\dfrac{3}{4} - 3, \dfrac{5}{4} - 1, 0) = (\dfrac{-9}{4}, \dfrac{1}{4}, 0)$

$$\det(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & -11 & 4 \\ \dfrac{-9}{4} & \dfrac{1}{4} & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Leftrightarrow Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = 3$$

Como $\left. \begin{array}{r} Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 2 \\ Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow r$ y $s$ son rectas que se cruzan

b) Determina la recta perpendicular a ambas

La recta perpendicular común a las dos es la que pasa por $B$ y por $J$

Estos puntos han de verificar:

$B$ un punto de la recta $r$ $(B(3-2\alpha,1-2\alpha,\alpha))$, $J$ un punto de la recta $s$ $\left(J(\frac{3}{4}-5\beta,\frac{5}{4}-11\beta,4\beta)\right)$; de tal manera que el vector $\overrightarrow{BJ}$ sea perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y a $\overrightarrow{v_s}$

$\overrightarrow{BJ}=(\frac{3}{4}-5\beta-3+2\alpha,\frac{5}{4}-11\beta-1+2\alpha,4\beta-\alpha)$

$\overrightarrow{BJ}=\left(-\frac{9}{4}-5\beta+2\alpha,\frac{1}{4}-11\beta+2\alpha,4\beta-\alpha\right)$

Como $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\\ \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{v_s}=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}-2\left(-\frac{9}{4}-5\beta+2\alpha\right)-2\left(\frac{1}{4}-11\beta+2\alpha\right)+4\beta-\alpha=0\\ -5\left(-\frac{9}{4}-5\beta+2\alpha\right)-11\left(\frac{1}{4}-11\beta+2\alpha\right)+16\beta-4\alpha=0\end{array}\right\}$

Resolviendo este sistema, tendremos que $\alpha=\frac{19}{9}$ i $\beta=\frac{5}{12}$
por lo tanto

$$t\equiv\left\{\begin{array}{l}B(3-\frac{38}{9},1-\frac{38}{9},\frac{19}{9})\\ J(\frac{3}{4}-\frac{25}{12},\frac{5}{4}-\frac{55}{12},\frac{20}{12})\end{array}\right.\rightarrow t\equiv\left\{\begin{array}{l}B(-\frac{11}{9},-\frac{29}{9},\frac{19}{9})\\ J(-\frac{16}{12},-\frac{40}{12},\frac{20}{12})\end{array}\right.$$

$$t\equiv\left\{\begin{array}{l}B(-\frac{11}{9},-\frac{29}{9},\frac{19}{9})\\ -9\overrightarrow{BJ}=-9\left(-\frac{16}{12}+\frac{11}{9},-\frac{40}{12}+\frac{29}{9},\frac{20}{12}-\frac{19}{9}\right)=(1,1,4)\end{array}\right. :$$

$$t\equiv\left\{\begin{array}{l}x=-\frac{11}{9}+\alpha\\ y=-\frac{29}{9}+\alpha \quad \textit{Ecs paramétricas}\\ z=\frac{19}{9}+4\alpha\end{array}\right.$$

$$t\equiv\frac{x+\frac{11}{9}}{1}=\frac{y+\frac{29}{9}}{1}=\frac{z-\frac{19}{9}}{4}\ \textit{Ec. continua}$$

$$t\equiv\left\{\begin{array}{l}\frac{x+\frac{11}{9}}{1}=\frac{y+\frac{29}{9}}{1}\\ \frac{x+\frac{11}{9}}{1}=\frac{z-\frac{19}{9}}{4}\end{array}\right.\rightarrow t\equiv\left\{\begin{array}{l}x-y=2\\ 4x-z=-7\end{array}\right. \textit{Ecs. cartesiana}$$

*Otra forma de obtener la recta $t$*

La recta $t$ perpendicular común a $r$ y a $s$ viene definida como intersección de los planos $\pi$ y $\pi'$

Donde $\left\{\begin{array}{l}\pi \text{ es el plano que contiene a } r \text{ y también a } t\\ \pi' \text{ es el plano que contiene a } s \text{ y también a } t\end{array}\right.$

Determinemos los planos $\pi$ y $\pi'$

- Como $\pi$ es el plano que contiene a $r$ y también a $t$; entonces un punto de $\pi$ será el punto conocido de $r$, $A_r$, y sus vectores directores serán $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}$

$$\pi \equiv \begin{cases} A_r(3,1,0) \\ \overrightarrow{v_r}(-2,-2,1) \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ -5 & -11 & 4 \end{vmatrix} = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 12\overrightarrow{k} = (3,3,12) \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$ son $\begin{cases} x = 3 - 2\alpha + 3\beta \\ y = 1 - 2\alpha + 3\beta \\ z = \alpha + 12\beta \end{cases}$

Las ecuaciones cartesianas de $\pi$

$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 3 \\ y-1 & -2 & 3 \\ z & 1 & 12 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_1 \equiv -27x + 27y = -54 \rightarrow \pi_1 \equiv -x + y = -2$$

- Como $\pi'$ es el plano que contiene a $s$ y y también a $t$; entonces un punto de $\pi'$ será el punto conocido de $s$, $A_s$, y sus vectores directores serán $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$

$$\pi' \begin{cases} A_s = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-5,-11,4) \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ -5 & -11 & 4 \end{vmatrix} = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 12\overrightarrow{k} = (3,3,12) \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$ son $\begin{cases} x = \frac{3}{4} - 5\alpha + 3\beta \\ y = \frac{5}{4} - 11\alpha + 3\beta \\ z = 4\alpha - 12\beta \end{cases}$

Las ecuaciones cartesianas de $\pi$

$$\begin{vmatrix} x - \frac{3}{4} & -5 & 3 \\ y - \frac{5}{4} & -11 & 3 \\ z & 4 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

$\pi' \equiv -144x + 18 + 72y + 18z = 0 \rightarrow \pi' \equiv -8x + 4y + z = -1$

Por lo tanto; las ecuaciones cartesianas de $t \equiv \begin{cases} -x + y = -2 \\ -8x + 4y + z = -1 \end{cases}$

La recta pedida es $\boxed{t \equiv \begin{cases} -x + y = -2 \\ -8x + 4y + z = -1 \end{cases}}$

*Nota: Hemos calculado la misma recta de dos formas diferentes*

Determina pues; si son o no misma recta estudiando su posición relativa:

Para ello tendrás que estudiar el sistema siguiente:

$$l \cap l' \equiv \begin{cases} \begin{cases} x - y = 2 \\ 4x - z = -7 \end{cases} \\ l' \equiv \begin{cases} -x + y = -2 \\ -8x + 4y + z = -1 \end{cases} \end{cases}$$

## 0.2 Ángulos entre rectas, planos y, recta y plano

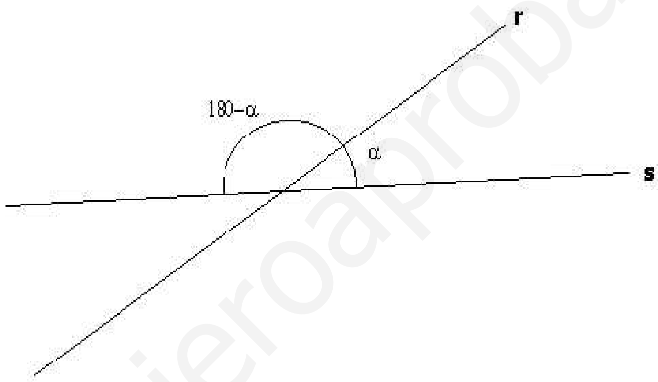
### 0.2.1 Ángulo entre dos rectas

Para definir el ángulo entre dos rectas tenndremos que distinguir las tres posibles situaciones geométricas que se pueden presentar

1) Que ambas rectas $r$ y $s$ sean paralelas (coincidentes y distintas). en esta situación definimos

$$ang(r,s) = 0^o$$

2) Que las rectas $r$ y $s$ sean secantes en un punto. Se define el **ángulo entre ambas rectas** como **el menor de los ángulos que determinan** ambas rectas




$$ang(r,s) = \alpha \text{ siendo } 0^o \leq \alpha \leq 90^o$$

Para calcular el ángulo entre dos rectas secantes, puede ocurrir que consideremos sus vectores directores de la siguiente manera (Mirar las figuras de los casos a) y b) de la página siguiente)

- Caso a) Si el ángulo entre $r$ y $s$ coincide con el ángulo entre $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{v_s}\|}$$

Caso b) Si el ángulo entre $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ es suplementario del ángulo entre las rectas; entonces:

$$\cos(180-\alpha) = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{v_s}\|} = -\cos\alpha$$

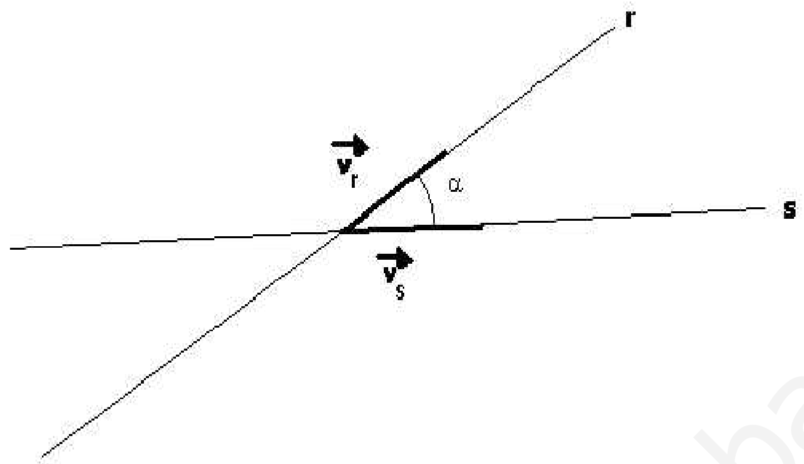
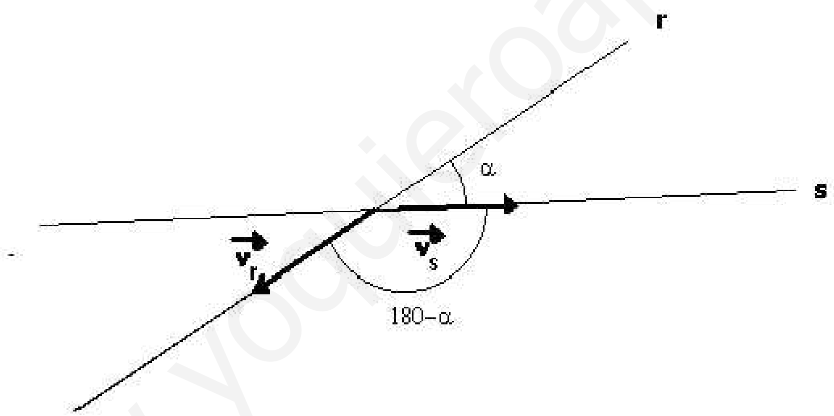



Figure 9: Caso a)




Caso b)

Por lo tanto, independientemente de la elección de los vectores directores de ambas rectas la fórmula a utilizar para calcular el ángulo[31] entre $r$ y $s$ cuando éstas sean secantes es:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\|\,\|\overrightarrow{v_s}\|}$$

[31] Recuerda que $ang(r,s) = \alpha$ siendo $0^o \leq \alpha \leq 90^o$ y por lo tanto $0 \leq \cos\alpha \leq 1$

- 3) Que las rectas $r$ y $s$ se crucen. En esta situación se define el ángulo entre dos rectas de la siguiente manera:

$$ang(r,s) = \begin{cases} ang(r,s') \\ \text{ó} \\ ang(r',s) \end{cases}$$

siendo $r'$ la proyeccion ortogonal de $r$ sobre el plano $\pi'$ (plano que contiene a $s$ y es paralelo a $r$) y $s'$ la proyeccion ortogonal de $s$ sobre el plano $\pi$ (plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$)

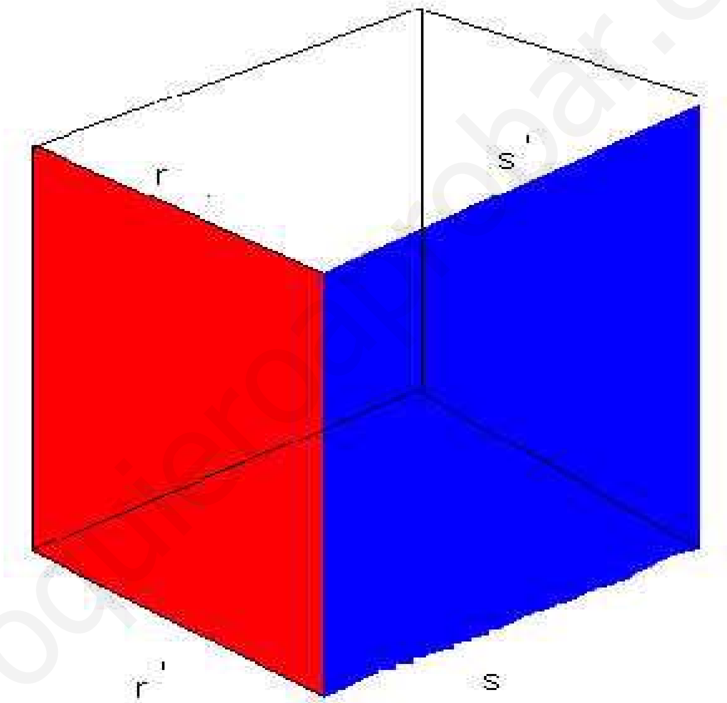



Figure 10: Rectas que se cruzan

$$\cos\alpha = \begin{cases} \dfrac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_{s'}}|}{\|\overrightarrow{v_r}\|\,\|\overrightarrow{v_{s'}}\|} \\ \text{ó} \\ \dfrac{|\overrightarrow{v_{r'}}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_{r'}}\|\,\|\overrightarrow{v_s}\|} \end{cases}$$

Teniendo presente que $r$ y $r'$ son paralelas $\rightarrow \overrightarrow{v_{r'}} = \lambda \overrightarrow{v_r}$ con lo que

$$\frac{|\overrightarrow{v_{r'}} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_{r'}}\| \, \|\overrightarrow{v_s}\|} = \frac{|\lambda| \, |\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{|\lambda| \, \|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{v_s}\|} = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{v_s}\|}$$

con lo que la fórmula a utilizar para calcular el ángulo entre dos rectas que se cruzan es:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{v_s}\|}$$

**Nota:** Observad que dos rectas pueden ser perpendiculares aunque no tengan puntos en común

**Ejemplo 1)** Hallar el ángulo que forman las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{array} \right.$ $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - \beta \\ y = 1 + 2\beta \\ z = 1 + \beta \end{array} \right.$ averiguando previamente su posición relativa

$$\left. \begin{array}{l} r \left\{ \begin{array}{l} A_r(1, 0, -2) \\ \overrightarrow{v_r} = (-2, 1, 3) \end{array} \right. \\ \\ s \left\{ \begin{array}{l} A_s(-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1, 2, 1) \end{array} \right. \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 2 \text{ ya que ambos no son paralelos} \\ \text{Determinemos el vector } \overrightarrow{A_r A_s}(-2, 1, 3) \\ Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_r A_s}) = 2 \text{ ya que } \left| \begin{array}{ccc} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$r$ y $s$ son secantes en un punto $P$

Para determinar el ángulo entre las rectas utilizamos

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{7}{2\sqrt{21}} \rightarrow \alpha = 40.203^o$$

Si quisieramos determinar el punto común resolveríamos el sistema

$r \cap s \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2\alpha = -1 - \beta \\ \alpha = 1 + 2\beta \\ -2 + 3\alpha = 1 + \beta \end{array} \right.$ La solución de este sistema es $\alpha = 1$ y $\beta = 0 \rightarrow$ $r \cap s = P(-1, 1, 1)$

**Ejemplo 2)** Hallar el ángulo que forman las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\alpha \\ y = -5 + \alpha \\ z = 4 + 2\alpha \end{array} \right.$ $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 6\beta \\ y = -7 - 4\beta \\ z = 2\beta \end{array} \right.$ averiguando previamente su posición relativa

**Condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares**

Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = b_1 + \beta w_1 \\ y = b_2 + \beta w_2 \\ z = b_3 + \beta w_3 \end{array} \right.$

$$r \perp s \Longleftrightarrow ang(r,s) = \frac{\pi}{2} \text{ rad } (90^o) \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 = 0$$

**Condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares**

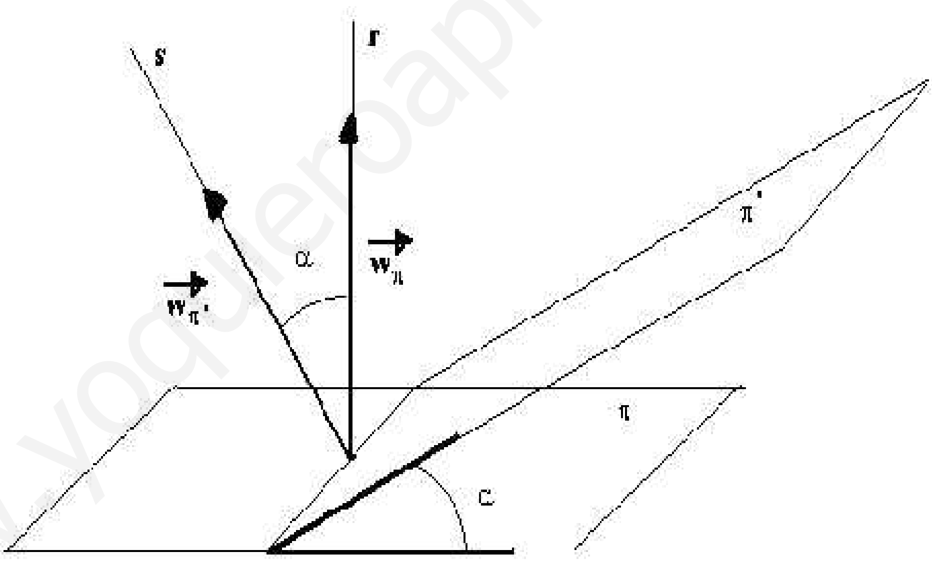
Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = b_1 + \beta w_1 \\ y = b_2 + \beta w_2 \\ z = b_3 + \beta w_3 \end{cases}$

$$r \parallel s \Longleftrightarrow ang(r,s) = 0 \text{ rad } (0^o) \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{v_s} \Longleftrightarrow |\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}| = \|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|$$

### 0.2.2 Ángulo entre dos planos

Dados los planos $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ se define el ángulo entre éstos como el menor ángulo diedro formado por ellos. Si observas la figura siguiente verás que:

$$ang(\pi, \pi') = \alpha$$




Ángulo entre dos planos

Si te fijas en el dibujo; dicho ángulo también coincide con el ángulo entre las rectas $r$ y $s$ donde $r$ es la recta perpendicular al plano $\pi$ y $s$ es la recta perpendicular al plano $\pi'$

Según esto $ang(\pi, \pi') = ang(r,s)$. Por lo que:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{v_s}\|}$$

Observarás que un vector director de $r$ es el vector ortogonal al plano $\pi$ (Es decir $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{w_\pi} = (A, B, C)$) y un vector director de $s$ es el vector ortogonal al plano $\pi'$ (Es decir $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{w_{\pi'}} = (A', B', C')$).

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{w_\pi} \cdot \overrightarrow{w_{\pi'}}|}{\|\overrightarrow{w_\pi}\| \, \|\overrightarrow{w_{\pi'}}\|} = \frac{|A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{(A')^2 + (B')^2 + (C')^2}}$$

**Ejemplo:** Dados los planos $\pi \equiv 3x - 4z + 2 = 0$ y $\pi' \equiv -5x - 2y + 8z = 13$.Determina el ángulo entre ellos

Si $ang(\pi, \pi') = \alpha$;por la fórmula anterior

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{w_s}|}{\|\overrightarrow{w_r}\| \, \|\overrightarrow{w_s}\|} = \frac{|A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{(A')^2 + (B')^2 + (C')^2}}$$

Donde $\overrightarrow{w_\pi}$ y $\overrightarrow{w_{\pi'}}$ son los vectores ortogonales a cada plano. En este ejercicio son $\overrightarrow{w_\pi}(3, 0, -4)$ y $\overrightarrow{w_{\pi'}}(-5, -2, 8)$.Así pues:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{w_\pi} \cdot \overrightarrow{w_{\pi'}}|}{\|\overrightarrow{w_\pi}\| \, \|\overrightarrow{w_{\pi'}}\|} = \frac{|-15 - 32|}{5\sqrt{93}} = \frac{47}{5\sqrt{93}}$$

$$\alpha \simeq 12.907^o$$

**Condición necesaria y suficiente para que dos planos sean perpendiculares**

Dados los planos $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$$\pi \perp \pi' \iff ang(\pi, \pi') = \frac{\pi}{2} \text{ rad } (90^o) \iff \overrightarrow{w_\pi} \cdot \overrightarrow{w_{\pi'}} = 0 \iff$$
$$\iff A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C' = 0$$

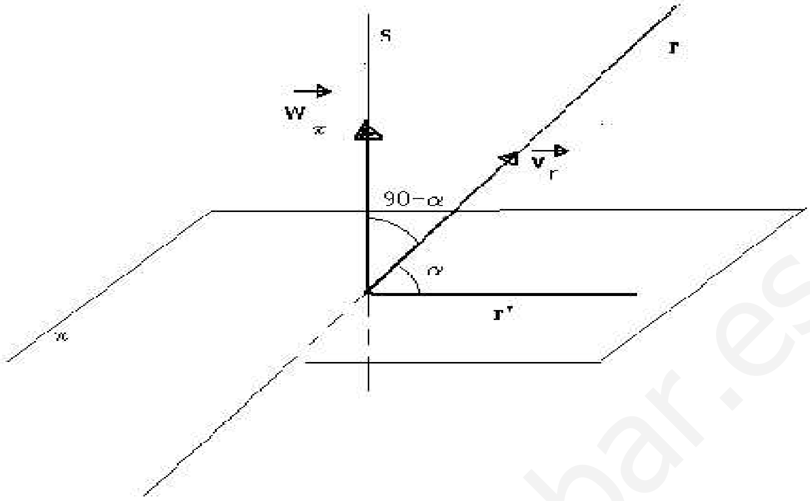
**Condición necesaria y suficiente para que dos planos sean paralelos**

Dados los planos $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$$\pi \parallel \pi' \iff ang(\pi, \pi') = 0 \text{ rad } (0^o) \iff \overrightarrow{w_\pi} \parallel \overrightarrow{w_{\pi'}} \iff$$
$$\iff |\overrightarrow{w_\pi} \cdot \overrightarrow{w_{\pi'}}| = \|\overrightarrow{w_\pi}\| \, \|\overrightarrow{w_{\pi'}}\|$$

### 0.2.3 Ángulo entre recta y plano

Se define el ángulo entre la recta $r$ y el plano $\pi$ como el ángulo entre las rectas $r$ y $r'$ siendo $r'$ la proyección de $r$ sobre $\pi$ (Mira el dibujo)




Si $\alpha = ang(r, \pi)$ fíjate que su suplementario $90 - \alpha$ es el ángulo entre $r$ y $s$ siendo $s$ una recta perpendicular al plano $\pi$ (cualesquiera)

En virtud de la relación para calcular el ángulo entre dos rectas, tendremos:

$$\cos(90 - \alpha) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{v_s}\|}$$

Como $\left.\begin{array}{l} s \text{ es } \perp \pi \rightarrow \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{w_\pi} \text{ (vector ortogonal al plano } \pi) \\ \cos(90 - \alpha) = \sin\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{w_\pi}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{w_\pi}\|}}$

Por lo tanto; la expresión analítica que nos permite calcular el ángulo entre la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{array} \right.$ y el plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ plano dados quedará de la siguiente manera:

$$\sin\alpha = \frac{|A \cdot v_1 + B \cdot v_2 + C \cdot v_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

**Ejemplo** Dada la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{11}{7} + \alpha \\ y = -\frac{20}{7} + 5\alpha \\ z = 7\alpha \end{array} \right.$ y el plano $3x - 4y - 12z + 24 = 0$ determina el ángulo que forman

$\overrightarrow{v_r}(1, 5, 7)$ es el vector director de $r$ y $\overrightarrow{w_\pi}(3, -4, -12)$ es el vector ortogonal al plano

Como $\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{w_\pi}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{w_\pi}\|}$ entonces $\sin\alpha = \frac{|3 - 20 - 84|}{13\sqrt{75}} = \frac{101}{13\sqrt{75}}$

$$\alpha = 26.219^o$$

**Condición necesaria y suficiente para que una recta y un plano sean perpendiculares**

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$r \perp \pi \Longleftrightarrow ang(r, \pi) = \dfrac{\pi}{2}$ rad $(90^o) \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{w_\pi} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow |\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{w_\pi}| = \|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{w_\pi}\|$

**Condición necesaria y suficiente para que una recta y un plano sean paralelos**

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$r \parallel \pi \Longleftrightarrow ang(r, \pi) = 0$ rad $(0^o) \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{w_\pi} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{w_\pi} = 0 \Longleftrightarrow A \cdot v_1 + B \cdot v_2 + C \cdot v_3 = 0$

**Nota** Si una recta y un plano son paralelos puede ocurrir que la recta esté o no contenida en el plano

# Chapter 1

# Distancias

## 1.1 Distancia entre dos puntos

Se define la distancia entre dos puntos $P$ y $Q$ de la siguiente manera

$$d(P,Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\|$$

Si trabajamos en el sistema de referencia canónico su expresión analítica quedará de la siguiente manera:

Si las coodenadas de ambos puntos en el sistema canónico son $P(a,b,c), Q(a',b',c') \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (a'-a, b'-b, c'-c)$ y por lo tanto

$$d(P,Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}$$

**Ejemplo** Dados los puntos $A(2,2,1)$ y $H = \left(\frac{7}{6}, \frac{22}{6}, \frac{1}{6}\right)$.Calcula la distancia entre ellos

Como el vector $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{5}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{5}{6}\right)$

$$d(A,H) = \left\| \overrightarrow{AH} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{10}{6}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

**Propiedades de la distancia entre dos puntos**

- 1 $d(P,Q) = d(Q,P) \qquad \forall P,Q \in \Re^3$
  2 $d(P,Q) \geq 0 \qquad \forall P,Q \in \Re^3$
  3 $d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$
  4 Fijados los puntos $P$ y $Q$ $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \qquad \forall R \in \Re^3$

**Cuestión a)** Dados los puntos $P(2,1,3)$ y $Q(-1,1,1)$. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $P$ $y$ $Q$

Nos están pidiendo los puntos $R(x, y, z)$ tales que $d(P, R) = d(R, Q)$

$$\text{Como } \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR} = (x-2, y-1, z-3) \\ \overrightarrow{QR} = (x+1, y-1, z-1) \end{array}\right\} \to$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\|\overrightarrow{PR}\right\| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} \\ \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \end{array}\right\} \to$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

Elevando al cuadrado y desarrollando tendremos

$$x^2 - 4x + 14 + y^2 - 2y + z^2 - 6z = x^2 + 2x + 3 + y^2 - 2y + z^2 - 2z$$

Transponiendo términos y reduciendo términos semejantes obtendremos el plano

$$\pi \equiv 6x + 4z = 11$$

A este plano se le denomina plano mediatriz de los puntos $P$ y $Q$

**Cuestión b)** Dado el punto $P(2, 1, 3)$ . Determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $P$ es de 3 unidades

Nos están pidiendo los puntos $R(x, y, z)$ tales que $d(P, R) = 3 \to \left\|\overrightarrow{PR}\right\| = 3$
Como $\overrightarrow{PR} = (x-2, y-1, z-3)$ entonces tendremos

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = 3$$

Elevando al cuadrado

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$$

Esta ecuación representa todos los puntos de una esfera centrada en $P$ y de radio 3 unidades

## 1.2 Distancia de un punto a un plano.

**Def 1** $d(P,\pi) = d(P, J)$ siendo $J$ la proyección orotgonal de $P$ sobre $\pi$

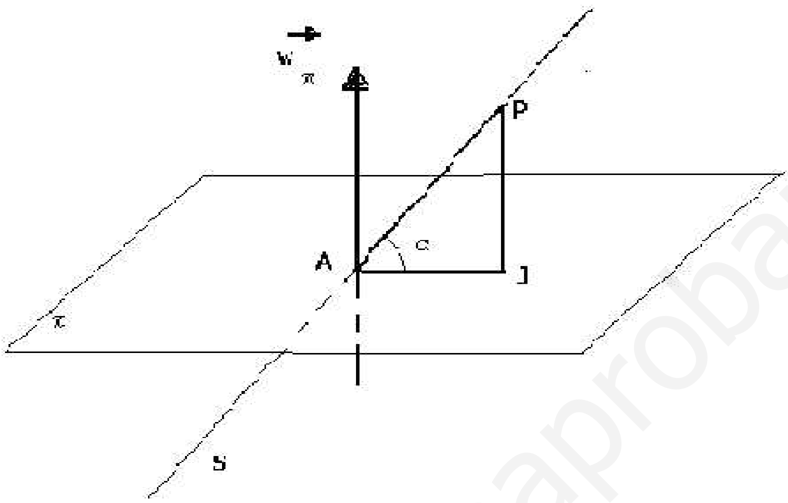
### 1.2.1 Fórmula para calcular la distancia de un punto a un plano

Dado el punto $P$ y el plano $\pi \to \boxed{d(P, \pi) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{w}\right|}{\|\overrightarrow{w}\|}}$

siendo $A$ un punto cualesquiera del plano $\pi$ y $\overrightarrow{w}$ el vector ortogonal asociado al plano $\pi$

Demostración: Por definición $d(P,\pi) = d(P,J) = \left\|\overrightarrow{PJ}\right\|$ siendo $J$ la proyección ortogonal de $P$ sobre $\pi$

Sea $A$ un punto arbitrario del plano $\pi$ y sea $\alpha = ang(s,\pi)$ donde $s$ es la recta que pasa por $P$ y por $A$




Nosotros sabemos que $\sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{w_\pi}|}{\|\overrightarrow{v_s}\|\,\|\overrightarrow{w_\pi}\|}$ donde $\overrightarrow{v_s}$es un vector director de $s$ y $\overrightarrow{w_\pi}$es el vector ortogonal del plano $\pi$.En nuestro caso $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AP}$ con lo que

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{w_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\,\|\overrightarrow{w_\pi}\|} \qquad (1)$$

Si te fijas ahora en el triángulo rectángulo $AJP$ verás que

$$\sin\alpha = \frac{\left\|\overrightarrow{PJ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|} \qquad (2)$$

Igualando las expresiones 1 y 2 y despejando $\left\|\overrightarrow{PJ}\right\|$ tendremos que

$$d(P,\pi) = d(P,J) = \left\|\overrightarrow{PJ}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{w}\right|}{\|\overrightarrow{w}\|} \qquad \text{(c.q.d)}$$

**Ejemplo** Dado el punto $P(1,-2,3)$ y el plano $\pi \equiv 2x - 3y + z = 2$. Calacula la $d(P,\pi)$

Sabemos que $d(P,\pi) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{w}\right|}{\|\overrightarrow{w}\|}$ donde $A$ es un punto cualesquiera del plano

Un punto del plano es $A(0,0,2)$ y el vector ortogonal asociado al plano es $\overrightarrow{w} = (2,-3,1)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP} = (1,-2,1)\\ \overrightarrow{w} = (2,-3,1)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{w} = 9\\ \|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{14}\end{array}\right\}$$

$$d(P,\pi) = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9}{14}\sqrt{14}$$

### 1.2.2 Expresión analítica de la distancia de un punto a un plano( en cartesianas)

Dado el punto $P(p_1,p_2,p_3)$ y el plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C\cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

**Demostración:** Sabemos , por la pregunta anterior que:

$$d(P,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{w}\right|}{\|\overrightarrow{w}\|}$$

siendo $A$ un punto cualesquiera del plano $\pi$ y $\overrightarrow{w}$ el vector ortogonal asociado al plano $\pi$

Si $A(a_1,a_2,a_3)$ es un punto del plano y el vector ortogonal asociado a éste $\overrightarrow{w} = (A,B,C)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP} = (p_1-a_1, p_2-a_2, p_3-a_3)\\ \overrightarrow{w} = (A,B,C)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{w} = A(p_1-a_1) + B(p_2-a_2) + C(p_3-a_3)\\ \|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\end{array}\right\}$$

$$d(P,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{w}\right|}{\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{|A(p_1-a_1)+B(p_2-a_2)+C(p_3-a_3)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Como $A \in \pi \rightarrow -A\cdot a_1 - B\cdot a_2 - C\cdot a_3 = D$ y por lo tanto la fórmula quedará como sigue

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C\cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

**Ejemplo** Dado el punto $P(1,-2,3)$ y el plano $\pi \equiv 2x - 3y + z = 2$. Calcula la $d(P,\pi)$

Sabemos que $d(P,\pi) = \dfrac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C\cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ donde $P(p_1,p_2,p_3)$ es el punto y el plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

En este ejercicio $P(1,-2,3)$ y $\pi \equiv 2x-3y+z-2=0$ ;por lo tanto

$$d(P,\pi)=\frac{|2\,(1)-3\,(-2)+(3)-2|}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{9}{14}\sqrt{14}$$

**Ejercicio 1** Dado el punto $P(1,2,0)$ y el plano $\pi \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1+5\alpha \\ y=4-\alpha \\ z=2+\alpha-3\beta \end{array}\right.$ . Calcula la distancia de $P$ al plano dado

La ecuación cartesiana del plano es

$$\left|\begin{array}{ccc} x-1 & 5 & 0 \\ y-4 & -1 & 0 \\ z-2 & 1 & -3 \end{array}\right|=0 \rightarrow x+5y-21=0$$

Po lo tanto

$$d(P,\pi)=\frac{|1\,(1)+5\,(2)-21|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{5}{13}\sqrt{26}$$

### 1.2.3 Método razonado para el cálculo de la distancia de un punto a un plano( en cartesianas)

Dado el punto $P(p_1,p_2,p_3)$ y el plano $\pi \equiv Ax+By`Cz+D=0$ Para calcular la $d(P,\pi)$ utilizaremos los siguientes pasos

- – ∗ 1) Calcularemos las ecuaciones paramétricas de la recta , $r$, perpendicular al plano dado $\pi$ y que pase por $P$. Fíjate que el vector director de $r$ es precisamente el vector ortogonal , $\overrightarrow{w_\pi}$l, asociado al plano ($\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{w_\pi}=(A,B,C)$ )
  2) Determinaremos $J$ que es la intersección de $r$ y $\pi$ . Para ello; bastará con resolver el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de $r$ y las ecuaciones cartesianas del plano $\pi$
  3) Calcularemos $\overrightarrow{PJ}$ y después $\left\|\overrightarrow{PJ}\right\|$

**Nota** Cierto es, que este procedimiento es más largo que los anteriores.Sin embargo, es conveniente utilizarlo cuando no se recuerden éstos; ya que basta con tener una idea geométrica de lo que hemos de calcular

**Ejercicio 2** Dado el punto $P(1,-2,3)$ y el plano $\pi \equiv 2x-3y+z=2$. Calcula la $d(P,\pi)$

- – ∗ 1) Calcularemos las ecuaciones paramétricas de la recta , $r$, perpendicular al plano dado $\pi$ y que pasa por $P$. Fíjate que el vector director de $r$ es precisamente el vector ortogonal , $\overrightarrow{w_\pi}$, asociado al plano ($\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{w_\pi}=(2,-3,1)$ )

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1+2\alpha \\ y=-2-3\alpha \\ z=3+\alpha \end{array}\right.$$

2) Determinaremos $J$ que es la intersección de $r$ y $\pi$ . Para ello bastará con resolver el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de $r$ y las ecuaciones cartesianas del plano

$$J = r \cap \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -2 - 3\alpha \\ z = 3 + \alpha \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \alpha = -\tfrac{9}{14}$$

Sustituyendo este parámetro en $r$ tendremos $J(-\frac{2}{7}, -\frac{1}{14}, \frac{33}{14})$

3) Calcularemos $\overrightarrow{PJ} = \left(-\frac{9}{7}, \frac{27}{14}, -\frac{9}{14}\right)$

Después $d(P,\pi) = \left\|\overrightarrow{PJ}\right\| = \dfrac{\sqrt{(-18)^2 + 27^2 + (-9)^2}}{14} = \frac{9}{14}\sqrt{14}$

### 1.2.4 Otra fórmula para el cálculo de la distancia de un punto a un plano( en paramétricas)

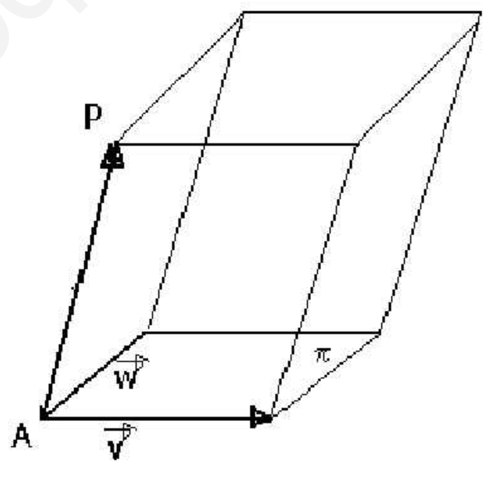
Dado el punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 + \beta w_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 + \beta w_2 \\ z = a_3 + \alpha v_3 + \beta w_3 \end{cases}$

La distancia del punto $P$ al plano $\pi$ viene dada por la fórmula

$$d(P,\pi) = \frac{\left|[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\right|}{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\|}$$

siendo $A$ un punto cualesquiera del plano $\pi$ y los vectores $\overrightarrow{v}$ $y$ $\overrightarrow{w}$ los vectores directores del plano

**Demostración:** Sea $A$ un punto cualesquiera del plano $\pi$ y $\overrightarrow{v}$ $y$ $\overrightarrow{w}$ los vectores directores de éste



$\left|[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\right|$ representa el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$

$\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\|$ representa el área de la base del paralelepípedo anterior

$d(P, \pi)$ es la altura del susodicho paralelepípedo

Como el volumen de un paralelepípedo coincide con el producto del área de la base por la altura; tendremos:

$$\left|[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\right| = \|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\| \cdot d(P, \pi)$$

despejando $d(P, \pi)$

$$d(P, \pi) = \frac{\left|[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\right|}{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\|} \qquad \text{(c.q.d)}$$

**Ejemplo** Dado el punto $P(1, 2, 0)$ y el plano $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 5\alpha \\ y = 4 - \alpha \\ z = 2 + \alpha - 3\beta \end{array} \right.$. Calcula la distancia de $P$ al plano dado

$$\text{Datos} \left. \begin{array}{l} P(1, 2, 0) \\ A(1, 4, 2) \\ \overrightarrow{v}(5, -1, 1) \\ \overrightarrow{w}(0, 0, -3) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP}(0, -2, -2) \\ \overrightarrow{v}(5, -1, 1) \\ \overrightarrow{w}(0, 0, -3) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -30 \\ \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\overrightarrow{i} + 15\overrightarrow{j} = (3, 15, 0) \end{array} \right\}$$

$$, \text{Como } d(P, \pi) = \frac{\left|[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\right|}{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\|} = \frac{30}{\sqrt{9 + 225}} = \tfrac{5}{13}\sqrt{26}$$

**Nota:** También podríamos calcular esta distancia determinando el punto $J$ (proyección ortogonal de $P$ sobre $\pi$)

Para ello, por ser $J \in \pi \rightarrow J(1 + 5\alpha, 4 - \alpha, 2 + \alpha - 3\beta)$.

Para calcular este punto exigiremos al vector $\overrightarrow{PJ} = (5\alpha, 2 - \alpha, 2 + \alpha - 3\beta)$ que sea ortogonal a los vectores directores de $\pi$ ($\overrightarrow{v}(5, -1, -3)$ y $\overrightarrow{w}(0, 0, -3)$)

Como $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PJ} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \\ \overrightarrow{PJ} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 25\alpha - 2 + \alpha - 6 - 3\alpha + 9\beta = 0 \\ -6 - 3\alpha + 9\beta = 0 \end{array} \right\}$ : Dando lugar al siguiente sistema

$\left. \begin{array}{l} 23\alpha + 9\beta = 8 \\ -3\alpha + 9\beta = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \beta = \frac{9}{13}, \alpha = \frac{1}{13}$. Sustituyendo estos parámetros en las ecuaciones de $\pi$ obtendremos el punto $J$

$$J(1 + \tfrac{5}{13}, 4 - \tfrac{1}{13}, 2 + \tfrac{1}{13} - \tfrac{27}{13}) = \left(\tfrac{18}{13}, \tfrac{51}{13}, 0\right)$$

Como $d(P,\pi) = d(P, J) = \left\|\overrightarrow{PJ}\right\| = \left\|\left(\frac{5}{13}, \frac{25}{13}, 0\right)\right\| = \frac{\sqrt{25+625}}{13} = \frac{5}{13}\sqrt{26}$

## 1.3 Distancia de un punto a una recta.

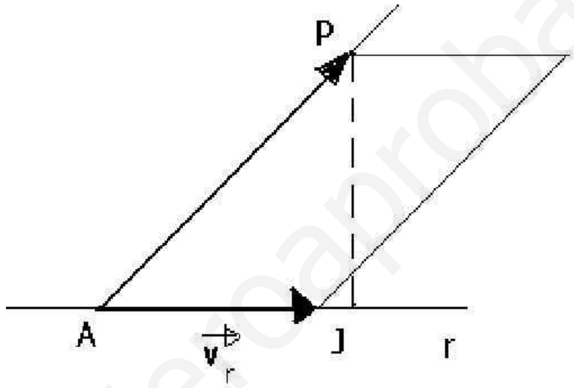
**Def 1** $d(P,r) = d(P,J)$ siendo $J$ la proyección ortogonal de $P$ sobre $r$

### 1.3.1 Fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta

Dado el punto $P$ y la recta $r \rightarrow \boxed{d(P,r) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r}\right\|}{\|\overrightarrow{v_r}\|}}$

siendo $A$ un punto cualesquiera de la recta $r$ y $\overrightarrow{v_r}$ el vector director de la recta $r$

**Demostración:** Sea $A$ un punto cualesquiera de la recta $r$




Por la interpretación geométrica del módulo del producto vectorial de dos vectores, sabemos que dicho número representa la superficie del paralelogramo determinado por éstos.

$\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r}\right\|$ representa la superficie del paralelogramo definido por los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{v_r}$

$\left\|\overrightarrow{PJ}\right\|$ representa la altura de dicho paralelogramo

$\|\overrightarrow{v_r}\|$ representa la base de dicho paralelogramo

Teniendo presente que la superficie de un paralelogramo es el producto de la base por la altura; tendremos

$$\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r}\right\| = \|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \left\|\overrightarrow{PJ}\right\|$$

Despejando $\left\|\overrightarrow{PJ}\right\| = d(P,J) = d(P,r)$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r}\right\|}{\|\overrightarrow{v_r}\|}} \qquad \text{(c.q.d)}$$

**Ejemplo** Calcula la distancia del punto $P(1,1,1)$ a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 3+\alpha \\ y = -2+3\alpha \\ z = 1+5\alpha \end{array} \right.$

$$\text{Datos: } \left. \begin{array}{l} A(3,-2,1) \\ P(1,1,1) \\ \overrightarrow{v_r}(1,3,5) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP}(-2,3,0) \\ \overrightarrow{v_r}(1,3,5) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right| = 15\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j} - 9\overrightarrow{k} = (15,10,-9) \\ \|\overrightarrow{v_r}\| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r}\right\|}{\|\overrightarrow{v_r}\|} = \frac{\sqrt{15^2+10^2+(-9)^2}}{\sqrt{35}} = \frac{1}{5}\sqrt{290}}$$

### 1.3.2 Método razonado para el cálculo de la distancia de un punto a una recta( en paramétricas)

- – 1 Determinanos la ecuación del plano $\pi$ perpendicular a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = a_1+\alpha v_1 \\ y = a_2+\alpha v_2 \\ z = a_3+\alpha v_3 \end{array} \right.$ sabiendo además que pasa por el punto $P(p_1,p_2,p_3)$
  Dicho plano tendrá como vector ortogonal el vector director de $r$;por lo tanto:
  $\pi \equiv v_1(x-p_1)+v_2(y-p_2)+v_3(z-p_3) = 0$
  
  2 Calculamos la intersección entre el plano $\pi$ del apartado anterior y la recta $r$ (punto $J$ denominado proyección ortogonal del punto $P$ sobre la recta $r$ ) resolviendo el sistema formado por:
  $$J = r \cap \pi \left\{ \begin{array}{l} x = a_1+\alpha v_1 \\ y = a_2+\alpha v_2 \\ z = a_3+\alpha v_3 \\ v_1(x-p_1)+v_2(y-p_2)+v_3(z-p_3) = 0 \end{array} \right.$$
  
  3 Determinanos $\left\|\overrightarrow{PJ}\right\| = d(P,r)$

**Ejemplo** Calcula la distancia del punto $P(1,1,1)$ a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 3+\alpha \\ y = -2+3\alpha \\ z = 1+5\alpha \end{array} \right.$

- – 1 Determinanos la ecuación del plano $\pi$ perpendicular a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 3+\alpha \\ y = -2+3\alpha \\ z = 1+5\alpha \end{array} \right.$ sabiendo además que pasa por el punto $P(1,1,1)$
  Dicho plano tendrá como vector ortogonal el vector director de

$r$;por lo tanto:
$\pi \equiv 1(x-1)+3(y-1)+5(z-1)=0 \rightarrow x+3y+5z=9$

2 Calculamos la intersección entre el plano $\pi$ del apartado anterior y la recta $r$ (punto $J$ denominado proyección ortogonal del punto $P$ sobre la recta $r$ )

$$J = r \cap \pi \left\{ \begin{array}{l} x = 3+\alpha \\ y = -2+3\alpha \\ z = 1+5\alpha \\ x+3y+5z=9 \end{array} \right. ; \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow J(\tfrac{16}{5}, -\tfrac{7}{5}, 2)$$

3 Determinanos $\left\|\overrightarrow{PJ}\right\| = \left\|\left(\frac{11}{5}, -\frac{12}{5}, 1\right)\right\| = \frac{1}{5}\sqrt{290} = d(P,r)$

Nota: También se puede determinar $J$ de la siguiente manera

Por ser $J \in r \rightarrow J(3+\alpha, -2+3\alpha, 1+5\alpha)$

Como $J$ es la proyección ortogonal del punto $P$ sobre la recta $r$ ; debemos exigir que el vector $\overrightarrow{PJ}$ sea ortogonal a $\overrightarrow{v_r}$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PJ} = (2+\alpha, -3+3\alpha, 5\alpha) \\ \overrightarrow{v_r}(1,3,5) \\ \overrightarrow{PJ} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 2+\alpha+3(-3+3\alpha)+25\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$$

$$J(3+\tfrac{1}{5}, -2+\tfrac{3}{5}, 1+1) \rightarrow J\left(\tfrac{16}{5}, -\tfrac{7}{5}, 2\right)$$
$$d(P,r) = \left\|\overrightarrow{PJ}\right\| = \left\|\left(\tfrac{11}{5}, -\tfrac{12}{5}, 1\right)\right\| = \tfrac{1}{5}\sqrt{290}$$

## 1.4 Distancia entre dos rectas paralelas

Dadas dos rectas $r$ y $r'$ paralelas: La distancia entre ellas se puede calcular de la siguiente manera:

$$d(r,r') = \left\{ \begin{array}{l} d(A_r, r') \\ \text{ó} \\ d(A_{r'}, r) \end{array} \right.$$

*Si ambas rectas fuesen coincidentes ; entonces la distancia entre ellas sería nula*

**Ejemplo:** Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\alpha \\ y = 2-2\alpha \\ z = 3+3\alpha \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3+2\beta \\ y = 4-4\beta \\ z = 1+6\beta \end{array} \right.$ demuestra que son paralelas y distintas y después calcula la distancia entre ellas

*Solución*

De ambas rectas conocemos $r \left\{ \begin{array}{l} A_r(1,2,3) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2,3) \end{array} \right.$ y $s \left\{ \begin{array}{l} A_s(3,4,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (2,-4,6) \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{A_rA_s} = (2,2,-2)$

Como $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = rango \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 1$ (por ser $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}$ vectores proporcionales)

y además $rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = rango \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = 2$ ($\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ no son proporcionales). Entonces $r$ y $s$ son paralelas y distintas

Para calcular la distancia entre ellas, lo haremos calculando la distancia de $A_s(3,4,1)$ a la otra recta r$\equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2-2\alpha \\ z = 3+3\alpha \end{cases}$

Como:

$$d(r,s) = d(A_s, r) = \frac{\left\| \overrightarrow{A_rA_s} \wedge \overrightarrow{v_r} \right\|}{\|\overrightarrow{v_r}\|}$$

Datos

$$\left.\begin{array}{l} A_r(1,2,3) \\ A_s(3,4,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2,3) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{A_rA_s} = (2,2,-2) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2,3) \\ \overrightarrow{A_rA_s} \wedge \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k} \end{array}\right\}$$

$$d(r,s) = d(A_s, r) = \frac{\left\| \overrightarrow{A_rA_s} \wedge \overrightarrow{v_r} \right\|}{\|\overrightarrow{v_r}\|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-8)^2 + (-6)^2}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{2}{7}\sqrt{91}$$

:

## 1.5 Distancia entre recta y plano paralelos

Dada una recta $r$ paralela al plano $\pi$ La distancia entre la recta y el plano se calcula así.:

$$d(r, \pi) = d(A_r, \pi)$$

*Si la recta $r$ estuviese contenida en el plano $\pi$, dicha distancia sería nula*

**Ejemplo** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3+2\beta \\ y = 4 \\ z = 1+5\beta \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 5x + 3y - 2z = 3$.

Demuestra que son paralelos y que la recta dada no está contenida en el plano

*Solución*

De la recta conocemos $r \begin{cases} A_r(3,4,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,0,5) \end{cases}$ y del plano su vector ortogonal asociado $\overrightarrow{w_\pi}(5,3,-2)$

Como $\overrightarrow{w_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = 2 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 0 \rightarrow r \parallel \pi$

La recta $r$ no está contenida en el plano ; ya que el punto $A_r(3,4,1)$ no pertenece al plano (al no satisfacer su ecuación $5\,(3)+3\,(4)-2\,(1)\neq 3$)

Para calcular la distancia de la recta al plano dados; utilizaré la siguiente fórmula

$$d(r,\pi)=d(A_r(3,4,1),\pi\equiv 5x{+}3y{-}2z{-}3=0)=\frac{|5\,(3)+3\,(4)-2\,(1)-3|}{\sqrt{5^2+3^2+(-2)^2}}=\frac{11}{19}\sqrt{38}$$

## 1.6 Distancia entre dos planos paralelos

Dados los planos $\pi$ y $\pi'$ paralelos. La distancia entre ellos se calcula de la siguiente manera:

$$d(\pi,\pi')=\left\{\begin{array}{l} d(A_\pi,\pi') \\ \text{ó} \\ d(A_{\pi'},\pi)\end{array}\right.$$

## 1.7 Distancia entre dos rectas que se cruzan

Para calcular la distancia entre dos rectas $r$ y $s$ que se cruzan podemos utilizar las siguientes relaciones:

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{w_s},\overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\|} \quad (1.1)$$

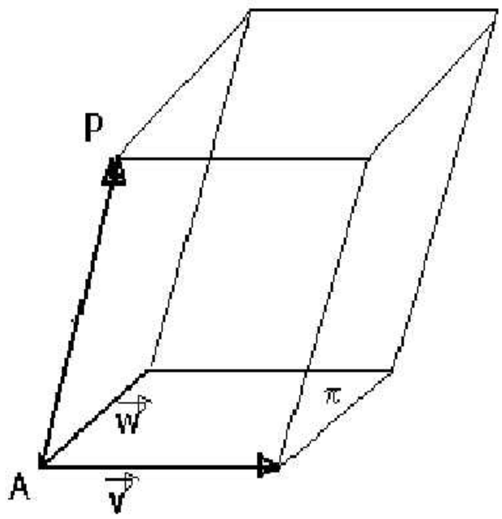
$$d(r,s) = d(A_r,\pi') \quad (1.2)$$

$$d(r,s) = d(A_s,\pi) \quad (1.3)$$

$$d(r,s) = d(\pi,\pi') \quad (1.4)$$

$$\text{donde}\left\{\begin{array}{l} A_r\text{es un punto de } r \\ A_s\text{es un punto de } s \\ \overrightarrow{v_r}\text{ vector director de } r \\ \overrightarrow{w_s}\text{ vector director de } s \\ \pi'\text{ plano que contiene a } s \text{ y es paralelo a } r \\ \pi\text{ plano que contine a } r \text{ y es paralelo a } s\end{array}\right.$$

**Demostración:** Fijándote en el dibujo




Vamos a demostrar la primera

$\left|[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{w_s}, \overrightarrow{A_rA_s}]\right|$representa el volumen del paralelepípedo del dibujo

$\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{w_s}\|$ representa el área de la base del paralelepípedo

$d(r,s)$es la altura del susodicho paralelepípedo

Como el volumen de un paralelepípedo es igual al producto del área de la base por la altura; entonces:

$$\left|[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{w_s}, \overrightarrow{A_rA_s}]\right| = \|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{w_s}\| \cdot d(r,s)$$

Despejando $d(r,s) \rightarrow \boxed{d(r,s) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{w_s}, \overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|}}$

**Ejemplo** Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right.$ $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array} \right.$ demuestra que se cruzan y calcula la distancia entre ellas

Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son

$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{array} \right.$ $\qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \\ z = \beta \end{array} \right.$

Solución b)

$$\left.\begin{array}{l} r\left\{ \begin{array}{l} A_r(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,0,1) \end{array} \right. \\ \\ s\left\{ \begin{array}{l} A_s(0,3,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (0,0,1) \end{array} \right. \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 2 \text{ ya que ambos no son paralelos} \\ \text{Determinemos el vector } \overrightarrow{A_rA_s}(0,4,0) \\ Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = 3 \text{ ya que } \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right| = 3 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$r$ y $s$ se cruzan

*Primer procedimiento para calcular la distancia entre ellas*

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|}$$

$$\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{j} \to \|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\| = 1$$

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|} = 3$$

*Segundo procedimiento para calcular la distancia entre ellas*
Como las rectas se cruzan; entonces
$d(r,s) = d(A_s, \pi)$ siendo $\pi$ el plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$
$\pi \equiv \begin{cases} A_r = (0,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,0,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (0,0,1) \end{cases} \to \pi \equiv \begin{cases} A_r = (0,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = (0,-1,0) \text{ (vector ortogonal)} \end{cases}$
$\pi \equiv -y = 0 \to \pi \equiv y = 0$ (Plano $XZ$)

$$d(r,s) = d(A_s(0,3,0), \pi \equiv y = 0) = \frac{|3|}{\sqrt{1^2}} = 3$$

**Nota:** Para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan, también lo podríamos hacer determinando de ambas rectas los puntos de la perpendicular común
Después, calcularíamos el módulo del vector que los une- Dicho valor será la distancia entre las rectas.

**Ejemplo 2** Dadas las rectas $r \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{cases}$ y $s \begin{cases} x = -1 - \beta \\ y = 1 + 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$ demuestra que son rectas que se cruzan. Calcula la ecuación de la perpendicular común a ambas determinando tambien la distancia entre ellas

$r \begin{cases} A_r(1,0,-2) \\ \overrightarrow{v_r}(-2,1,3) \end{cases}$ $s \begin{cases} A_s(-1,1,0) \\ \overrightarrow{v_s}(-1,2,1) \end{cases}$ [1]Es evidente que el $Rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 2$ (no son paralelos)

y como el $Rango(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = Rango \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$[2]$= 3$ entonces las rectas $r$ y se cruzan (no son paralelas y están contenidas en planos paralelos distintos)

[1] $\overrightarrow{A_rA_s} = (-2,1,2)$

[2] $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 3 + 12 + 2 + 2 = 3$

Para determinar la perpendicular común a ambas tendré que determinar un punto $B$ de $r$ y un punto $T$ de $s$ tal que el vector $\overrightarrow{BT}$ sea perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y a $\overrightarrow{v_s}$ a la vez

$$\left.\begin{array}{c} \text{Por ser } B \in r \to B(1-2\alpha, \alpha, -2+3\alpha) \\ \text{Por ser } T \in s \to T(-1-\beta, 1+2\beta, \beta) \end{array}\right\} \overrightarrow{BT}(-2-\beta+2\alpha, 1+2\beta-\alpha, 2+\beta-3\alpha)$$

Como $\overrightarrow{BT} \perp \overrightarrow{v_r}$[3]$\to -2(-2-\beta+2\alpha)+(1+2\beta-\alpha)+3(2+\beta-3\alpha)=0$

Como $\overrightarrow{BT} \perp \overrightarrow{v_s}$[4]$\to -(-2-\beta+2\alpha)+2(1+2\beta-\alpha)+1(2+\beta-3\alpha)=0$

De ambas condiciones, obtenemos el sistema $\left.\begin{array}{c} -14\alpha+7\beta=-11 \\ -7\alpha+6\beta=-6 \end{array}\right\}$ cuyas soluciones son

$$\alpha = \frac{24}{35}\ ,\ \beta = \frac{-1}{5}$$

Sustituyendo el parámetro $\alpha$ en las ecuaciones paramétricas de $r$ tendremos el punto $B$

$$\left.\begin{array}{c} x = 1-2\left(\frac{24}{35}\right) = \frac{-13}{35} \\ y = \frac{24}{35} \\ z = -2+3\left(\frac{24}{35}\right) = \frac{2}{35} \end{array}\right. \to B\left(\frac{-13}{35}, \frac{24}{35}, \frac{2}{35}\right)$$

Sustituyendo el parámetro $\beta$ en las ecuaciones paramétricas de $s$ tendremos el punto $T$

$$\left.\begin{array}{c} x = -1-\left(\frac{-1}{5}\right) \\ y = 1+2\left(\frac{-1}{5}\right) \\ z = \frac{-1}{5} \end{array}\right. \to T\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

La perpendicular común a $r$ y a $s$ es la recta $t\left\{\begin{array}{c} B\left(\frac{-13}{35}, \frac{24}{35}, \frac{2}{35}\right) \\ T\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-1}{5}\right) \end{array}\right.$

$$\to \left\{\begin{array}{c} B\left(\frac{-13}{35}, \frac{24}{35}, \frac{2}{35}\right) \\ \overrightarrow{TB}\left(\frac{-13}{35}+\frac{28}{35}, \frac{24}{35}-\frac{21}{35}, \frac{2}{35}+\frac{7}{35}\right) \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{c} B\left(\frac{-13}{35}, \frac{24}{35}, \frac{2}{35}\right) \\ \overrightarrow{TB}\left(\frac{15}{35}, \frac{3}{35}, \frac{9}{35}\right) \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{c} B\left(\frac{-13}{35}, \frac{24}{35}, \frac{2}{35}\right) \\ \frac{35}{3}\cdot\overrightarrow{TB}(5,1,3) \end{array}\right.$$

Por lo tanto, sus ecuaciones paramétricas son

$$\left\{\begin{array}{c} x = \frac{-13}{35}+5\alpha \\ y = \frac{24}{35}+\alpha \\ z = \frac{2}{35}+3\alpha \end{array}\right.$$

Si nos piden la distancia entre $r$ y $s$

$$d(r,s) = d(B,T) = \left|\left|\overrightarrow{TB}\right|\right| = \sqrt{\left(\frac{15}{35}\right)^2+\left(\frac{3}{35}\right)^2+\left(\frac{9}{35}\right)^2} = \frac{\sqrt{315}}{35}$$

Este procedimiento a veces es un tanto engorroso y dependerá su aplicación o no de la forma en que nos aparezcan los datos de ambas rectas

[3] $\overrightarrow{BT}\cdot\overrightarrow{v_r}=0$

[4] $\overrightarrow{BT}\cdot\overrightarrow{v_s}=0$

## 1.8 Problemas de Geometría afín euclídea resueltos

**Ejercicio 40** *Halla la ecuación del plano que pasa por el punto* $A(2,0,1)$ *y es perpendicular al vector* $\overrightarrow{u}=(2,1,-3)$

La ecuación cartesiana de todos los planos cuyo vector ortogonal es $\overrightarrow{u}=(2,1,-3)$ es de la forma

$$2x+y-3z=k$$

De todos ellos, sólo nos interesa el que pasa por $A\rightarrow 2\,(2)+0-3=k\rightarrow k=1$
El plano pedido es

$$\pi\equiv 2x+y-3z=1$$

**Ejercicio 41** *Aplicando el producto vectorial, halla la dirección de la recta* $r$ *intersección de los planos* $\pi\equiv 2x+y-z=-6$ *y* $\pi'\equiv 3x-2y+z=1$

El vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}$ coincide con el siguiente producto vectorial $\overrightarrow{n_\pi}\wedge\overrightarrow{n_{\pi'}}$ donde los vectores $\overrightarrow{n_\pi}=(2,1,-1)$ y $\overrightarrow{n_{\pi'}}=(3,-2,1)$ son los vectores ortogonales a cada uno de los planos dados

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_\pi}\wedge\overrightarrow{n_{\pi'}}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=-\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}-7\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{v_r}=(-1,-5,-7)$$

*Otra manera de determinarlo*

Como $r=\pi\cap\ \pi'\equiv\left\{\begin{array}{l}2x+y-z=-6\\ 3x-2y+z=1\end{array}\right.$, resolviendo el sistema obtendríamos las ecuaciones paramétricas de la recta

Así pues; resolviéndolo tendremos$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-\frac{11}{7}+\frac{1}{7}z\\ y=-\frac{20}{7}+\frac{5}{7}z\end{array}\right.$

Llamando a $z=7\alpha$ obtendremos las ecuaciones paramétricas de $r$

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l}x=-\frac{11}{7}+\alpha\\ y=-\frac{20}{7}+5\alpha\\ z=7\alpha\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{l}A_r=(-\frac{11}{7},-\frac{20}{7},0)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1,-5,-7)\end{array}\right.$$

**Ejercicio 42** *Hallar la ecuación normal del plano que pasa por los puntos* $A(0,0,2),B(-8,0,0),C(0,6,0)$ *y hallar los cosenos directores del vector normal al mismo*

Del plano conocemos $\left\{\begin{array}{l}A(0,0,2)\\ B(-8,0,0)\\ C(0,6,0)\end{array}\right.\ {}^5\!\rightarrow\left\{\begin{array}{l}A(0,0,2)\\ \overrightarrow{AB}(-8,0,-2)\\ \overrightarrow{AC}(0,6,-2)\end{array}\right.$

Como ya sabemos el plano también queda determinado de forma única si conozco un vector ortogonal[6] y un punto $A$

[5] Los vectores directores de este plano pueden ser $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

[6] Un vector ortogonal al plano será $\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

$$\pi \equiv \begin{cases} A(0,0,2) \\ \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -8 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 12\overrightarrow{i} - 16\overrightarrow{j} - 48\overrightarrow{k} \end{cases}$$

Como $\pi \equiv \begin{cases} A(0,0,2) \\ \frac{1}{4}\overrightarrow{n_\pi} = (12,-16,-48) \end{cases} \rightarrow 12x-16y-48(z-2)=0$ dividiendo la ecuación por 4 tendremos

$$3x-4y-12z+24=0$$

La ecuación normal del plano es $\dfrac{3x-4y-12z+24}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-12)^2}}=0$

$$\frac{3x-4y-12z+24}{13}=0$$

El vector $\overrightarrow{h}(\frac{3}{13},-\frac{4}{13},-\frac{12}{13})$ es un vector ortogonal al plano y además unitario. Dicho vector ha de coincidir con el vector $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\delta)$ siendo $\alpha = ang(\overrightarrow{h},\overrightarrow{i}), \beta = ang(\overrightarrow{h},\overrightarrow{j}), \gamma = ang(\overrightarrow{h},\overrightarrow{k})$

De donde $\rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{3}{13} \\ \cos\beta = -\frac{4}{13} \\ \cos\gamma = -\frac{12}{13} \end{cases}$

**Ejercicio 43** *Hallar la ecuación de la recta , r ,que pasa por $P(1,1,-3)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x-2y+z+2=0$*

Como la recta ha de ser perpendicular al plano; entonces como vector director de $r$ puedo considerar el vector normal del plano $\pi$ dado

$r \equiv \begin{cases} P(1,1,-3) \\ v_r = n_\pi = (1,-2,1) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1-2\alpha \\ z = -3+\alpha \end{cases}$

Su ecuación continua es $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$

Sus ecuaciones cartesianas reducidas en $x$ $r \equiv \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} \\ \frac{x-1}{1} = \frac{z+3}{1} \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-z-4=0 \end{cases}$$

**Ejercicio 44** *Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(1,0,2)$ y es paralela a los planos $\pi \equiv x-2y+3z+1=0$ y $\pi' \equiv 2x-3y+z+6=0$*

Como la recta es paralela a los planos $\pi$ y $\pi'$ también es paralela a la recta definida por estos dos planos $s = \pi \cap \pi' \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 6 = 0 \end{array} \right.$

Por lo tanto el vector director de $r \rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} =$[7] $\overrightarrow{n_\pi} \wedge \overrightarrow{n_{\pi'}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$ $7\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

Como $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1,0,2) \\ \overrightarrow{v_r}(7,5,1) \end{array} \right. \rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 7\alpha \\ y = 5\alpha \\ z = 2 + \alpha \end{array} \right.$

Su ecuación continua es $r \equiv \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-2}{1}$

Sus ecuaciones cartesianas reducidas en $x$ $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y}{5} \\ \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{z-2}{1} \end{array} \right.$

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 5x - 7y - 5 = 0 \\ x - 7z + 13 = 0 \end{array} \right.$$

**Ejercicio 45** *Halla la ecuación de un plano que pasa por $P(1,1,1)$ y es perpendicular a la recta determinada por los puntos $A(2,0,4)$, $B(8,1,6)$.*

Como el plano ha de ser perpendicualar a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(2,0,4) \\ B(8,1,6) \end{array} \right.$ ; su vector normal será el vector $\overrightarrow{AB} = (6,1,2)$ (vector director de $r$)

La ecuación cartesiana de todos los planos perpendiculares al vector $\overrightarrow{AB}$ es de la forma
$$6x + y + 2z = k$$

De todos, sólo nos interesa el que pasa por $P(1,1,1)$

$$6 + 1 + 2 = k \rightarrow k = 9$$

El plano pedido es
$$6x + y + 2z = 9$$

**Ejercicio 46** *Hallar el simétrico $A'$ del punto $A(2,2,1)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$. Determina también la distancia de $A$ al plano $\pi$*

Para calcular el simétrico del punto $A$ respecto del plano $\pi$ tendremos que determinar:

- –
    - 1) La recta $r$ perpendicular a $\pi$ y que pasa por $A$
    - 2) La proyección ortogonal de $A$ sobre $\pi \rightarrow H = r \cap \pi$

[7] El vector director de $s$ ha de ser un vector perpendicular a la vez a los vectores $\overrightarrow{n_\pi}$ y $\overrightarrow{n_{\pi'}}$ (vectores ortogonales a los planos $\pi$ y $\pi'$)

$*$ 3) Has de saber que $H$ es el punto medio del segmento de extremos $A$ y $A'$ ($\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HA'}$)

– Paso 1) Como $r$ es perpendicular a $\pi$ y pasa por $A \to r \equiv \begin{cases} A(2,2,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2,1) \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

– Paso 2) $H = r \cap \pi \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \\ x - 2y + z + 6 = 0 \end{cases}, \to \alpha = -\frac{5}{6}$

Sustituyendo este parámetro en las ecuaciones paramétricas de $r$

$$H = \left(\frac{7}{6}, \frac{22}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

- – Paso 3) Como $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HA'} \to \left(-\frac{5}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{5}{6}\right) = \left(a - \frac{7}{6}, b - \frac{22}{6}, c - \frac{1}{6}\right)$ donde $A'(a,b,c)$

$\begin{array}{l} a - \frac{7}{6} = -\frac{5}{6} \\ b - \frac{22}{6} = \frac{10}{6} \\ c - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6} \end{array} \to A'(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{2}{3})$

Como también nos piden $d(A,\pi) = d(A,H) = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{10}{6}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

*Nota1:* También puedes calcular la distancia del Punto $A$ al plano $\pi$ utilizando la siguiente fórmula

$$d(A,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{AA_\pi} \cdot \overrightarrow{n_\pi}\right|}{\|\overrightarrow{n_\pi}\|}$$

donde $A_\pi$ es un punto cualquiera del plano $\pi$
Calculemos un punto $A_\pi$ del plano $\pi$.Si $x = 0$ e $y = 0 \to z = -6$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AA_\pi} = (-2,-2-7) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (1,-2,1) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AA_\pi} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = -2 + 4 - 7 = -5$

$\|\overrightarrow{n_\pi}\| = \|(1,2,-1)\| = \sqrt{6}$

Por lo tanto $d(A,\pi) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AA_\pi} \cdot \overrightarrow{n_\pi}\right|}{\|\overrightarrow{n_\pi}\|} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

*Nota2:* También puedes calcular la distancia del Punto $A$ al plano $\pi$ utilizando la siguiente fórmula

$$d(A,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

donde $A(x_0, y_0, z_0)$ y $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$d(A(2,2,1), \pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0) = \dfrac{|2 - 2(2) + 1 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

*Nota3:* También puedes calcular la distancia del Punto $A$ al plano $\pi$ utilizando la siguiente fórmula

$$d(A, \pi) = \frac{\left|[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{AA_\pi}]\right|}{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\|}$$

donde $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$son los vectores directores de $\pi$ y $A_\pi$ es un punto cualquiera de éste

Hazlo tú

**Ejercicio 47** *Halla el simétrico del punto* $A(2,0,3)$ *respecto de la recta* $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ *.Calcula también la distancia del punto A a la recta dada*

Para calcular el simétrico del punto $A$ respecto dela recta $r$ tendremos que determinar:

- – ∗ 1) El plano $\pi$ perpendicular a la recta $r$ y que pasa por $A$
    - ∗ 2) La proyección ortogonal de $A$ sobre $r \to H = r \cap \pi$
    - ∗ 3) Has de saber que $H$ es el punto medio del segmento de extremos $A$ y $A'$ ($\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HA'}$)
  - – Paso 1) Como $\pi$ es perpendicular a $r$ y pasa por $A \to \pi \equiv \begin{cases} A(2,0,3) \\ \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_r}(1,1,2 \end{cases}$

    siendo $\overrightarrow{n_\pi}$ el vector ortogonal a $\pi$

$$\pi \equiv 1(x-2) + 1(y-0) + 2(z-3) = 0$$

$$x + y + 2z - 8 = 0$$

  - – Paso 2) $H = r \cap \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 + 2\alpha \\ x + y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \to \alpha = \frac{1}{2}$

Sustituyendo este parámetro en las ecuaciones paramétricas de $r$

$$H = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$$

- – Paso 3) Como $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HA'} \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -1\right) = (a - \frac{3}{2}, b - \frac{5}{2}, c - 2)$

$$\left.\begin{array}{l} a - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ b - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \\ c - 2 = -1 \end{array}\right\} \to A'(1,5,1)$$

– Como también nos piden $d(A,r) = d(A,H) = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

*Nota1:* También puedes calcular la distancia del punto $A$ a la recta $r$ utilizando la siguiente fórmula

$$d(A,\pi) = \frac{\left\|\overrightarrow{AA_r} \wedge \overrightarrow{v_r}\right\|}{\|\overrightarrow{v_r}\|}$$

donde $A_r$ es un punto de $r$ y $\overrightarrow{v_r}$ su vector director

Como $r \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 + 2\alpha \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} A_r(1,2,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,1,2) \end{array}$

$\overrightarrow{AA_r} \wedge \overrightarrow{v_r} = (-1,2,-2) \wedge (1,1,2) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}$

$$\text{Como} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AA_r} \wedge \overrightarrow{v_r} = (6,0,-3) \rightarrow \left\|\overrightarrow{AA_r} \wedge \overrightarrow{v_r}\right\| = \sqrt{45} \\ \|\overrightarrow{v_r}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \end{array} \right\}$$

$$d(A,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{AA_r} \wedge \overrightarrow{v_r}\right|}{\|\overrightarrow{v_r}\|} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

**Ejercicio 48** *Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(2,1,0)$ *y*$B(0,1,3)$ *y es perpendicular al plano* $2x - y + z - 4 = 0$

Del plano ya conocemos dos puntos $A$ y $B$ y como además sabemos que es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z - 4 = 0$; entonces dos vectores directores de éste son $\overrightarrow{AB} = (-2,0,3)$ y $\overrightarrow{n_\pi} = (2,-1,1)$ (vector perpendicualar a $\pi$)

Como de este plano ya conocemos $\pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(2,1,0) \\ \overrightarrow{AB} = (-2,0,3) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (2,-1,1) \end{array} \right.$

Si deseamos obtener su ecuación cartesiana, bastará con calcular su vector ortogonal$\overrightarrow{n_{\pi'}} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{n_\pi}$

$\overrightarrow{n_{\pi'}} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{n_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$

$\pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(2,1,0) \\ \overrightarrow{n_{\pi'}} = (3,8,2) \end{array} \right. \rightarrow 3(x-2) + 8(y-1) + 2z = 0$

$$\pi' \equiv 3x + 8y + 2z = 14$$

**Ejercicio 49** *Halla la proyección ortogonal del punto* $P(1,0,4)$ *sobre el plano* $2x - y + z + 2 = 0$

Para calcular la proyección ortogonal del punto $P$ respecto del plano $\pi$ tendremos que determinar:

- – ∗ 1) La recta $r$ perpendicular a $\pi$ y que pasa por $P$
    ∗ 2) La proyección ortogonal de $P$ sobre $\pi \to H = r \cap \pi$
  – Paso 1) Como $r$ es perpendicular a $\pi$ y pasa por $P \to r \equiv \begin{cases} P(1,0,4) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,-1,1) \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 4 + \alpha \end{cases}$$

  – Paso 2) $H = r \cap \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 4 + \alpha \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases} , \to \alpha = -\frac{4}{3},$

Sustituyendo este parámetro en las ecuaciones paramétricas de $r$

$$H = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

**Ejercicio 50** *Halla la ecuación de la proyección de la recta* $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$ *sobre el plano* $\pi \equiv x + 2y - z + 4 = 0$

La proyección de una recta $r$ sobre un plano $\pi$ es otra recta $r'$ definida como intersección de los planos $\pi$ y $\pi'$; siendo $\pi'$ el plano que contiene a $r$ y es perpendicualar a $\pi \to r' = \pi \cap \pi'$

Por esta razón; empezamos calculando el plano $\pi'$

Del plano ya conocemos un punto $A_r$ y un vector director $\overrightarrow{v_r}$ (al estar $r$ contendida en $\pi'$), y como además sabemos que es perpendicular al plano $\pi \equiv x + 2y - z + 4 = 0$; entonces el otro vector director es $\overrightarrow{n_\pi} = (1, 2, -1)$ (vector perpendicualar a $\pi$)

$$\pi' \equiv \begin{cases} A_r(0,1,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,1,3) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (1,2,-1) \end{cases}$$

Su vector ortogonal será $\overrightarrow{n_{\pi'}} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{n_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k},$

determinant: $-7i + 5j + 3k$

$$\pi' \equiv \begin{cases} A(0,1,0) \\ \overrightarrow{n_{\pi'}} = (-7,5,3) \end{cases} \to -7x + 5(y-1) + 3z = 0$$

$$\pi' \equiv -7x + 5y + 3z = 5$$

La recta pedida es

$$r' = \pi \cap \pi' = \begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ -7x + 5y + 3z = 5 \end{cases}$$

**Ejercicio 51** *Hallar el ángulo que forman las rectas* $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = -5 + \alpha \\ z = 4 + 3\alpha \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 6\beta \\ y = -7 - 4\beta \\ z = 2\beta \end{cases}$ *averiguando previamente su posición relativa*

$$\left.\begin{array}{l} r\begin{cases} A_r(2,-5,4) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,1,3) \end{cases} \\ \\ s\begin{cases} A_s(-1,-7,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (6,-4,2) \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 2 \text{ ya que ambos no son paralelos} \\ \text{Determinemos el vector } \overrightarrow{A_rA_s}(-3,-2,-4) \\ Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -126 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$r$ y $s$ se cruzan

Para determinar el ángulo entre las rectas utilizamos

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|} = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^o$$

**Ejercicio 52** *Hallar el ángulo que forman las rectas* $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 8\beta \\ y = 2 - 4\beta \\ z = 3\beta \end{cases}$ *y* $s \equiv \begin{cases} x = -8\alpha \\ y = 2 + 4\alpha \\ z = 3 - 3\alpha \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} r\begin{cases} A_r(1,2,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (8,-4,3) \end{cases} \\ \\ s\begin{cases} A_s(0,2,3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-8,4,3) \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 1 \text{ ya que ambos son paralelos} \\ \text{Determinemos el vector } \overrightarrow{A_rA_s}(-1,0,3) \\ Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = 2 \text{ ya que } \overrightarrow{v_r} \text{ y } \overrightarrow{A_rA_s} \text{ no son paralelos} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$r$ y $s$ son paralelas y distintas

Para determinar el ángulo entre las rectas utilizamos

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|} = \frac{89}{\sqrt{89}\sqrt{89}} = 1 \rightarrow \alpha = 0^o$$

**Ejercicio 53** *Averiguar el ángulo que forman los planos* $2x + 4y - z + 8 = 0$ *y* $x + y + 6z - 6 = 0$

Para determinar el ángulo entre estos dos planos utilizaremos la relación $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{n_{\pi'}}|}{\|\overrightarrow{n_\pi}\| \cdot \|\overrightarrow{n_{\pi'}}\|}$ donde $\overrightarrow{n_\pi}$ y $\overrightarrow{n_{\pi'}}$ son los vectores ortogonales a cada plano

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n_\pi}(2,4,-1) \\ \overrightarrow{n_{\pi'}}(1,1,6) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \|\overrightarrow{n_\pi}\| = \sqrt{21}\ ,\ \|\overrightarrow{n_{\pi'}}\| = \sqrt{38} \\ \overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{n_{\pi'}} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha = 0; \alpha = 90^o$$

**Ejercicio 54** *Hallar el ángulo que forma la recta* $r \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 2 + 4\alpha \end{cases}$ *y el plano* $5x + 4y - 2z + 5 = 0$

Para determinar el ángulo entre una recta y un plano utilizaremos la relación $\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}|}{\|\overrightarrow{n_\pi}\|\cdot\|\overrightarrow{v_r}\|}$ donde $\overrightarrow{n_\pi}$ es el vector ortogonal al plano y $\overrightarrow{v_r}$ el vector director de la recta

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_\pi}(5,4,-2)\\ \overrightarrow{v_r}(2,3,4)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\|\overrightarrow{n_\pi}\| = \sqrt{45}\ ,\ \|\overrightarrow{v_r}\| = \sqrt{29}\\ \overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}} = 14\end{array}\right\}$$

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}|}{\|\overrightarrow{n_\pi}\|\cdot\|\overrightarrow{v_r}\|} = \frac{14}{\sqrt{1305}};\alpha = \arcsin\left(\frac{14}{\sqrt{1305}}\right) =$$

**Ejercicio 55** *Hallar la distancia del punto* $P(2,4,1)$ *al plano* $3x+4y+12z-7=0$

*Primer procedimiento*
$d(P,\pi) = d(P,H) = \left\|\overrightarrow{PH}\right\|$ siendo $H$ la proyección ortogonal de $P$ sobre $\pi$
Para calcular $H$ realizaremos lo siguiente

- –
    - ∗ 1) La recta $r$ perpendicular a $\pi$ y que pasa por $A$
    - ∗ 2) La proyección ortogonal de $P$ sobre $\pi \rightarrow H = r\cap\pi$
  - – Paso 1) Como $r$ es perpendicular a $\pi$ y pasa por $P \rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l}P(2,4,1)\\ \overrightarrow{v_r} = (3,4,12)\end{array}\right.$

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l}x = 2+3\alpha\\ y = 4+4\alpha\\ z = 1+12\alpha\end{array}\right.$$

  - – Paso 2) $H = r\cap\pi \equiv \left\{\begin{array}{l}x = 2+3\alpha\\ y = 4+4\alpha\\ z = 1+12\alpha\\ 3x+4y+12z-7=0\end{array}\right. , \rightarrow \alpha = -\frac{27}{169}$

Sustituyendo este parámetro en las ecuaciones paramétricas de $r$

$$H = \left(\frac{257}{169},\frac{568}{169},-\frac{155}{169}\right)$$

El vector $\overrightarrow{PH} = \left(-\frac{81}{169},-\frac{108}{169},-\frac{324}{169}\right) \rightarrow \left\|\overrightarrow{PH}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{81}{169}\right)^2+\left(-\frac{108}{169}\right)^2+\left(-\frac{324}{169}\right)^2} =: \frac{27}{13}$

*Nota1:* También puedes calcular la distancia del Punto $P$ al plano $\pi$ utilizando la siguiente fórmula

$$d(P,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{PA_\pi}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\|\overrightarrow{n_\pi}\|}$$

donde $A_\pi$ es un punto cualquiera del plano $\pi$ y $\overrightarrow{n_\pi}$ es el vector ortogonal al plano dado

Calculemos un punto $A_\pi$ del plano $\pi$.Si $x=0$ e $y=0 \rightarrow z=\frac{7}{12}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PA_\pi}=(-2,-4-\frac{5}{12})\\ \overrightarrow{n_\pi}=(3,4,12)\end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PA_\pi}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=-6-16-5=-27$$

$\|\overrightarrow{n_\pi}\|=\|(3,4,12)\|=\sqrt{169}=13$

Por lo tanto $d(P,\pi)=\dfrac{\left|\overrightarrow{PA_\pi}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\|\overrightarrow{n_\pi}\|}=\dfrac{27}{13}$

*Nota2:* También puedes calcular la distancia del Punto $P$ al plano $\pi$ utilizando la siguiente fórmula

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

donde $P(x_0,y_0,z_0)$ y $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$

$d(P(2,4,1),\pi\equiv 3x+4y+12z-7=0)=\dfrac{|6+16+12-7|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\dfrac{27}{13}$

*Nota3:* También puedes calcular la distancia del Punto $P$ al plano $\pi$ utilizando la siguiente fórmula

$$d(P,\pi)=\frac{\left|[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{PA_\pi}]\right|}{\|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\|}$$

donde $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$son los vectores directores de $\pi$ y $A_\pi$ es un punto cualquiera de éste

Hazlo tú

**Ejercicio 56** *Hallar la distancia que hay entre los planos* $2x-y+4z=3$ *y* $-4x+2y-8z=-7$

Como estos dos planos son paralelos y distintos, para calcular la distancia entre ellos utilizaremos la relación:

$$d(\pi,\pi')=d(A_{\pi'},\pi)$$

Para determinar un punto del plano $\pi'$ . Si $x=0$ e $y=0\rightarrow -8z=-7\rightarrow z=\frac{7}{8}$

Como $\begin{array}{l}A_{\pi'}=(0,0,\frac{7}{8})\\ \pi\equiv 2x-y+4z-3=0\end{array} \rightarrow d(\pi,\pi')=d(A_{\pi'},\pi)=\dfrac{\left|4\cdot\frac{7}{8}-3\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{1}{42}\sqrt{21}$

*Nota1*

También se puede calcular la distancia entre los planos paralelos y distintos $Ax+By+Cz+D=0$ y $Ax+By+Cz+D'=0$ utilizando la relación:

$$d(\pi,\pi')=\frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 2x - y + 4z - 3 = 0 \\ \pi' \equiv -4x + 2y - 8z + 7 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi \equiv 2x - y + 4z - 3 = 0 \\ \pi' \equiv 2x - y + 4z - \dfrac{7}{2} = 0\end{array}\right\}$$

$$d(\pi, \pi') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left|-3 + \dfrac{7}{2}\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} =: \tfrac{1}{42}\sqrt{21}$$

**Ejercicio 57** *Comprobar que la recta* $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 7 - \alpha \end{array}\right.$ *es paralela al plano* $x + 2y + 3z = 0$ *y hallar la distancia de la recta al plano*

Una recta y un plano son paralelos si y sólo si el vector director de la recta y el vector normal del plano son vectores perpendicuares

Como $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1)$ y$\overrightarrow{n_\pi}(1, 2, 3)$ y además $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 1 + 2 - 3 = 0 \rightarrow r$ y $\overrightarrow{n_\pi}$ son paralelos

Al ser recta y plano paralelos entonces:

$d(r, \pi) = d(A_r(3, 2, 7), \pi \equiv x + 2y + 3z = 0) = \dfrac{|3 + 4 + 21|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} =: 2\sqrt{14}$

**Ejercicio 58** *Hallar la distancia entre las rectas paralelas r y s en cada caso*

a) $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = 4 - \alpha \end{array}\right. \qquad s \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 2 - 2t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{array}\right.$

Solucion a)

Como $r$ y $s$ son paralelas entonces $d(r, s) = d(A_r, s)$

*Primer procedimiento Utilizando el producto vectorial*

$$d(r, s) = \frac{\left\|\overrightarrow{A_sA_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right\|}{\|\overrightarrow{v_s}\|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{A_sA_r} = (-1, 2, 3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-2, 3, -1)\end{array}\right. \rightarrow \overrightarrow{A_sA_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1\end{array}\right| = -11\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

$d(r, s) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{A_sA_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right\|}{\|\overrightarrow{v_s}\|} = \dfrac{\sqrt{(-11)^2 + (-7)^2 + 1^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \tfrac{3}{14}\sqrt{266}$

*Segundo procedimiento*

$d(r, s) = d(A_r, s) = d(A_r, H)$ siendo $H$ la proyección ortogonal de $A_r$ sobre la recta $s$

Hazlo tú

b) $r \equiv \dfrac{x - 1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z + 1}{3} \qquad s \equiv \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y - 2}{1} = \dfrac{z - 2}{3}$

Solucion b)

Como $r$ y $s$ son paralelas entonces $d(r, s) = d(A_r, s)$

*Primer procedimiento Utilizando el producto vectorial*

$$d(r,s)=\frac{\left\|\overrightarrow{A_sA_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\right\|}{\|\overrightarrow{v_s}\|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{A_sA_r}=(1,-2,-3)\\ \overrightarrow{v_s}=(-2,1,3)\end{array}\right.\rightarrow\overrightarrow{A_sA_r}\wedge\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&-2&-3\\-2&1&3\end{vmatrix}=-3\,\overrightarrow{i}+3\,\overrightarrow{j}-3\,\overrightarrow{k}$$

$$d(r,s)=\frac{\left\|\overrightarrow{A_sA_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\right\|}{\|\overrightarrow{v_s}\|}=\frac{\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2}}{\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}}=\tfrac{3}{14}\sqrt{42}$$

*Segundo procedimiento*

$d(r,s)=d(A_r,s)=d(A_r,H)$ siendo $H$ la proyección ortogonal de $A_r$ sobre la recta $s$

Hazlo tú

**Ejercicio 59** *Probar que las rectas r y s se cruzan hallando la mínima distancia entre ellas en cada caso*

$$\text{a) } r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}\qquad s\equiv\left\{\begin{array}{l}x=2+3\alpha\\y=4+\alpha\\z=-1-\alpha\end{array}\right.$$

Solución a)

$$\left.\begin{array}{l}r\left\{\begin{array}{l}A_r(1,2,3)\\\overrightarrow{v_r}=(2,-1,1)\end{array}\right.\\ \\ s\left\{\begin{array}{l}A_s(2,4,-1)\\\overrightarrow{v_s}=(3,1,-1)\end{array}\right.\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}Rang(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s})=2\text{ ya que ambos no son paralelos}\\ \text{Determinemos el vector }\overrightarrow{A_rA_s}(1,2,-4)\\ Rang(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s})=3\text{ ya que }\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&1&-1\\1&2&-4\end{vmatrix}=-10\end{array}\right\}\rightarrow$$

$r$ y $s$ se cruzan

*Primer procedimiento para calcular la distancia entre ellas*

$$d(r,s)=\frac{\left|[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\|}$$

$$\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\2&-1&1\\3&1&-1\end{vmatrix}=5\,\overrightarrow{j}+5\,\overrightarrow{k}\rightarrow\|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\|=5\sqrt{2}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\|}=\frac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

*Segundo procedimiento para calcular la distancia entre ellas*

Como las rectas se cruzan; entonces

$d(r,s)=d(A_s,\pi)$ siendo $\pi$ el plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$

$$\pi\equiv\left\{\begin{array}{l}A_r=(1,2,3)\\\overrightarrow{v_r}=(2,-1,1)\\\overrightarrow{v_s}=(3,1,-1)\end{array}\right.\rightarrow\pi\equiv\left\{\begin{array}{l}A_r=(1,2,3)\\\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}=(0,5,5)\text{ (vector ortogonal)}\end{array}\right.$$

$\pi\equiv 5(y-2)+5(z-3)=0\rightarrow\pi\equiv y+z-5=0$

$$d(r,s) = d(A_s(2,4,-1), \pi \equiv y + z - 5 = 0) = \frac{|4-1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Intenta resolver el mismo problema calculando los puntos de la perpendicular común

b)$r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son

$r \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = \beta \end{cases}$

Solución b)

$$\left. \begin{array}{l} r\begin{cases} A_r(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,0,1) \end{cases} \\ \\ s\begin{cases} A_s(0,4,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (0,0,1) \end{cases} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) = 2 \text{ ya que ambos no son paralelos} \\ \text{Determinemos el vector } \overrightarrow{A_rA_s}(0,4,0) \\ Rang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}) = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$r$ y $s$ se cruzan

*Primer procedimiento para calcular la distancia entre ellas*

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|}$$

$$\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{j} \rightarrow \|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\| = 1$$

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|} = 4$$

*Segundo procedimiento para calcular la distancia entre ellas*

Como las rectas se cruzan; entonces

$d(r,s) = d(A_s, \pi)$ siendo $\pi$ el plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$

$\pi \equiv \begin{cases} A_r = (0,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,0,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (0,0,1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} A_r = (0,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = (0,-1,0) \text{ (vector ortogonal)} \end{cases}$

$\pi \equiv -y = 0 \rightarrow \pi \equiv y = 0$ (Plano $XZ$)

$$d(r,s) = d(A_s(0,4,0), \pi \equiv y = 0) = \frac{|4|}{\sqrt{1^2}} = 4$$

Intenta resolver el mismo problema calculando los puntos de la perpendicular común

c) $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$

Para empezar determinaremos un punto de $r$ y su vector director $\overrightarrow{v_r}$

Si asignamos a $x$ el valor 0 en las ecuaciones cartesianas de $r$; tendremos $\left.\begin{array}{l}-2y+z+1=0\\-3y+z+4=0\end{array}\right\}$ y resolviendo el sistema tendremos que $A_r(0,3,5)$

El vector director de $r$ es

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_\pi}\wedge\overrightarrow{n'_\pi}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$$

Solución c)

$$\left.\begin{array}{l} r\left\{\begin{array}{l}A_r(0,3,5)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\end{array}\right.\\ \\ s\left\{\begin{array}{l}A_s(0,1,2)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,5)\end{array}\right.\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l} Rang(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s})=2 \text{ ya que ambos no son paralelos}\\ \text{Determinemos el vector } \overrightarrow{A_rA_s}(0,-2,-3)\\ Rang(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s})=3 \text{ ya que } \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 5\\ 0 & -2 & -3\end{vmatrix}=14\end{array}\right\}\rightarrow$$

$r$ y $s$ se cruzan

*Primer procedimiento para calcular la distancia entre ellas*

$$d(r,s)=\frac{\left|[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\|}$$

$$\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=6\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}\rightarrow\|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\|=\sqrt{56}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{A_rA_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\|}=\frac{14}{\sqrt{56}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{14}$$

*Segundo procedimiento para calcular la distancia entre ellas*

Como las rectas se cruzan; entonces

$d(r,s)=d(A_s,\pi)$ siendo $\pi$ el plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$

$$\pi\equiv\left\{\begin{array}{l}A_r=(0,3,5)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,5)\end{array}\right.\rightarrow\pi\equiv\left\{\begin{array}{l}A_r=(1,2,3)\\ \overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}=(6,-4,-2) \text{ (vector ortogonal)}\end{array}\right.$$

$\pi\equiv 6x-4(y-3)-2(z-5)=0\rightarrow\pi\equiv 3x-2y-z+11=0$

$$d(r,s)=d(A_s(0,1,2),\pi\equiv 3x-2y-z+11=0)=\frac{|-2-2+11|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}}=$$
$$\frac{7}{\sqrt{14}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{14}$$

Intenta resolver el mismo problema calculando los puntos de la perpendicular común

# Título: Cálculo diferencial

Autor:© Juan José Isach Mayo

Fecha:04 Septiembre del 2007

# Contents

# Part I

# Límites y continuidad

# Chapter 1

# Límites

## 1.1 Conceptos previos

**Definition 1** *Entorno abierto de centro $x_o$ y radio $r$*

$$E_r(x_o) = \{x \in R \diagup d(x, x_o) < r\} = \{x \in R \diagup |x - x_o| < r\} =$$
$$\{x \in R \diagup -r < x - x_o < r\} = \{x \in R \diagup x_o - r < x < x_o + r\} = ]x_o - r, x_o + r[$$

**Definition 2** *Entorno abierto reducido de centro $x_o$ y radio $r$*

$$E_r^*(x_o) = \{x \in R \diagup 0 < d(x, x_o) < r\} = \{x \in R \diagup 0 < |x - x_o| < r\} =$$
$$\{x \in R \sim \{x_o\} \diagup -r < x - x_o < r\ \} = \{x \in R \sim \{x_o\} \diagup x_o - r < x < x_o + r\}$$
$$= ]x_o - r, x_o + r[ \sim \{x_o\}$$

## 1.2 Límites de una función en un punto

Estudiar el límite de una función en un punto $x_o$ es lo mismo que estudiar el comportamiento de dicha función en un entorno reducido de centro $x_o$ y radio ,$r$, tan pequeño como deseemos ($E_r^*(x_o) =.]x_o - r, x_o + r[ \sim \{x_o\}$)

Las situaciones que se pueden presentar son las siguientes:

### 1.2.1 a)Función convergente en $x_0$ (Puede o no ser continua en $x_o$)

Si $\exists \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$ (*un número* real) diremos que la función es *convergente* en $x_o$

**Definition 3** $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ /si \begin{bmatrix} 0 < |x - x_o| < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \sim \{x_o\} \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

**Condición necesaria y suficiente para que una función sea convergente en $x_0$**

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists \lim_{x\to x_o^+} f(x) \\ \exists \lim_{x\to x_o^-} f(x) \\ \lim_{x\to x_o^+} f(x) = \lim_{x\to x_o^-} f(x) = l \end{pmatrix}$$

*Nota 1:* $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = l$ (*un número* real)

**Definition 4** $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ */si* $\begin{bmatrix} 0 < x - x_o < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ /si } \begin{bmatrix} x \in (x_o, x_o + \delta) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

*Nota 2*: $\lim_{x\to x_o^-} f(x) = l$ (*un número* real)

**Definition 5** $\lim_{x\to x_o^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ */si* $\begin{bmatrix} 0 < x_o - x < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ /si } \begin{bmatrix} x \in (x_o - d, x_o) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

**Ejemplos de funciones convergentes en $x_0$**

**Example 6** *Demuestra que* $\lim_{x\to 2}(3x + 3) = 9$

**Proof.** Dado un $\varepsilon > 0$ ¿para qué $\delta$ se verifica que$|f(x) - 9| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$?

Fíjate que:

$$|3x + 3 - 9| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x - 2)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Por lo tanto; bastaría con escoger como $\delta$ el valor $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ■

*Observa que* $\lim_{x\to 2}(3x + 3) = 9 = f(2)$

**Example 7** *Demuestra que dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^2}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ *se verifica que* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - x^2}{x} = 1$

**Proof.** Dado un $\varepsilon > 0$ ¿para qué $\delta$ se verifica que$|f(x) - 1| < \varepsilon$ siempre que

$0 < |x| < \delta$?

Fíjate que

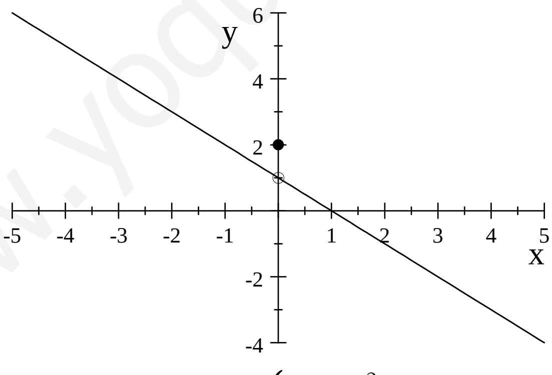
$$|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x - x^2}{x} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-x^2}{x}\right| < \varepsilon$$

Y como $x$ ha de ser no nulo; entonces :$|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$

Por lo tanto; bastaría con escoger como $\delta$ el valor $\delta \leq \varepsilon$

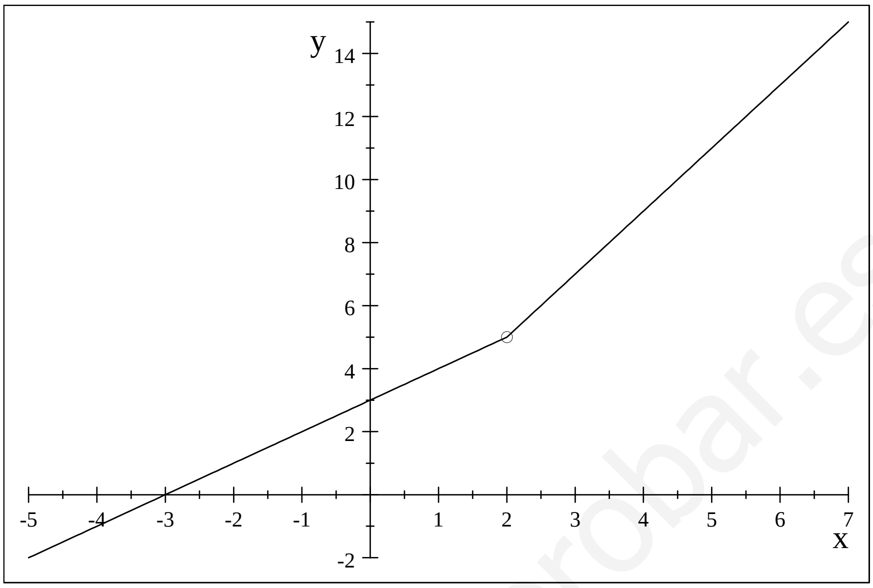
*Luego,* la función dada verifica que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ .*Este límite no coincide con* $f(0) = 2$ ■

La gráfica de la función $f(x)$ coincide con la de la recta $g(x) = 1 - x$ si a esta última le quitamos el punto de coordenadas $(0, 1)$ y le añadimos el punto de coordenadas $(0, 2)$




Gráfica de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^2}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

**Example 8** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 + x & x < 2 \\ 2x + 1 & x > 2 \end{cases}$ comprueba que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$



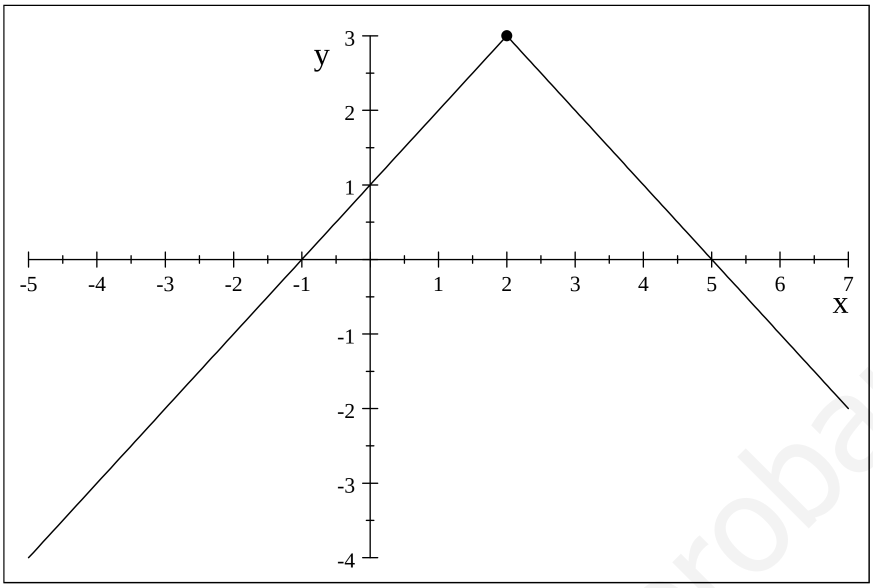

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x+1) = 5 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3+x) = 5$$

Es digno de resaltar, que existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$ y no existe $f(2)$

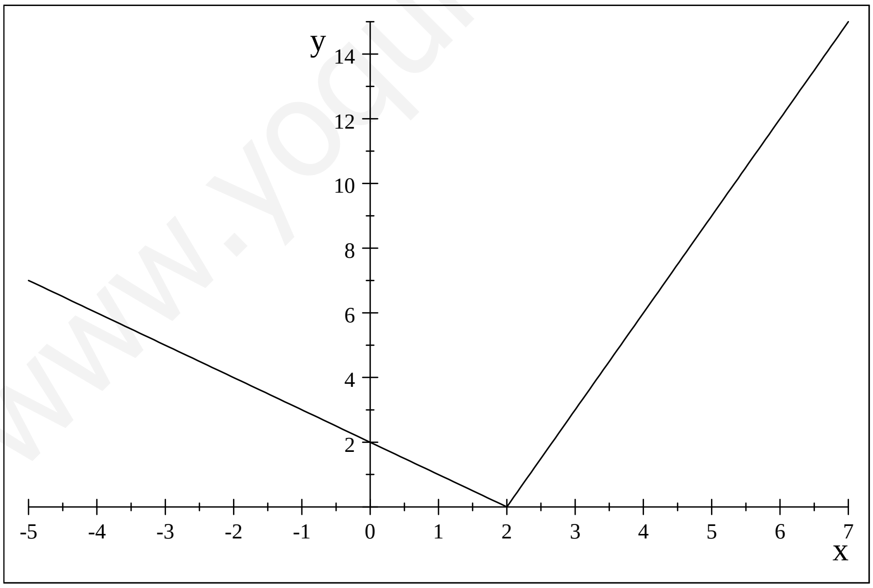
**Example 9** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 3 & x = 2 \\ -x+5 & x > 2 \end{cases}$ comprueba que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5 = f(2)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 3 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x+5) = 3$$

Es digno de resaltar, que existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ y que $f(2) = 3$




**Example 10** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 2 \\ 3x-6 & x > 2 \end{cases}$ comprueba que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$




$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2-x) = 0 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3x-6) = 0$
Es digno de resaltar, que existe $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ y además coincide con $f(2)$

### 1.2.2 b) Función continua en $x_0$

Un tipo muy particular de funciones convergentes en un punto $x_0$, son las funciones continuas. Su definición es la siguiente:

**Definition 11** Sea $f$ una función definida en un intervalo $I$ y sea $x_0 \in I$. Diremos que la función $f$ es continua en un punto $x_0$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

*Nota 1: Las funciones elementales son continuas en todo punto de su dominio. Así pues; para calcular el límite de una función elemental en un punto de su dominio, bastará con sustituir la $x$ por el punto $x_0$.*

*Nota2: Si una función $f$ es continua en $x_0 \Rightarrow f$ es convergente en $x_0$*

*Nota3: Si una función $f$ es convergente en $x_0 \nRightarrow f$ sea continua en $x_0$.*

Existen funciones convergentes en $x_0$ y sin embargo no continuas en él.

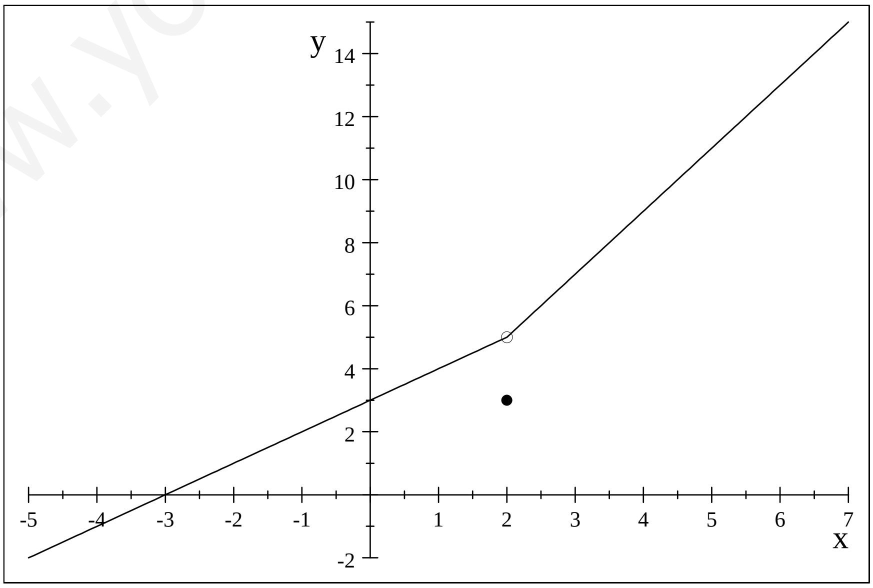
**Example 12** *La función $f(x) = \dfrac{x - x^2}{x}$ en el punto $x = 0$ (Es convergente pero no es continua en $x = 0$)*

El dominio de definición de esta función es $\Re \sim \{0\}$. Luego $f$ ya no puede ser continua en $x = 0$,y sin embargo; si que es convergente en $x = 0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x^2}{x} = 1$ como hemos comprobado con anterioridad

### 1.2.3 c) Función presenta en $x_0$una discontinuidad evitable

*Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = l \neq f(x_o)$ diremos que la función no es continua en $x = x_o$. Diremos que para dicho valor la función presenta una discontinuidad evitable.*

**Example 13** *Un ejemplo de esta situación es la función* $f(x) = \begin{cases} 3 + x & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ 2x + 1 & x > 2 \end{cases}$

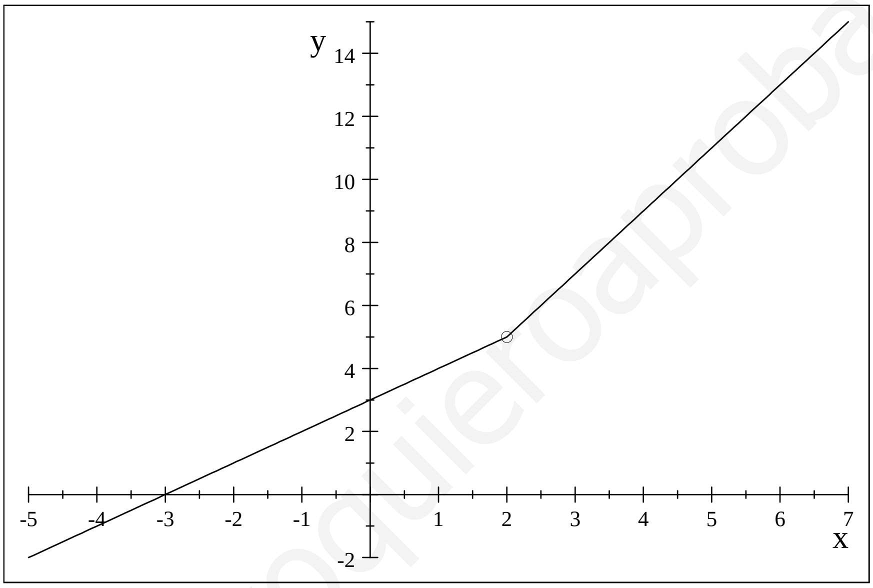


Esta función verifica que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5 \neq f(2) = 3$.

Esta función no es continua para $x = 2$;presentando en dicho punto una discontinuidad evitable

*Si* $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ *y no existe* $f(x_o)$ *la función tampoco es continua en* $x = x_o$. *Diremos que para dicho valor la función presenta una discontinuidad evitable.*

**Example 14** *Un ejemplo de esta situación es la función* $f(x) = \begin{cases} 3+x & x<2 \\ 2x+1 & x>2 \end{cases}$



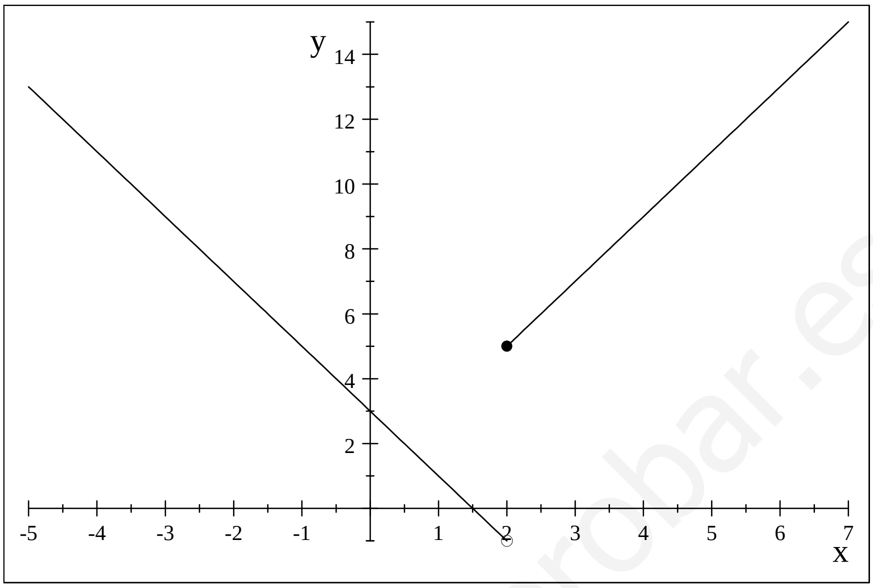

Esta función verifica que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ $y$ no existe $f(2)$.

Esta función no es continua para $x = 2$;presentando en dicho punto una discontinuidad evitable

### 1.2.4 d) Función presenta en $x_0$ una discontinuidad de salto finito

*Nota 6: Si no existe* $\lim_{x \to x_o} f(x)$ *porque sus límites laterales son diferentes y finitos; aunque exista o no* $f(x_o)$ *la función tampoco es continua en* $x = x_o$. *Diremos que para dicho valor la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.*

**Example 15** *Un ejemplo de esta situación es la función* $f(x) = \begin{cases} 3-2x & x<2 \\ 2x+1 & x \geq 2 \end{cases}$




Como $\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x+1) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3-2x) = -1 \end{array}\right\}$ $\to$No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $f(2) = 5$

La función no es continua para $x = 2$. Presenta para $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto finito

### 1.2.5 e) Función divergente a $+\infty$ en $x_0$

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ $\Leftrightarrow$La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical, de ramas convergentes, de la gráfica de la función $f(x)$

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow$La función presenta para $x = x_o$ una discontinuidad de salto infinito

**Definition 16** $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0$*( tan grande como queramos)* $\exists\delta > 0$

$$/si \left[\begin{array}{c} 0 < |x - x_o| < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{array}\right] \Rightarrow f(x) > k$$

$\Leftrightarrow$ $\forall k > 0$( tan grande como queramos) $\exists\delta > 0$/si $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \sim \{x_o\} \Rightarrow f(x) \in (k, +\infty)$

**Example 17** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{7}{(x-2)^2} = +\infty$ *(La recta $x = 2$ es una asíntota vertical (ramas convergentes) de la gráfica de la función )*

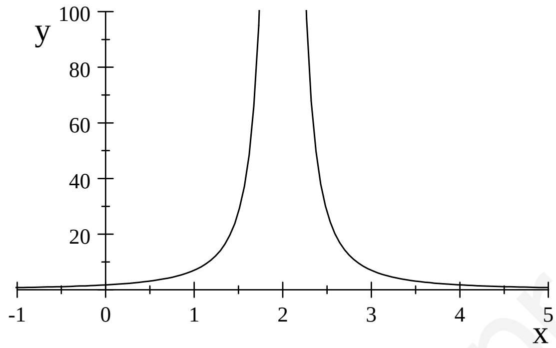
**Proof.** Dado un $K > 0$ ¿para qué $\delta$ se verifica que$f(x) > K$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$?

Fíjate que:

$$\frac{7}{(x-2)^2} > K \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{7}{k} \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\tfrac{7}{k}}$$

Por lo tanto; bastaría con escoger como $\delta$ el valor $\delta \leq \sqrt{\frac{7}{k}}$

Observa que si $K$ es un número positivo dado, cada vez mayor; entonces el $\delta$ encontrado será cada vez más pequeño ■




### 1.2.6 f) Función divergente a -$\infty$ en $x_0$

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ (Función divergente a $-\infty$ en $x_0$)

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ $\Leftrightarrow$La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical (ramas convergentes) de la gráfica de la función $f(x)$ $\Leftrightarrow$

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$La función presenta para $x = x_o$ una discontinuidad de salto infinito

**Definition 18** $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0$*( tan grande como queramos)* $\exists\delta > 0$ */si* $0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$

$\Leftrightarrow$ $\forall k > 0$ ( tan grande como queramos) $\exists\delta > 0$/si $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \sim \{x_o\} \Rightarrow f(x) \in (-\infty, -k)$

**Example 19** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{-7}{(x-2)^2} = -\infty$ *(La recta $x = 2$ es una asíntota vertical, de ramas convergentes, de la gráfica de la función* $f(x) = \frac{-7}{(x-2)^2}$

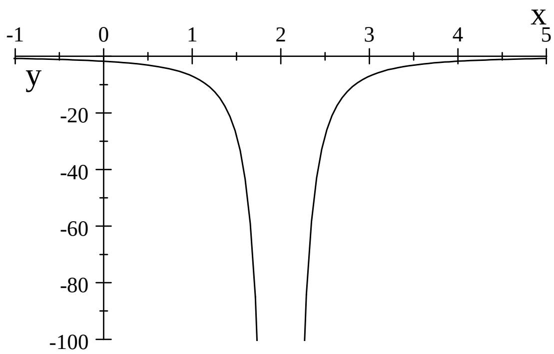
**Proof.** Dado un $K > 0$ ¿para qué $\delta$ se verifica que$f(x) < -K$ siempre que $0 < |x-2| < \delta$?

Fíjate que:

$$\frac{-7}{(x-2)^2} < -K \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{7}{k} \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\tfrac{7}{k}}$$

Por lo tanto; bastaría con escoger como $\delta$ el valor $\delta \leq \sqrt{\frac{7}{k}}$

Observa que si $K$ es un número positivo dado cada vez mayor; entonces el $\delta$ encontrado será cada vez más pequeño ■

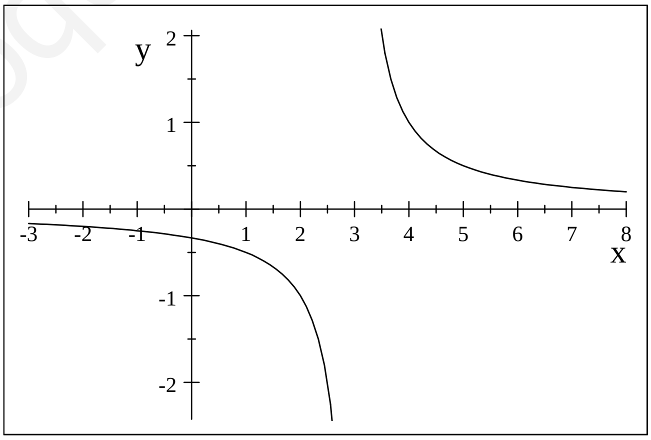



**Asíntota vertical de una función**

**Definition 20** *Si alguno de los límites laterales siguientes* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *ó* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *da* $+\infty$ *ó* $-\infty$ *diremos que la recta* $x = x_0$ *es una asíntota vertical de la función* $y = f(x)$

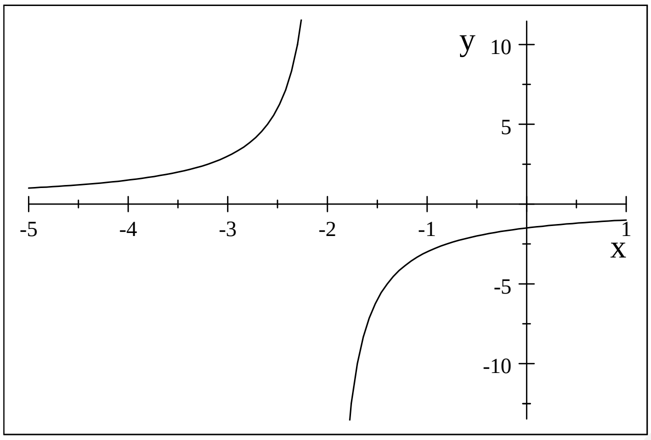
Nota: Pueden existir las siguientes asíntotas verticales:

1. De ramas divergentes $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$(ó $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$)
   La función $y = \frac{1}{x-3}$ presenta en $x = 3$ una discontinuidad de salto infinito. La recta vertical $x = 3$ es una asíntota vertical de ramas divergentes




$\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

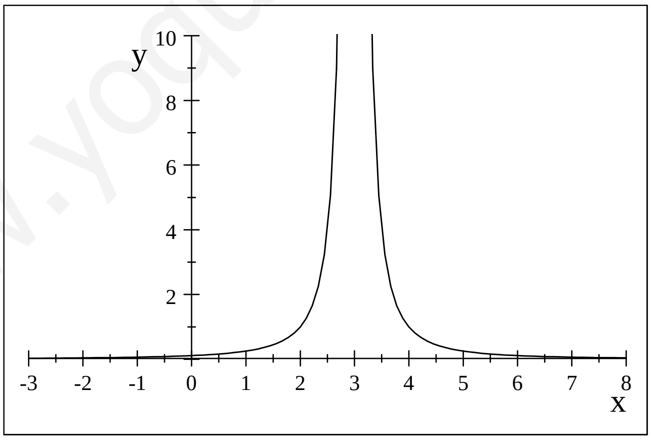
La función $y = \frac{-3}{x+2}$ presenta para $x = -2$ una discontinuidad de salto infinito. La recta vertical $x = -2$ es una asíntota vertical de ramas divergentes




$\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{-3}{x+2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{-3}{x+2} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$

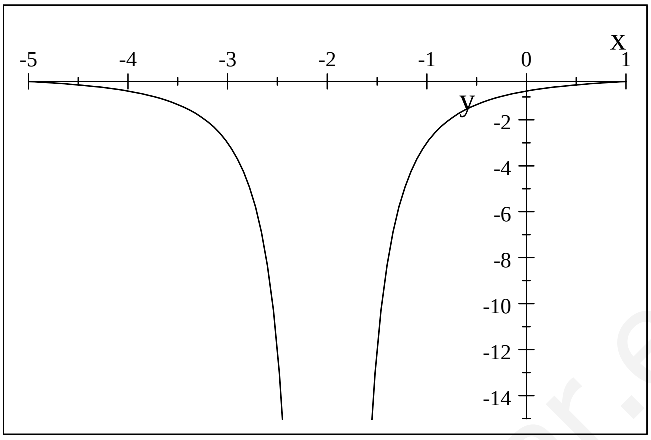
2. De ramas convergentes $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$(ó $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$)

   La función $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ presenta en $x = 3$ una discontinuidad de salto infinito (La función $f$ es divergente a $+\infty$ en $x = 3$). La recta vertical $x = 3$ es una asíntota vertical de ramas convergentes




$\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

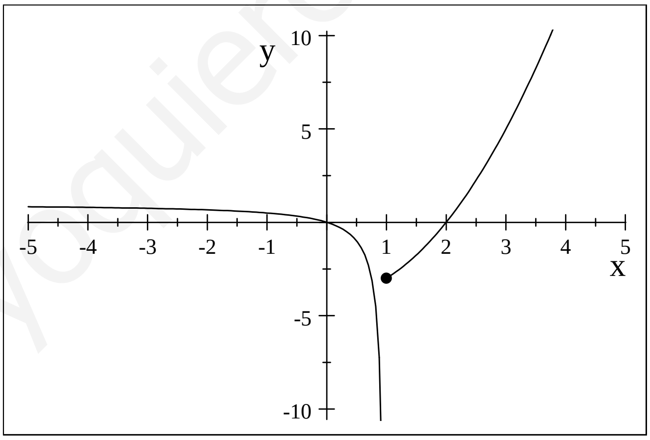
La función $y = \frac{-3}{(x+2)^2}$ presenta para $x = -2$ una discontinuidad de salto infinito (La función $f$ es divergente a $-\infty$ en $x = -2$). La recta vertical $x = -2$ es una asíntota vertical de ramas convergentes




$\lim_{x\to -2^+} \frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x\to -2^-} \frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

3. Como también pueden existir asíntotas verticales, solamente por un lado (Por ejemplo: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ )

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$




$\lim_{x\to -2^+} \frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x\to -2^-} \frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

En todas estas situaciones donde $x = x_o$ *sea una asíntota vertical de la función, diremos que la función para* $x = x_o$ *presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito*

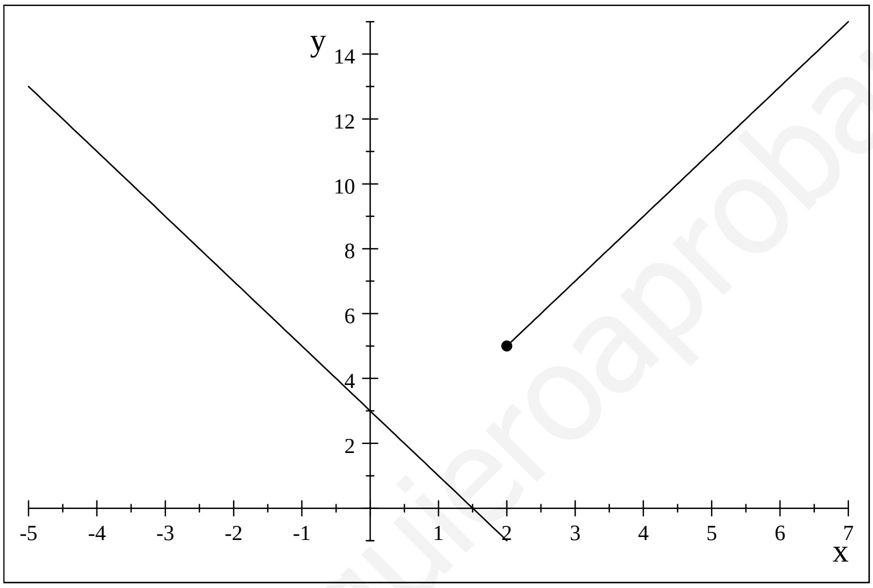
Intenta considerar tú, todas las opciones posibles para que la recta $x = x_0$ sea una asíntota vertical

### 1.2.7 f) Inexistencia del límite

Puede ocurrir que :

1. No exista $\lim_{x \to x_o} f(x)$, debido a que sus límites laterales sean diferentes (Discontinuidad de salto finito)

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x < 2 \\ 2x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

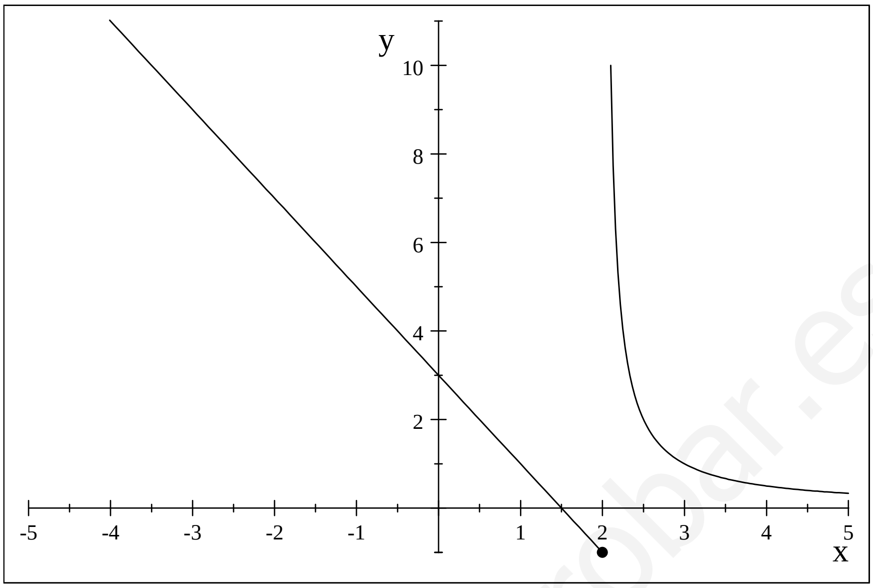



Como $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3 - 2x) = -1$. Entonces; no existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ aunque $f(2) = 5$

La función no es continua para $x = 2$. Presenta para $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto finito

2 No exista $\lim_{x \to x_o} f(x)$,debido a que la recta $x = x_o$ sea asíntota vertical (al menos por un lado)

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x - 2} & x > 2 \end{cases}$$

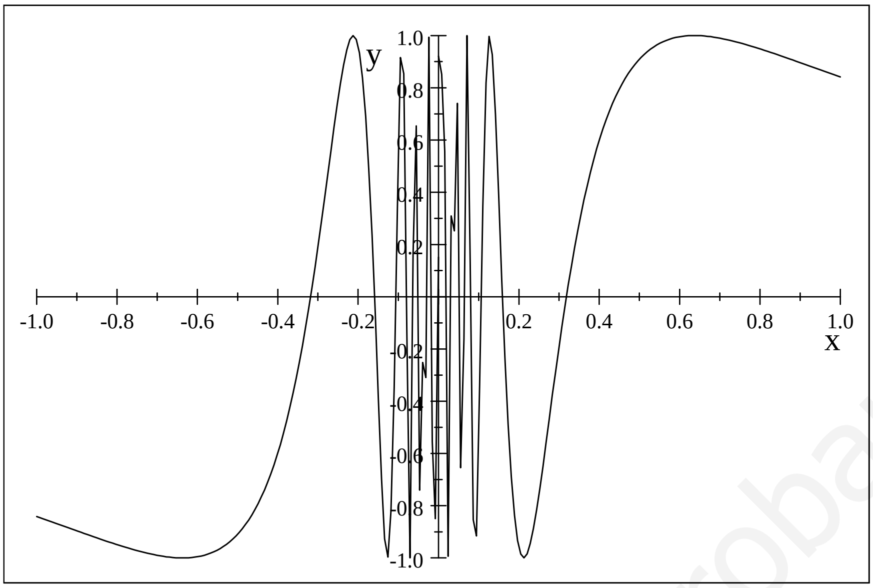



Como $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3-2x) = -1 \end{array}\right\}$ →No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ aunque $f(2) = -1$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical por la derecha de la función. La función presenta para $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto infinito.

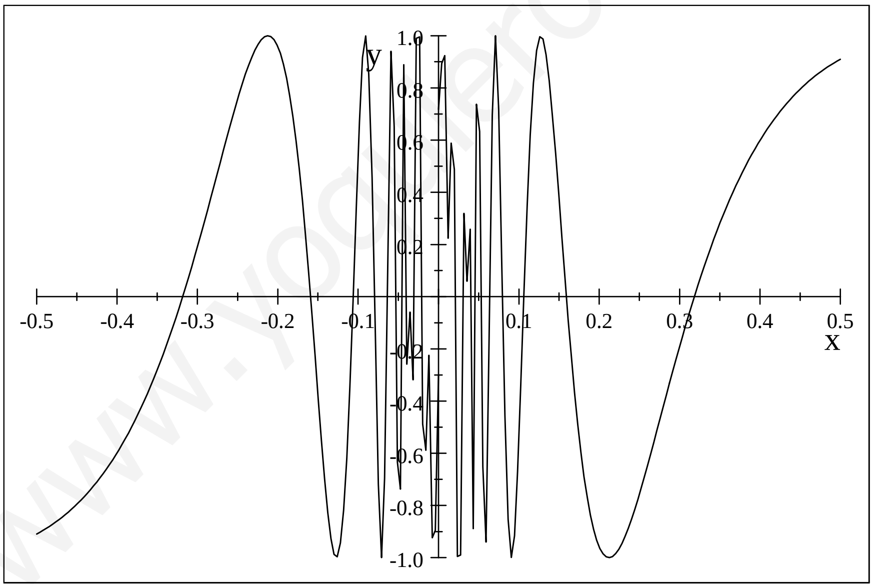
3 No exista $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ debido al comportamiento de la función en un entorno reducido de centro $x_0$ y radio tan pequeño como deseemos (Oscilación brusca)

No existe $\lim\limits_{x\to 0} \sin(\dfrac{1}{x})$.Fíjate como oscila la función en $]-1,1[$




$y = \sin \frac{1}{x}$ en $]-1, 1[$

Fíjate como oscila la función en $]-0.5, 0.5[$




$y = \sin \frac{1}{x}$ en $]-0.5, 0.5[$

## 1.3 Algebra de los límites

Como las funciones se pueden operar entre sí utilizando las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación , división y potencia; pueden darse situaciones en las que el límite se puede calcular directamente; para lo cual tendrás que recordar:

# Límites de sumas,restas, multiplicación y división de funciones

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=b\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\pm g(x)\right)=a\pm b\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=a\cdot b\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{b}\ \text{siempre que } b\neq 0\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\ (a\neq 0)\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\pm\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\begin{cases}+\infty \text{ si } a>0\\ -\infty \text{ si } a<0\end{cases}\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{+\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\dfrac{+\infty}{a}=\begin{cases}+\infty \text{ si } a>0\\ -\infty \text{ si } a<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\mp\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\begin{cases}-\infty \text{ si } a>0\\ +\infty \text{ si } a<0\end{cases}\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{-\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\dfrac{-\infty}{a}=\begin{cases}-\infty \text{ si } a>0\\ +\infty \text{ si } a<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\ (a\neq 0)\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\}$ entonces $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{0}$ .Diremos que la función presenta para $x=x_o$ una discontinuidad de salto infinito. La recta $x=x_o$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Siempre tendremos que estudiar los límites laterales para determinar como son las asíntotas verticales (ramas convergentes , ramas divergentes, etc...)

Las situaciones que se pueden dar en los límites laterales son:

$$\begin{array}{l}\dfrac{a}{0^+}=\begin{cases}+\infty \text{ si } a>0\\ -\infty \text{ si } a>0\end{cases}\\ \dfrac{a}{0^-}=\begin{cases}-\infty \text{ si } a>0\\ +\infty \text{ si } a>0\end{cases}\end{array}$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\}$entonces $\boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}}$ es una indeterminación

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty \text{ o } -\infty\end{array}\right\}$entonces $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty(\text{ o } -\infty)\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\}\text{entonces } \boxed{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)g(x)=0\cdot(+\infty)} \text{ es una inde-}$$

terminación

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty(\text{ o } -\infty)\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\}\text{entonces } \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{+\infty}{0}$$

.Diremos que la función presenta para $x=x_o$ una discontinuidad de salto infinito.

La recta $x=x_o$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Siempre tendremos que estudiar los límites laterales para determinar cómo son las asintotas verticales (ramas convergentes, ramas divergentes etc.)

Las situaciones que se pueden dar en estos límites laterales son:

$$\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$$
$$\frac{+\infty}{0^-}=-\infty$$

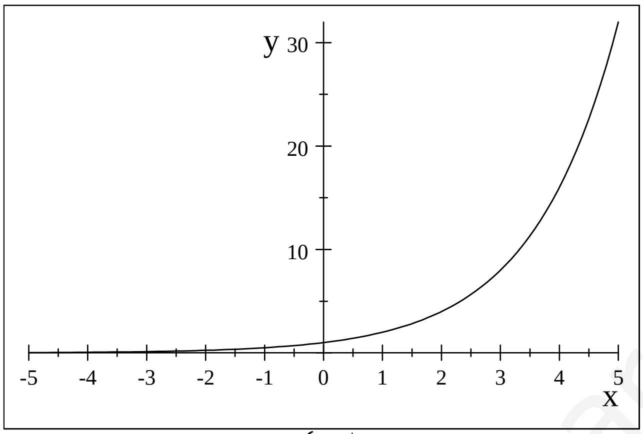
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}\ (f(x)+g(x))=+\infty\\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\ (f(x)-g(x))=+\infty-(+\infty)}\text{ es indeterminación}\\ \lim\limits_{x\to x_o}\ (f(x)\cdot g(x))=+\infty\\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}}\text{ es indeterminación}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}\ (f(x)-g(x))=-\infty\\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\ (f(x)+g(x))=-\infty+\infty)}\text{ es indeterminación}\\ \lim\limits_{x\to x_o}\ (f(x)\cdot g(x))=-\infty\\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{-\infty}{+\infty}}\text{ es indeterminación}\end{array}\right.$$

# Límites de potencias de funciones

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a \text{ si } a\in\mathbb{R}^+\sim\{0,1\}\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=b\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}\ [f(x)]^{g(x)}=a^b$$

Recordando la gráfica de $y=a^x$ cuando $a>1$



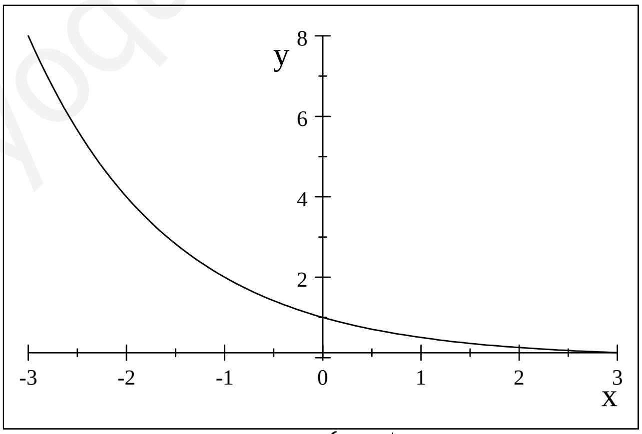

$$\text{Si } a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

Podemos deducir fácilmente que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = a \text{ si } a > 1 \\ \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_o} [f(x)]^{g(x)} = a^{+\infty} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = a \text{ si } a > 1 \\ \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_o} [f(x)]^{g(x)} = a^{-\infty} = 0$$

Si ahora recordamos la gráfica de $y = a^x$ cuando $0 < a < 1$




$$\text{Si } 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = +\infty \end{cases}$$

Podemos deducir que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = a \text{ si } 0 < a < 1 \\ \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_o} [f(x)]^{g(x)} = a^{+\infty} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a \text{ si } 0<a<1\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=a^{-\infty}=+\infty$$

Otros límites de funciones potenciales: (La base no puede tender a un número negativo)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=0^{+\infty}=0^+$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=(0^+)^{-\infty}=\frac{1}{(0^+)^{+\infty}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=k \text{ siendo } k>0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=(0^+)^k=0^+$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=k \text{ siendo } k<0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=(0^+)^k=\frac{1}{(0^+)^{-k}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=k \text{ siendo } k>0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=(+\infty)^k=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=k \text{ siendo } k<0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=(+\infty)^k=\frac{1}{(+\infty)^{-k}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=(+\infty)^{+\infty}=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=(+\infty)^{-\infty}=\frac{1}{(+\infty)^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

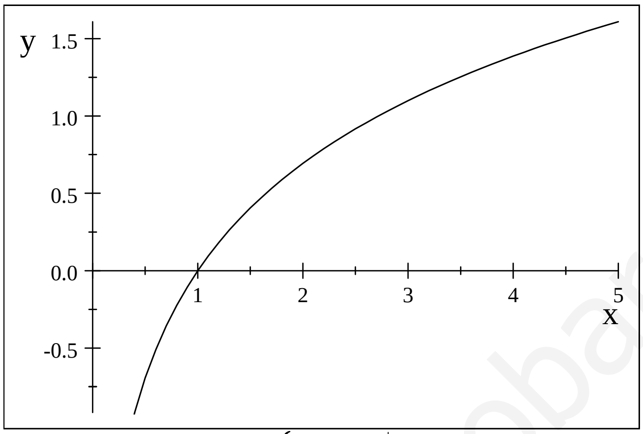
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty \text{ o } -\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=\begin{cases}1^{+\infty}\\ \quad o \qquad \text{indeterminación}\\ 1^{-\infty}\end{cases}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=0^0 \text{ indeterminación}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)]^{g(x)}=(+\infty)^0 \text{ indeterminación}}$$

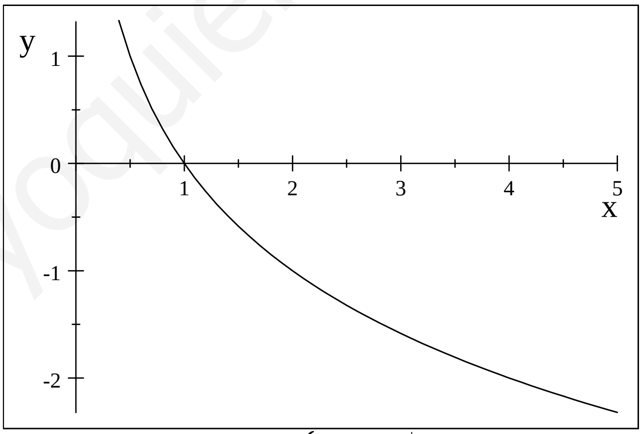
Cuando tengamos que calcular límites de funciones logarítmicas, tendremos presente las siguientes consideraciones:

**a)** Recordando la gráfica de $y = \log_a x$ cuando $a > 1$




$$\text{Si } a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a 0^+ = -\infty \\ \log_a +\infty = +\infty \end{cases}$$

**b)** Recordando la gráfica de $y = \log_a x$ cuando $0 < a < 1$




$$\text{Si } 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a 0^+ = +\infty \\ \log_a +\infty = -\infty \end{cases}$$

Las únicas situaciones en las que no podemos afirmar el valor del límite, son las indeterminaciones siguientes:

$$\frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0 \ y \ \infty^0$$

El objetivo de estos apuntes es saber como eliminar esas indeterminaciones y calcular el correspondiente límite

## 1.4 Técnicas de cálculo de límites de una función en un punto

Si pretendemos calcular el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ siendo $x_0 \in D(f)$ y $f$ una función elemental; bastará con sustituir $x$ por $x_0$ en la función ( las funciones elementales son continuas en todo punto de su dominio Recuerda $f$ es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)

**Example 21** *Dada la función* $f(x) = \frac{4}{x-2}$
*a) Determina su dominio de definición*
*b)Calcula* $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

Solución

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \sim \{2\}$ .La función es continua en $\mathbb{R} \sim \{2\}$

b) Como $f$ es continua en $x = 3 \to \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4}{x-2} = f(3) = \dfrac{4}{3-2} = 4$

Como $f$ es continua en $x = -1 \to \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4}{x-2} = f(-1) = \dfrac{4}{-1-2} = -\dfrac{4}{3}$

Evidentemente, los límites de funciones elementales en puntos de su dominio de definición (o continuidad) son muy sencillos de calcular. Lo complejo será calcular dichos límites cuando $x_0 \notin D(f)$. Para conseguirlo, vamos a ver algunos teoremas que nos permitan calcularlos.

## 1.5 Teoremas para calcular límites:

### 1.5.1 Funciones que coinciden en todos sus puntos menos en uno

**Theorem 22** *(Funciones que coinciden en todos sus puntos menos en uno) Sea $x_0$ un número real y sean $f$ y $g$ dos funciones que coinciden en todos los puntos de un entorno de $x_0$, salvo quizás en $x_0$. Entonces, si existe el limite de una de ellas en $x_0$, también existe el límite de la otra y además son iguales*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in E_\delta^*(x_0) \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \ (\text{o } \lim\limits_{x \to x_0} g(x)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

**Proof.** [Demostración] Supongamos que existe el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ . Entonces, por la definición, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (depende de $\varepsilon$) tal que:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \in & E_\varepsilon(l) \text{ siempre que } x \in \ E_\delta^*(x_0) \\ & \Updownarrow & \\ |f(x) - l| & < & \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - x_0| < \delta \end{array}$$

Ahora bien, como $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in E_\delta^*(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \sim \{x_0\}$ .

Entonces resulta que:

$$\begin{array}{rcl} g(x) & \in & E_\varepsilon(l) \text{ siempre que } x \in E^*_\delta(x_0) \\ & \Updownarrow & \\ |g(x)-l| & < & \varepsilon \text{ siempre que } 0<|x-x_0|<\delta \end{array}$$

Por lo tanto; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ ■

Utilizando el teorema anterior vamos a explicar algunas técnicas de cálculo de límites.

***a) Técnicas de cancelación***

Se aplica en las funciones racionales cuando nos encontramos con una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y supongamos que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \dfrac{0}{0}$

Al ser $\left.\begin{array}{l} P(x_0)=0 \Longleftrightarrow P(x)=(x-x_0)\cdot P_1(x) \\ Q(x_0)=0 \Longleftrightarrow Q(x)=(x-x_0)\cdot Q_1(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$ Por el teorema anterior, podemos cancelar el factor $(x-x_0)$ en el numerador y denominador y aplicar la sustitución directa. Pudiendose presentar las siguientes posibilidades

- Si $Q_1(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\cdot P_1(x)}{(x-x_0)\cdot Q_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$$

Fíjate, que para $x = x_0$ la función $f$ presenta una discontinuidad evitable; ya que no existe $f(x_0)$ y sin embargo si que $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. La gráfica de la función $y = f(x)$ coincide con la de la función $y = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ si a ésta le quitamos el punto $P(x_0, \dfrac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)})$.

- Si $P_1(x_0) \neq 0$ y $Q_1(x_0) = 0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\cdot P_1(x)}{(x-x_0)\cdot Q_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x_0)}{0}$$

Procederemos a estudiar los límites laterales; ya que la recta $x = x_0$ *es una asíntota vertical* y siempre nos interesa conocer el comportamiento de la función en un entorno reducido de centro $x_0$ y radio tan pequeño como deseemos.

En esta situación, diremos que la función $f$ *presenta en* $x_0$ *una discontinuidad de salto infinito*

- Si $P_1(x_0) = 0$ y $Q_1(x_0) = 0$

Volveremos a factorizar y cancelar, pudiéndose dar cualquiera de las dos situaciones anteriores

**Example 23** *Calcula* $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}$ *y* $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}$

Sea $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}$ como $2x^2+3x+1 = (x+1)(2x+1)$ entonces su dominio de definición (y de continuidad) es:

$$D(f) = \Re \sim \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}$$

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \dfrac{0}{0}$
$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+2)}{(2x+1)} = -1$
La función presenta para $x=-1$ una discontinuidad evitable. La gráfica de la función $y=f(x)$ coincide con la de la función $y = \dfrac{(x+2)}{(2x+1)}$ si le quitamos a ésta el punto de coordenadas $P(-1,-1)$.
2) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \dfrac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2}{0} = \dfrac{\frac{3}{4}}{0}$

Sabemos que la función presenta para $x = -\dfrac{1}{2}$ una discontinuidad de salto infinito. Además la recta $x = -\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

Nos interesa estudiar el comportamiento de la función en un entorno reducido de $-\dfrac{1}{2}$. Para lo cual, tendremos que estudiar sus límites laterales.

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \dfrac{\frac{3}{4}}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \dfrac{\frac{3}{4}}{0^-} = -\infty$

**Example 24** *Calcula* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$ , $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

Sea $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$ como $x^2-9 = (x-3)(x+3)$ entonces su dominio de definición (y de continuidad) es:

$$D(f) = \Re \sim \{-3, 3\}$$

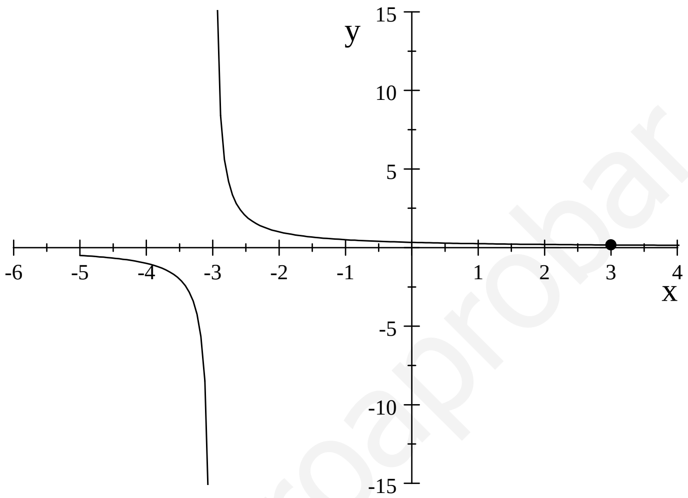
1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{0}{0}$
$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{6}$
La función presenta para $x=3$ una discontinuidad evitable. La gráfica de la función $y=f(x)$ coincide con la de la función $y = \dfrac{1}{x+3}$ si le quitamos a ésta el punto de coordenadas $P(3, \dfrac{1}{6})$.
2) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{-6}{0}$
Sabemos que la función presenta para $x=-3$ una discontinuidad de salto infinito. Además la recta $x=-3$ es una asíntota vertical.

Como nos interesa estudiar el comportamiento de la función en un entorno reducido de $-3$. Tendremos que estudiar sus límites laterales.

$\lim_{x\to(-3)^+}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{-6}{0^+}=-\infty$

$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{-6}{0^-}=+\infty$

Mira ahora su gráfica




3) $\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{5}$

***b) Técnicas de racionalización***

Se aplica en las funciones irracionales cuando nos encontramos con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o del tipo $\infty-\infty$.

En el caso de que apareciesen raíces cuadradas, multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado, o bien utilizaremos el hecho de que:

$$A-B=\frac{A^2-B^2}{A+B}$$

Si apareciesen raíces de índice distinto de 2, utilizaremos la relación: $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+.....+AB^{n-2}+B^{n-1})$ que nos permite expresar $A-B$ de la siguiente manera:

$$A-B=\frac{A^n-B^n}{A^{n-1}+A^{n-2}B+.....+AB^{n-2}+B^{n-1}}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[5]{x}-2=\dfrac{x-32}{\sqrt[5]{x^4}+2\sqrt[5]{x^3}+4\sqrt[5]{x^2}+8\sqrt[5]{x}+16}$

2. $\sqrt[4]{x}-3=\dfrac{x-81}{\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[4]{x^2}+9\sqrt[4]{x}+27}$

3. $\sqrt[3]{x}-1=\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+1}$

4. $\sqrt{x+1}-2=\dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}$

**Example 25** *Calcula* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

Dada la función $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f)=\{x\in\Re/x+1\geq 0\ y\ x-3\neq 0\}=[-1,3)\cup(3,+\infty)$

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

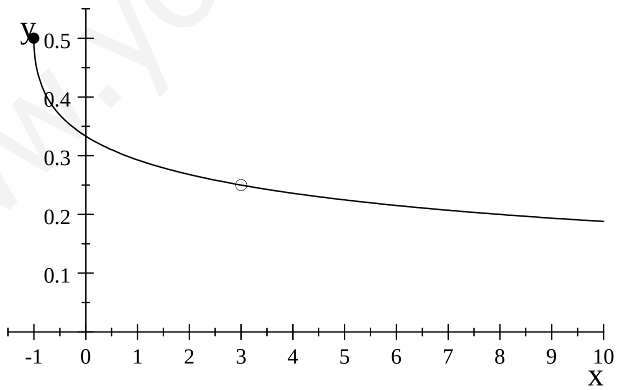
Al sustituir nos vuelve a salir $\dfrac{0}{0}$ pero podemos utilizar la técnica de la cancelación y por lo tanto:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$

La función presenta para $x=3$ una discontinuidad evitable. La gráfica de la función $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ coincide con la de la función $y=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$ si le quitamos a ésta el punto de coordenadas $P(3,\dfrac{1}{4})$.

2) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\dfrac{1}{2}$

Mira la gráfica de la función $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$




**Example 26** *Calcula* $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

Dada la función $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:
$D(f) = \Re \sim \{8\}$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} =^{[1]} \lim_{x\to 8} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

**Example 27** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$

Como $\sqrt[3]{x} - 1 = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} \frac{1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)}$$

Cancelando el factor $x - 1$ tendremos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)} = \frac{1}{3}$$

**Example 28** $\lim\limits_{x\to 32} \dfrac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32}$

$$\lim_{x\to 32} \frac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32} = \frac{0}{0}$$

Como $\sqrt[5]{x} - 2 = \dfrac{x-32}{\sqrt[5]{x^4} + 2\sqrt[5]{x^3} + 4\sqrt[5]{x^2} + 8\sqrt[5]{x} + 16}$

$$\lim_{x\to 32} \frac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32} = \lim_{x\to 1} \frac{x-32}{(x-32)\left(\sqrt[5]{x^4} + 2\sqrt[5]{x^3} + 4\sqrt[5]{x^2} + 8\sqrt[5]{x} + 16\right)}$$

Cancelando el factor $x - 32$ tendremos

$$\lim_{x\to 32} \frac{1}{\left(\sqrt[5]{x^4} + 2\sqrt[5]{x^3} + 4\sqrt[5]{x^2} + 8\sqrt[5]{x} + 16\right)} = \frac{1}{80}$$

**Example 29** *Calcula tú el siguiente* $\lim\limits_{x\to 2^n} \dfrac{\sqrt[n]{x}-2}{x-2^n}$ *y comprueba que da* $\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$

**Example 30** $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x+5}-3}\right)$

---

[1] Nota: Como $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + ..... + AB^{n-2} + B^{n-1})$ entonces:

$$A - B = \frac{A^n - B^n}{A^{n-1} + A^{n-2}B + ..... + AB^{n-2} + B^{n-1}}$$

En particular , la expresión $\sqrt[3]{x} - 2 = \dfrac{(x-8)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4}$

Con lo que, la función quedará así:

$y = \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \dfrac{(x-8)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4} \cdot \dfrac{1}{(x-8)} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4}$ siendo $x \neq 8$

$\lim_{x \to 4} \left( \frac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x+5}-3} \right) = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 4} \left( \frac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x+5}-3} \right) = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{5x-4}-4)(\sqrt{5x-4}+4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)(\sqrt{5x-4}+4)} =$

$\lim_{x \to 4} \frac{(5x-20)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{5x-4}+4)} = \lim_{x \to 4} \frac{5(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{5x-4}+4)} = \lim_{x \to 4} \frac{5(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{5x-4}+4)} = \frac{5 \cdot 6}{8} = \frac{15}{4}$

***b) Técnicas de cálculo***

Es útil cuando tengamos resta o productos de funciones

**Example 31** *Calcula* $\lim_{x \to 3} \left( \frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{(x-3)^3}} \right)$

Dada la función $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}} - \dfrac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f) = (3, +\infty)$

$\lim_{x \to 3^+} \left( \frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{(x-3)^3}} \right) = \infty - \infty$

Como $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}} - \dfrac{1}{\sqrt{(x-3)^3}} = \frac{x-4}{\left(\sqrt{(x-3)}\right)^3}$

$\lim_{x \to 3^+} \left( \frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{(x-3)^3}} \right) = \lim_{x \to 3^+} \left( \frac{x-4}{\left(\sqrt{(x-3)}\right)^3} \right) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

**Example 32** *Calcula* $\lim_{x \to 3} \left( \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^2} \right)$

Dada la función $y = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^2}$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

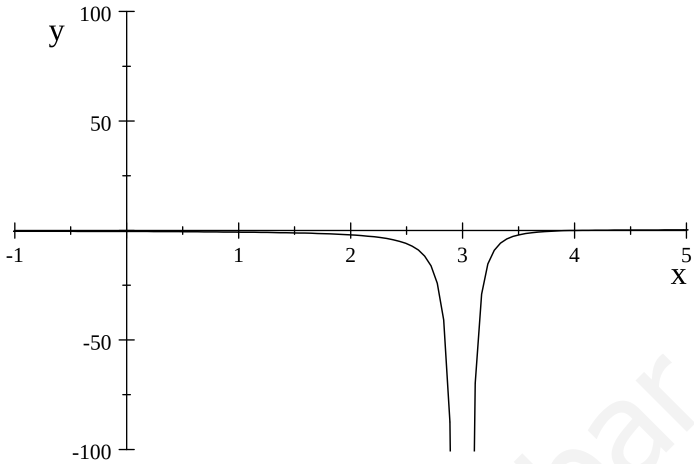
$D(f) = \Re \sim \{3\}$

$\lim_{x \to 3} \left( \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^2} \right) = \infty - \infty$

Como $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^2} = \frac{x-4}{(x-3)^2}$

$\lim_{x \to 3} \left( \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^2} \right) = \lim_{x \to 3} \frac{x-4}{(x-3)^2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

La recta $x = 3$ es una asintota vertical de ramas convergentes hacia $-\infty$




**Example 33** *Calcula* $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{(x-3)(x-1)}\right)$

Dada la función $y=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{(x-3)(x-1)}$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f)=\Re\sim\{1,3\}$

$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{(x-3)(x-1)}\right)=\infty-\infty$

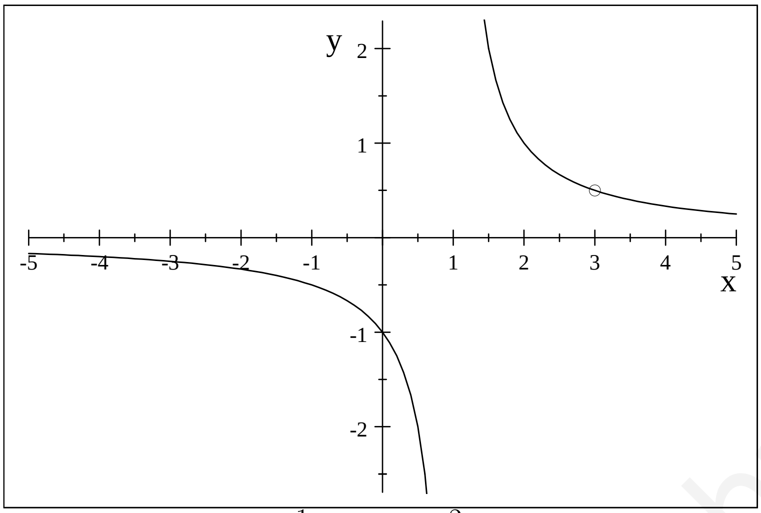
Como $\frac{1}{x-3}-\frac{2}{(x-3)(x-1)}=\frac{(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{(x-3)(x-1)}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\frac{0}{0}$

Utilizando la técnica de cancelación

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}$

La gráfica de la función $y=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{(x-3)(x-1)}$ es la misma que la gráfica de la hipérbola equilatera $y=\frac{1}{x-1}$ quitándole a ésta el punto de coordenadas $(3,\frac{1}{2})$




$$y = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{(x-3)(x-1)}$$

**Example 34** *Calcula* $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^3}\right)$

Dada la función $y = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^3}$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f) = \Re \sim \{3\}$

$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^3}\right) = \infty - \infty$

Como $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^3} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^3}$

$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^3}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^3} = \frac{1}{0}$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. La función $y = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^3}$ presenta para $x = 3$ una discontinuidad de salto infinito

Calculemos los límites laterales

$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^3}\right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^3}\right) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical de ramas divergentes

**Example 35** *Calcula* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\frac{3}{(x-1)^2} - 1\right)$

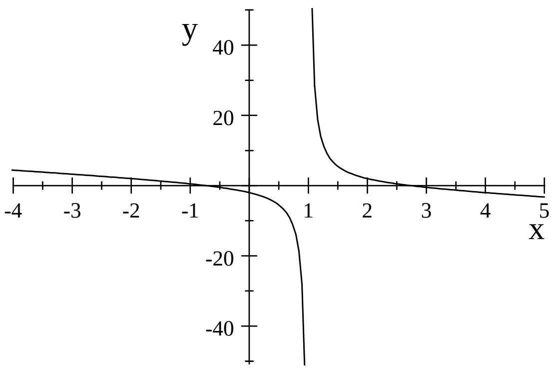
Dada la función $y = \left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\frac{3}{(x-1)^2} - 1\right)$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:
$D(f) = \Re \sim \{1\}$
Si calculamos por separado cada límite tendremos:
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$
Como $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$
$\lim_{x \to 1} \left( \frac{3}{(x - 1)^2} - 1 \right) = \frac{3}{0^+} - 1 = +\infty - 1 = +\infty$

Con lo cual, el límite $\lim_{x \to 1} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right) \left( \frac{3}{(x - 1)^2} - 1 \right)$ presenta la indeterminación $0 \cdot \infty$

Para eliminarla y que nos aparezca la indeterminación $\frac{0}{0}$ tendremos que calcular la expresión contenida en el límite:
Como $\left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right) \left( \frac{3}{(x - 1)^2} - 1 \right) = \frac{(x - 1)\left(-x^2 + 2x + 2\right)}{(x - 1)^2}$
$\lim_{x \to 1} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right) \left( \frac{3}{(x - 1)^2} - 1 \right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\left(-x^2 + 2x + 2\right)}{(x - 1)^2}$
Utilizando la técnica de cancelación
$\lim_{x \to 1} \frac{\left(-x^2 + 2x + 2\right)}{(x - 1)} = \frac{3}{0}$
La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función. La función presenta en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

Si calculamos ahora los límites laterales, podremos determinar si es una asíntota de ramas convergentes o divergentes
$\lim_{x \to 1^+} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right) \left( \frac{3}{(x - 1)^2} - 1 \right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(-x^2 + 2x + 2\right)}{(x - 1)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$
$\lim_{x \to 1^-} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right) \left( \frac{3}{(x - 1)^2} - 1 \right) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\left(-x^2 + 2x + 2\right)}{(x - 1)} = \frac{3}{0^-} = -\infty$
$x = 1$ es asíntota vertical de ramas divergentes




**Example 36** *Calcula* $\lim_{x \to 4^+} \left( \frac{1}{\sqrt{x - 4}} - \frac{x + 3}{\sqrt{2x - 8}} \right)$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:
$D(f) = \{x \in \Re / x > 4\} = (4, +\infty)$
Si calculamos por separado cada límite tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-4}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x+3}{\sqrt{2x-8}} = \dfrac{7}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 4^+} \left( \frac{1}{\sqrt{x-4}} - \frac{x+3}{\sqrt{2x-8}} \right) = \infty - \infty$$

Para eliminar la indeterminación, reduciremos a común denominador la función.

como $\dfrac{1}{\sqrt{x-4}} - \dfrac{x+3}{\sqrt{2x-8}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}} - \dfrac{x+3}{\sqrt{2}\sqrt{x-4}} = \frac{\left(2-\sqrt{2}(x+3)\right)}{2\sqrt{(x-4)}}$

$$\lim_{x\to 4^+} \left( \frac{1}{\sqrt{x-4}} - \frac{x+3}{\sqrt{2x-8}} \right) = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(2-\sqrt{2}(x+3)\right)}{2\sqrt{(x-4)}} = \frac{2-7\sqrt{2}}{0^+} = -\infty$$

**Example 37** $\lim\limits_{x\to 4} \left( \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right)$

Dada la función $y = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ su dominio de definición o continuidad es:
$D(f) = [0, 4) \cup (4, +\infty)$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-1-\sqrt{(x+5)}}{\left(\sqrt{(x+5)}-3\right)(\sqrt{x}-2)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\left(x-1-\sqrt{(x+5)}\right)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{\left(\sqrt{(x+5)}-3\right)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)} =$$

:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\left(x^2-3x-4\right)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)^2\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)} =$$

Como $\dfrac{\left(x^2-3x-4\right)}{(x-4)^2} = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(x-4)^2}$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x+1)(x-4)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)^2\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}$$

Por la técnica de la cancelación

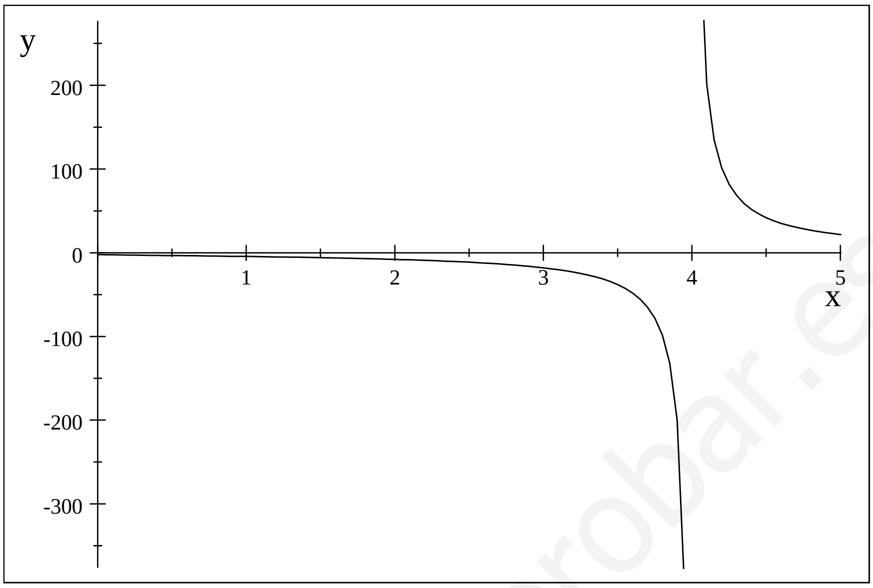
$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)} \frac{120}{0}$$

La recta $x = 4$ es una asíntota vertical. La función $y = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ presenta para $x = 4$ una discontinuidad de salto infinito.

Calculemos los límites laterales

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)} = \frac{120}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)} = \frac{120}{0^-} = -\infty$$




La recta $x = 4$ es una asíntota vertical de ramas divergentes.

**Ejercicios resueltos de límites de una función en un punto**

**Exercise 1.5.1** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+7}{x^2-3}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+7}{x^2-3} = 11$

**Exercise 1.5.2** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4+2x^3-x-2}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4+2x^3-x-2} = \dfrac{0}{0}$

$$\text{Como } \left.\begin{array}{c} x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right) \\ x^4+2x^3-x-2=(x+2)\,(x-1)\left(x^2+x+1\right) \end{array}\right\} \text{entonces}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4+2x^3-x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{3}$$

**Exercise 1.5.3** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+....+a^{n-2}x+a^{n-1})}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} (x^{n-1}+ax^{n-2}+....+a^{n-2}x+a^{n-1}) = n\cdot a^{n-1}$$

**Exercise 1.5.4** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x} =^{2} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x-1)\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}++...+(1+x)^1+1\right)}{x} =$$

[2] $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+.....+AB^{n-2}+B^{n-1})$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}++...+(1+x)^{1}+1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}++...+(1+x)^{1}+1\right) =$
$= n$

**Exercise 1.5.5** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^m-1}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^m-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+......x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^{m-1}+x^{m-2}+......+x^2+x+1)} =$$
$\dfrac{1}{m}$

**Exercise 1.5.6** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+......x^2+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+......x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^{m-1}+x^{m-2}+......x^2+x+1)}{(x^{n-1}+x^{n-2}+......x^2+x+1)} =$$
$\dfrac{m}{n}$

**Exercise 1.5.7** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} =^{3} \lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{(x-1)}{(x^2+ax+a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$$

**Exercise 1.5.8** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\infty-\infty$

Como $(1-x^3)=(1-x)(1+x+x^2)$ entonces:
$\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3} = \frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{(-x-2)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$
$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(-x-2)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(-x-2)}{(1+x+x^2)} = -1$

**Exercise 1.5.9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\,\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\,\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\,\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} =$$
$\dfrac{2}{3}$

**Exercise 1.5.10** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

**Exercise 1.5.11** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

---

[3] $x^2-(a+1)x+a = x^2-xa-x+a = x(x-a)-(x-a) = (x-1)(x-a)$
$x^3-a^2=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

**Exercise 1.5.12** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a+x}}$

**Exercise 1.5.13** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}$

**Exercise 1.5.14** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

### 1.5.2 Función convergente a cero por función acotada en un punto

**Theorem 38** *Si* $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$ *y* $g$ *es una función acotada en un entorno reducido de centro* $x_o$ *y radio tan pequeño como queramos. Entonces, se verifica que* $\lim_{x \to x_o} (f(x) \cdot g(x)) = 0$ *aunque* $g(x_o)$ *no exista.*

Si $g$ está acotada en $(x_o - \delta_1, x_o - \delta_1) \sim \{x_o\} \Leftrightarrow \exists k > 0$ tal que $|g(x)| < k$ siempre que $0 < |x - x_o| < \delta_1$

Como $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0 \Longrightarrow$Para cada $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{k}$siempre que $0 < |x - x_o| < \delta$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\} > 0$ tal que $\left\{\begin{array}{l} |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{k} \\ y \\ |g(x)| < k \end{array}\right\}$ siempre que $0 < |x - x_o| < \delta_2$.

Con lo que:

*Dado cualquier* $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 > 0$ / $|f(x)g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{k}|g(x)| < \varepsilon$ *siempre que* $0 < |x - x_o| < \delta_2$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_o} (f(x) \cdot g(x)) = 0$

**Example 39** *Calcula* $\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Sea $h(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ Su dominio de definición (o de continuidad) es $D(h) = \Re \sim \{0\}$

Como $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} x = 0 \\ \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq 1 \ \forall x \in \Re \sim \{0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

**Example 40** *Calcula* $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Sea $h(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Su dominio de definición (o de continuidad) es $D(h) = \Re \sim \{0\}$

Como $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} x = 0 \\ \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq 1 \ \forall x \in \Re \sim \{0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Otros límites se pueden resolver utilizando el criterio del emparedado, que a continuación se explica:

### 1.5.3 Criterio del emparedado

**Theorem 41**

*Hipótesis*: a)Sean $f, g$ y $h$ tres funciones definidas en un intervalo abierto $I$ y sea $x_o \in I$ de tal manera que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ $\forall x \in I \wedge x \neq x_o$.
b) Si $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} h(x) = l$

*Tesis:* $\lim_{x \to x_o} g(x) = l$

Demostración:

Para todo $x \neq x_o \wedge x \in I$, se tiene que

$|g(x)-l| = |g(x)-f(x)-(l-f(x))| \leqslant |g(x)-f(x)| + |f(x)-l|$
$\leqslant |h(x)-f(x)| + |f(x)-l|$ pues $|g(x)-f(x)| \leqslant |h(x)-f(x)|$hipótesis a
$\leqslant |h(x)-l-(f(x)-l)| + |f(x)-l|$
$\leqslant |h(x)-l| + 2|f(x)-l|$ (1)

Sea $\varepsilon > 0$, por ser $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = l$ , $\exists\delta_{1>o}$ tal que si :

$$0 < |x-x_o| < \delta_1 \text{ entonces } |f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (*)$$

por ser $\lim\limits_{x\to x_o} h(x) = l$ , $\exists\delta_{2>o}$ tal que si :

$$0 < |x-x_o| < \delta_2 \text{ entonces } |h(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

luego, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , si $0 < |x-x_o| < \delta$ entonces de (1) tendremos que:

$$|g(x)-l| \leqslant |h(x)-l| + 2|f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

de donde:

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = l$$

**Example 42** *Demuestra que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

*Demostración:*
Si $x > 0 \to 0 < \sin x < x < \tan x \to \dfrac{1}{\tan x} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sin x}$
Multiplicando esta desigualdad por $sinx$ ($sinx > 0$) tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\sin x}{\tan x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \\ & \Updownarrow & \\ \dfrac{1}{\cos x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \end{array}$$

Si $x < 0 \to \tan x < x < \sin x \to \dfrac{1}{\sin x} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\tan x}$
Multiplicando esta desigualdad por $sinx$ ($sinx < 0$) tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\sin x}{\tan x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \\ & \Updownarrow & \\ \dfrac{1}{\cos x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \end{array}$$

En definitiva; hemos comprobado que en un entorno abierto y reducido del cero, la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ verifica que $g(x) < f(x) < h(x)$ siendo $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ y $h(x) = 1$

Como además $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$; entonces podemos afirmar que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

**Example 43** *Demuestra que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

*Demostración:*
Si $x>0\to 0<\sin x<x<\tan x\to \dfrac{1}{\tan x}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\sin x}$
Multiplicando esta desigualdad por $\tan x$ $(\tan x>0)$ tendremos:

$$\begin{array}{c}
1 < \dfrac{\tan x}{x} < \dfrac{\tan x}{\sin x} \\
\Updownarrow \\
1 < \dfrac{\tan x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}
\end{array}$$

Si $x<0\to \tan x<x<\sin x\to \dfrac{1}{\sin x}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\tan x}$
Multiplicando esta desigualdad por $\tan x$ $(\tan x<0)$ tendremos:

$$\begin{array}{c}
1 < \dfrac{\tan x}{x} < \dfrac{\tan x}{\sin x} \\
\Updownarrow \\
1 < \dfrac{\tan x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}
\end{array}$$

En definitiva; hemos comprobado que en un entorno abierto y reducido del cero, la función $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ verifica que $g(x)<f(x)<h(x)$ siendo $g(x)=1$ y $h(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

Como además $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$; entonces podemos afirmar que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

## 1.6 Infinitésimos

**Definition 44** *Una función, $f$, se dice que es un infinitésimo en un punto $x_o$, si su límite en dicho punto es cero.*

$$f \textit{ infinitésimo en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_o} f(x)=0$$

**Example 45** $f(x)=\sin x$ *es un infinitésimo en* $x=0$; *ya que* $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$
$f(x)=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ *es un infinitésimo en* $x=\dfrac{\pi}{4}$; *ya que* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$
$f(x)=1-\cos x$ *es un infinitésimo en* $x=0$; *ya que* $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$
$f(x)=3^x-1$ *es un infinitésimo en* $x=0$; *ya que* $\lim\limits_{x\to 0}(3^x-1)=0$
$f(x)=\sqrt[3]{1+x}-1$ *es un infinitésimo en* $x=0$; *ya que* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)=0$
$f(x)=-\dfrac{\pi}{4}+\arctan x$ *es un infinitésimo en* $x=1$; *ya que* $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{\pi}{4}+\arctan x\right)=0$
$f(x)=x$ *es un infinitésimo en* $x=0$; *ya que* $\lim\limits_{x\to 0}x=0$

**Definition 46** *Dos infinitésimos $f$ y $g$,en un mismo punto $x_o$ ,se dice que son infinitésimos del mismo orden, cuando* $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$

Nota: La función $f(x)=x^n$ con $n\in N\sim\{0\}$ es un infinitésimo de orden $n$

**Example 47** $f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=-5x^2, f_3(x)=\frac{3}{2}x^2$*son infinitésimos, en* $x=0$,*de orden 2*
$f_1(x)=x^3,\ f_2(x)=-5x^3, f_3(x)=\frac{3}{2}x^3$*son infinitésimos, en* $x=0$, *de orden 3*

**Definition 48** *Dos infinitésimos $f$ y $g$,en un mismo punto $x_o$ ,se dice que son infinitésimos equivalentes, cuando* $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=1\Longleftrightarrow f(x)\sim g(x)$$

**Example 49** $f_1(x)=x,\ f_2(x)=\sin x$ *son infinitésimos equivalentes, en $x=0$ ya que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$f_1(x)=x,\ f_2(x)=\tan x$ *son infinitésimos equivalentes, en $x=0$ ya que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

**Theorem 50** *Cuando, en un límite, un infinitésimo esté multiplicando o dividiendo se le puede sustituir por otro equivalente.*

**Proof.** Supongamos que, en $x_0$ $\quad f(x)\sim g(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=1$
Y supongamos que deseamos calcular un límite en el que aparece $f(x)$ multiplicando o dividiendo:

$$\lim_{x\to x_o}f(x)\cdot h(x)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\cdot h(x)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_o}(g(x)\cdot h(x))=\lim_{x\to x_o}(g(x)\cdot h(x))$$

■

Esto es, hemos sustituido $f(x)$ *por* $g(x)$ y probablemente el nuevo límite sea más sencillo de calcular

**Proposition 51** *La suma de varios infinitésimos de distinto orden se puede reducir al de menor orden*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+x^3+x^7)f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)}{g(x)}$$

### 1.6.1 Infinitésimos más frecuentes cuando $z \to 0$

**Trigonométricos** Si $z \to 0$

$$\begin{aligned} \sin z &\sim z \\ \arcsin z &\sim z \\ \arctan z &\sim z \\ \tan z &\sim z \\ 1-\cos z &\sim \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

**Exponenciales, logarítmicos, potencias y raíces** Si $z \to 0$

$$\begin{aligned} z &\sim \ln(1+z) \\ e^z-1 &\sim z \\ a^z-1 &\sim z\ln a \\ \sqrt[n]{1+z}-1 &\sim \frac{1}{n}\cdot z \\ (1+z)^n-1 &\sim n\cdot z \end{aligned}$$

**Ejercicios de límites por infinitésimos**

**Example 52** *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{0}{0}$

Como $1-\cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{3x^2}$

$\sin x \sim x$ cuando $x\to 0$

Entonces, $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\sim\dfrac{x}{2}$ cuando $x\to 0$

Con lo que:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{6x^2}=\dfrac{1}{6}$

*Otra manera de calcular este límite*

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos^2 x\right)}{3x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2(1+\cos x)}=$ [4]

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3(1+\cos x)}=\dfrac{1}{3\cdot 2}=\dfrac{1}{6}$

**Exercise 1.6.1** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}=\dfrac{0}{0}$

$\sin 3x\sim 3x$ cuando $x\to 0$. Por lo que:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x)^2}{5x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{5x^2}=\dfrac{9}{5}$

**Exercise 1.6.2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{7x^2}=\dfrac{0}{0}$

$1-\cos A=2\sin^2\left(\dfrac{A}{2}\right)$

$1-\cos 5x=2\sin^2\left(\dfrac{5x}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{7x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{5x}{2}\right)}{7x^2}$

$\sin 5x\sim 5x$ cuando $x\to 0$. Por lo que:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{5x}{2}\right)}{7x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2}{7x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x^2}{14x^2}=\dfrac{25}{14}$

**Exercise 1.6.3** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\dfrac{0}{0}$

[4] $\sin x\sim x$ cuando $x\to 0$
Entonces, $\sin^2 x\sim x^2$ cuando $x\to 0$

Realizamos un cambio de variable
Si $x-1=z$;entonces $x=1+z$
Además $(x\to 1)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+z}-2}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{2\left(\frac{\sqrt[3]{8+z}-2}{2}\right)}{z}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\left(\sqrt[3]{\frac{8+z}{8}}-1\right)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{z}{8}}-1\right)}{\frac{z}{2}}$$

$\sqrt[3]{1+\frac{z}{8}}-1\sim\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{8}$ cuando $z\to 0$. Con lo que:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{z}{8}}-1\right)}{\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{8}}{\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{12z}=\frac{1}{12}$$

Nota: Otra manera de calcular este límite sin utilizar infinitésimos.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3-2^3}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}$$

Utilizando el teorema de cancelación, tendremos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4}=\frac{1}{12}$$

**Exercise 1.6.4** $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right)=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}$

Realizamos un cambio de variable
Si $x-2=z$;entonces $x=2+z$
Además $(x\to 2)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\ln(1+z)}{z}\right)$$

Como $z\sim\ln(1+z)$ cuando $z\to 0$, entonces:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\ln(1+z)}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{z}=1$$

**Exercise 1.6.5** $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\frac{0}{0}$

Como $x\ln 3\sim 3^x-1$ cuando $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{x}=\ln 3$$

**Exercise 1.6.6** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}$

Si $x-1=z$;entonces $x=1+z$
Además $(x\to 1)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+z}-1}{\sqrt{1+z}-1}$

$\sqrt[3]{1+z}-1\sim\dfrac{z}{3}$ y $\sqrt{1+z}-1\sim\dfrac{z}{2}$ cuando $z\to 0$

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+z}-1}{\sqrt{1+z}-1}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\frac{z}{3}}{\frac{z}{2}}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2z}{3z}=\dfrac{2}{3}$

**Exercise 1.6.7** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1}{x-2}=\dfrac{0}{0}$

Si $x-2=z$;entonces $x=2+z$

Además $(x\to 2)\Leftrightarrow(z\to 0)$

Con lo que:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1}{x-2}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{z}-1}{z}$

Como $z\ln\left(\frac{1}{3}\right)\sim\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1$ cuando $z\to 0$. Entonces:

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{z}-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{z}=\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3$

**Exercise 1.6.8** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=\dfrac{0}{0}$

Como $(1+x)^n-1\sim n\cdot x$ cuando $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{nx}{x}=n$

## 1.7 Límites en el infinito

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (*un número* real)

*Definición* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x > K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (k, +\infty) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ la recta $y = l$ es una asíntota horizontal de la función (por la derecha)

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ (*un número* real)

*Definición* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x < -K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (-\infty, -k) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ la recta $y = l$ es una asíntota horizontal de la función (por la izquierda)

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

*Definición* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x > K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} x > K \Rightarrow f(x) > M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (k, +\infty) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (M, +\infty)$

d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

*Definición* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x > K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) < -M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (k, +\infty) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (-\infty, -M)$

e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

*Definición* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x < -K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) > M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (-\infty, -k) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (M, +\infty)$

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

*Definición* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x < -K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $f(x) < -M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (-\infty, -k) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (-\infty, M)$

g) No existan $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ o $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

# Chapter 2

# Continuidad

## 2.1 Definiciones

**Definition 53** *Función continua a la izquierda de un punto*

Sea $f$ una función definida en un intervalo $I$ y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función $f$ es continua a la izquierda de $x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

**Definition 54** *Función continua a la derecha de un punto*

Sea $f$ una función definida en un intervalo $I$ y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función $f$ es continua a la derecha de $x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

**Definition 55** *Función continua en un punto*[1]

Sea $f$ una función definida en un intervalo $I$ y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función $f$ es continua en un punto $x_0$ si $f$ lo es a la izquierda y a la derecha de $x_0$. Esto equivale a afirmar que se verifican las siguientes condiciones:

1) $x_0 \in D(f)$ $(\exists\ f(x_0))$
2) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$
3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

**Definition 56** *Función continua en un punto (topológica)*

Decir que $f$ es continua en $x_0$ es equivalente a las siguientes definiciones

[1] f es continua en $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

Si $x = x_0 + h$ entonces decir que $x \to x_0 \iff h \to 0$; por lo que otra definición equivalente sería:

f es continua en $x_0 \iff \lim_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$

1)$\forall \xi > 0 \; \exists \; \delta > 0 /$ si $\begin{bmatrix} |x - x_0| < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix}$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \xi$
2)$\forall \xi > 0 \; \exists \; \delta > 0 /$ si $x \in E_\delta(x_0) \cap D(f)$ entonces $f(x) \in E_\xi(f(x_0))$
3)$\forall \xi > 0 \; \exists \; \delta > 0 /$ si $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap D(f)$ entonces $f(x) \in ]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi[$

**Definition 57** *Función continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$

$f$ es continua en $[a, b]$ si $f$ lo es en $]a, b[$ y; además lo es a la derecha de $a$ y a la izquierda de $b$

**Remark 1** *Función discontinua en un punto*

Es evidente que una función no será continua cuando fallen alguna de las tres condiciones dadas en la Definition 5. Según esto; vamos a clasificar las discontinuidades de una función en un punto

## 2.2 Discontinuidades

**Definition 58** *Discontinuidad de primera especie (salto finito)*

Diremos que una función presenta para $x_0$ una discontinuidad de primera especie cuando se verifique
$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ sea distinto del $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (independientemente de que exista o no $f(x_0)$)
También se dice que la función presenta una discontinuidad de salto finito en $x_0$.

**Definition 59** *Discontinuidad evitable*

Diremos que una función presenta para $x_0$ una discontinuidad evitable en los siguientes casos:

1. $\exists f(x_0)$ y $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ pero no coinciden

2. No existe $f(x_0)$ y $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

Se denominan así, porque asignando a $f(x_0)$ el valor del $\lim_{x \to x_0} f(x)$ la función ya sería continua en $x_0$

**Definition 60** *Discontinuidad de segunda especie (salto infinito)*

Si al menos uno de los límites $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ , $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ no existe o es $\pm\infty$

## 2.3 Operaciones con funciones continuas

**Theorem 61** *Si $f$ y $g$ son continuas en $x_0$ entonces:*

1. $\alpha f + \beta g$ es continua en $x_0$ $\forall \alpha, \beta \in R$ (cualquier c. lineal de funciones continuas es continua)

2. $f \cdot g$ es continua en $x_0$

**Theorem 62** *Si $f$ y $g$ son continuas en $x_0$ y además $g(x_0)$ no es nula entonces $\frac{f}{g}$ es continua en $x_0$*

**Theorem 63** *Si $f$ es continua en $x_0$ y $g$ es continua en $f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es continua en $x_0$*

## 2.4 Discontinuidad de algunas funciones

1. Las funciones polinómicas son continuas en $R$

2. Las funciones racionales (cociente de polinomios) son discontinuas en los puntos que no pertenecen a su dominio de definición (los que anulan el denominador)

3. Las funciones irracionales son discontinuas en los puntos que no pertenecen a su dominio

4. Las funciones de la forma $y = a^{f(x)}$ son continuas para aquellos valores que pertenezcan al $D(f)$

5. Las funciones de la forma $y = Ln\ f(x)$ son continuas en el conjunto $\{x \in R \ / \ f(x) > 0\}$

6. las funciones de la forma $y = \sin(f(x))$ son continuas para aquellos valores que pertenezcan al $D(f)$

7. Las funciones de la forma $y = \tan(f(x))$ son discontinuas en el siguiente conjunto

$$\left\{x \in D(f) \ / \ f(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ siendo } k \in Z\right\}$$

## 2.5 Propiedades de las funciones continuas en un punto

**Theorem 64** *Teorema del signo. Si una función es continua en un punto $x_0$ y además $f(x_0)$ es no nula; entonces, siempre podremos encontrar un entorno abierto de centro $x_0$ y radio tan pequeño como queramos en el que la función tenga el mismo signo que $f(x_0)$*

Demostración Casos:

- $f(x_0) > 0$

Por ser f continua en $x_0$,sabemos que dado cualquier $\xi > 0$ (tan pequeño como queramos) siempre podemos encontrar un $\delta > 0$(que depende del $\xi$ elegido) de tal manera que si $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ entonces $f(x) \in ]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi[$

Al ser $f(x_0) > 0$, siempre podremos considerar el $\xi$ de tal manera que $f(x_0) > \xi$, con lo que $\boxed{0 <} f(x_0) - \xi < \boxed{f(x)} < f(x_0) + \xi$

Así pues, queda demostrado que existe un entorno de centro $x_0$ y radio $\delta$ en el cual $f(x)$ es positiva (basta con considerar el $\xi$ / $f(x_0) > \xi$)

- $f(x_0) < 0$

Demuéstralo tú como ejercicio

**Theorem 65** _Relación entre continuidad y acotación_ *(localmente). Si una función es continua en un punto $x_0$ entonces, siempre podremos encontrar un entorno abierto de centro $x_0$ y radio tan pequeño como queramos en el que la función esté acotada*

Demostación

Por ser f continua en $x_0$,sabemos que dado cualquier $\xi > 0$ (tan pequeño como queramos) siempre podemos encontrar un $\delta > 0$(que depende del $\xi$ elegido) de tal manera que si $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ entonces $f(x) \in ]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi[$

En particular, si consideramos $\xi = 1$, entonces

$$f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1 \text{ si } x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Acabamos de demostrar que $f(x_0)+1$ es cota superior de $f$ en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ y que $f(x_0) - 1$ es cota inferior de $f$ en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Por lo tanto, $f$ está acotada en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

**Theorem 66** *Si $f$ es continua en $x_0$ y toma valores de distinto signo en todo entorno de $x_0$, entonces $f(x_0) = 0$*

Demuestra como ejercicio este teorema

## 2.6 Propiedades de las funciones continuas en un cerrado

**Theorem 67** _de Bolzano_[2]

Si $f$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, entonces existe, al menos, un punto $x_0 \in ]a, b[$ tal que $f(x_0) = 0$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si una función es continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos, entonces podemos garantizar la existencia de un punto de la gráfica (cuya abcisa pertenece al $]a, b[$), al menos, que corta al eje de las abcisas

**Theorem 68** _de los valores intermedios (Teorema de Darboux)_

[2]Por su complejidad, no lo demostraremos

Si $f$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a)$ es distinta de $f(b)$, entonces la función $f$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez en $]a, b[$

Demostración

Sea $k \in R$ tal que $f(a) < k < f(b)$.

Definimos la función $H(x) = f(x) - k$ que es continua en $[a, b]$ por ser combinación lineal de dos funciones continuas

Como $H(a) = f(a) - k < 0$ y $H(b) = f(b) - k > 0$, se puede aplicar el Teorema de Bolzano a la función $H$; por lo que podemos afirmar que existe, al menos, un $x_0 \in ]a, b[$ tal que $H(x_0) = 0$ . Esto es

$H(x_0) = f(x_0) - k = 0 \rightarrow \boxed{f(x_0) = k}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si una función es continua en $[a, b]$ y $k$ es tal que $f(a) < k < f(b)$ (ó $f(b) < k < f(a)$ ) entonces podemos garantizar la existencia de un $x_0 \in ]a, b[$ tal que $f(x_0) = k$ (su imagen coincide con $k$)

**Theorem 69** *de acotación en* $[a, b]$ [3]

Si $f$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f$ está acotada en $[a, b]$

**Theorem 70** *de Weierstrass*

Si $f$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ ,entonces

1. $\exists\ x_0 \in [a, b]\ /\ f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in [a, b]$ (P( $x_0, f(\ x_0)$) máximo absoluto de $f$ en $[a, b]$)
2. $\exists\ x_1 \in [a, b]\ /\ f(x_1) \leq f(x)\ \forall x \in [a, b]$ (P( $x_1, f(\ x_1)$) mínimo absoluto de $f$ en $[a, b]$)

Demostración Como $f$ es continua en $[a, b]$, entonces por el teorema anterior $f$ está acotada en $[a, b]$

1. Casos:

- Sea $M = \sup\{f(x)/x \in [a, b]\}$[4]$\rightarrow f(x) \leq M$ ; $\forall x \in [a, b]$

Supongamos que el máximo de $f$ en $[a, b]$ no se alcanza en el susodicho intervalo, entonces se verificará $f(x) < M$ ; $\forall x \in [a, b]$

Definimos la función

$H(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ ; por definición $H(x) > 0\ \forall x \in [a, b]$

Además $H$ es continua en $[a, b]$ por ser división de funciones continuas (ya que el denominador no se anula). En virtud del teorema de acotación, podemos afirmar que $H$ está acotada en $[a, b]$ .

Si está acotada , lo estará superiormente y por consiguiente:

$\exists\ k \in R^+\ /\ H(x) < k \Longrightarrow \dfrac{1}{M - f(x)} < k \Longrightarrow f(x) < M - \dfrac{1}{k}$

[3] Por su complejidad, no lo demostraremos

[4] Existe por el axioma del supremo, que dice:

Todo subconjunto de números reales acotado superiormente tiene supremo ( la más pequeña de las cotas superiores)

Luego $M-\dfrac{1}{k}$ es una cota superior de $f$ en $[a,b]$ y además menor que $M$. Esto contradice la hipótesis de que $M$ es el supremo

Así pues, lo que hemos supuesto es falso y por lo tanto podemos afirmar que $\exists\ x_0 \in [a,b]\ /\ f(x_0)=M \rightarrow$(P( $x_0, f($ $x_0$)) máximo absoluto de $f$ en $[a,b]$)

- Sea $m=\inf\{f(x)/x\in[a,b]\}$[5]$\rightarrow f(x)\geq m$ ; $\forall x\in[a,b]$

Supongamos que el mínimo de $f$ en $[a,b]$ no se alcanza en el susodicho intervalo, entonces se verificará $f(x)>m$ ; $\forall x\in[a,b]$

Definimos la función

$H(x)=\dfrac{1}{m-f(x)}$ ; por definición $H(x)<0\ \forall x\in[a,b]$

Además $H$ es continua en $[a,b]$ por ser división de funciones continuas (ya que el denominador no se anula).En virtud del teorema de acotación, podemos afirmar que $H$ está acotada en $[a,b]$.

Si está acotada , lo estará inferiormente y por consiguiente

$\exists\ k\in R^-\ /\ H(x)>k \Longrightarrow \dfrac{1}{m-f(x)}>k \Longrightarrow f(x)>m-\dfrac{1}{k}$

Luego $m-\dfrac{1}{k}$ es una cota inferior de $f$ en $[a,b]$ y además mayor que $m$. Esto contradice la hipótesis de que $m$ es el ínfimo.

Así pues, lo que hemos supuesto es falso y por lo tanto podemos afirmar que $\exists\ x_1 \in [a,b]\ /\ f(x_1)=m \rightarrow$(P( $x_1, f($ $x_1$)) mínimo absoluto de $f$ en $[a,b]$)

**Remark 2** *Toda función continua $f$ en $[a,b]$ tiene la propiedad siguiente:*

$$\boxed{\text{" transforma intervalos cerrados en intervalos cerrados "}}$$
$$f([a,b])=[m,M] \text{ donde } m=\min\{f(x)/x\in[a,b]\} \text{ y}$$
$$M=\max\{f(x)/x\in[a,b]\}$$

**Corollary 71** *Si $f$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ ;$m$ no coincide con $M$ [6]y además $k\in R\ /\ m<k<M$, entonces podemos garantizar la existencia de, al menos, un $x_0\in[a,b]$ tal que $f(x_0)=k$ (su imagen coincide con $k$)*

Este corollary se puede demostrar facilmente utilizando los teoremas de Darboux y Weierstrass. Demuéstralo

[5]Existe por el axioma del ínfimo, que dice:
Todo subconjunto de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo ( la más grande de las cotas inferiores)

[6]$m=\min\{f(x)/x\in[a,b]\}$ y $M=\max\{f(x)/x\in[a,b]\}$

## 2.7 Ejercicios de límites y continuidad

**Exercise 2.7.1** *Dada la función* $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ *determina:*
*a) Su dominio de definición (o continuidad)*
*b) Las discontinuidades de esta función. ¿Existe alguna asíntota vertical?.*
*c) Estudia los siguientes límites* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$*.¿Existe alguna asíntota horizontal?*
*d) Punto de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas*
*e) Dibuja su gráfica y compárala con la de* $g(x) = \frac{1}{x+1}$

Solución
a) Su dominio de continuidad coincide con su dominio de defincíión.
Éste es:

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \sim \{-1, 1\} \\ D(f) &= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

Por lo tanto; la función no es continua para los valores $x = -1$ y $x = 1$ al no existir $f(-1)$ ni $f(1)$.

b) Estudiemos ahora que tipo de discontinuidad presentan. Para ello; bastará con estudiar sus límites:
1) Para $x = 1$
$\lim_{x\to1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$
Si ahora factorizamos el denominador:

$$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

La función presenta en x=1 una discontinudad evitable ; ya que no existe $f(1)$ y si que existe el $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$
2) Para $x = -1$
$\lim_{x\to-1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{-1-1}{1-1} = \dfrac{-2}{0}$
Sabemos que $x = -1$ es una asíntota vertical. Para $x = -1$ la función presenta una discontinuidad de salto infinito

Pasamos a estudiar los límites laterales para determinar si es una asíntota vertical de ramas convergentes o divergentes

$$\begin{bmatrix} \lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{-2\cdot0^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to-1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{-2\cdot0^+} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{bmatrix}$$

$x = -1$ es una asíntota vertical, de ramas divergentes de la función
c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$
Dividiendo numerador y denominador por $x^2$ tendremos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0^+$$

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \frac{-\infty}{+\infty}$

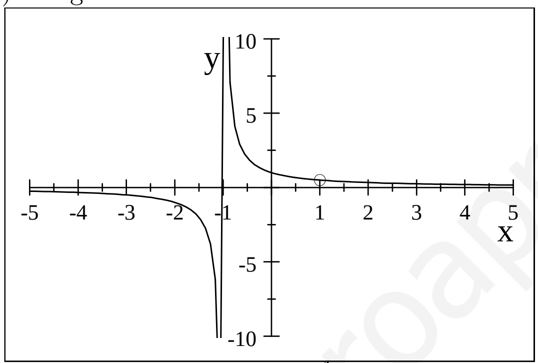
Dividiendo numerador y denominador por $x^2$tendremos:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=0^-$$

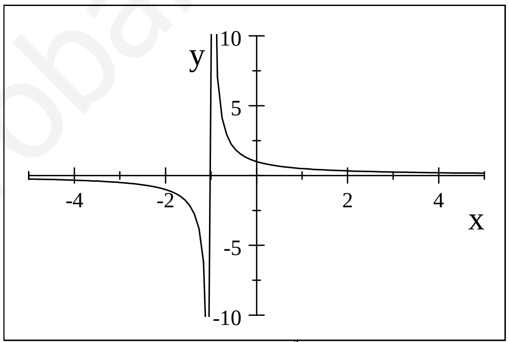
La recta $y=0$ es una asíntota horizontal de la función
d) Los puntos de corte de la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ con los ejes son:

Con el eje de las $Y$ es el punto $P(0,-1)$ (ya que Si $x=0\to y=1$)
Con el eje $X$ no hay ( ya que si $y=0$ $\dfrac{x-1}{x^2-1}=0$ no tiene solución)

e) Las gráficas de ambas funciones son



$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$



$g(x)=\frac{1}{x+1}$

La gráfica de $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ coincide con la de $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ si a ésta le quitamos el punto $Q(1,\dfrac{1}{2})$

**Exercise 2.7.2** *Dada la función* $f(x)=3^{\frac{1}{x}}-1$ *determina:*
*a) Su dominio de definición (o continuidad)*
*b) Las discontinuidades de esta función. ¿Existe alguna asíntota vertical?.*
*c) Estudia los siguientes límites* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$*.¿Existe alguna asíntota horizontal?*
*d) Punto de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas*
*e) Dibuja su gráfica*

Solución
a) Su dominio de continuidad coincide con su dominio de definciión.
Éste es:

$$\begin{aligned}D(f)&=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}\\D(f)&=\mathbb{R}\sim\{0\}\\D(f)&=(-\infty,0)\cup(0.+\infty)\end{aligned}$$

Por lo tanto; la función no es continua para $x=0$ al no existir $f(0)$
b) Estudiemos ahora que tipo de discontinuidad presenta. Para ello; bastará con estudiar los límites laterales de la función cuando $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{+\infty} - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$

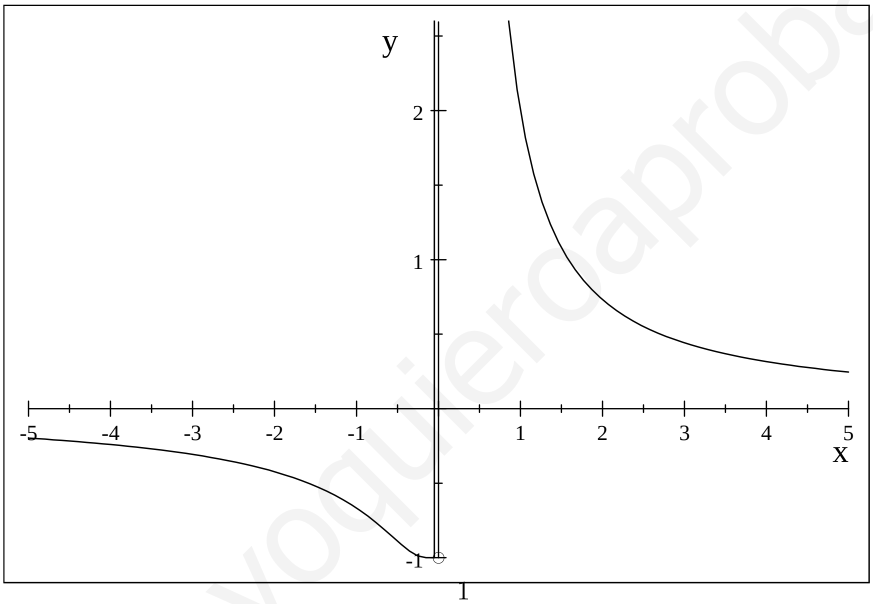
La función presenta para $x = 0$ una discontinuidad de salto infinito . La función tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$ ( sólo por la derecha)

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{\frac{1}{\infty}-1} = 3^{0^+} - 1 = 0^+$

$\lim\limits_{x\to -\infty} 3^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{\frac{1}{-\infty}-1} = 3^{0^-} - 1 = 0^-$

d)No hay puntos de corte de la función $f(x) = 3^{\frac{1}{x}} - 1$ con los ejes de coordenadas ya que $0 \notin D(f)$ $y$ la ecuación $3^{\frac{1}{x}} - 1 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$

e) Su gráfica es ésta:




$f(x) = 3^{\frac{1}{x}} - 1$

**Exercise 2.7.3** *Dada la función* $f(x) = 3^{\frac{1}{x}} + 1$ *determina:*
*a) Su dominio de definición (o continuidad)*
*b) Las discontinuidades de esta función. ¿Existe alguna asíntota vertical?.*
*c) Estudia los siguientes límites* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$*.¿Existe alguna asíntota horizontal?*
*d) Punto de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas*
*e) Dibuja su gráfica*

**Exercise 2.7.4** *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$*determina:*
*a) Su dominio de definición (o continuidad)*
*b) Las discontinuidades de esta función. ¿Existe alguna asíntota vertical?.*
*c) Estudia los siguientes límites* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$*.¿Existe alguna asíntota*

*horizontal?*
*d) Punto de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas*

Solución
a) Su dominio de continuidad coincide con su dominio de defínciiön.
Éste es:

$$D(f)=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}\cap\{x\in\mathbb{R}\sim\{0\}\ /3^{\frac{1}{x}}+1\neq 0\}$$

La ecuación $3^{\frac{1}{x}}+1=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}\sim\{0\}$; ya $3^{\frac{1}{x}}+1>1$ $\forall x\in\mathbb{R}\sim\{0\}$

Consecuentemente el conjunto $\{x\in\mathbb{R}\sim\{0\}\ /3^{\frac{1}{x}}+1\neq 0\}=\mathbb{R}\sim\{0\}$ y, por lo tanto el dominio de definición (o continuidad) de esta función es:

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}=\mathbb{R}\sim\{0\} \\ D(f) &= (-\infty,0)\cup(0,+\infty) \end{aligned}$$

Por lo tanto; la función no es continua para $x=0$ al no existir $f(0)$

b) Estudiemos ahora que tipo de discontinuidad presenta. Para ello; bastará con estudiar los límites laterales de la función cuando $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{3^{+\infty}-1}{3^{+\infty}-1}=\frac{+\infty}{+\infty}$

Dividimos numerador y denominador por $3^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}}}{1+\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-3^{-\frac{1}{x}}}{1+3^{-\frac{1}{x}}}=\frac{1-3^{-\infty}}{1+3^{-\infty}}=1$$

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{3^{-\infty}-1}{3^{-\infty}-1}=-1$

La función presenta para $x=0$ una discontinuidad de salto finito ya que sus límites laterales son distintos. La función no tiene asíntotas verticales

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{3^{\frac{1}{\infty}}-1}{3^{\frac{1}{\infty}}+1}=\frac{3^{0^+}-1}{3^{0^+}+1}=\frac{0^+}{2}=0^+$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{3^{\frac{1}{-\infty}-1}}{3^{\frac{1}{-\infty}-1}}=\frac{3^{0^-}-1}{3^{0^-}+1}=\frac{0^-}{2}=0^-$

La recta $y=0$ es una asíntota horizontal

d) No hay puntos de corte de la función $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ con los ejes de coordenadas ya que $0\notin D(f)$ *y* la ecuación $3^{\frac{1}{x}}-1=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$

**Exercise 2.7.5** *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si\ x\leq 1 \\ -3x & si\ x>1 \end{cases}$

*a) Estudiar su continuidad para* $x=1$
*b) ¿Es continua para cualquier número real?*
*c) Dibuja su gráfica*

Solución

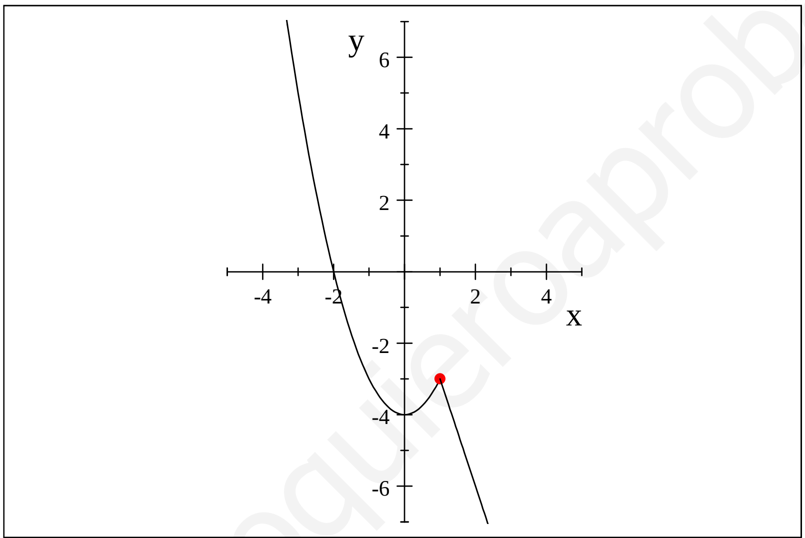
a) Como $\left[\begin{array}{c} f(1)=1^2-4=-3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-4\right)=-3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-3x)=-3 \end{array}\right] \to f$ es continua para $x=1$

b) Como $\left[\begin{array}{l} f(x)=x^2-4 \text{ es continua si } x<1 \text{ por ser una función polinómica} \\ f(x)=-3x \text{ es continua si } x>1 \text{ por ser una función polinómica} \\ f \text{ es continua en } x=1 \text{ por el apartado a)} \end{array}\right]$

entonces; podemos afirmar que:

$$f \text{ es continua } \forall x\in\mathbb{R}$$

c)Su gráfica es la siguiente:




$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\leq 1 \\ -3x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

**Exercise 2.7.6** *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si & x<-1 \\ 5-x^2 & si & -1\leq x\leq 1 \\ x^2-1 & si & 1<x \end{cases}$

*a) Dominio de definición*
*b) Estudiar su continuidad.Clasifica las discontinuidades*
*c) Dibuja su gráfica*

Solución

a) Es obvio que $\forall x\in\mathbb{R}$ siempre podemos determinar su imagen. Así pues; $D(f)=\mathbb{R}$

b) Como $\left[\begin{array}{l} f(x)=x^2-1 \text{ es continua si } x<1 \text{ por ser una función polinómica} \\ f(x)=5-x^2 \text{ es continua si } -1<x<1 \text{ por ser una función polinómica} \\ f\ (x)=x^2-1 \text{ es continua si } x>1 \text{ por ser una función polinómica} \end{array}\right]$

entonces; podemos afirmar que $f$ es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

Estudiemos ahora que ocurre para $x=-1$ y $x=1$

$1^o$) Para $x = -1$.Como $\left[\begin{array}{c} f(-1) = 5 - (-1)^2 = 4 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(x^2 - 1\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(5 - x^2\right) = 4 \end{array}\right]$ entonces; $f$ no es continua en $x = -1$

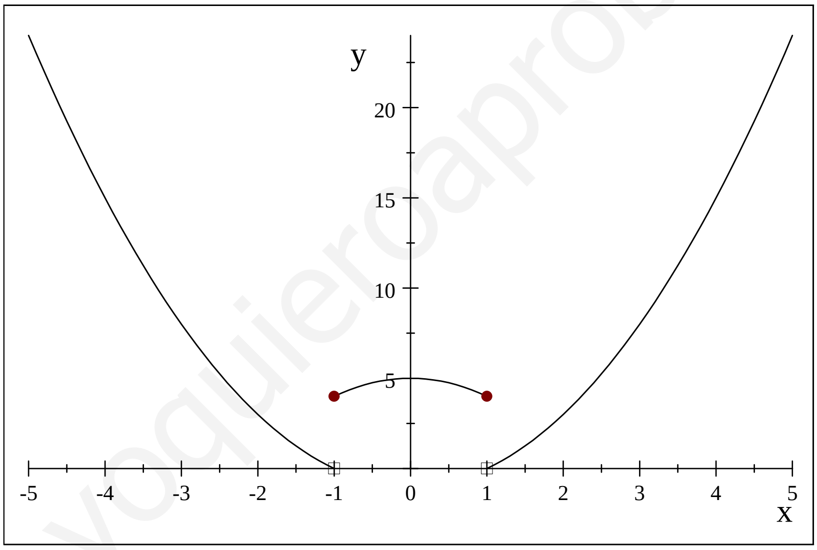
En $x = -1$ la función tiene una discontinuidad de salto finito.($f$ sólo es continua en $x = -1$ por la derecha)

$2^o$) Para $x = 1$.Como $\left[\begin{array}{c} f(1) = 5 - (1)^2 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(5 - x^2\right) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(x^2 - 1\right) = 0 \end{array}\right]$ entonces; $f$ no es continua para $x = 1$

En $x = 1$ la función tiene una discontinuidad de salto finito.($f$ sólo es continua en $x = 1$ por la izquierda)

*Conclusión final*: $f$ es continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

c) Su gráfica es:




**Exercise 2.7.7** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & si \quad 0 \le x < 1 \\ 1 - \frac{x}{2} & si \quad 1 \le x \le 4 \\ \sqrt{x} - 4 & si \quad 4 < x \end{cases}$

*a) El Dominio de definición, el dominio de continuidad y su gráfica*

Solución

a) Observa que $\forall x \in [0, +\infty)$ siempre podemos calcular su imagen. Así pues; $D(f) = [0, +\infty)$

b) Como $\left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \text{ es continua en } 0 < x < 1\text{; ya que su denominador se anula en } x = 1 \\ f(x) = 1 - \frac{x}{2} \text{ es continua en } 1 < x < 4 \text{ por ser una función polinómica} \\ f(x) = \sqrt{x} - 4 \text{ es continua si } x > 4 \text{ ya que } g(x)=\sqrt{x} \text{ lo es en } [0, +\infty\ ) \end{array}\right]$

entonces podemos afirmar que $f$ es continua en $(0, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$

Estudiemos ahora qué ocurre en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 4$

$1^o$) En $x = 0$.Como no existe función a la izquierda de $x = 0$ no existirá el $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

Al ser $\left[\begin{array}{l} f(0)=\frac{\sqrt{0}-1}{0-1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1 \end{array}\right] \to f$ es continua en $x=0$ por la derecha

2º) En $x=1$.Como $\left[\begin{array}{l} f(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}\ ;\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2} \end{array}\right]$

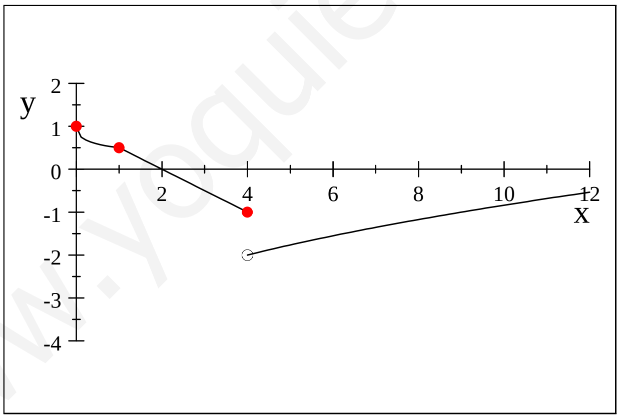
entonces; la función es continua en $x=1$

3º) En $x=4$. Como $\left[\begin{array}{l} f(4)=1-\frac{4}{2}=-1 \\ \lim\limits_{x\to 4^-}\left(1-\frac{x}{2}\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 4^+}\left(\sqrt{x}-4\right)=-2 \end{array}\right]$ entonces; la función no es continua en $x=4$ ($f$ sólo es continua por la izquierda).

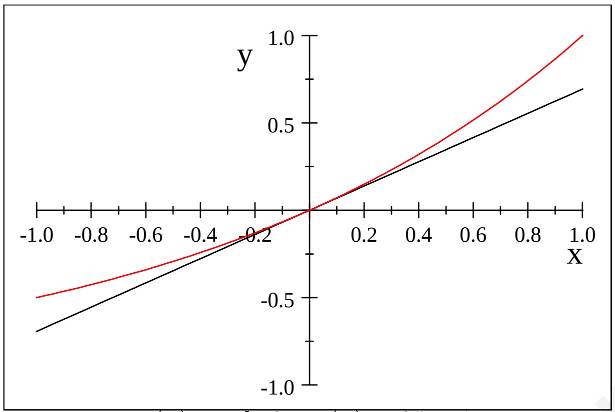
En dicho punto presenta una discontinuidad de salto finito.

*Conclusión final:* $f$ es continua en $[0,4)\cup(4,+\infty)$

c) Su gráfica es la siguiente:Fíjate antes que: $\left[\begin{array}{l} \text{La función pasa por } (2,0) \text{ y } (16,0) \\ \text{La función pasa por el punto } (0,1) \end{array}\right]$




**Exercise 2.7.8** *Estudia las discontinuidades de las funciones* $f(x)=\dfrac{x}{3^{\frac{1}{x}}-1}$ ,
$g(x)=\dfrac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1-2^{\frac{1}{x}}}$ *y* $h(x)=\frac{x}{2^x-1}$ *en* $x=0$
*Ayuda: Si* $x\to 0$ *entonces;* $2^x-1$ *es equivalente a* $x\ln 2$
*Fíjate que las graficas de* $t(x)=x\ln 2$ *y* $s(x)$=$2^x-1$ *en un entorno reducido de centro* 0 *y radio infinitesimal se confunden*

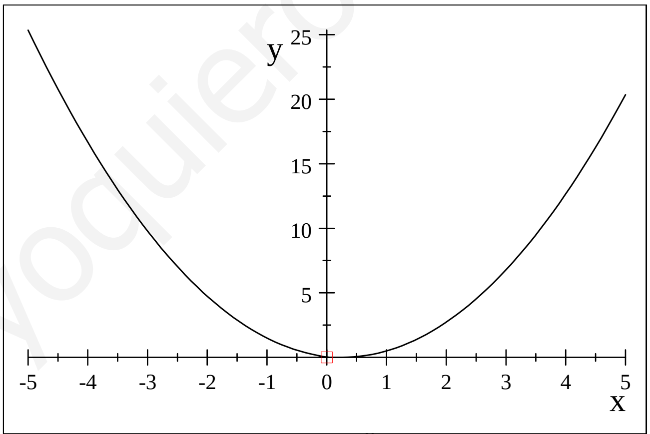



$t(x) = x \ln 2$ y $s(x) = 2^x - 1$

Solución:

a) Sea $f(x) = \dfrac{x}{3^{\frac{1}{x}} - 1}$

Como $\left[ \begin{array}{c} \text{No existe } f(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{3^{\frac{1}{x}} - 1} = \frac{0}{3^{\frac{1}{0^+}} - 1} = \frac{0}{3^{+\infty} - 1} = \frac{0}{+\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{3^{\frac{1}{x}} - 1} = \frac{0}{3^{\frac{1}{0^-}} - 1} = \frac{0}{3^{-\infty} - 1} = \frac{0}{-1} = 0 \end{array} \right]$ entonces; $f$ presenta en $x = 0$ una discontinuidad evitable




$f(x) = \dfrac{x}{3^{\frac{1}{x}} - 1}$

b) Sea $g(x) = \dfrac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{1 - 2^{\frac{1}{x}}}$

- No existe $g(0)$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{1 - 2^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1 + 2^{\frac{1}{0^+}}}{1 - 2^{\frac{1}{0^+}}} = \dfrac{1 + 2^{+\infty}}{1 - 2^{+\infty}} = \dfrac{\infty}{-\infty}$

Para eliminar esta indeterminación; dividimos numerador y denominador por $2^{\frac{1}{x}}$

Con lo que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}+1}{\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{-\frac{1}{x}}+1}{2^{-\frac{1}{x}}-1} = \frac{2^{-\infty}+1}{2^{-\infty}-1} = -1$$

- $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1-2^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1+2^{\frac{1}{0^-}}}{1-2^{\frac{1}{0^-}}} = \dfrac{1+2^{-\infty}}{1-2^{-\infty}} = 1$

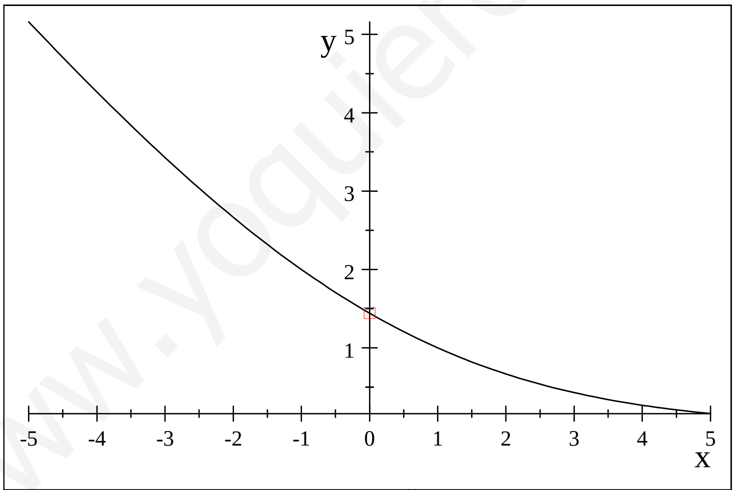
Para $x=0$; la función $g$ presenta una discontinuidad de salto infinito
c) Sea $h(x) = \dfrac{x}{2^x-1}$

- No existe $h(0)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2^x-1} = \frac{0}{0}$

El comportamiento de la función $s(x) = 2^x - 1$ en un entorno reducido de centro 0 y radio infinitesimal coincide con el de la función $t(x) = x\ln 2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1.4427$$

La función $h$ presenta para $x=0$ una discontinuidad evitable.
Su gráfica es ésta:




$h(x) = \dfrac{x}{2^x-1}$

**Exercise 2.7.9** *Hállense a y b para qué la función* $f(x) = \begin{cases} 4^{\frac{\pi}{x}} & si \quad x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & si \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & si \quad x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Solución:

- Si $x < -\dfrac{\pi}{2}$ la función $f(x) = 4^{\frac{\pi}{x}}$ es continua por serlo la función en $\mathbb{R}$

- Si $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ la función $f(x) = a\sin x + b$ es continua por ser suma de las funciones $t(x) = a\sin x$ y $h(x) = b$ ambas continuas en $\mathbb{R}$
- Si $x > \dfrac{\pi}{2}$ la función $f(x) = \cos x$ es continua por serlo en $\mathbb{R}$
- Como en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ la función ha de ser continua, entonces se ha de verificar:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x) = f(-\frac{\pi}{2})$$

Calculemos pues la imagen de la función en $-\dfrac{\pi}{2}$ y su límite cuando $x$ tienda a $-\dfrac{\pi}{2}$

– 
  - $f(-\dfrac{\pi}{2}) = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} 4^{\frac{\pi}{x}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} a\sin x + b = a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = -a + b$

Por lo tanto:

$$-a + b = \frac{1}{2} \tag{a}$$

- Como en $x = \dfrac{\pi}{2}$ la función ha de ser continua, entonces se ha de verificar:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$$

Calculemos pues la imagen de la función en $\dfrac{\pi}{2}$ y su límite cuando $x$ tienda a $\dfrac{\pi}{2}$

– 
  - $f(\dfrac{\pi}{2}) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} a\sin x + b = a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = a + b$
  - $\displaystyle\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Por lo tanto:

$$a + b = 0 \tag{b}$$

Sumando las expresiones $(a)$ y $(b)$ tendremos

$$2b = \frac{1}{2} \to b = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo el valor obtendido en la ecuación $(b)$

$$a = -\frac{1}{4}$$

La función buscada es ésta:

$$f(x)=\begin{cases} 4^{\frac{\pi}{x}} & \text{si} \quad x\leq -\dfrac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{4} & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad x\geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

**Exercise 2.7.10** *a) Probar que la función $f(x)=-1+x+\sin x$ es continua en $\mathbb{R}$*
*b) Probar que existe al menos una solución de la ecuación $-1+x+\sin x=0$*
*c) Determínala redondeando su valor a la segunda cifra decimal (error menor que 5 milésimas)*

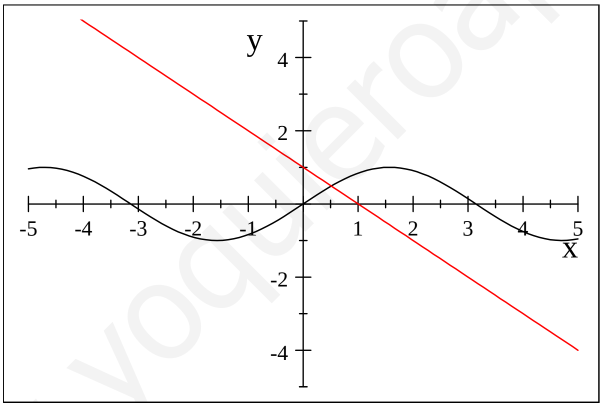
Solución

a) Las funciones $\left[\begin{array}{c} r(x)=-x+1 \\ g(x)=\sin x \end{array}\right]$ son continuas en $\mathbb{R}\rightarrow f(x)=g(x)-r(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

b)

*Primer procedimiento*

Dibujo las gráficas de $g(x)=\sin x$ y $r(x)=-x+1$

: 


$g(x)=\sin x$ y $r(x)=-x+1$

Ambas gráficas, tienen un punto de corte de abcisa $c$ comprendida entre 0 y 1.

Fíjate que para $x=c$ se verifica que $-c+1=\sin c\Leftrightarrow -1+c+\sin c=0$

$c$ es solución de la ecuación $-1+x+\sin x=0$

*Segundo procedimiento*

Consideramos la función auxiliar $H(x)=-1+x+\sin x$ ( $H(x)$ geométricamente representa la diferencia de las ordenadas de las gráficas de las funciones $g(x)=\sin x$ y $r(x)=-x+1$. En concreto $H(x)=g(x)-r(x)$)

- Esta función $H$ es continua en $[0,1]$ por serlo $H$ en $\mathbb{R}$ (apartado a)

- $H(0)=-1+0+\sin 0=-1$

- $H(1)=-1+1+\sin 1=\sin 1\approx 0.841\,47>0$

Como esta función $H$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en [0,1]. Entonces; podemos grarantizar la existencia de al menos un $c \in (0,1)$ / $H(c) = 0$

Esto es, que:

$$H(c) = 0 \Longleftrightarrow -1 + c + \sin c \Longleftrightarrow c \text{ es solución de } -1 + x + \sin x = 0$$

c) Dividimos el intervalo $[0,1]$ en diez partes iguales y calculamos sus imágenes mediante $H$

$H(x) = -1 + x + \sin x$

$$H\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0.6} \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \sin x - 1 \\ -1 \\ -0.80017 \\ -0.60133 \\ -0.40448 \\ -0.21058 \\ \mathbf{-2.0574 \times 10^{-2}} \\ \mathbf{0.16464} \\ 0.34422 \\ 0.51736 \\ 0.68333 \\ \sin 1 \end{pmatrix} \to H\begin{pmatrix} x \\ 0.5 \\ \mathbf{0.51} \\ \mathbf{0.52} \\ 0.53 \\ 0.54 \\ 0.55 \\ 0.56 \\ 0.57 \\ 0.58 \\ 0.59 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \sin x - 1 \\ -2.0574 \times 10^{-2} \\ \mathbf{-1.8228 \times 10^{-3}} \\ \mathbf{0.01688} \\ 3.5533 \times 10^{-2} \\ 5.4136 \times 10^{-2} \\ 7.2687 \times 10^{-2} \\ 9.1186 \times 10^{-2} \\ 0.10963 \\ 0.12802 \\ 0.14636 \\ 0.16464 \end{pmatrix} \to$$

$$H\begin{pmatrix} x \\ \mathbf{0.51} \\ \mathbf{0.515} \\ 0.52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \sin x - 1 \\ \mathbf{-1.8228 \times 10^{-3}} \\ \mathbf{7.5348 \times 10^{-3}} \\ 0.01688 \end{pmatrix}$$

Observamos que la solución está comprendida en el intervalo $(0.51, 0.515)$

Por lo tanto; si redondeamos dicho valor a las centesimas

$$c \approx 0.51 \text{ y el error cometido será inferior a 5 milésimas}$$

Nota: Una solución más precisa para $c$ es

$$c \approx 0.51097 \text{ con un error inferior a 5 millonésimas}$$

**Exercise 2.7.11** *a) Probar que la ecuación $0 = x^3 + x - 5$ tiene al menos una solución entre 1 y 2*
*c) Determínala redondeando su valor a la segunda cifra decimal (error menor que 5 milésimas)*

*Solución*

a) Las funciones $\begin{bmatrix} r(x) = -x + 5 \\ g(x) = x^3 \end{bmatrix}$ son continuas en $\mathbb{R}$ por ser funciones polinómicas

Así pues la función$\to$ $f(x) = g(x) - r(x) = x^3 + x - 5$ es continua en $\mathbb{R}$

*Primer procedimiento*

Consideramos la función auxiliar $f(x) = x^3 + x - 5$ ( $f(x)$ geométricamente representa la diferencia de las ordenadas de las gráficas de las funciones $g(x) = x^3$ y $r(x) = -x + 5$. En concreto $f(x) = g(x) - r(x)$)

- Esta función $f$ es continua en $[1,2]$ por serlo $f$ en $\mathbb{R}$
- $f(1) = -5 + 1 + 1^3 = -2 < 0$

- $f(2) = -5 + 2 + 2^3 = 5 > 0$

Como esta función $f$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en [1,2]. Entonces; podemos grarantizar la existencia de al menos un $c \in (1,2)$ / $f(c) = 0$

Esto es, que:

$$f(c) = 0 \Longleftrightarrow -5 + c + c^3 \Longleftrightarrow c \text{ es solución de } -5 + x + x^3 = 0$$

b) Dividimos el intervalo $[0,1]$ en diez partes iguales y calculamos sus imágenes mediante $f$

$f(x) = -5 + x + x^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ \mathbf{1.5} \\ \mathbf{1.6} \\ 1.7 \\ 1.8 \\ 1.9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + x - 5 \\ -3 \\ -2.569 \\ -2.072 \\ -1.503 \\ -0.856 \\ \mathbf{-0.125} \\ \mathbf{0.696} \\ 1.613 \\ 2.632 \\ 3.759 \\ 5 \end{pmatrix} \to$$ [7]

$$f\begin{pmatrix} x \\ 1.5 \\ \mathbf{1.51} \\ \mathbf{1.52} \\ 1.53 \\ 1.54 \\ 1.55 \\ 1.56 \\ 1.57 \\ 1.58 \\ 1.59 \\ 1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + x - 5 \\ -0.125 \\ \mathbf{-4.7049 \times 10^{-2}} \\ \mathbf{3.1808 \times 10^{-2}} \\ 0.11158 \\ 0.19226 \\ 0.27388 \\ 0.35642 \\ 0.43989 \\ 0.52431 \\ 0.60968 \\ 0.696 \end{pmatrix} \to$$

[8]
$$f\begin{pmatrix} x \\ 1.51 \\ \mathbf{1.515} \\ \mathbf{1.52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + x - 5 \\ -4.7049 \times 10^{-2} \\ \mathbf{-7.7341 \times 10^{-3}} \\ \mathbf{3.1808 \times 10^{-2}} \end{pmatrix}$$

Observamos que la solución está comprendida en el intervalo $(1.515, 1.52)$

Por lo tanto; si redondeamos dicho valor a las centésimas:

$$c \approx 1.52 \text{ y el error cometido será inferior a 5 milésimas}$$

Nota: Una solución más precisa para $c$ es

$$c \approx x = 1.5160 \text{ con un error inferior a 5 cienmilésimas}$$

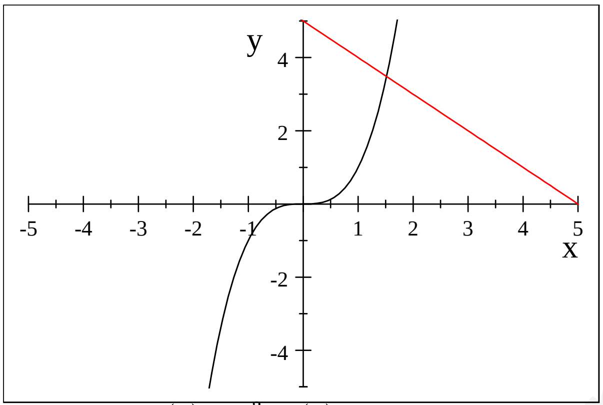
*Segundo procedimiento*

Dibujo las gráficas de $g(x) = x^3$ y $r(x) = -x + 5$

[7] Dividimos ahora el intervalo $[1.5, 1.6]$ en diez partes iguales y calculamos sus imágenes

[8] Dividimos ahora el intervalo $[1.51, 1.52]$ en dos partes iguales y calculamos sus imágenes

:




$g(x) = x^3$y $r(x) = -x + 5$

Ambas gráficas, tienen un punto de corte de abcisa $c$ comprendida entre 1 y 2.

Fíjate que para $x = c$ se verifica que $-c + 5 = c^3 \Leftrightarrow -5 + c + c^3 = 0$
$c$ es solución de la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$

**Exercise 2.7.12** *a) Razónese que la función* $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ *es continua en* $[-1, 1]$
*b) Sin resolver la ecuación* $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1.5$*, razónese que ésta tiene alguna-solución*

Solución:
Como $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ entonces:

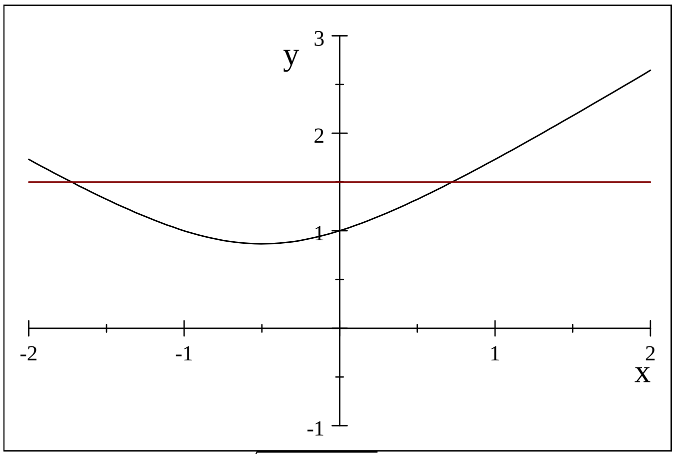
$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ se verifica } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \rightarrow \begin{array}{c} D(f) = \mathbb{R} \\ \operatorname{Im}(f) = [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty) \end{array}$$

El dominio de definición de $f$ es $R \rightarrow$La función, $f$, es continua en $\mathbb{R}$
En particular lo será en $[-1, 1]$

Como $\left[\begin{array}{c} f \text{ es continua en } [-1,1] \\ f(-1) = 1 \\ f(1) = \sqrt{3} \approx 1.7321 \\ f(-1) = 1 < 1.5 < f(1) = \sqrt{3} \end{array}\right]$ entonces; por el teorema de los valores intermedios (Criterio de Darboux) podemos garantizar que:

$$\exists\, c \in (-1, 1) \;/\; f(c) = 1.5$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{c^2 + c + 1} = 1.5$$
$$\Updownarrow$$
$$c \text{ es solución de la ecuación } \sqrt{x^2 + x + 1} = 1.5$$

Nota 1 **Por ser el conjunto** $\operatorname{Im}(f) = [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$ **y** $1.5 \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$ **siempre podemos garantizar que existe al menos una antiimagen del número** $1.5$ **mediante la aplicación** $f$




$y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ e $y = 1.5$

Nota 2: **Si resolvemos la ecuación** $\sqrt{x^2+x+1} = 1.5$**; sus soluciones son**:

$$x = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \approx 0.72474 \in (-1,1) \\ \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \approx -1.7247 \notin (-1,1) \end{cases}$$

**Exercise 2.7.13** *Pruébese que la función* $f(x) = x(1+\sin x)$ *toma el valor* 2 *en* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Solución

Como las funciones $\begin{bmatrix} g(x) = \sin x \\ t(x) = 1 \\ h(x) = x \end{bmatrix}$ son continuas en $\mathbb{R}$ $\rightarrow$la función $z(x) = t(x) + g(x) = 1 + \sin x$ es continua en $\mathbb{R}$ y la función $f(x) = h(x).z(x) = x(1+\sin x)$también lo es en $\mathbb{R}$.

En particular $f$ es continua en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

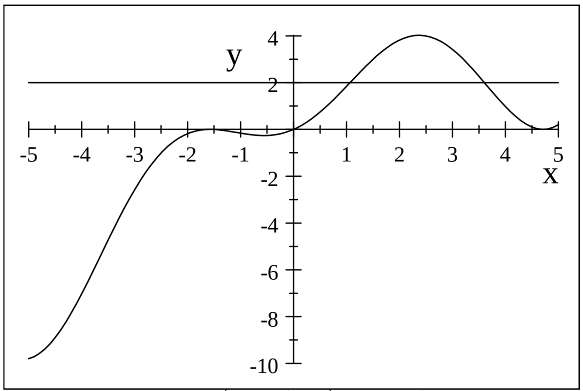
Calculemos ahora $f(-\frac{\pi}{2})$ y $f(\frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} f(-\frac{\pi}{2}) &= -\frac{\pi}{2}(1+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)) = 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) &= \frac{\pi}{2}(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)) = \pi \approx 3.1416 \end{aligned}$$

Como $\begin{bmatrix} f(x) \text{ es continua en } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 = f(-\frac{\pi}{2}) < 2 < f(\frac{\pi}{2}) = \pi \end{bmatrix}$ entonces; por el teorema de los valores intermedios (Criterio de Darboux) podemos garantizar que:

$$\exists\ c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\ /\ f(c) = 2$$
$$\Updownarrow$$
$$c(1+\sin c) = 2$$
$$\Updownarrow$$
$$c \text{ es solución de la ecuación } x(1+\sin x) = 2$$

Nota: Aquí están las gráfica de $y = x(1+\sin x)$ y de $y = 2$




$y = x(1 + \sin x)$ e $y = 2$

**Exercise 2.7.14** *Se puede afirmar que la ecuación* $\cos x = x$ *tiene al menos una solución positiva*

*Solución:*

*Primer procedimiento*

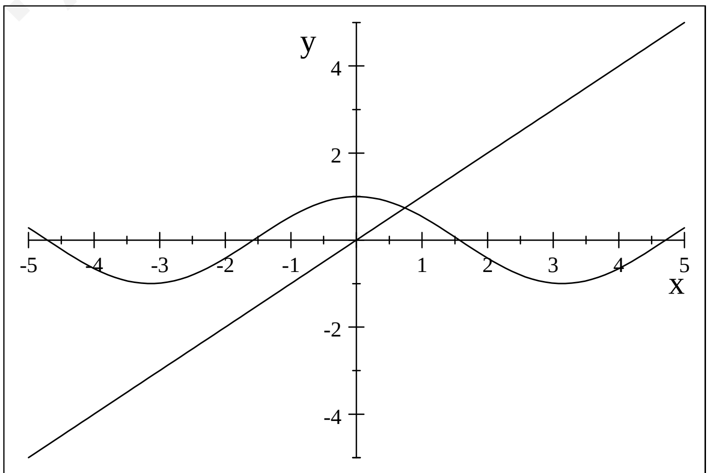
Consideramos la función $f(x) = \cos x - x$. Esta función es continua en $\mathbb{R}$, por ser resta de las funciones $h(x) = \cos x$ y $t(x) = x$ que son continuas en $\mathbb{R}$

Como $\left[\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [0,1] \\ f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = \cos 1 - 1 \approx -0.459\,70 < 0 \end{array}\right]$ entonces; por el teorema de Bolzano podemos garantizar que:

$$\exists\, c \in (0,1) \ / \ f(c) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos c - c = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$c \text{ es solución de la ecuación } \cos x = x$$

*Segundo procedimiento*

Si dibujamos las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x$




$f(x) = \cos x$ y $g(x) = x$

Podemos observar que dichas gráficas sólo tienen un punto en común. Su abcisa correspondiente está comprendida entre 0 y 1

**Exercise 2.7.15** *Hállense $a$ y $b$ para qué la función* $f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & si \quad x \leq 0 \\ \sin(b+x) & si \quad 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{x} & si \quad x \geq \pi \end{cases}$

**Exercise 2.7.16** *a) Dada la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$ ¿Podemos afirmar que existe al menos un punto de su gráfica, en el intervalo $(0,1)$, sobre el eje de las $X$*
*b) Redondea el valor de la abcisa de dicho punto a la segunda cifra decimal (error menor que 5 milésimas)*

*Solución*

a) Las funciones $\begin{bmatrix} r(x) = 5x^2 - 1 \\ g(x) = x^3 \end{bmatrix}$ son continuas en $\mathbb{R}$ por ser funciones polinómicas

Así pues la función→ $f(x) = g(x) - r(x) = x^3 - 5x^2 + 1$es continua en $\mathbb{R}$

*Primer procedimiento*

La función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$ ( $f(x)$ geométricamente representa la diferencia de las ordenadas de las gráficas de las funciones $g(x) = x^3$ y $r(x) = 5x^2 - 1$. En concreto $f(x) = g(x) - r(x)$)

- Esta función $f$ es continua en $[0,1]$ por serlo $f$ en $\mathbb{R}$
- $f(0) = 1 > 0$
- $f(1) = 1 - 5 + 1 = -3 < 0$

Como esta función $f$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0,1]$. Entonces; podemos grarantizar la existencia de al menos un $c \in (0,1)$ / $f(c) = 0$

Esto es, que:

$$f(c) = 0 \Longleftrightarrow c^3 - 5c^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow c \text{ es solución de } x^3 - 5x^2 + 1 = 0$$

b) Dividimos el intervalo $[0,1]$ en diez partes iguales y calculamos sus imágenes mediante $f$

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$

$$f\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ \mathbf{0.4} \\ \mathbf{0.5} \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - 5x^2 + 1 \\ 1 \\ 0.951 \\ 0.808 \\ 0.577 \\ \mathbf{0.264} \\ \mathbf{-0.125} \\ -0.584 \\ -1.107 \\ -1.688 \\ -2.321 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow {}^9 f\begin{pmatrix} x \\ 0.4 \\ 0.41 \\ 0.42 \\ 0.43 \\ 0.44 \\ 0.45 \\ \mathbf{0.46} \\ \mathbf{0.47} \\ 0.48 \\ 0.49 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - 5x^2 + 1 \\ 0.264 \\ 0.22842 \\ 0.19209 \\ 0.15501 \\ 0.11718 \\ 7.8625 \times 10^{-2} \\ \mathbf{3.9336 \times 10^{-2}} \\ \mathbf{-6.77 \times 10^{-4}} \\ -4.1408 \times 10^{-2} \\ -8.2851 \times 10^{-2} \\ -0.125 \end{pmatrix}$$

[9] Dividimos ahora el intervalo $[0.4, 0.5]$ en diez partes iguales y calculamos sus imágenes

[10] $$f\begin{pmatrix} x\\ 0.46\\ \mathbf{0.465}\\ \mathbf{0.47}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3-5x^2+1\\ 3.9336\times 10^{-2}\\ \mathbf{1.9420\times 10^{-2}}\\ \mathbf{-6.77\times 10^{-4}}\end{pmatrix}$$

Observamos que la solución está comprendida en el intervalo $(\mathbf{0.465}, \mathbf{0.47})$
Por lo tanto; si redondeamos dicho valor a centésimas :

$c \approx \mathbf{0.47}$ y el error cometido será inferior a 5 milésimas

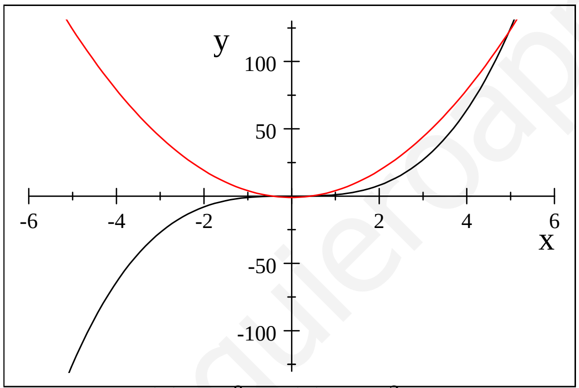
Nota 1: Una solución más precisa para $c$ es

$c \approx= 0.46983$ con un error inferior a 5 millonésimas

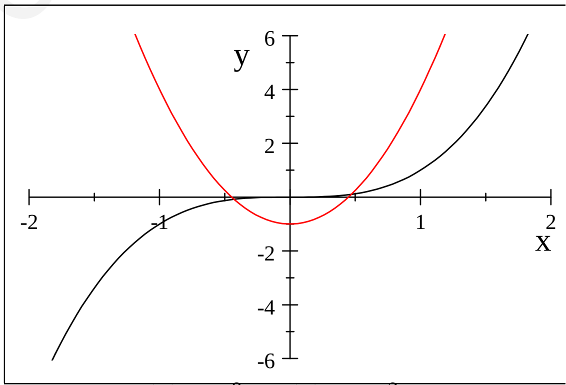
Nota2: La ecuación $x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ tiene dos soluciones más comprendidas entre $(-1, 0)$ y $(4, 5)$. Compruébalo

*Segundo procedimiento*

Dibujo las gráficas de $g(x) = x^3$ y $r(x) = 5x^2 - 1$



$g(x) = x^3$ y $r(x) = 5x^2 - 1$



$g(x) = x^3$ y $r(x) = 5x^2 - 1$

Ambas gráficas, tienen tres puntos de corte . Para uno de ellos, su abcisa $c$ está comprendida entre 0 y 1.

Fíjate que para este valor se verifica que $-5c^2 + 1 = c^3 \Leftrightarrow c^3 - 5c^2 + 1 = 0$
$c$ es solución de la ecuación $x^3 - 5x^2 + 1 = \dot{0}$.
El punto$(c, 0)$ es un punto de la gráfica de $f$ que está sobre el eje de las X

**Exercise 2.7.17** *Sean* $\left[\begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ dos funciones continuas en } [a,b] \\ f(a) > g(a) \\ f(b) < g(b) \end{array}\right] \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ / $f(c) = g(c)$

*Comentario: Este teorema nos permite afirmar que dadas 2 funciones $f$ y $g$ continuas en $[a, b]$, tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$ siempre existe en $(a.b)$ al menos un punto de corte entre ambas gráficas.*

*Solución*

Sea $H(x) = f(x) - g(x)$. $H$ es continua en $[a, b]$ por ser resta de funciones continuas en $[a, b]$

[10] Dividimos ahora el intervalo $[0.46, 0.47]$ en dos partes iguales y calculamos sus imágenes

Además $H(a) = f(a) - g(a) > 0$ y $H(b) = f(b) - g(b) < 0$

Como $H$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[a, b]$ entonces; podemos afirmar que existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que f(c)-g(c)=H(c)=0

$$\exists c \in (a, b) \;/\; f(c) = g(c)$$

**Exercise 2.7.18** *Sea $f(x) = x^3$, estudiar si está acotada superior e inferiormente en $[1, 5]$ e indica si alcanza sus valores máximos ymínimos absolutos en [1,5]*

*Solución*

Como la función $f(x) = x^3$ es una función polinómica→ $f$ es continua en $\mathbb{R}$.En particular, $f$ es continua en $[1, 5]$

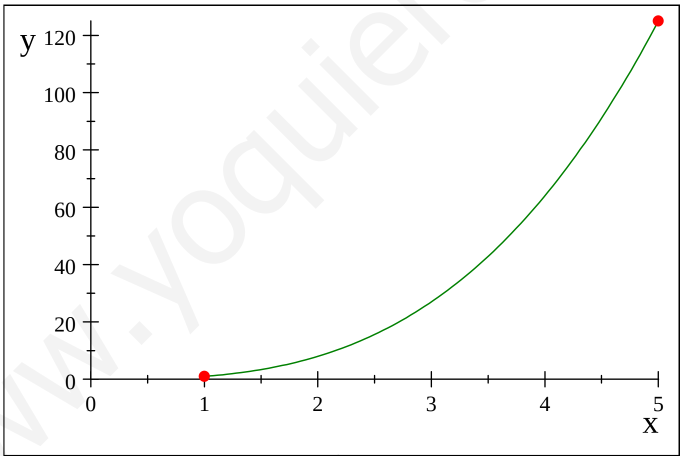
Como $f$ es continua en [1,5] entonces; podemos afirmar por el Teorema de Weierstrass:

*a*) $f$ está acotada (superior e inferiormente) en $[1, 5]$

*b*) $\left[ \begin{array}{l} \exists c_1 \in [1,5] \;/\; f(c_1) \geq f(x)\ \forall x \in [1,5]\ (P(c_1, f(c_1)) \text{ máximo absoluto de } f \text{ en } [1,5] \\ \exists c_2 \in [1,5] \;/\; f(c_2) \leq f(x)\ \forall x \in [1,5]\ (Q(c_2, f(c_2)) \text{ mínimo absoluto de } f \text{ en } [1,5] \end{array} \right]$

Nota: Si dibujamos la gráfica de $f(x) = x^3$ en $[1, 5]$ observaremos que :

$$P(1, 1) \text{ es mínimo absoluto de } f \text{ en } [1, 5]$$
$$Q(5, 125) \text{ es máximo absoluto de } f \text{ en } [1, 5]$$




$f(x = x^3$ en $[1, 5]$

**Exercise 2.7.19** *Sea $f$ continua en $[a, b]$ y sean $x_1, x_2 \in [a, b]$.. Razónese que existe algún número $c \in [x_1, x_2]$ tal que $f(c) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$*

*Solución*:

f es continua en $[x_1, x_2]$,siendo $x_1, x_2 \in [a, b]$, al serlo $f$ en $[a, b]$

Casos:

$1^o$) $f(x_1) \neq f(x_2)$

Subcasos:

- a) $f(x_1) < f(x_2) \to f(x_1) < \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f(x_2)$

Como $f$ es continua en $[x_1, x_2]$. Entonces; en virtud del Teorema de los valores intermedios podemos afirmar que

$$\exists c \in ]x_1, x_2[ \ / \ f(c) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

- b) $f(x_2) < f(x_1) \to f(x_2) < \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f(x_1)$

Como $f$ es continua en $[x_1, x_2]$. Entonces; en virtud del Teorema de los valores intermedios podemos afirmar que

$$\exists c \in ]x_1, x_2[ \ / \ f(c) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$2^o$) Si $f(x_1) = f(x_2) \to f(x_1) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = f(x_2)$

Hemos encontrado dos números reales $x_1$ y $x_2$ (extremos del intervalo $[x_1, x_2]$) tal que:

$$f(x_1) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = f(x_2)$$

De todo lo anterior, podemos concluir que siempre existe al menos un $c \in [x_1, x_2]$ tal que $f(c) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

**Exercise 2.7.20** *Sea* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{7-16^{\frac{1}{x}}}{1+16^{\frac{1}{x}}} & si \quad x \neq 0 \\ 7 & si \quad x = 0 \end{cases}$ *a) ¿La función es continua en $x = 0$?*
*b) Demuestra que $\exists c \in (2,4) \ / \ f(c) = 1$*

*Solución*
a) Calculemos $f(0)$ y los límites laterales de la función cuando $x \to 0$
$f(0) = 7$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{7-16^{\frac{1}{x}}}{1+16^{\frac{1}{x}}} = \frac{7-16^{\frac{1}{0^-}}}{1+16^{\frac{1}{0^-}}} = 7$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{7-16^{\frac{1}{x}}}{1+16^{\frac{1}{x}}} = \frac{-\infty}{+\infty}$ .Dividimos numerador y denominador por $16^{\frac{1}{x}}$; con lo que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{7}{16^{\frac{1}{x}}} - 1}{\frac{1}{16^{\frac{1}{x}}} + 1} = -1$$

Entonces; la función no es continua para $x = 0$ (Sólo es continua a la izquierda de $x = 0$).Para dicho valor presenta una discontinuidad de salto fínito.

b) Como $\left[ \begin{array}{c} f \text{ es continua en } [2,4] \\ \frac{3}{5} = f(2) < 1 < f(4) = \frac{5}{3} \end{array} \right]$

Entonces; por el teorema de los valores intermedios, podemos afirmar que:

$$\exists c \in (2,4) \ / \ f \ (c) = 1$$

## 2.8 Problemas continuidad

**Exercise 2.8.1** *Halla el dominio de continuidad de la siguientes funciones:*

$$y=\frac{x+1}{x^2+1} \qquad y=\frac{2}{|x|-1}$$

$$y=\frac{2x-1}{2x^2-5x+2} \qquad y=\frac{2}{|x|^2-1}$$

$$y=\frac{x-1}{x^4-3x^3+6x+4} \qquad y=\frac{x}{\cos x}$$

$$y=\sqrt{2x^2-5x-2} \qquad y=\frac{x}{\ln x}$$

$$y=\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \qquad y=\frac{x^2}{1-\cos x}$$

**Exercise 2.8.2** *Estudia la continuidad de las siguientes funciones*

$$f(x)=\frac{x}{senx} \qquad f(x)=\ln(\cos x)$$

$$f(x)=\frac{3}{1-\tan x} \qquad f(x)=\sqrt{4-x^2}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3x-9}{x^2-5x+6} & \text{si } x\neq 3 \\ 3 & x=3 \end{cases} \qquad f(x)=\tan(x^2-5x+4)$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|3x-9|}{x-3} & \text{si } x\neq 3 \\ 0 & x=3 \end{cases} \qquad f(x)=x^2E\left[x\right]$$

$$f(x)=xE\left[x^2\right]$$

**Exercise 2.8.3** *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x<1 \\ x-1 & si\ 1\leq x<3 \\ 1 & si\ x=3 \\ x^2-7 & si\ x>3 \end{cases}$. *Halla sus tipos de discontinuidad indicando de qué tipo son*

**Exercise 2.8.4** *Estudia la continuidad de la función* $f(x)=x-E(x)$

**Exercise 2.8.5** *Estudia la continuidad de la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & si\ x\leq 0 \\ x^2+1 & si\ x>0 \end{cases}$

**Exercise 2.8.6** [11] *Estudia la continuidad de la función* $f(x)=\dfrac{x^3-\tan x}{x+\tan x}$ *en el intervalo* $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$. *Redefine la función para que sea continua en ese intervalo*

[11] Este ejercicio lo podrás resolver cuando estudies L'Hopital

**Exercise 2.8.7** *¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas en el entorno de $x = 0$?*

$$a)\ f(x) = 2^x \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \leq 0 \\ \ln x & si\ x > 0 \end{cases}$$

**Exercise 2.8.8** *Dada la función $f(x) = 3x - 2$ demuestra, utilizando la definición topológica, que es continua para $x = 2$*

**Exercise 2.8.9** *Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ demuestra, utilizando la definición topológica, que es continua para $x = 1$*

**Exercise 2.8.10** *Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$ determina los valores para los cuales es continua. Clasifica las discontinuidades*

**Exercise 2.8.11** *Sea una función $f(x)$ continua para $x = a$ tal que $f(a) = 0$ y sea $g(x)$ una función que está acotada en un entorno reducido de $a$. Demuestra que si existe $g(a)$ entonces la función producto$(\ f \cdot g)$[12] es continua para $x = a$*

**Exercise 2.8.12** *Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 3 \\ 3x + 2 & si\ x > 3 \end{cases}$ Determinar si la función es continua, para $x = 3$, calculando sus límites laterales y su imagen*

**Exercise 2.8.13** *Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$, determina si es continua para $x = 3$ calculando $\lim\limits_{h \to 0} (f(3 + h) - f(3))$*

**Exercise 2.8.14** *Sea* $f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & si\ x < -1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{1}{x-3} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Determinar los valores para los cuales es continua. Clasifica las discontinuidades

**Exercise 2.8.15** *Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^3+3x^2}{kx^2} & si\ x\ no\ es\ cero \\ -3 & si\ x = 0 \end{cases}$ determina $k$ para que la función sea continua para $x = 0$*

**Exercise 2.8.16** *Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-5x^2+3x+9} & si\ x < 3 \\ mx + 5 & si\ x \geq 3 \end{cases}$ determina $m$ para que la función sea continua para $x = 3$*

**Exercise 2.8.17** *Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + mx - 1}$ Hallar $m$ sabiendo que la función no es continua para $x = 1$. Después clasifica sus discontinuidades*

**Exercise 2.8.18** *Hallar $a$ y $b$ de modo que la siguiente función $f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & para & x < 0 \\ sin(b + x) & para & 0 < x < \\ \dfrac{\pi}{x} & para & x > \pi \end{cases}$ sea continua*

[12] $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

**Exercise 2.8.19** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ ax + b & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ *. Hallar a y b para que la función ssea continua*

**Exercise 2.8.20** *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & si \quad 1 \leq x \end{cases}$ *. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y* $f(2) = 3$

**Exercise 2.8.21** *Calcula los valores que deben tener a y b para que* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{ax} & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \\ \dfrac{1 - \cos x}{bx^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$ *sea continua en* $\Re$

**Exercise 2.8.22** *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ *y el intervalo* $I = ]-2, 1[$*. Halla* $f(I)$ *y* $f^{\ -1}(I)$

**Exercise 2.8.23** *Dada la función* $f(x) = -x^2 - x + 6$ *y los intervalos* $I = ]-2, 1[$ *y* $I = [-2, 1]$ *. Determina :*

$f(I)$ /, $f(J)$, $f^{-1}(4)$ *y* $f(]0, 4[)$

**Exercise 2.8.24** *Dada la ecuación* $0 = x^3 + x - 5$*, demuestra que existe al menos una solución real comprendida entre* $1$ *y* $2$*.Determínala con una cifra decimal exacta (Aplica el teorema de Bolzano a la función* $f(x) = x^3 + x - 1$ *en el intervalo*$[1, 2]$*; después divide este intervalo en diez partes iguales y...)*

**Exercise 2.8.25** *Si* $f(x) = x^2 + 2x + 1$*. ¿Existe un entorno de* $x = 3$ *en el que la función esté acotada por 15 y 17?*

**Exercise 2.8.26** *Dada la ecuación* $0 = x^3 + x - 1$*, demuestra que existe una solución real comprendida entre* $0$ *y* $1$*.Determínala con una cifra decimal exacta (Aplica el teorema de Bolzano a la función* $f(x) = x^3 + x - 1$ *en el intervalo*$[0, 1]$*; después divide este intervalo en diez partes iguales y...)*

**Exercise 2.8.27** *Dada la ecuación* $x^3 = x^2 + 1$*,demuestra que existe una solución, al menos, en el intervalo* $[1, 2]$ *.Determínala con dos cifras decimales exactas (Aplica el teorema de Bolzano a la función* $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ *en el intervalo* $[1, 2]$ *;después divide este intervalo en....)*

**Exercise 2.8.28** *Demuestra que la ecuación* $\cos x = 2x - 1$ *tiene al menos una solución en* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

**Exercise 2.8.29** *Demuestra que la ecuación* $\cos x = x$ *tiene al menos una solución en* $[0, 1]$*. Determínala con dos cifras decimales exactas*

**Exercise 2.8.30** *La función* $f(x) = x^2 + 2x - 1$ *¿toma todos los valores comprendidos entre 7 y 14?. ¿Y entre -4 y 3?. Indica en qué teoremas te basas*

**Exercise 2.8.31** *Invéntate una función que sea continua en* $]0,1]$ *y que sin embargo no tenga máximo en ese intervalo. Contradice este ejemplo el teorema de Weierstrass*

**Exercise 2.8.32** *Invéntate una función que sea continua en* $]a,b[$ *y que sin embargo no tenga máximo ni mínimo en ese intervalo. Contradice este ejemplo el teorema de Weierstrass*

**Exercise 2.8.33** *Sean* $f$ *y* $g$ *dos funciones continuas en* $[a,b]$*, tales que* $f(a) > g(a)$ *y* $f(b) < g(b)$*.Demuestra que* $\exists c \in [a,b]/f(c) = g(c)$

**Exercise 2.8.34** *Sea* $f$ *una función continua en* $[0,1]$ *y* $0 \leq f(x) \leq 1$*. Demuestra que existe al menos un punto* $x_0 \in [0,1]$ *tal que* $f(x_0) = x_0$

**Exercise 2.8.35** *Sea* $f$ *una función continua en* $[0,1]$ *, tal que* $f(x)$ *es racional y* $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
*Demuestra que la función* $f$ *es constante, siendo* $f(x) = \frac{1}{2}\ \forall x \in [0,1]$

**Exercise 2.8.36** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x<3 \\ 5 & x=3 \\ 2x+4 & x>3 \end{cases}$
*Estudia su continuidad para* $x = 3$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.37** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x<3 \\ 2x+4 & x>3 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 3$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo*

**Exercise 2.8.38** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x\leq 3 \\ 2x+4 & x>3 \end{cases}$
*Estudia su continuidad para* $x = 3$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.39** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & x\neq 1 \\ 5 & x=1 \end{cases}$
*Estudia su continuidad para* $x = 1$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.40** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$
*Estudia su continuidad para* $x = 1$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.41** *Dada la función* $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$
*Estudia su continuidad para* $x = 2$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
*¿Existe alguna asíntota vertical?*

**Exercise 2.8.42** *Dada la función* $f(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$
*Estudia su continuidad para* $x = 2$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
*¿Existe alguna asíntota vertical?*

**Exercise 2.8.43** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x} & x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$
*Estudia su continuidad para* $x = 0$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
*¿Existe alguna asíntota vertical?*

**Exercise 2.8.44** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & x < 3 \\ \dfrac{-1}{x-3} & x > 3 \end{cases}$
*Estudia su continuidad para* $x = 3$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
*¿Existe alguna asíntota vertical?*

**Exercise 2.8.45** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 3 \\ 2x+1 & x > 3 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 3$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.46** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 3 \\ 5 & x = 3 \\ 2x+1 & x > 3 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 3$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.47** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x-5} & x < 5 \\ 3x+2 & x \geq 5 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 5$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.48** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-5} & x < 5 \\ 3x+2 & x \geq 5 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 5$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.49** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 2$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.50** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ \dfrac{-1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 2$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

**Exercise 2.8.51** *De las funciones dadas estudia su continuidad. Clasifica sus discontinuidades*

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 3}$$
$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x}{x - 3}$$

**Exercise 2.8.52** *De las siguientes funciones*

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2}$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

*Estudia su dominio de definición, el dominio de continuidad, puntos de corte con los ejes de coordenadas y además* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. *Intenta dibujar la gráfica con la información obtenida*

# Part II

# Cálculo diferencial

# Chapter 3

# Derivada y diferencial de una función en un punto

## 3.1 Derivada de una función en un punto

**Definition 72** *Derivada de una función en un punto*

Sea $f$ una función definida en un intervalo $I$ y sea $x_0 \in I$. Diremos que la función es derivable para $x = x_0$ si existe y es finito el siguiente límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A dicho límite lo llamaremos derivada de $f$ en $x_0$ y lo escribiremos $f\,'(x_0)$[1]

$$\boxed{f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$ [2]

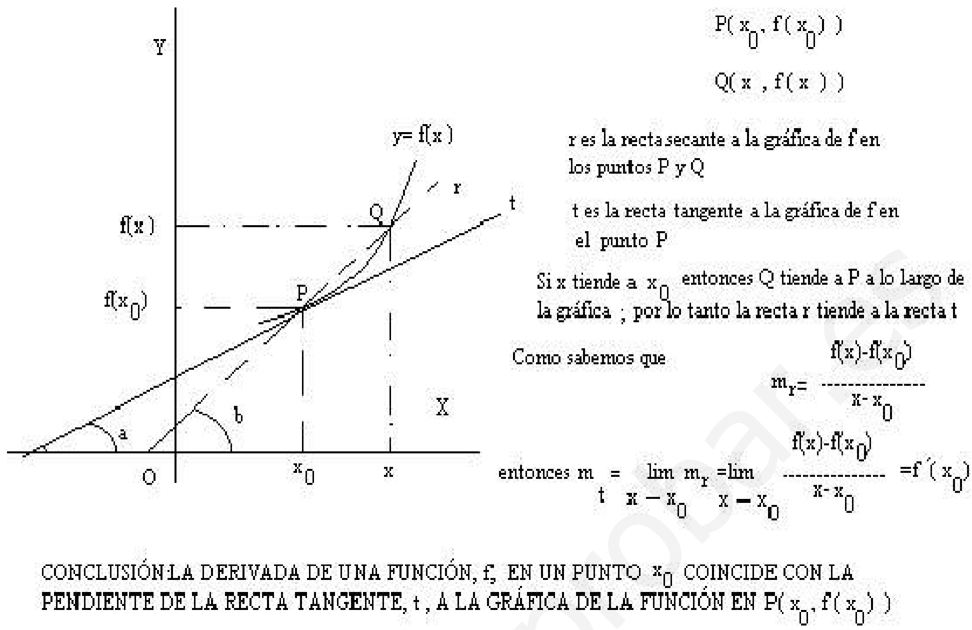
Interpretación geométrica de $f\,'(x_0)$

$f\,'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en pto $P(x_0, f(x_0))$.

Además la ecuación de dicha recta tangente es $y_t - f\,(x_0) = f\,'(x_0)(x - x_0)$

[1] Otras notaciones para la derivada son $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ,o $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ o $y\,'(x_0)$

[2] Sea $x = x_0 + h$ entonces si $x \to x_0 \iff h \to 0$ ;por lo que $f\,'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$




Derivada de una función en un punto

**Example 73** *Dada la función $f(x)=3x^2-3$ calcula $f\,'(3)$ y la ecuación de su recta tangente en el punto de abcisa $x=3$*

a)Por definición $f\,'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-3-24}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-27}{x-3}=\dfrac{0}{0}$

Para eliminar dicha indeterminación, factorizamos y simplificamos; quedando $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}3(x+3)=18$

b) La ecuación de su recta tangente en el punto $P(3,24)$ es

$$y_t-f\ (3)=f\,'(3)(x-3)$$

Sustituyendo, tendremos

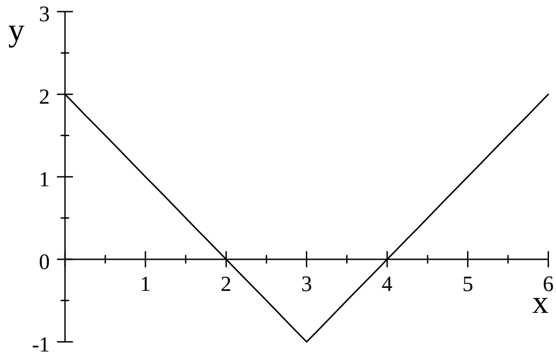
$$y_t-24=18(x-3)\rightarrow\boxed{y_t=18x-30}$$

**Theorem 74** <u>*Condición necesaria y suficiente de derivabilidad*</u>

Una función es derivable para $x=x_0 \Longleftrightarrow$existen $\underset{+}{f}\,'(x_0)$ y $\underset{-}{f}\,'(x_0)$ y ambas coinciden$\Longleftrightarrow$ en el punto $P(x_0,f\ (x_0))$ la gráfica de $f$ admite una única recta tangente (no vertical)

<u>Casos en los que una función no es derivable en un punto</u>

a) Si $\underset{+}{f}\,'(x_0)$ y $\underset{-}{f}\,'(x_0)$ no coinciden (números reales) entonces la gráfica en $P(x_0,f\ (x_0))$ tiene dos semirrectas tangentes diferentes: una por la izquierda y otra por la derecha. Diremos que el punto $P(x_0,f\ (x_0))$ es un pto anguloso




Punto anguloso

Observa que en la gráfica de la función $y = |x-3| - 1$ la función no es derivable para $x = 3$, puesto que :

$f\,'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|-1+1}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} =$[3] $1$

$f\,'_-(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|-1+1}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} =$[4] $-1$

b) Si $f\,'(x_0) = +\infty$ (o $-\infty$) entonces la recta tangente a la gráfica de $f$ en $P(x_0, f\,(x_0))$ es la recta vertical $x = x_0$

Observa que en la gráfica de $y = (x-3)^{\frac{1}{3}} + 1$ su recta tangente , en el punto de abcisa $x = 3$,es vertical; ya que

$f\,'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^{\frac{1}{3}}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} =$
$\frac{1}{0^+} = +\infty$

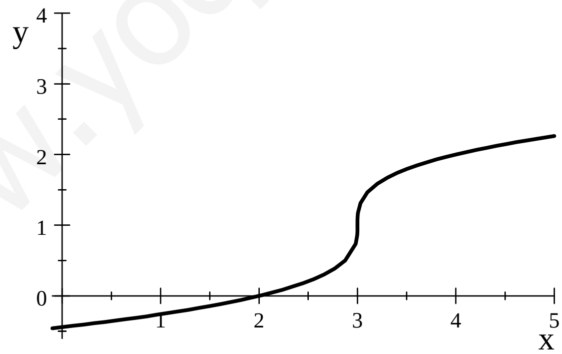



Figure 3.1: Punto de tangente vertical

c) Si$\underset{+}{f}\,'(x_0) = +\infty$ ( o $-\infty$) y $\underset{-}{f}\,'(x_0) = -\infty$ ( o $+\infty$) ,entonces la recta

[3]Como $x \to 3^+$;entonces $x > 3$ por lo que $x - 3 > 0$ y $|x-3| = x - 3$

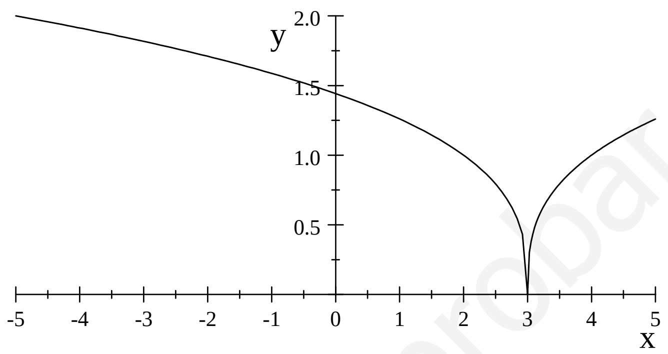
[4]Como $x \to 3^-$;entonces $x < 3$ por lo que $x - 3 < 0$ y $|x-3| = -x + 3$

tangente a la gráfica de $f$ en $P(x_0, f\ (x_0))$ es la recta vertical $x = x_0$. Diremos que el punto $P(x_0, f\ (x_0))$ es un pto de retroceso

Ejemplo

Dada $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{3-x} & \text{si } x \leq 3 \\ \sqrt[3]{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ comprueba que $\underset{+}{f}\,'(3) = +\infty$ y $\underset{-}{f}\,'(3) = -\infty$

Mira su gráfica




Punto de retroceso

d) Si $f$ no es continua en $x_0$

**Teorema** Relación entre derivabilidad y continuidad

Si f es derivable en $x = x_0$. $\Longrightarrow f$ es continua en $x = x_0$.

Demostración

$f$ será continua en $x = x_0$. si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) =$[5] $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = f\ '(x_0) \cdot 0 = 0$
, entonces f es continua para $x = x_0$

**Remark 3** *Existen funciones continuas en un punto y que sin embargo no son derivables en él*

**Remark 4** *Si una función no es continua en un punto, entonces no es derivable en él*

<u>TABLA DE DERIVADAS</u>

- $f(x) = K\ \forall x \in R \Longrightarrow f\ '(x) = 0\ \forall x \in R$
- $(f\ (x) \pm g(x))\ ' = f\ '(x) \pm g'(x)$
- $(f\ (x)\ \cdot g(x))\ ' = f\ '(x)\ \cdot g(x) + f(x) \cdot g\ '(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

[5] Por ser $f$ derivable en $x = x_0$,sabemos que existe $f\ '(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ y como además el límite del producto es el producto de los límites

- $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Longrightarrow y\,' = f\,'(g(x)) \cdot g\,'(x)$ Regla de la cadena
  - Otra notación regla de la cadena

Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ la regla de la cadena nos indica que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- $y = f^{-1}(x) \Longrightarrow y\,' = \dfrac{1}{f\,'(f^{\,-1}(x))}$ Derivada de la función inversa

Otra notación derivada de la función inversa:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Si la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en $P(x_0, f(x_0)$ es un número real $k$. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f^{\,-1}(x)$ en $Q(f(x_0), x_0)$ es $\dfrac{1}{k}$

- $y = (f(x))^n$ con $n \in R \Longrightarrow y\,' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f\,'(x)$
- $y = a^{f(x)}$ con $a \in R^+ \sim \{1\} \Longrightarrow y\,' = a^{f(x)} \cdot f\,'(x) \cdot \ln a$
- $y = \log_a f(x) \Longrightarrow y\,' = \dfrac{f\,'(x)}{f\,(x)} \cdot \log_a e$
- $y = \sin(f(x)) \Longrightarrow y\,' = f\,'(x) \cdot \cos(f(x))$
- $y = \cos(f(x)) \Longrightarrow y\,' = -f\,'(x) \cdot \sin(f(x))$
- $y = \tan(f(x)) \to y\,' = \dfrac{f\,'(x)}{\cos^2 f\,(x)} = f\,'(x) \cdot \sec^2(f(x)) =$

$= f\,'(x) \cdot (1 + \tan^2(f(x)))$

- $y = \cot(f(x)) \to y\,' = -\dfrac{f\,'(x)}{\sin^2 f\,(x)} = -f\,'(x) \cdot \csc^2(f(x)) =$

$= -f\,'(x) \cdot (1 + \cot^2(f(x)))$

- $y = \sec(f(x)) \Longrightarrow y\,' = \dfrac{f\,'(x)\sin(f(x))}{\cos^2 f\,(x)} = f\,'(x) \cdot \sec(f(x)) \cdot \tan(f(x))$
- $y = \csc(f(x)) \Longrightarrow y\,' = -\dfrac{f\,'(x)\cos(f(x))}{\sin^2 f\,(x)} = -f\,'(x) \cdot \csc(f(x)) \cdot \cot(f(x))$
- $y = \arcsin(f(x)) \Longrightarrow y\,' = \dfrac{f\,'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}$
- $y = \arccos(f(x)) \Longrightarrow y\,' = -\dfrac{f\,'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}$

- $y = \arctan(f(x)) \Longrightarrow y\,' = \dfrac{f\,'(x)}{1 + (f(x))^2}$
- $y = \operatorname{arccot}(f(x)) \Longrightarrow y\,' = -\dfrac{f\,'(x)}{1 + (f(x))^2}$
- $y = \operatorname{arcsec}(f(x)) \Longrightarrow y\,' = \dfrac{f\,'(x)}{|f(x)|\sqrt{(f(x))^2 - 1}}$
- $y = \operatorname{arccsc}(f(x)) \Longrightarrow y\,' = -\dfrac{f\,'(x)}{|f(x)|\sqrt{(f(x))^2 - 1}}$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

En algunas funciones, Por ejemplo $x^2+y^2-2x-2y = 7$, no es posible despejar la $y$ en función de $x$.Para calcular su derivada derivaremos normalmente, pero teniendo presente que $y$ es una función que depende de x (aunque no conozcamos esta función)

$2x + 2y \cdot y\,' - 2 - 2 \cdot y\,' = 0$ Despejando $y\,'$ tendremos $y\,' = \dfrac{2 - 2x}{2y - 2} = \dfrac{1 - x}{y - 1}$

Veamos otro ejemplo:

Calcula la derivada de la función $x^2 - xy + y^2 = 27$ en el punto de abcisa $x = 3$ y ordenada positiva

Si $x = 3$ entonces $9 - 3y + y^2 = 27 \to y^2 - 3y - 18 = 0 \to$Como $y$ es positiva, $y = 6$

Su derivada es $2x - (y + x \cdot y\,') + 2y \cdot y\,' = 0$ despejando $y\,'$ tendremos

$$y\,' = \frac{y - 2x}{2y - x} \text{ y particularizando en } P(3, 6) \text{ tendremos } y\,' = 0$$

## 3.2 Diferencial de una función en un punto

**Remark 5** $f\ '(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *entonces* $\forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[ \sim \{x_0\}$ *(tan pequeño como sea necesario) se verifica que*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f\ '(x_0) + \varepsilon\ ^6$$

Despejando el incremento de la función

$$f(x)-f(x_0) = f\ '(x_0)(x-x_0) + \varepsilon(x-x_0)$$

**Definition 75** *Sea $f$ una función definida en un intervalo $I$. Diremos que $f$ es diferenciable en un punto $x_0$ de dicho intervalo siempre que:*

Podamos encontrar un entorno abierto de centro $x_0$ y radio $\delta$, tan pequeño como sea necesario, ($]x_0-\delta, x_0+\delta[ \subset I$) de tal manera que $\forall x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[$ el incremento de la función $f(x)-f(x_0)$ se pueda escribir asi

$$f(x)-f(x_0) = k(x-x_0) + \varepsilon(x-x_0)$$

donde:

$k \in R$ y no depende del $x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$\varepsilon$ es una función que depende del $x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[$ que tiende a 0 cuando $x \to x_0$

**Theorem 76** *La condición necesaria y suficiente para que $f$ sea diferenciable en un punto $x_0$ es que $f$ sea derivable en dicho punto. Siendo además $k = f\ '(x_0)$*

Demostración
$\Longrightarrow$
Por ser $f$ diferenciable en un punto $x_0$, entonces
$\exists\ \delta > 0$(suf. pequeño)$/\forall x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[$ se verifica

$$f(x)-f(x_0) = k(x-x_0) + \varepsilon(x-x_0)$$

donde:

$k \in R$ y no depende del $x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$\varepsilon$ es una función que depende del $x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[$ que tiende a 0 cuando $x \to x_0$

Si $x$ no coincide con $x_0 \to \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k+\varepsilon$ y tomando límites cuando $x$ tiende a $x_0$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} k + \lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon = k + 0 = k \longrightarrow \exists\ f\ '(x_0)$ y coincide con k

[6] $\varepsilon$ es una función que depende del $x$ considerado, y que tiende a 0 cuando $x \to x_0$

$\Longleftarrow$

Por ser $f$ derivable en $x_0$ sabemos que $\exists\ f\ '(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to x_0} \left\{ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f\ '(x_0) \right\} = 0$.. Si llamamos $\varepsilon = \left\{ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f\ '(x_0) \right\}$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon = 0$ y despejando $f(x)-f(x_0)$ tendremos

$f(x)-f(x_0) = f\ '(x_0)(x-x_0) + \varepsilon(x-x_0) \longrightarrow$luego $f$ es diferenciable en $x_0$

**Definition 77** *Diferencial de una función en un punto*

Acabamos de caracterizar, en el teorema anterior, las funciones diferenciables en un punto ( son aquéllas que son derivables en dicho punto)

Al producto $f\ '(x_0)(x-x_0)$ se le llama diferencial de la función $f$ en el punto $x_0$ y se representa por $dy_0$, $dy(x_0)$ o $df(x_0)$.[7]

Se tiene pues $\boxed{dy_0 = \ dy(x_0) = \ df(x_0) = f\ '(x_0)(x-x_0)}$[8]

**Example 78** *Dada la función* $f(x) = x^2 - x$.*Calcula*

- $f\ '(3)$
- $f(3,01) - f(3)$
- $f\ '(3) \cdot (3,01-3)$
- ¿Qué puedes observar al calcular $f(3,01) - f(3)$ y $f\ '(3) \cdot (3,01-3)$?
- Calcula ahora $f(3,001) - f(3)$ y $f\ '(3) \cdot (3,001-3)$

**Example 79** *Sabemos que el volumen de una esfera es* $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

- Calcula $V\ '$ cuando $r = 3$
- La variación de volumen si el radio lo incrementamos de 3 cm a 3,01 $(V(3,01) - V(3))$
- Calcula ahora $V\ '(3) \cdot (3,01-3)$
- ¿Qué puedes observar al calcular los dos apartados anteriores?
- Calcula ahora $V(3,001) - V(3)$ y $V\ '(3) \cdot (3,001-3)$

**Example 80** *Dada la función* $f(x) = e^x$.*Calcula:*

a) $f\ '(-1)$ y la ecuación de su recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abcisa $x = -1$

b) $f(-0,99) - f(-1)$

c) $f\ '(-1) \cdot (-0,99+1)$

Compara los resultados obtenidos en b y c

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIAL

Si una función $f$ es diferenciable en $x_0$ sabemos que la diferencial asociada para un valor de x próximo a $x_0$ es

[7] Es una función que depende de dos valores, a saber; el $x_0$ (fijo en cada caso) y el x considerado próximo a $x_0$

[8] Si $x = x_0 + h$ entonces $dy_0 = dy(x_0) = df(x_0) = f\ '(x_0) \cdot h$

$$df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Dicho número , para valores de x muy próximos a $x_0$ es una buena aproximación de $f(x) - f(x_0)$ (incremento de la función)

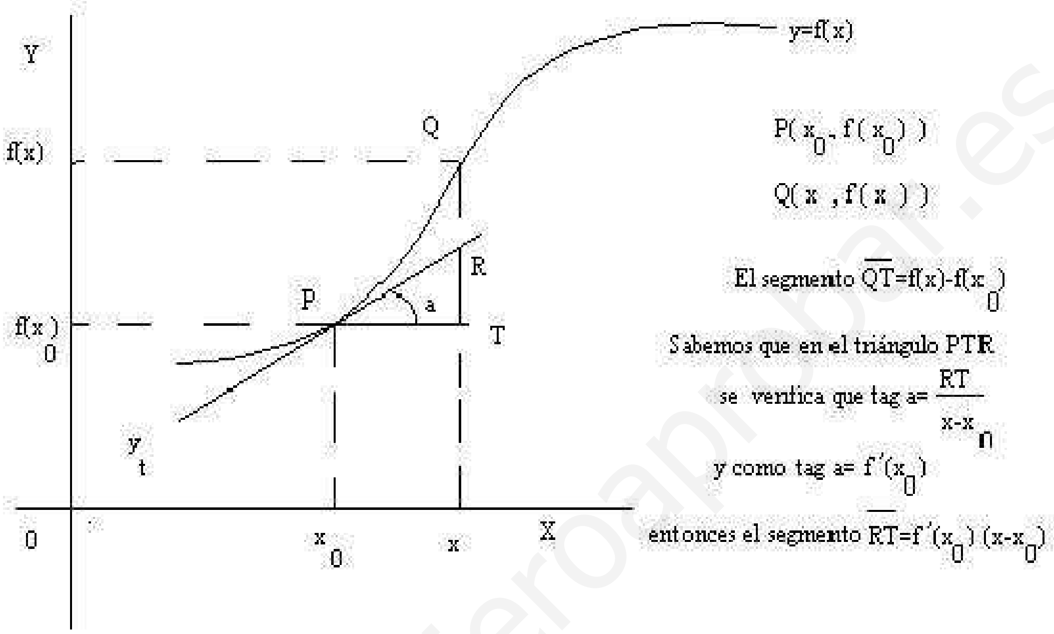



Figure 3.2: Diferencial de una función en un punto

Observa, que para valores de $x$ muy próximos a $x_0$ el segmento $\overline{RT}$ es una buena aproximación del segmento $\overline{QT}$

**Remark 6** *Diferencial de la función identidad $f(x) = x$ en cualquier punto $x_0$*

Como $f'(x) = 1\ \forall x \in R$ entonces $df(x_0) = \boxed{dx_0 = 1 \cdot (x - x_0)}$. Por lo que; en general para expresar la diferencial de una función en $x_0$ lo haremos así:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx_0 \text{ ,o también así } df(x_0) = f'(x_0)dx^{9}$$

[9] Esta última sugiere la notación $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$ utilizada por Leibniz

## 3.3 Problemas

**Exercise 3.3.1** *Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula $f'(3)$ para la función $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$. Determina también la ecuación de su recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abcisa $x = 3$*

Por definición sabemos que:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{3x}{x-2} - 9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{-6x+18}{x-2}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-6x+18}{(x-3)(x-2)}$$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Para eliminarla bastará con simplificar la fracción que hay dentro del límite; quedando:

$$f\ '(3) = \lim_{x\to 3} \frac{-6x+18}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{-6(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{-6}{(x-2)} = -6$$

$f\ '(3)$ ,que vale $-6$, es la pendiente de la recta tangente ,$t$, a la gráfica de la función $f$ en el punto $(3, 9)$ (Fíjate que $f(3) = 9$)

$$t \left\{ \begin{array}{l} m_t = -6 \\ P(3,9) \end{array} \right. \quad \rightarrow \text{Luego la ecuación punto-pendiente de } t \text{ es}$$

$$y - 9 = -6(x-3)$$

Despejando $y$ obtendemos su ecuación explícita

$$y = -6x + 27$$

**Exercise 3.3.2** *Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula $f'(3)$ para la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. Determina también la ecuación de su recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abcisa $x = 3$*

Por definición sabemos que:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Para eliminarla bastará con multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada de $\sqrt{x+1} - 2$ ,y después simplificar la fracción que hay dentro del límite; quedando:

$$f\ '(3) = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{x+1} - 2\right)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}$$
$$f\ '(3) = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} = \frac{1}{4}$$

$f\ '(3)$ ,que vale $\dfrac{1}{4}$, es la pendiente de la recta tangente ,$t$, a la gráfica de la función $f$ en el punto $(3, 2)$ (Fíjate que $f(3) = \sqrt{3+1} = 2$)

$$t\left\{\begin{array}{l} m_t = \dfrac{1}{4} \\ P(3,2) \end{array}\right. \rightarrow \text{Luego la ecuación punto-pendiente de } t \text{ es}$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x-3)$$

Despejando $y$ obtendemos su ecuación explícita

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

**Exercise 3.3.3** *Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula $f'(4)$ para la función $f(x) = \frac{2}{x+1}$. Determina también la ecuación de su recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abcisa $x = 4$*

Por definición sabemos que:

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\frac{2}{x+1} - \frac{2}{5}}{x-4}$$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Para eliminarla bastará con operar y después simplificar:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\frac{2}{x+1} - \frac{2}{5}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{-\frac{2}{5}\frac{x-4}{x+1}}{x-4} = \lim_{x\to 4} -\frac{2}{5\,(x+1)} = -\frac{2}{25}$$

$f\ '(4)$ ,que vale $-\frac{2}{25}$, es la pendiente de la recta tangente ,$t$, a la gráfica de la función $f$ en el punto $(4, 2)$ (Fíjate que $f(4) = \frac{2}{4+1} = \frac{2}{5}$)

$$t\left\{\begin{array}{l} m_t = -\frac{2}{25} \\ P(4, \frac{2}{5}) \end{array}\right. \rightarrow \text{Luego la ecuación punto-pendiente de } t \text{ es}$$

$$y - \tfrac{2}{5} = -\tfrac{2}{25}(x-4)$$

Despejando $y$ obtendemos su ecuación explícita

$$y = -\tfrac{2}{25}x + \frac{18}{25}$$

**Exercise 3.3.4** *Calcula de las siguientes funciones, en los puntos que se indican, su derivada. Así como la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto indicado.*

| *Función* | *Punto* | *Derivada* | Recta tangente |
|---|---|---|---|
| $f(x) = 3x - 2$ | $x = -1$ | | |
| $f(x) = \frac{3x}{2x-3}$ | $x = 4$ | | |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ | $x = 7$ | | |
| $f(x) = 4x^2 - 3x$ | $x = 2$ | | |
| $f(x) = e^{2x+3}$ | $x = 1$ | | |
| $f(x) = \ln x$ | $x = e$ | | |

**Exercise 3.3.5** *Sea* $f(x) = \left\{\begin{array}{lc} x^2 - 3x + 6 & si\ x \leq 3 \\ 2x & si\ x > 3 \end{array}\right.$. *Determina para qué valores es derivable y para qué valores es continua*

*Solución*

Si $x < 3$ entonces $f(x) = x^2 - 3x + 6$. Como $f\ '(x) = 2x - 3$ entonces la función es derivable en el intervalo $]-\infty, 3[$.Por ser derivable en $]-\infty, 3[$ , entonces $f$ es continua en $]-\infty, 3[$ (Recuerda que si $f$ es derivable en $x_0$ entonces $f$ es continua en $x_0$)

Si $x > 3$ entonces $f(x) = 2x$. Como $f\ '(x) = 2$ entonces la función es derivable en el intervalo $]3, +\infty[$.Por ser derivable en $]3, +\infty[$ , entonces $f$ es continua en $]3, +\infty[$ (Recuerda que si $f$ es derivable en $x_0$ entonces $f$ es continua en $x_0$)

?'La función es derivable para $x_0 = 3$? Para ello calcularemos $f\ '_+(3)$ y $f\ '_-(3)$

$f\ '_+(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-6}{x-3}$

Como este límite presenta la indeterminación $0/0$ simplificaremos la fracción, quedando:

$f\ '_+(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} 2 = 2$

$f\ '_-(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-3x+6-6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-3x}{x-3}$

Como este límite presenta la indeterminación $0/0$ simplificaremos la fracción, quedando:

$f\ '_-(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} x = 3$

Como $f\ '_+(3) \neq f\ '_-(3) \to f$ no es derivable para $x = 3$

El hecho de que la función no sea derivable para $x = 3$, no nos permite afirmar nada sobre su continuidad en dicho punto; ya que puede serlo o no

Así pues; estudiemos si la función es o no continua para $x = 3$

$$\textit{Como} \quad \left.\begin{array}{c} f(3) = 6 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2 - 3x + 6) = 6 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 2x = 6 \end{array}\right\} \to f \text{ es continua para } x = 3$$

Resumiendo:

$$f \text{ es derivable en } \Re \sim \{3\} \text{ y es continua en } \Re$$

**Exercise 3.3.6** *Sea* $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & si\ x \leq 1 \\ 5x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$ *. Determina para qué valores es derivable y para qué valores es continua*

**Exercise 3.3.7** *De las funciones indicadas en la tabla, estudia su dominio de continuidad y derivabilidad*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si\ x \leq 1 \\ -3x & si\ x > 1 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si\ x \leq 2 \\ 3x & si\ x > 2 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 1 \\ 2x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si\ x \leq 2 \\ x - 2 & si\ x > 2 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & si\ x \leq 2 \\ 8x + 4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

**Exercise 3.3.8** *Sea* $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & si\ x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & si\ 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{-x+6}{2\sqrt{2}} & si\ x > 2 \end{cases}$ *Determinar* $a, b$ *para que la función sea continua. Estudia la derivabilidad*

**Exercise 3.3.9** *Sea* $f(x) = \begin{cases} x \ln x & si\ 0 < x \leq 1 \\ a(1-e^{-x}) & si\ x > 1 \end{cases}$ *Determinar* $a$ *para que la función sea continua. ¿Es derivable la función para* $x = 1$*?*

**Exercise 3.3.10** *Sea* $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x < 0 \\ ax+b & si\ 0 \leq x < 3 \\ x-5 & si\ x \geq 3 \end{cases}$ *Determinar* $a, b$ *para que la función sea continua. Estudia la derivabilidad de esta función para* $x = 3$

**Exercise 3.3.11** *Sea* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1+x}{2} & si\ 1 < x \leq 3 \end{cases}$ *¿Es derivable la función para* $x = 1$*?*

**Exercise 3.3.12** *Determina la ec. de la recta tangente a la hipérbola* $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ *en el punto de abcisa* $x = 5$ *y ordenada negativa*

*Solución*

Si $x = 5$ entonces $\frac{25}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \to \frac{16}{9} = \frac{y^2}{4} \to \frac{64}{9} = y^2 \to y = \pm\sqrt{\frac{64}{9}} = \pm\frac{8}{3}$

Como nos indican que la ordenada ha de ser negativa, entonces $y = -\frac{8}{3}$

Así pues, el punto de tangencia tiene de coordenadas $P(5, -\frac{8}{3})$

Calculemos ahora la pendiente de la recta tangente a la hipérbola en el punto $P$. Para ello, calcularemos su derivada en dicho punto

$\frac{2x}{9} - \frac{2y \cdot y'}{4} = 0 \to y' = \frac{4x}{9y}$. Y en particular $y'_P = \dfrac{4 \cdot 5}{9 \cdot \frac{-8}{3}} = -\frac{5}{6}$

Como de la recta tangente , $t$, ya conocemos su pendiente y el punto de tangencia, entonces

$t \begin{cases} m_t = -\frac{5}{6} \\ P(5, -\frac{8}{3}) \end{cases}$ $\to$Luego la ecuación punto-pendiente de $t$ es $y + \frac{8}{3} = -\frac{5}{6}(x - 5)$

**Exercise 3.3.13** *Determina la ec. de la recta tangente a la elipse* $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ *en el punto de abcisa* $x = 1$ *y ordenada positiva*

**Exercise 3.3.14** *Obtén la ec. de la recta tangente a la parábola* $y^2 = 2x - 5$ *en el punto de abcisa* $x = 3$ *y ordenada negativa*

**Exercise 3.3.15** *Halla la ec. de la recta tang. a la circunfe.* $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ *en el punto de abcisa* $x = 1$ *y ordenada mayor*

**Exercise 3.3.16** *Halla un punto de la gráfica de la parábola $y = -x^2 + x + 1$ cuya recta tangente sea paralela al eje de las X (pto de la gráfica cuya recta tangente es horizontal; →su pendiente vale 0)*

*Solución*

Nos están pidiendo que determinemos un punto $P(x_0, f(x_0))$ de la parábola tal que $f\,'(x_0) = 0$

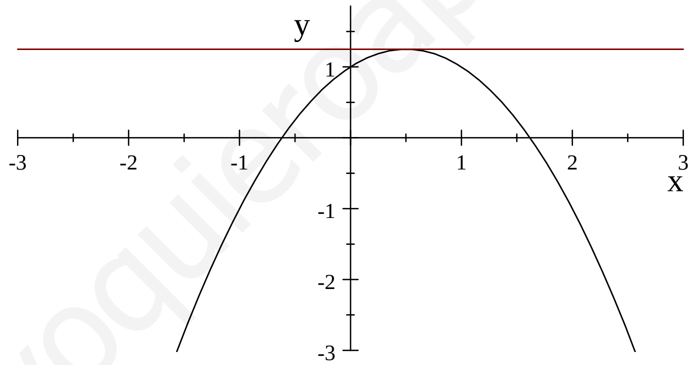
Por ser $f(x) = -x^2 + x + 1 \rightarrow f\,'(x) = -2x + 1$

Como nos interesa determinar los $x_0 \in \Re \ / \ f\,'(x_0) = 0$; bastará con resolver la ecuación:

$-2x_0 + 1 = 0 \rightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$

Luego el punto de la parábola cuya recta tangente es horizontal es $P(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + 1)$

Observa, después de dibujar la párabola que el punto $P(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4})$ es precisamente el vértice (mínimo Absoluto y local de la función en $\Re$), y que la ecuación de la tangente a la parábola en $P$ es la recta horizontal $y = \dfrac{5}{4}$




**Exercise 3.3.17** *Demuestra que el único punto de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ cuya recta tangente es paralela al eje de las X (pto de la gráfica cuya recta tangente es horizontal; →su pendiente vale 0) es precisamente el vértice $V(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a})$*

**Exercise 3.3.18** *Dada la parábola $y = 3x^2 - 5x + 12$. ¿Puntos de la parábola cuya recta tangente pasa por el punto $P(0,0)$?*

*Solución*

Sea un punto genérico de la parábola $Q(x_0, 3x_0^2 - 5x_0 + 12)$

Como la pendiente de la recta tangente, $t$,a la parábola en $Q$ es $f\,'(x_0) = 6x_0 - 5$ entonces :

$$t \equiv y - (3x_0^2 - 5x_0 + 12) = (6x_0 - 5)(x - x_0)$$

Al ser el punto $P(0,0)$ un punto de, t; entonces ha de verificar su ecuación

$-3x_0^2+5x_0-12=(6x_0-5)(-x_0)\rightarrow 3x_0^2-12=0\rightarrow x_0=\left\{\begin{array}{l}2\\-2\end{array}\right.$

Conclusión:

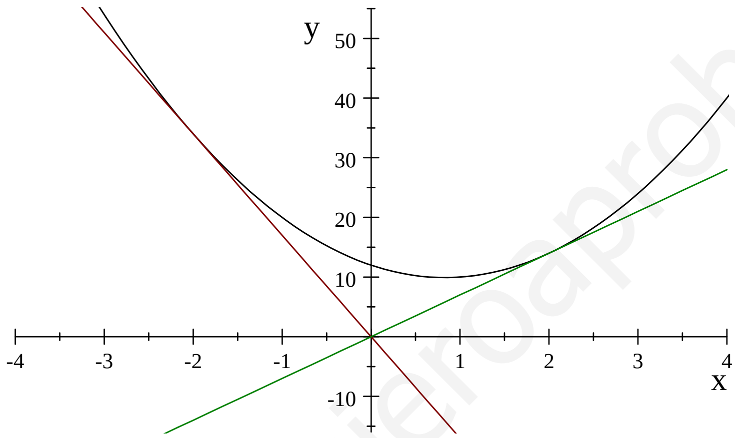
*Existen dos puntos en la parábola $H_1=(2,14)$ y $H_2=(-2,34)$ cuya recta tangente pasa por el origen*

Vamos a comprobarlo, calculando las rectas tangentes a la parábola en $H_1$ y $H_2$

$t_1\left\{\begin{array}{l}H_1(2,14)\\f'(2)=6\cdot 2-5=7\end{array}\right.\rightarrow t_1\equiv y-14=7(x-2)\rightarrow t_1\equiv y=7x$

$t_2\left\{\begin{array}{l}H_2(-2,34)\\f'(-2)=-17\end{array}\right.;t_2\equiv y-34=-17(x+2)\rightarrow t_2\equiv y=-17x$

Fíjate; que ambas rectas pasan por el origen




**Exercise 3.3.19** *Dada la parábola $y=ax^2+bx+c$ y los puntos de ésta de abcisas $x_1$ y $x_2$. Demuestra que el único punto de la parábola cuya recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $P(x_1,f(x_1))$ $Q(x_2,f(x_2))$ de ésta es el punto de abcisa $x=\dfrac{x_2+x_1}{2}$*

*Solución*

La recta $r\equiv\left\{\begin{array}{l}P(x_1,ax_1^2+bx_1+c)\\Q(x_2,ax_2^2+bx_2+c)\end{array}\right.$ tiene por pendiente

$$m_r=\frac{ax_2^2+bx_2+c-(ax_1^2+bx_1+c)}{x_2-x_1}=\frac{ax_2^2-ax_1^2+bx_2-bx_1}{x_2-x_1}=\frac{a\,(x_2-x_1)\,(x_2+x_1)+b\,(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$m_r=\frac{(x_2-x_1)\left[a\,(x_2+x_1)+b\right]}{x_2-x_1}=a\,(x_2+x_1)+b$$

Si nos pidiesen la ecuación de la recta $r$

$$y-(ax_1^2+bx_1+c)=\left[a\,(x_2+x_1)+b\right](x-x_{1)}$$

Como nos piden un punto de la parábola cuya recta tangente es paralela a la recta anterior; entonces tenemos que buscar un valor de $x$ tal que

$$m_r=m_t$$

Como $\left\{\begin{array}{l} m_{r=}a\left(x_2+x_1\right)+b \\ m_t=f\ '(x)=2ax+b \end{array}\right. \rightarrow a\left(x_2+x_1\right)+b=2ax+b$

Cuya solución es $x=\dfrac{x_2+x_1}{2} \rightarrow y=a\left(\dfrac{x_2+x_1}{2}\right)^2+b\left(\dfrac{x_2+x_1}{2}\right)+c$

Si además nos pidiesen la ecuación de $t$; en dicho punto, ésta sería

$$y-\left[a\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)^2+b\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)+c\right]=\left[a\left(x_2+x_1\right)+b\right]\left[x-\frac{x_2+x_1}{2}\right]$$

**Exercise 3.3.20** *Dada la elipse* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$*. Demuestra que para todo punto* $P(x_0,y_0)$ *(siendo* $y_0$ *no nulo) la ecuación de su recta tangente es de la forma* $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$

*Solución*

Dada la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ utilizando la derivación ímplicita; tendremos

$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2yy\ '}{b^2}=0 \rightarrow \dfrac{yy\ '}{b^2}=-\dfrac{x}{a^2} \rightarrow y\ '=-\dfrac{xb^2}{a^2y}$

Por lo tanto; en el punto $P(x_0,y_0)$ de la elipse la pendiente de su recta tangente es $m_{t=}-\dfrac{x_0b^2}{a^2y_0}$

Como de $t$ conocemos el punto y su pendiente

$$t\equiv\left\{\begin{array}{l} P(x_0,y_0) \\ m_{t=}-\dfrac{x_0b^2}{a^2y_0} \end{array}\right. \rightarrow y-y_0=-\frac{x_0b^2}{a^2y_0}(x-x_0)$$

Operando esta expresión tendremos

$$a^2y_0\left(y-y_0\right)=-x_0b^2(x-x_0) \rightarrow a^2yy_0+b^2xx_0=a^2y_0^2+b^2x_0^2 \text{ (recta tangente)}$$

Como $P(x_0,y_0)$ pertenece a la elipse$\rightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1; b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación de la recta tangente, tendremos:

$$a^2yy_0+b^2xx_0=a^2b^2$$

Dividiendo todo por $a^2b^2$; nos quedará:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

**Exercise 3.3.21** *Dada la hipérbola* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$*. Demuestra que para todo punto* $P(x_0,y_0)$ *(siendo* $y_0$ *no nulo) la ecuación de su recta tangente es de la forma* $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$

*Solución*

Dada la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ utilizando la derivación ímplicita; tendremos

$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2yy\,'}{b^2}=0\rightarrow\dfrac{yy\,'}{b^2}=\dfrac{x}{a^2}\rightarrow y\,'=\dfrac{xb^2}{a^2y}$

Por lo tanto; en el punto $P(x_0,y_0)$ de la hipérbola la pendiente de su recta tangente es $m_{t=}\dfrac{x_0b^2}{a^2y_0}$

Como de $t$ conocemos el punto y su pendiente

$$t\equiv\left\{\begin{array}{l}P(x_0,y_0)\\ m_{t=}\dfrac{x_0b^2}{a^2y_0}\end{array}\right.\rightarrow y-y_0=\frac{x_0b^2}{a^2y_0}(x-x_0)$$

Operando esta expresión tendremos

$$a^2y_0\,(y-y_0)=x_0b^2(x-x_0)\rightarrow a^2yy_0-b^2xx_0=a^2y_0^2-b^2x_0^2\ \text{ (recta tangente 2)}$$

Ahora bien; como $P(x_0,y_0)$ pertenece a la hipérbola$\rightarrow\ \dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1\rightarrow$ $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación de la recta tangente 2, tendremos:

$$a^2yy_0-b^2xx_0=-a^2b^2$$

Dividiendo todo por -$a^2b^2$; nos quedará:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

**Exercise 3.3.22** *Dada la parábola* $x=ay^2+by+c$. *Demuestra que la ecuación de su recta tangente en un punto* $P(x_0,y_0)$*de ésta (siendo* $y_0$ *distinto de* $-\dfrac{b}{2a}$) *es de la forma* $y=\dfrac{x}{2ay_0+b}+\dfrac{ay_0^2-c}{2ay_0+b}$

*Solución*

Dada la parábola $x=ay^2+by+c$ utilizando la dervación implícita tendremos $1=2ayy\,'+by\,'\rightarrow\dfrac{1}{2ay+b}=y\,'$

Por lo tanto; en el punto $P(x_0,y_0)$ de la parábola la pendiente de su recta tangente es $m_t=\dfrac{1}{2ay_0+b}$

Como de $t$ conocemos el punto y su pendiente

$$t\equiv\left\{\begin{array}{l}P(x_0,y_0)\\ m_t=\dfrac{x_0b^2}{a^2y_0}\end{array}\right.\rightarrow y-y_0=\frac{1}{2ay_0+b}(x-x_0)$$

Ahora bien; como $P(x_0,y_0)$ pertenece a la parábola$\rightarrow x_0=ay_0^2+by_0+c$

$$y-y_0=\frac{x-(ay_0^2+by_0+c)}{2ay_0+b}\rightarrow y=\frac{x}{2ay_0+b}-\frac{ay_0^2+by_0+c}{2ay_0+b}+y_0$$

Quedando dicha ecuación de la siguiente manera:

$$y=\frac{x}{2ay_0+b}+\frac{-ay_0^2-by_0-c+2ay_0^2+by_0}{2ay_0+b}\rightarrow\boxed{y=\frac{x}{2ay_0+b}+\frac{ay_0^2-c}{2ay_0+b}}$$

**Exercise 3.3.23** *Dada la circunferencia* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. *Demuestra que para todo punto* $P(x_0,y_0)$ *(siendo* $y_0$ *distinto* $b$*) la ecuación de su recta tangente es de la forma* $y=-\dfrac{(x_0-a)}{y_0-b}(x-x_0)+y_0$

*Solución*

Dada la circunferencia $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$utilizando la dervación implícita tendremos

$2(x-a)+2(y-b)y\ '=0\rightarrow y\ '=-\dfrac{(x-a)}{y-b}$

Por lo tanto; en el punto $P(x_0,y_0)$ de la circunferencia la pendiente de su recta tangente es $m_t=-\dfrac{(x_0-a)}{y_0-b}$

Como de $t$ conocemos el punto y su pendiente

$$t\equiv\begin{cases}P(x_0,y_0)\\ m_t=-\dfrac{(x_0-a)}{y_0-b}\end{cases}\rightarrow y-y_0=-\frac{(x_0-a)}{y_0-b}(x-x_0)$$

Con lo que la ecuación de $t$ es $\boxed{y=-\dfrac{(x_0-a)}{y_0-b}(x-x_0)+y_0}$

En algunos libros de texto, esta ecuación la dan de la siguiente manera

$$(y-y_0)(y_0-b)+(x_0-a)\,(x-x_0)=0$$

## 3.4 La derivada como velocidad de crecimiento

**Exercise 3.4.1** El radio de una esfera crece uniformemente con una velocidad de 2 $cm/s$.Hallar la velocidad de crecimiento del área y del volumen de la esfera en el instante en que su radio es de 1 $m$

Ayuda: El volumen de una esfera es $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ y la superficie es $S=4\pi r^2$ donde $r$ es el radio de èsta.

Si $\left.\begin{array}{l}V=\frac{4}{3}\pi r^3\\ r=r(t)\end{array}\right\}\rightarrow$Por la regla de la cadena $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dt}$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\cdot 3\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}\qquad (a)$$

$\dfrac{dV}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del volumen y $\dfrac{dr}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del radio

Los datos del problema son $\dfrac{dr}{dt}=2\ cm/s$ y radio $r=1\ m=100cm$

Sustituyendo en la relación $(a)$ tendremos:

$$\frac{dV}{dt}=4\pi 100^2\cdot 2cm^3/s=80000\cdot\pi\ cm^3/s$$

Si $\left.\begin{array}{l}S=4\pi r^2\\ r=r(t)\end{array}\right\}\rightarrow$Por la regla de la cadena $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{dS}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dt}$

$$\frac{dS}{dt}=4\cdot 2\pi r\cdot\frac{dr}{dt}=8\pi r\cdot\frac{dr}{dt}\qquad (b)$$

$\frac{dS}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del área y $\frac{dr}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del radio

Los datos del problema son $\frac{dr}{dt} = 2cm/s$ y radio $r = 1m = 100cm$

Sustituyendo en la relación $(b)$ tendremos:

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi 100 \cdot 2cm^2/s = 1600 \cdot \pi cm^2/s$$

**Exercise 3.4.2** Los lados de un cubo (tiene las dos tapas) crecen uniformemente con una velocidad de 2 $cm/s$.Hallar la velocidad de crecimiento del área y del volumen del cubo en el instante en que su lado es de 5 $cm$

Ayuda: El volumen de un cubo de lado $x$ es $V = x^3$ y la superficie es $S = 6x^2$

Si $\left.\begin{array}{c} V = x^3 \\ x = x(t) \end{array}\right\}$ →Por la regla de la cadena $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt} \tag{c}$$

$\frac{dV}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del volumen y $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del lado

Los datos del problema son $\frac{dx}{dt} = 2\ cm/s$ y lado $x = 5\ cm$

Sustituyendo en la relación $(c)$ tendremos:

$$\frac{dV}{dt} = 3 \cdot 5^2 \cdot 2\ cm^3/s = 150\ cm^3/s$$

Si $\left.\begin{array}{c} S = 6x^2 \\ x = x(t) \end{array}\right\}$ →Por la regla de la cadena $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dS}{dt} = 12x \cdot \frac{dx}{dt} \tag{d}$$

$\frac{dS}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del área y $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del lado

Sustituyendo en la relación $(d)$ los datos tendremos:

$$\frac{dS}{dt} = 12 \cdot 5 \cdot 2cm^2/s = 120cm^2/s$$

**Exercise 3.4.3** Llos lados de un cuadrado crecen uniformemente a razón de 3 $cm/s$.Hallar la velocidad de crecimiento del área en el instante en que su lado es de 15 $cm$

Ayuda: la superficie de un cuadrado de lado $x$ es $S = x^2$

Si $\left.\begin{array}{c} S = x^2 \\ x = x(t) \end{array}\right\}$ →Por la regla de la cadena $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dS}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} \tag{d}$$

$\frac{dS}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del área y $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad de crecimiento del lado.

Los datos del problema son $\frac{dx}{dt} = 3\ cm/s$ y lado $x = 15\ cm$.

Sustituyendo en la relación $(d)$ tendremos:

$$\frac{dS}{dt} = 2 \cdot 15 \cdot 3 = 90\ cm^2/s$$

**Exercise 3.4.4** Sobre un montón cónico de arena, ésta cae a razón de 10 $dm^3/\min$.El radio de la base siempre es constantemente igual a la mitad de la altura. ¿ A qué velocidad crece la altura de la pila cuando ésta tiene 5 $dm$ de altura.?

Ayuda: El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ donde $r$ es el radio de la base y $h$ es la altura.

Como $\left.\begin{array}{l} V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ r = \frac{h}{2} \end{array}\right\} \to V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$

Por la regla de la cadena $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{12}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \qquad (e)$$

Los datos del problema son $\frac{dV}{dt} = 10\ dm^3/\min$ y altura $h = 5\ dm$.Sustituyendo en la relación $(e)$

$$10 = \tfrac{1}{4}\pi \cdot 5^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

Con lo que la velocidad de crecimiento de la altura es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{40}{\pi \cdot 5^2} = \frac{8}{5 \cdot \pi}\ dm/\min$$

**Exercise 3.4.5** La presión barométrica $p$ sufre alteraciones al variar la altura $h$ de acuerdo con la función

$c \cdot h = \ln\left(\frac{p}{p_o}\right)$*donde* $p_0$ *es la presión normal y* $c$ *es una constante. A la altura de* 5540 $m$ *la presión alcanza la mitad de la normal. Hallar la velocidad de variación de la presión barométrica en función de la altura cuando ésta es de* 5540 $m$.

Como $c \cdot h = \ln\left(\frac{p}{p_o}\right) \to c \cdot h = \log_e\left(\frac{p}{p_o}\right)$

Por la definición de logaritmo; tendremos $\frac{p}{p_o} = e^{c \cdot h}$.

Aislando la presión $p$ obtendremos:

$$p = p_0 \cdot e^{c \cdot h} \qquad (1)$$

Derivando con respecto a la altura $h$; tendremos:

$$\frac{dp}{dh} = p_0 \cdot e^{c \cdot h} \cdot c$$

Nos piden $\frac{dp}{dh}$ cuando la altura es de 5540 $m$. Concluimos que:

$$\left(\frac{dp}{dh}\right)_{h=5540 \text{ m}} = p_0 \cdot e^{c \cdot 5540} \cdot c \tag{2}$$

Como nos indican que si $h = 5540$ $m$ la presión $p = \frac{p_0}{2}$ sustituyendo en (1) calcularemos el valor de la constante $c$

$$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{c \cdot 5540} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2} = e^{c \cdot 5540}} \rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{5540} \ln 2}$$

Que sustituido en (2) nos dará la velocidad de crecimiento de la presión con respecto a la altura, cuando ésta es de 5540 $m$.

$$\left(\frac{dp}{dh}\right)_{h=5540 \text{ m}} = p_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{5540} \ln 2\right) \approx -6.2558 \times 10^{-5} p_0$$

**Exercise 3.4.6** La ordenada del punto que describe la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ decrece con una velocidad de $1,5$ $cm/s$. ¿ A qué velocidad varía la abcisa del punto cuando la ordenada llega a ser igual a 4 cm y su abcisa es positiva?

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 + 16 = 25 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \left\{\begin{array}{c} 3 \\ -3 \end{array}\right. \rightarrow P(3,4)$$

Si derivamos implicitamente la expresión $x^2 + y^2 = 25$ con respecto a la variable $x$; tendremos:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ con } y \neq 0 \tag{3}$$

En virtud de la regla de la cadena; sabemos que $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ y sustituyendo la relación (3) en esta última tendremos:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Como nos dicen que $\frac{dy}{dt} = -1,5$ cm/s y que el punto es $P(3,4)$ ; entonces podemos concluir

$$-1,5 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} = 2 \; cm/s$$

La velocidad de crecimiento de la abcisa es de 2 $cm/s$.

**Exercise 3.4.7** La abcisa del punto que describe la circunferencia $y^2 = 12x$ crece con una velocidad de 2 $cm/s$. ¿ A qué velocidad varía la ordenada del punto cuando la abcisa sea de 3 cm y su ordenada es positiva?

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 12x \\ x = 3 \end{array}\right\} \to y^2 = 36 \to y^2 = 36 \to y = \left\{\begin{array}{l} 6 \\ -6 \end{array}\right. \to P(3,6)$$

Si derivamos implicitamente la expresión $y^2 = 12x$ con respecto a la variable $x$; tendremos:

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 12 \to \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y} \text{ con } y \neq 0 \tag{4}$$

En virtud de la regla de la cadena; sabemos que $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$ y sustituyendo la relación (4) en esta última tendremos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Como nos dicen que $\dfrac{dx}{dt} = 2\ cm/s$ y que el punto es $P(3,6)$ ; entonces podemos concluir

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_P = \frac{6}{6} \cdot 2 \to \frac{dy}{dt} = 2\ cm/s$$

La velocidad de crecimiento de la ordenada es de 2 $cm/s$.

**Exercise 3.4.8** ¿ En qué punto de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ la ordenada decrece con la misma velocidad con que crece la abcisa?

Nos piden los puntos de la elipse $P(x_0, y_0)$ tales que $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_P = -\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_P$

Si derivamos implicitamente la expresión $16x^2 + 9y^2 = 400$ con respecto a la variable $x$; tendremos:

$$32x + 18y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \to \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{9y} \text{ con } y \neq 0 \tag{4}$$

En virtud de la regla de la cadena; sabemos que $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$ y sustituyendo la relación (4) en esta última tendremos:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{16x}{9y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Como nos indican en el enunciado que $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{dy}{dt}$; entonces la relación que han de verificar los puntos de la elipse es:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{16x}{9y} \cdot \frac{dy}{dt} \to 1 = \frac{16x}{9y} \text{ con } y \neq 0$$

Se trata de determinar los puntos de la elipse cuya recta tangente tenga una inclinación de $135^o$.Para calcularlos, resolveremos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{9y}{16} \\ 16x^2 + 9y^2 = 400 \end{array}\right\} \to 16\left(\frac{9y}{16}\right)^2 + 9y^2 = 400 \to$$

$$\tfrac{225}{16}y^2 = 400 \to \left\{\begin{array}{l} y = \frac{16}{3} \to x = 3 \\ y = -\frac{16}{3} \to x = -3 \end{array}\right.$$

Los puntos de la elipse que verifican esta condición son $\boxed{\begin{array}{l} P(3, \frac{16}{3}) \\ P'(-3, -\frac{16}{3}) \end{array}}$

**Exercise 3.4.9** *Una persona de 1.80 m de altura se aleja de un poste de alumbrado de 6 m de altura con una velocidad de* $1\ m/s$ *. ¿Con qué rapidez crece la sombra de la persona?*

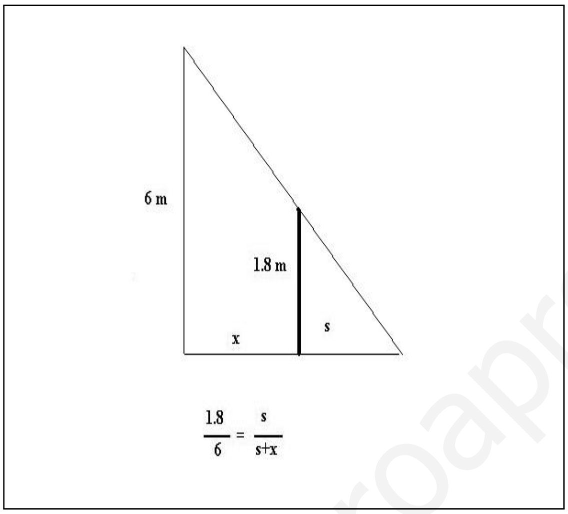



Figure 3.3:

Por el dibujo, observamos que $\dfrac{1.8}{6} = \dfrac{s}{s+x} \to 1.8(s+x) = 6s$

Despejando la variable $s$ ($s$ sombra en función de la distancia al poste de alumbrado $x$) tendremos

$$s = \frac{1.8x}{4.2} = \frac{3x}{7}$$

$x$ es una función que depende del tiempo

Nosotros sabemos que $\dfrac{ds}{dx} = \dfrac{3}{7}$ y que por hipótesis $\dfrac{dx}{dt} = 1\ m/s$

Utilizando la regal de la cadena; tendremos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Por lo que; la rapidez con la que crece la sombra de la persona es

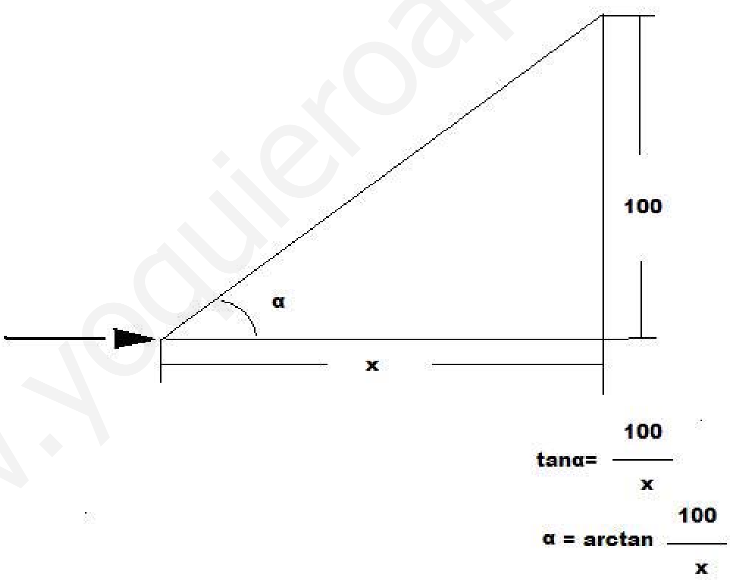
$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{3}{7} m/s$$

**Exercise 3.4.10** *Se inyecta aire a un globo esférico a razón de* $2\ cm^3/\min$. *¿A qué razón varía el radio cuando éste mide* $1.5\ cm$*?*

La fórmula que determina el volumen de una esfera es
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \to \left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=1.5} = 4\pi 1.5^2 = 9\pi$
Nos dan como dato que la rapidez con la que crece el volumen del globo es $\frac{dV}{dt} = 2\ cm^3/\min$
Como $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} \to 2 = 9\pi\cdot\frac{dr}{dt}$
La rapidez con la que crece el radio es

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{9\pi}cm/\min \simeq 7.0736\times 10^{-2}\frac{cm}{\min}$$

**Exercise 3.4.11** *Un vehículo se acerca a una torre de* 100 *m de altura.con una velocidad de* 25 $m/seg$ *¿Cuál es la velocidad de variación del ángulo con que el vehículo observa el edificio , en el instante en que éste se encuentra a 300 m de su base ?*




Datos: Nos indican que $\frac{dx}{dt} = 25\ m/seg$ y nos piden que calculemos $\frac{d\alpha}{dt}$ cuando $x = 300$ m

Nosotros sabemos que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\frac{100}{x} \\ \frac{d\alpha}{dx} &= \frac{d\left(\arctan\frac{100}{x}\right)}{dx} = -\frac{100}{x^2+10\,000} \end{aligned}$$

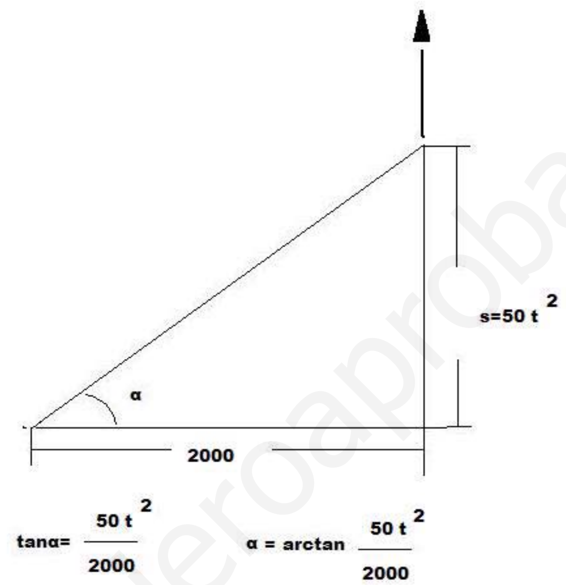
Por la regla de la cadena:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{100}{x^2 + 10\,000} \cdot 25$$

Ahora bien; cuando $x = 300\ m$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{x=300} = -\frac{100}{300^2 + 10\,000} \cdot 25 = -\frac{1}{40}\ rad/seg$$

**Exercise 3.4.12** *Una camara de televisión, situada a ras de suelo, está filmando el despegue de un cohete espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$, donde $s$ se mide en metros y $t$ en seg. La cámara dista 2000 metros del punto de lanzamiento.*
*¿Cuál es la velocidad de cambio del ángulo $\alpha$ de elevación de la cámara diez segundos después del despegue?*






Nos piden que calculemos $\dfrac{d\alpha}{dt}$ cuando $t = 10seg$
Por el dibujo, tenemos

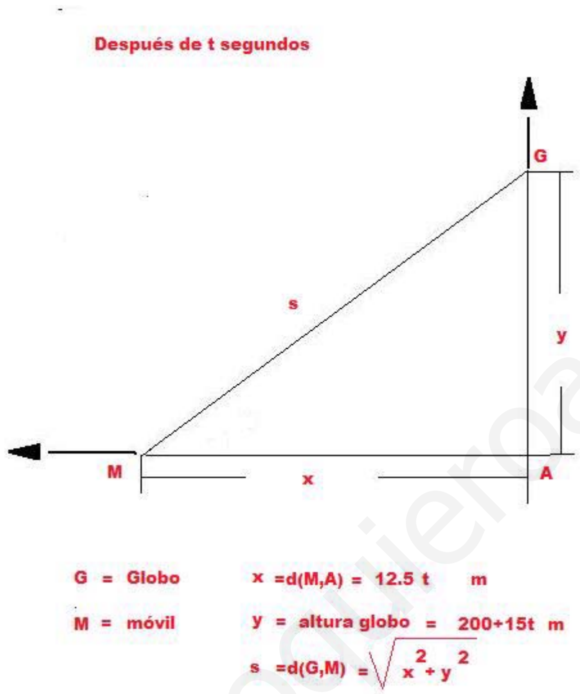
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\left(\arctan \frac{50t^2}{2000}\right)}{dt} = \frac{80t}{t^4 + 1600}$$

Por lo tanto; cuando $t = 10$; tendremos:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=10} = \frac{80\,(10)}{10^4 + 1600} = \frac{2}{29} rad/seg$$

**Exercise 3.4.13** *Un globo sabemos que asciende desde un punto $A$ ,situado en el suelo, con una velocidad de* 15 $m/s$.*Cuando éste se encuentra a una altura de* 200 *metros un vehículo pasa por el punto $A$ con una velocidad de* 12.5 $m/seg$. *Cuál es la velocidad de variación de la distancia que los separa un segundo después de pasar el vehículo por el punto $A$?*

Si consideramos que han transcurrido $t$ seg desde que el vehículo pasa por $A$; la posición de ambos objets viene determinada en el siguiente gráfico:




Si te fijas en el dibujo, observarás que la distancia que los separa es

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(12.5t)^2 + (200+15t)^2} \\ \text{Su derivada es } \frac{ds}{dt} &= = \frac{(381.25t + 3000)}{\sqrt{381.25t^2 + 6000t + 40000}} \\ \text{Nos están pidiendo } \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=1\ seg} &= \frac{(381.25t + 3000)}{\sqrt{381.25 + 6000 + 40000}} = 15.7\ m/seg \end{aligned}$$

# Chapter 4

# Estudio local de una función

## 4.1 Definiciones de funcion estrictamente creciente y decreciente

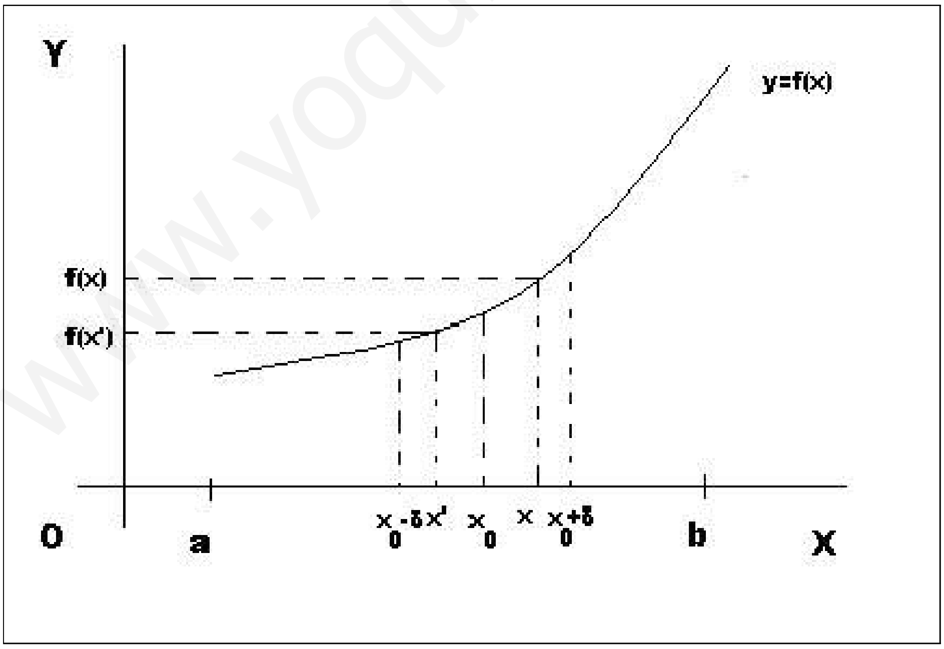
**Definicion 1.1 Función estr. creciente en un intervalo** $I$

Diremos que una función $f$ es estrictamente creciente en un intervalo $I$ siempre que se veriifque:

Si $x > x$'$\Rightarrow f(x) > f(x') \ \forall x, x' \in I$

**Nota**: Una función puede ser estrictamente creciente de forma cóncava o de forma convexa.

Observa los dibujos



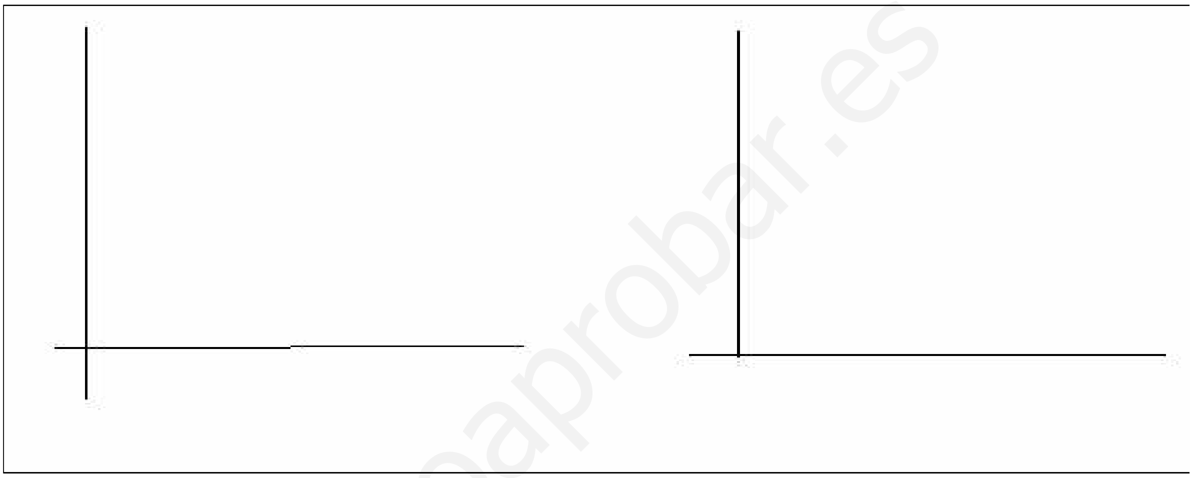

**Definicion 1.2 Función estr. decreciente en un intervalo** $I$

Diremos que una función $f$ es estrictamente decreciente en un intervalo $I$ siempre que se veriifque:

Si $x > x$'$\Rightarrow f(x) < f(x') \; \forall x, x' \in I$

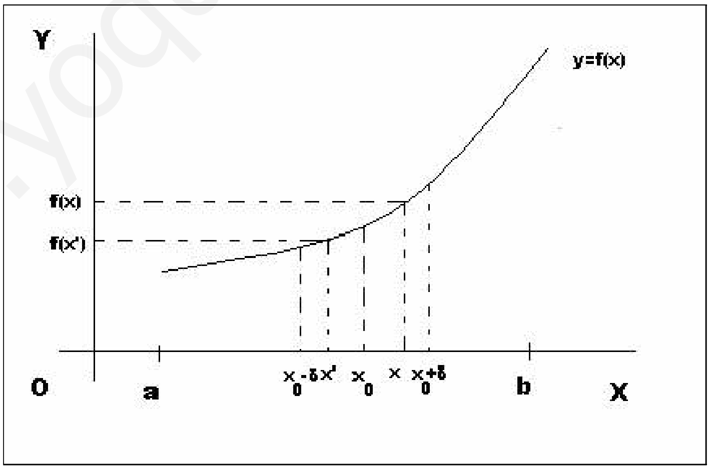
**Nota**: Una función puede ser estrictamente decreciente de forma cóncava o de forma convexa.

Dibuja tú, estas situaciones



**Definicion 1.3 Función estr. creciente en un punto**

$f$ es estrict. creciente en $x_0 \iff \exists\delta > 0$ $f$ es estric. creciente en $E_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset ]a, b[ \iff$ Si $x > x$'$\Rightarrow f(x) > f(x') \; \forall x, x' \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset ]a, b[$

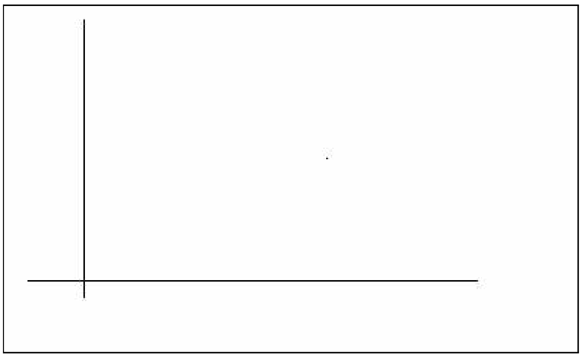



## 4.2 Definiciones de función estrictamente decreciente

**Definicion 1.4 Función estr. decreciente en un punto**

$f$ es estrict. decreciente en $x_0 \iff \exists\delta > 0$ $f$ es estric. decrec en $E_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset]a,b[ \iff$ Si $x > x$'$\Rightarrow f(x) < f(x')$ $\forall x, x' \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset]a,b[$

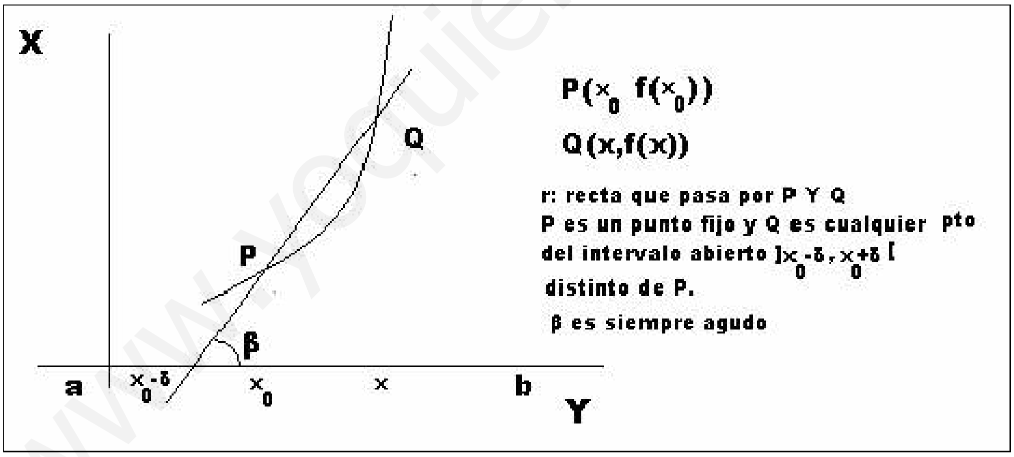
Dibuja tú, esta situación



**Definicion 1.5 Otra definición de función estr. creciente en un punto**

$f$ es estrict. creciente en $x_0$ siempre que podamos encontrar un entorno abierto de centro $x_0$ y radio $\delta > 0$ (sufic. pequeño) tal que todas las rectas que pasan por el punto $P(x_0, f(x_0))$ y el punto $Q(x, f(x))$ con $x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\}$ tienen por pendiente un n$^o$ real positivo ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$)

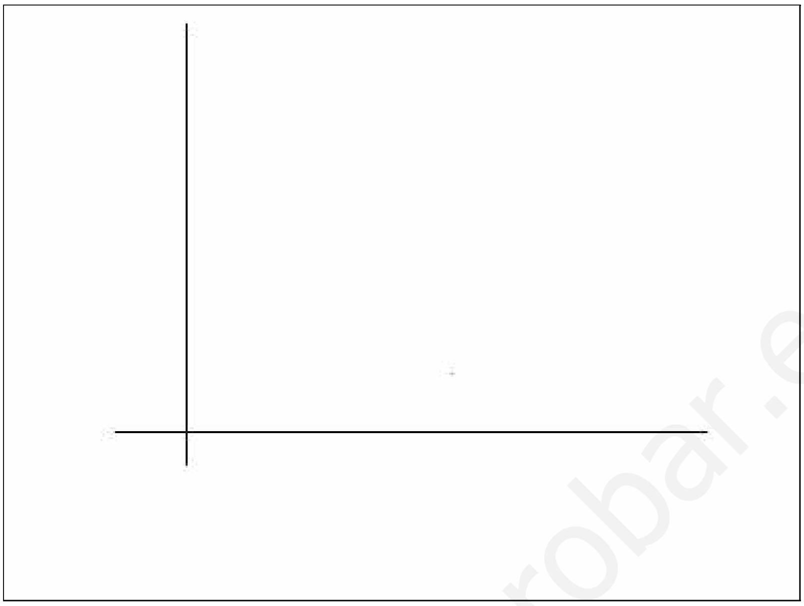
$$f \text{ es estrict. creciente en } x_0$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\delta > 0 \text{ tal que } \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\} \subset ]a,b[$$




**Definicion 1.6 Otra definición de función estr. decreciente en un punto**

$f$ es estrict. decreciente en $x_0$ siempre que podamos encontrar un entorno abierto de centro $x_0$ y radio $\delta > 0$ (sufic. pequeño) tal que todas las rectas que pasan por el punto $P(x_0, f(x_0))$ y el punto $Q(x, f(x))$ con $x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\}$ tienen por pendiente un n$^o$ real negativo ($\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$)

$$f \text{ es estrict. decreciente en } x_0$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\delta > 0 \text{ tal que } \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\} \subset ]a,b[$$



**Lema: Teorema del signo del límite**

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} g(x) = L \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists\delta > 0 \ (suf\ peque) \text{ tal que } signo(g(x)) = signo(L) \\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\} \end{array} \right.$$

### 4.2.1 Condición suficiente de crecimiento

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ es continua en } [a,b] \\ f \text{ es derivable en } ]a,b[ \\ x_0 \in ]a,b[ \text{ y } f\,'(x_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es estric. creciente en } x_0$$

**Demostración**

Por ser $f\,'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ ; entonces en virtud del teorema del signo podemos afirmar que:

$\exists\delta > 0$ $(suf\ peque)$ tal que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\}$

Lo cual es equivalente a afirmar que $f$ es estric. creciente en $x_0$

### 4.2.2 Condición suficiente de decrecimiento

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ es continua en } [a,b] \\ f \text{ es derivable en } ]a,b[ \\ x_0 \in ]a,b[ \text{ y } f\,'(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es estric. decreciente en } x_0$$

**Demostración**

Por ser $f\,'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ ; entonces en virtud del teorema del signo podemos afirmar que:

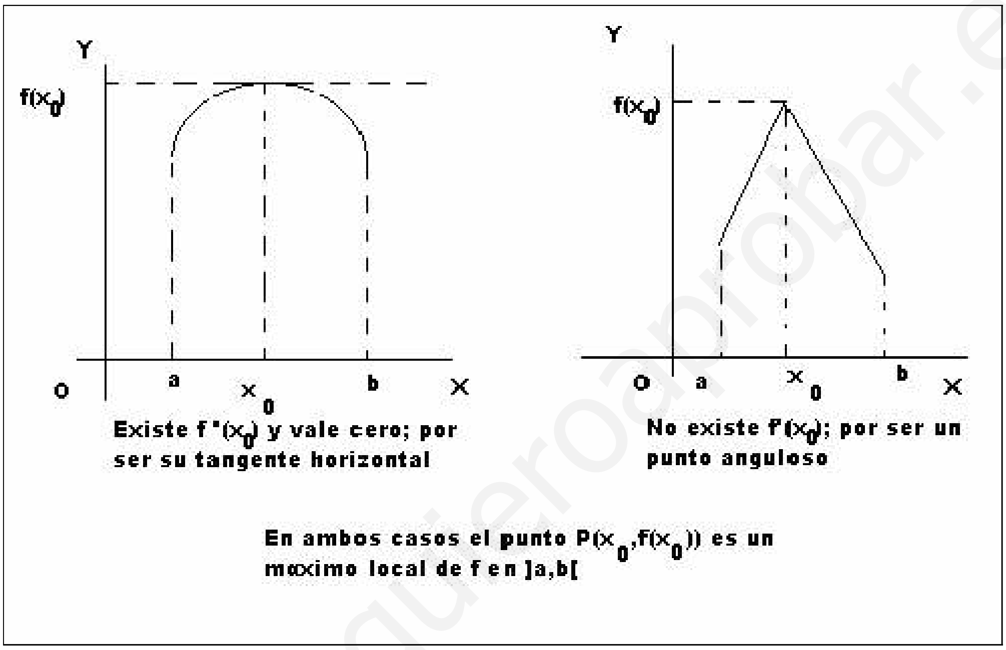
$\exists\delta > 0$ $(suf\ peque)$ tal que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\}$

Lo cual es equivalente a afirmar que $f$ es estric. decreciente en $x_0$

## 4.3 Definicion de máximo local

**Definicion 1.7 Máximo local de una función en un punto**

Si $f$ es continua en $[a, b]$ y $x_0 \in ]a, b[$
Diremos que $f$ tiene en el punto $P(x_0, f(x_0))$ un máximo local
$\Updownarrow$
$\exists \delta > 0$ (suf pequeño) tal que $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$



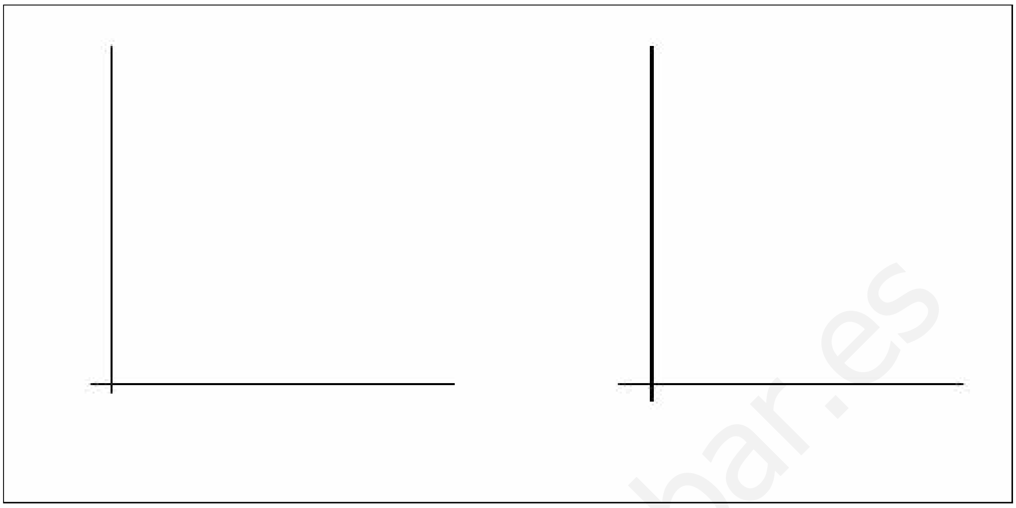

**Nota** Fíjate en definitiva, que si una función $f$ tiene en un punto $P$ un máximo local es porque en él pasa de ser estr. creciente a estrictamente decreciente

## 4.4 Definicion de mínimo local

**Definicion 1.8 Mínimo local de una función en un punto**

Si $f$ es continua en $[a, b]$ y $x_0 \in ]a, b[$
Diremos que $f$ tiene en el punto $P(x_0, f(x_0))$ un mínimo local
$\Updownarrow$
$\exists \delta > 0$ (suf pequeño) tal que $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
Dibuja tú, las dos situaciones posibles de mínimo local

**Nota** Fíjate en definitiva, que si una función $f$ tiene en un punto $P$ un mínimo local es porque en él pasa de ser estr. decreciente a estrictamente creciente



### 4.4.1 Condición necesaria de máximo local

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ es continua en } [a,b] \\ f \text{ es derivable en } ]a,b[ \\ P(x_0, f(x_0) \ \textit{Máximo local con } x_0 \in ]a,b[ \end{array}\right\} \Rightarrow f\,'(\,x_0) = 0$$

**Demostración**

Por el método de reducción al absurdo

Supongamos que $f\,'(\,x_0)$ no sea cero . Solamente caben dos posibilidades:

a) $f\,'(\,x_0) > 0 \rightarrow$ por la condición suficiente de crecimiento podemos afirmar que $f$ es estrictamente creciente en $x_0$

b) $f\,'(\,x_0) < 0 \rightarrow$ por la condición suficiente de decrecimiento podemos afirmar que $f$ es estrictamente decreciente en $x_0$

En ambos casos; obtenemos una contradicción con la hipótesis de que $f$ tiene en $P$ un máximo local

Por lo tanto, lo que hemos supuesto es falso$\rightarrow f\,'(\,x_0) = 0$

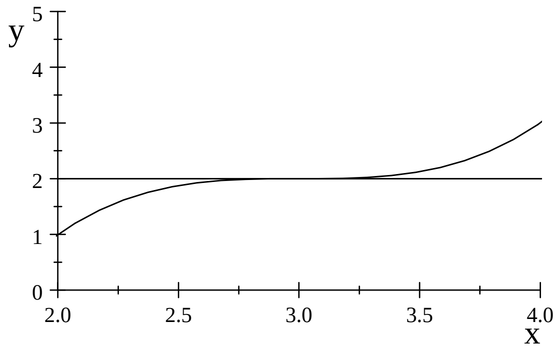
### 4.4.2 Condición necesaria de mínimo local

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ es continua en } [a,b] \\ f \text{ es derivable en } ]a,b[ \\ P(x_0, f(x_0) \ \textit{Mínimo local con } x_0 \in ]a,b[ \end{array}\right\} \Rightarrow f\,'(\,x_0) = 0$$

**Demostración**

Hazla tú como ejercicio

*El recíproco de estos dos últimos teoremas no es cierto ya que existen funciones que verifican que*
$f\ '(x_0) = 0$ *y sin embargo no son ni máximos ni mínimos locales*




La función $f(x) = (x-3)^3 + 2$ verifica que en el punto $x = 3$ su derivada vale cero y sin embargo en dicho punto $P(3, 2)$ no tiene ni máximo ni mínimo local. La función tiene en él un punto de inflexión de tangente horizontal

**Cuestión**

?' Explica geométricamente que ocurre cuando $f\ '(x_0) = 0$?

**Nota** Si una función $f$ en el intervalo$[a, b]$ alcanza su máximo (mínimo) absoluto en $x_0 \in ]a, b[ \Rightarrow$en dicho punto la función tendrá un máximo (mínimo) local, independientemente de que en dicho punto exista o no derivada. Lo recíproco no es cierto

## 4.5 Máximos y mínimos absolutos de una función en $[a, b]$

Si una función es continua en $[a, b]$,por el teorema de Weierstrass sabemos que dicha función en $[a, b]$ alcanza al menos una vez su máximo y mínimo absoluto

?'Dónde los alcanza?

Caso a)Puede alcanzarlos en los extremos

Caso b)Puede alcanzarlos en el intervalo ]a,b[

Subcaso b1) Si además para dichos valores la función es derivable; entonces por la condición necesaria de máximo o mínimo local sabemos que su derivada valdrá cero

Subcaso b2) Puede ocurrir que para dichos valores la función no sea derivable

**Conclusión**

Para determinar los máximos o mínimos absolutos procederemos de la siguiente manera:

**1)** Calcularemos $f(a)$ y $f(b)$

**2)** Determinaremos los puntos singulares de $f$ en $]a, b[$,es decir los valores que anulen su $f\ '$ . Supongamos que estos valores son $c_1, c_2, ...c_m$. Pasaremos después a calcular $f(c_1), f(c_2), ...f(c_m)$

**3)** Determinaremos los puntos en $]a, b[$ para los cuales no existe derivada (puntos angulosos o de retroceso).Supongamos que estos valores son $b_1, b_2, ...b_r$. Calcularemos $f(b_1), f(b_2), ...f(b_r)$

La mayor de todas las imágenes anteriores corresponderá al máximo absoluto de $f$ en $[a, b]$ y la menor de todas corresponderá al mínimo absoluto de $f$ en $[a, b]$

**Example 81** *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{x^2-1}$ *determina los máximos y mínimos absolutos en* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$D(f) = \Re \sim \left\{x \in \Re / x^2 - 1 = 0\right\} = \Re \sim \{-1, 1\}$
Por lo tanto; esta función es continua en $D(f)$ .
En particular lo será en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Como esta función verifica las hipótesis del teorema de Weierstrass en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, entonces podemos afirmar que alcanza, al menos una vez, su máximo y su mínimo absoluto en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Como $y\,' = \dfrac{-10x}{(x^2-1)^2} \to f$ es derivable en $\Re \sim \{-1, 1\}$

En particular , $f$ es derivable en $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Por lo tanto en $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ la función no tiene ni puntos angulosos ni de retroceso en dicho intervalo

Determinamos ahora los puntos de tangente horizontal de esta función en $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$\dfrac{-10x}{(x^2-1)^2} = 0 \to x = 0 \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

Calculamos ahora las imágenes en los extremos y en el punto de tangente horizontal

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = -\frac{11}{3} = -3.\,6667$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = -\frac{11}{3} = -3.\,6667$$

$f(0) = -2$

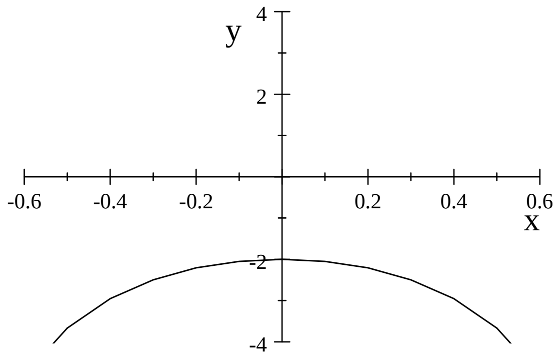
La mayor de estas imágenes corresponderá al máximo absoluto y la menor de todas al mínimo absoluto

Así pues:

$$\left.\begin{array}{l} P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{3}\right) \\ Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{3}\right) \end{array}\right\} \text{Mínimos absolutos}$$

$R(0, -2)$ *Máximo absoluto*

Si todavía tienes dudas, aquí tienes su gráfica en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$




**Example 82** *Dada la función* $y = \sin 2x - x$ *determina los máximos y mínimos absolutos en* $[0, \frac{\pi}{2}]$

Esta función es continua en $\Re$; ya que es resta de las funciones $g(x) = \sin 2x$ y $h(x) = x$ ambas continuas en $\Re$.

En particular , lo será en $[0, \frac{\pi}{2}]$

Como esta función verifica las hipótesis del teorema de Weierstrass en $[0, \frac{\pi}{2}]$, entonces podemos afirmar que alcanza al menos una vez su máximo y su mínimo absoluto en $[0, \frac{\pi}{2}]$

Como $y' = 2\cos 2x - 1 \rightarrow D(f') = \Re \rightarrow f$ es derivable en $\Re$

Por lo tanto; $f$ no tiene puntos angulosos ni puntos de retroceso en $]0, \frac{\pi}{2}[$

Determinamos ahora los puntos de tangente horizontal de esta función en $]0, \frac{\pi}{2}[$

$2\cos 2x - 1 = 0 \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$ Las soluciones de esta ecuación son $2x =$
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right.$ siendo $k \in Z$

$x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{array} \right.$ siendo $k \in Z$

De todas estas soluciones, la única que nos interesa es $x = \frac{\pi}{6} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

Calculamos ahora las imágenes en los extremos y en el punto de tangente horizontal

$f(0) = \sin 0 - 0 = 0$

$f(\frac{\pi}{6}) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = 0.34243$

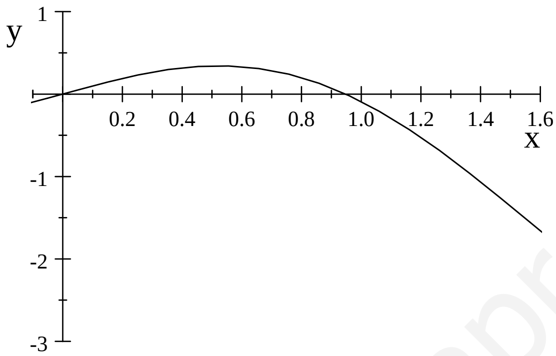
$f(\frac{\pi}{2}) = \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} = -1.5708$

La mayor de estas imágenes corresponderá al máximo absoluto y la menor de todas al mínimo absoluto

Así pues:

$$P\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \textit{ Mínimo absoluto}$$
$$R(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}) \textit{ Máximo absoluto}$$

Si todavía tienes dudas, aquí tienes su gráfica en $[0, \frac{\pi}{2}]$




**Example 83** *Dada la función* $y = \left|x^2 - 4\right|$ *determina los máximos y mínimos absolutos en* $[-3, 3]$

Redefinamos la función dada como una función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si\ x < -2 \\ -x^2 + 4 & si\ -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Pasemos ahora a estudiar su derivabilidad primero y después su continuidad

*Si* $x < -2 \qquad f(x) = x^2 - 4 \to f\ '(x) = 2x.$

$f$ es derivable en $]-\infty, -2[$. Por lo tanto; podemos afirmar que $f$ es continua en $]-\infty, -2[$

*Si* $-2 < x < 2 \qquad f(x) = -x^2 + 4 \to f\ '(x) = -2x.$

$f$ es derivable en $]-2, 2[$. Por lo tanto; podemos afirmar que $f$ es continua en $]-2, 2[$

*Si* $x > 2 \qquad f(x) = x^2 - 4 \to f\ '(x) = 2x.$

$f$ es derivable en $]2, +\infty[$. Por lo tanto; podemos afirmar que $f$ es continua en $]2, +\infty[$

¿ Es derivable la función para $x = -2$?

$$f\ '_-(-2) = \lim_{x \to -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 4}{x+2} =$$
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2^-} (x-2) = -4$$
$$f\ '_+(-2) = \lim_{x \to -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2+} \frac{-x^2 + 4}{x+2} =$$
$$\lim_{x \to -2+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2+} -(x-2) = +4$$

$f$ no es derivable para $x = -2$; ya que en dicho punto tiene un punto anguloso

¿ Es derivable la función para $x = 2$?

$f\,'_{-}(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-x^2+4}{x-2} =$
$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} -(x+2) = -4$

$f\,'_{+}(2) = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x^2-4}{x-2} =$
$\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} (x+2) = +4$

$f$ no es derivable para $x=2$; ya que en dicho punto tiene un punto anguloso

$$\boxed{f \text{ es derivable en} \Re \sim \{-2,2\} \text{ y además } f\,'(x) = \begin{cases} 2x & si\ x<-2 \\ -2x & si\ -2<x<2 \\ 2x & si\ x>2 \end{cases}}$$

Nos falta por determinar si la función es continua para $x=-2$ y para $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -(-2)^2+4=0 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2-} x^2-4=0 \\ \lim\limits_{x\to -2+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2+} -x^2+4=0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to -2} f(x)=0 \end{array}\right\} \to f \text{ es con-}$$
tinua para $x=-2$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -2^2+4=0 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} -x^2+4=0 \\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} x^2-4=0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0 \end{array}\right\} \to f \text{ es continua}$$
para $x=2$

$f$ es continua en $\Re$

¿En qué puntos del intervalo $]-3,3[$ la función tiene un punto de tangente horizontal?

Es evidente que para $x=0$

Así pues; para determinar los maximos o mínimos absolutos de esta función en$[-3,3]$ (existen en virtud del teorema de Weierstrass) tendremos que calcular las siguientes imágenes $f(-3), f(-2), f(0), f(2), f(3)$

$f(-3) = (-3)^2-4=5$

$f(-2) = -(-2)^2+4=0$

$f(0)=4=4$

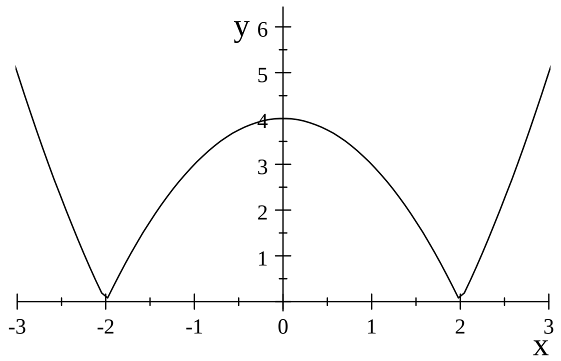
$f(2) = -(2)^2+4=0$

$f(3)=3^2-4=5$

La mayor de todas ellas corresponde al máximo absoluto y la menor de todas ellas al mínimo absoluto de $f$ en $[-3,3]$

$$\left.\begin{array}{l} P\,(-3,5) \\ Q\,(3,5) \end{array}\right\} \textit{Máximos absolutos}$$
$$\left.\begin{array}{l} R(-2,0) \\ R(2,0) \end{array}\right\} \textit{Mínimos absolutos}$$

Si todavía tienes dudas, aquí tienes su gráfica en $[-3,3]$




**Exercise 4.5.1** *La función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *tiene un máximo local en el punto* $P(0, 4)$ *y un mínimo local en* $Q(2, 0)$*. Determínala*

Por ser los puntos $P(0, 4)$ $Q(2, 0)$ de esta función. Entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación

$$4 = d \qquad (1^*)$$

$$0 = 8a + 4b + 2c + d \qquad (2^*)$$

Como esta fución es polinómica; entonces $f$ es continua y derivable en $\Re$. Siendo además $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Por ser $P(0, 4)$ un máximo local; entonces por la condición necesaria de máximo local podemos afirmar que $f\ '(0) = 0$

$$0 = c \qquad (3^*)$$

Por ser $Q(2, 0)$ un mínimo local; entonces por la condición necesaria de mínimo local podemos afirmar que $f\ '(2) = 0$

$$0 = 12a + 4b + c \qquad (4^*)$$

Resolviendo el sistema formado por las cuatro condiciones 1*,2*,3* y 4*

$$\left.\begin{array}{l} d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{La solución es } c = 0, d = 4, a = 1, b = -3$$

La función pedida es

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

**Exercise 4.5.2** *La función* $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ *pasa por el punto* $P(1, 1)$*, tiene un máximo local para* $x = -4$ *y un mínimo local en el punto de abcisa* $x = 0.$*. Determínala*

Por ser el punto $P(1, 1)$ de esta función. Entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación

$$1 = 1 + b + c + d \qquad (1^*)$$

Como esta fución es polinómica; entonces $f$ es continua y derivable en $\Re$. Siendo además $f\ '(x) = 3x^2 + 2bx + c$

Por tener un máximo local para $x = -4$; entonces, por la condición necesaria de máximo local, podemos afirmar que $f\ '(-4) = 0$

$$0 = 48 - 8b + c \tag{2*}$$

Por tener un mínimo local para $x = 0$; entonces, por la condición necesaria de mínimo local, podemos afirmar que $f\ '(0) = 0$

$$0 = c \tag{3*}$$

Resolviendo el sistema formado por las condiciones 1*,2* y 3*

$$\left.\begin{array}{l} b+c+d=0 \\ -8b+c=-48 \\ c=0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{La solución es } b=6, d=-6, c=0$$

La función pedida es

$$y = x^3 + 6x^2 - 6$$

**Exercise 4.5.3** *De todos los triángulos isósceles cuyos lados iguales miden* $10cm$ *¿Cuál es el que tiene área máxima*

Si llamamos $2x$ al lado desigual; entonces dicho lado puede variar entre 0 y 20. (Recuerda que el lado ha de ser menor que la suma de los otros dos)

Si $x = 0$ o $x = 10$ no hay triángulo, evidentemente su superficie es *nula*

La altura de esta triángulo, la determinamos utilizando el Teorema de Pitágoras

$$10^2 = h^2 + x^2 \rightarrow h = \sqrt{100 - x^2}$$

La función que me permite calcular la superficie de estos triángulos es

$$S = \frac{base * altura}{2} = \frac{2x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2} = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100x^2 - x^4}$$

Si te fijas el dominio de esta función es el intervalo $[0, 10]$

Se trata pues, de determinar de esta función su máximo absoluto en $[0, 10]$

$S' = \dfrac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = \dfrac{100x - 2x^3}{\sqrt{100x^2 - x^4}}$

$D(f\ ') = ]0, 10[ \rightarrow f$ es derivable en $]0, 10[$

Calculemos los puntos de esta función cuya recta tangente es horizontal

$$\frac{100x - 2x^3}{\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 100x - 2x^3 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \notin ]0, 10[ \\ x = -5\sqrt{2} \notin ]0, 10[ \\ x = 5\sqrt{2} \in ]0, 10[ \end{array}$$

Calculemos ahora la superficie para $x = 0, x = 5\sqrt{2}, x = 10$. La mayor de todas, corresponderá al triángulo de área máxima

$S(0) = 0$

$S(5\sqrt{2}) = \sqrt{100\left(5\sqrt{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^4} = 50 \text{ cm}^2$

El triángulo de área máxima es el que tiene por dimensiones 10 cm, 10 cm y $10\sqrt{2}$

**Exercise 4.5.4** *Una fábrica de conservas quiere diseñar, para enlatar su producto, un bote clíndrico de* $1000cm^3$ *de capacidad. Por razones de facilidad de manejo, es necesario que el radio esté comprendido entre* 3 *cm y* 7 *cm*

- – En estas condiciones, determina para qué valor de $r$ es mínima la superficie total del bote
  – Calcula para qué valor del radio, dentro del intervalo especificado sería máxima la superficie total del bote

Ayuda: el volumen de un cilindro de altura $y$ radio $x$ viene determinado por la fórmula

$$V = \pi x^2 y$$

La superficie de un cilindro es

$$\text{S}=2\pi xy + 2\pi x^2$$

*Solución*
Como $V = 1000 \text{ cm}^3 \rightarrow 1000 = \pi x^2 y$
Aislando la incógnita $y$; tendremos:

$$y = \frac{1000}{\pi x^2}$$

Por lo tanto; sustituyendo esta expresión en la fórmula que nos permite calcular la superficie

$$S = 2\pi x \frac{1000}{\pi x^2} + 2\pi x^2$$

Simplificando

$$S = 2\pi x \frac{1000}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = 2\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1000 + \pi x^3}{x}\right)\right)$$

Como nos indican que el radio ha de variar entre 3 cm y 7 cm. El problema queda reducido a calcular de esta función su máximo y su mínimo absoluto en $[3, 7]$

Como $S\ ' = 4\left(\frac{\pi x^3 - 500}{x^2}\right)$ esta función es derivable y continua en $\Re \sim \{0\}$

En particular será continua en $[3, 7]$ y derivable en $]3, 7[$

Determinemos ahora los puntos del intervalo $]3, 7[$ cuya recta tangente es horizontal $(S\ '(x) = 0)$

$$\frac{\pi x^3 - 500}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)} \simeq 5.\,4193$$

Para determinar de esta función su máximo y mínimo absoluto en $[3, 7]$; calcularemos $S(3), S(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}})$ y $S(7)$

$s(3) = 2\left(\frac{1000+\pi(3)^3}{3}\right) = \frac{2000}{3} + 18\pi\ cm^2 = 723.\,22 cm^2$

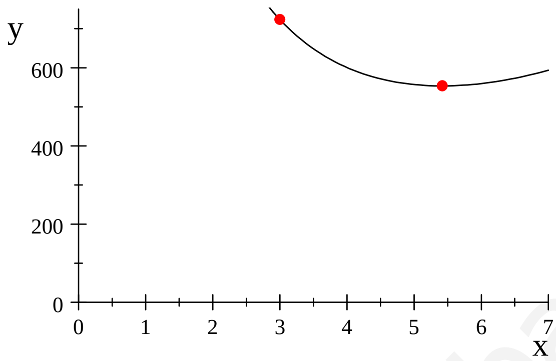
$s(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}) = 2\left(\frac{1000+\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^3}{\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}}\right) = 553.\,58\ cm^2$

$S(7) = 2\left(\frac{1000+\pi(7)^3}{7}\right) = \frac{2000}{7} + 98\pi = 593.\,59\ cm^2$

Así pues:

Para el cilindro de radio $x = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \simeq 5.\,4193$ y altura $y = \dfrac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} \simeq$ 10. 839 su superficie es mínima

Para el cilindro de radio $x = 3$ y altura $y = \dfrac{1000}{\pi\,(3)^2} = 35.368$ su superficie es máxima



# Chapter 5

# Teoremas importantes

## 5.1 Teorema de Rolle

**Teorema de Rolle** Si $f$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y que $f(a)=f(b)$;entonces siempre existe al menos un $c \in ]a,b[$ tal que

$$f'(c)=0$$

**Interpretacion geometrica** Lo que nos dice este teorema es que para toda función continua en un $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y cuyas imágenes coinciden en los extremos de dicho intervalo siempre podremos garantizar la existencia de al menos un punto $P(c,f(c))$ (con $c \in ]a,b[$ )cuya recta tangente a la gráfica de $f$ es horizontal
Si una recta paralela al eje de las $X$ , corta a la gráfica de la función $y=f(x)$ en dos puntos $P(a,f(a))$ $Q(b,f(b))$, este teorema garantiza la existencia de al menos un $x_o \in ]a,b[$ tal que su recta tangente es horizontal $(f\ '(x_o)=0)$

Demostración:

Por ser $f$ continua en $[a,b]$ en virtud del teorema de Weiertrass podemos afirmar que la función alcanza en dicho intervalo, al menos una vez, un máximo y un mínimo absoluto. Esto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists c \in [a,b] \ / \ P(c,f(c)) \text{ máximo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \\ \exists c' \in [a,b] \ / \ Q(c',f(c')) \text{ mínimo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \end{array} \right.$$

*Posibilidades:*

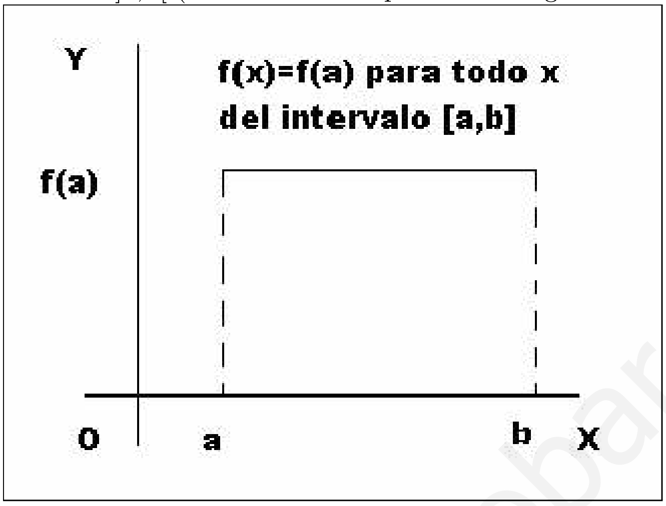
1) Que el máximo y el mínimo absoluto sean los extremos del intervalo. Esto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} c=a \rightarrow P(a,f(a)) \text{ máximo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \\ c'=b \rightarrow Q(b,f(b)) \text{ mínimo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \end{array} \right.$$

Como por hipótesis $f(a)=f(b)$.Entonces la función es constante $\rightarrow f(x)=f(a)\ \forall x \in [a,b]$

Así pues:

$f'(x) = 0\ \forall x \in ]a,b[$ (Existen infinitos puntos de tangente horizontal)

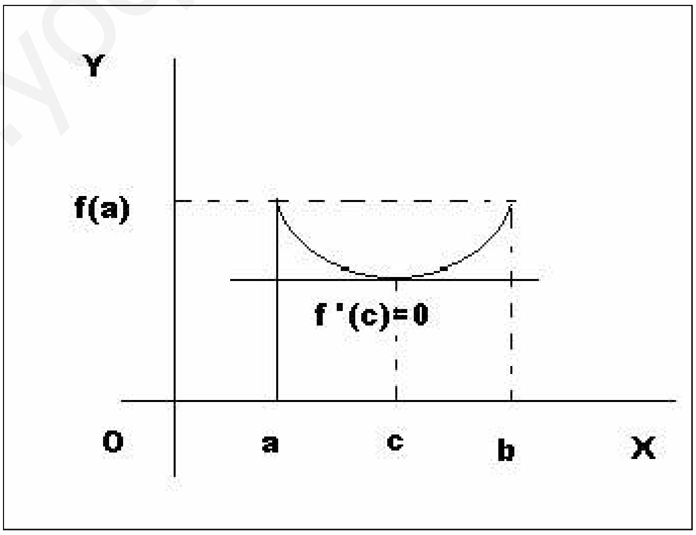



2) Que el máximo absoluto lo alcance en $a$ (también en $b$ , por ser $f(a) = f(b)$)y el mínimo absoluto en un punto del intervalo abierto.

$$\begin{cases} c = a\ P(a, f(a)) \text{ máximo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \\ c' \in ]a,b[\ Q(c', f(c')) \text{ mínimo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \end{cases}$$

Por ser $Q(c', f(c'))$ mínimo absoluto de $f$ en $[a,b]$ y $c' \in ]a,b[ \rightarrow$ Es evidente, que dicho punto $Q$ también será un mínimo local de $f$.siendo además $f$ derivable en $c'$ por hipótesis

Como $\begin{cases} Q(c', f(c')) \text{ mínimo local de } f \text{ en } [a,b] \text{ y } c' \in ]a,b[ \\ f \text{ es derivable en } c' \end{cases}$ $\rightarrow$Por la condición necesaria de mínimo local, podemos afirmar que $f'(c) = 0$ (La recta tangente a la gráfica de $f$ en $Q$ es horizontal)

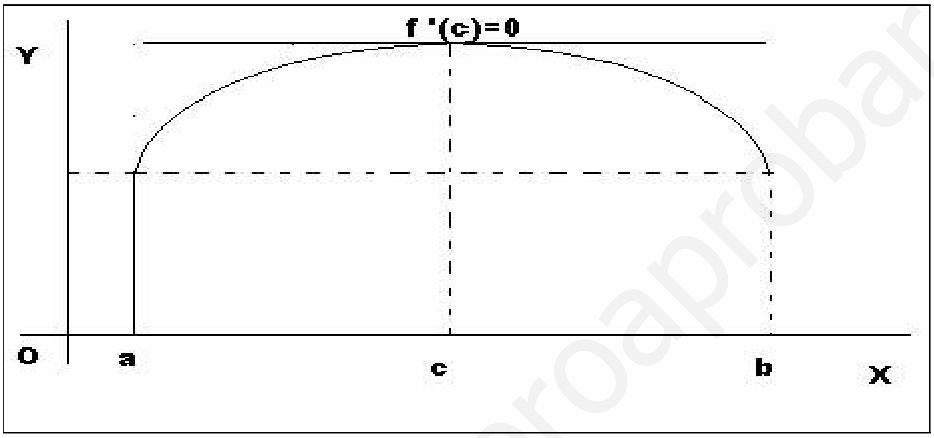



3) Que el mínimo absoluto lo alcance en $a$ (también en $b$ , por ser $f(a) = f(b)$)y el máximo absoluto en un punto del intervalo abierto.

$$\begin{cases} c' = a \rightarrow Q(a, f(a)) \text{ mínimo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \\ c \in ]a,b[ \ P(c, f(c)) \text{ máximo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \end{cases}$$

Por ser $P(c, f(c))$ máximo absoluto de $f$ en $[a,b]$ y $c \in ]a,b[ \rightarrow$ Es evidente, que dicho punto $P$ también será un máximo local de $f$.,siendo además $f$ derivable en $c$ por hipótesis ($f$ derivable en $]a,b[$)

Como $\begin{cases} P(c, f(c)) \text{ máximo local de } f \text{ en } [a,b] \text{ y } c \in ]a,b[ \\ f \text{ es derivable en } c \end{cases}$ $\rightarrow$Por la condición necesaria de máximo local, podemos afirmar que $f\ '(c) = 0$ (La recta tangente a la gráfica de $f$ en $P$ es horizontal)




4)El máximo y el mínimo absoluto los alcance en puntos del intervalo abierto. Esto es:

$$\begin{cases} c \in ]a,b[ \ P(c, f(c)) \text{ máximo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \\ c' \in ]a,b[ \ Q(c', f(c')) \text{ mínimo absoluto de } f \text{ en } [a,b] \end{cases}$$

Sigue razonando tú la demostración en este caso

### 5.1.1 Problemas Teorema de Rolle

**Exercise 5.1.1** *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$ *¿ Esta función verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en* $[0,3]$*?*

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$; y $D(f) = \Re$. Así pues, la función es continua en $\Re$ y en particular lo es en $[0,3]$

$f\ '(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2}$ y $D(f\ ') = \Re$. La función es derivable en $\Re$ y en particular lo es en $]0,3[$

$f(0) = 0$

$f(3) = 0$

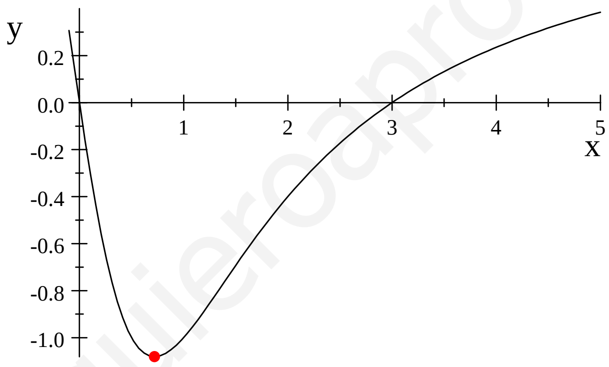
Como esta función verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en $[0,3]$ entonces; podemos afirmar que existe al menos un $c \in ]0,3[ \ / \ f\ '(c) = 0 \left( \dfrac{3c^2 + 2c - 3}{(c^2 + 1)^2} = 0 \right)$

Calculémoslo:

$$3c^2 + 2c - 3 = 0 \to c = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{10} \simeq 0\,72076 \in ]0,3[ \\ -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{10} \simeq -1.\,3874 \notin ]0,3[ \end{cases}$$

El único punto de tangente horizontal, de esta función, en el intervalo $]0,3[$ es el que tiene por abcisa $x = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10}$ y ordenada $y = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10}\right)}{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10}\right)^2 + 1} =$ $\frac{1}{2}\frac{-20+11\sqrt{10}}{-10+\sqrt{10}} \simeq -1.\,0811$

Nota: Puedes comprobar si así lo deseas, que en dicho punto la función tiene un mínimo absoluto en $[0,3]$




**Exercise 5.1.2** *Dada la función* $f(x) = x^3 - 4x + 3$ *¿ Esta función verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en* $[0,2]$*?*

Al ser $f$ una función polinómica sabemos que es continua y derivable en $\Re$. En particular será continua en $[0,2]$ y derivable en $]0,2[$ $(f\ '(x) = 3x^2 - 4$

Como además $f(0) = 3$ y $f(2) = 2^3 - 8 + 3 = 0$

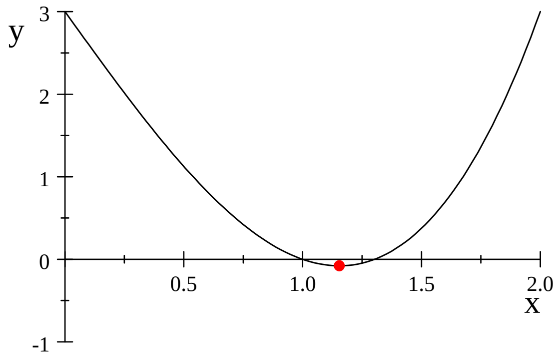
Esta función verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en $[0,2]$. Por lo tanto; podemos afirmar que $\exists c \in ]0,2[\ /\ f\ '(c) = 0$

Calculémoslo:

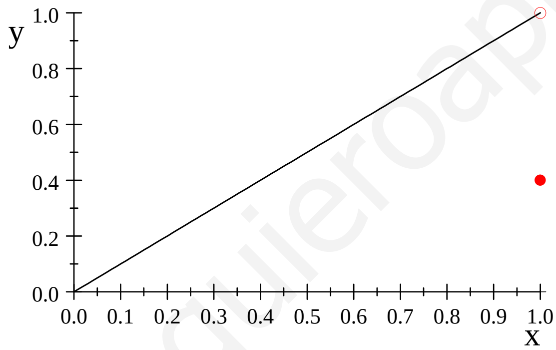
$$3c^2 - 4 = 0 \to c = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{3} \in ]0,2[ \\ -\frac{2}{3}\sqrt{3} \notin ]0,2[ \end{cases}$$

El único punto de tangente horizontal, de esta función, en el intervalo $]0,2[$ es el que tiene por abcisa $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ y ordenada $y = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + 3 = -\frac{16}{9}\sqrt{3} + 3 = -0.079201$

Nota: Puedes comprobar si así lo deseas, que en dicho punto la función tiene un mínimo absoluto en $[0,2]$




**Exercise 5.1.3** *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0.4 & si\ x = 1 \end{cases}$ *¿ Esta función verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en* $[0,1]$*?*



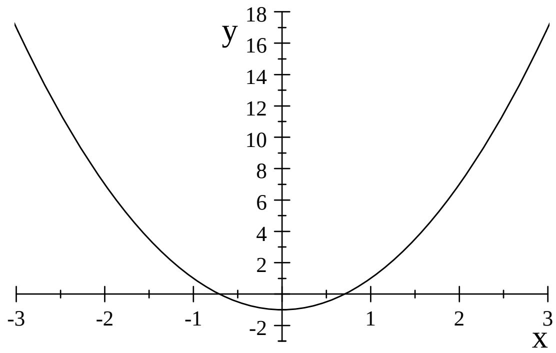

Esta función sólo es continua en $[0,1[$;Ya que para $x = 1$ se verifica que $f(1) = 0.4$ y que $\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$

Por lo que esta función no verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en $[0,1]$. Así pues, no podemos garantizar la existencia de un punto de esta gráfica en $]0,1[$,cuya recta tangente sea horizontal ( De hecho no hay ninguno)

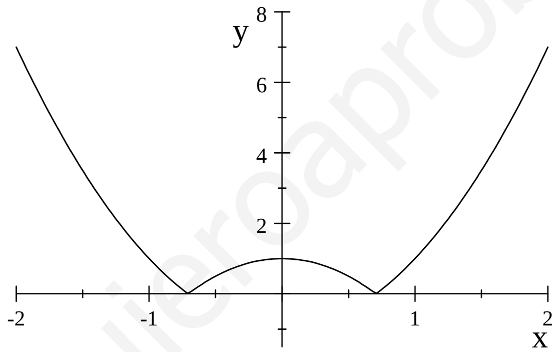
**Exercise 5.1.4** *Dada la función* $f(x) = \left|2x^2 - 1\right|$*¿ Esta función verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en* $[-1,1]$*?*

Redefinamos la función

Para ello dibujamos en primer lugar la función $y = 2x^2 - 1$ (El vértice es $V(0,-1)$ y los puntos de corte de esta parábola con el eje de las $X$ son $P(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ y $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ )




y después la función $y = \left|2x^2 - 1\right|$




Lo que nos permite afirmar que:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & si\ x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2x^2 + 1 & si\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2x^2 - 1 & si\ x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$f(-1) = 1$

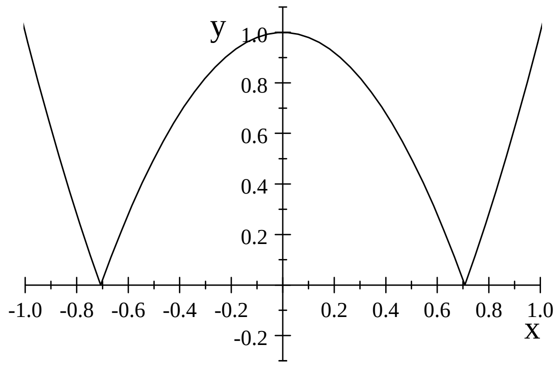
$f(1) = 1$

Esta función es continua en $\Re$ (Demuéstralo)

Es derivable en $\Re \sim \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ ya que en ambos tiene sendos puntos angulosos (Demuéstralo). Por lo tanto, la función no es derivable en $]-1,1[$

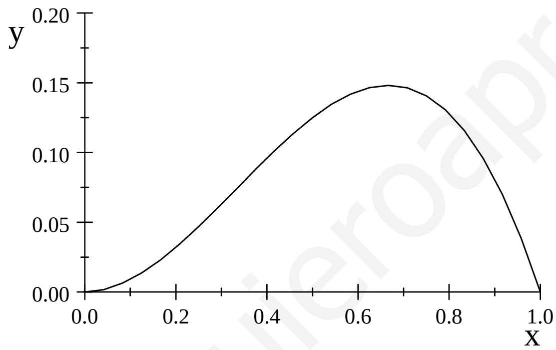
Esta función no verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en $[-1,1]$ Así pues; no podemos garantizar la existencia de un punto de su gráfica en el intervalo $]-1,1[$ de tangente horizontal

Nota: Sin embargo; si que existe en dicho intervalo un punto de tangente horizontal $H(0,1)$ que además es junto con los puntos $T_1(1,1)$ y $T_2(-1,1)$ máximo absoluto de $f$ en $[-1,1]$



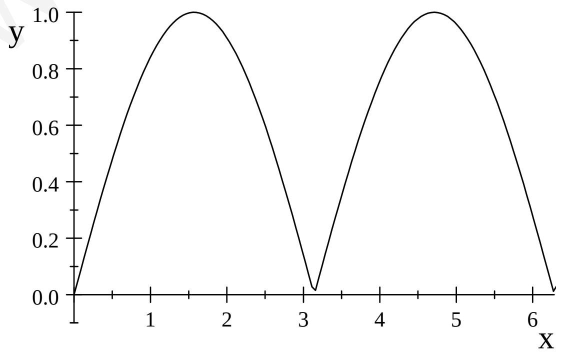

**Exercise 5.1.5** *Dada la función*$f(x) = \left|x^3 - x^2\right|$*¿ Esta función verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en* $[0,1]$*?*

Ayuda: Aquí tienes la gráfica de esta función en $[0,1]$




**Exercise 5.1.6** *La función* $f(x) = |\sin x|$*en* $[0, 2\pi]$ *para* $x = \dfrac{\pi}{2}$ *y* $x = \dfrac{3\pi}{2}$ *asu derivada es nula (Compruébalo). ¿Significa esto que* $f$ *es continua en* $[0, 2\pi]$ *y derivable en* $]0, 2\pi[$*?*

Ayuda: Fíjate en su gráfica en $[0, 2\pi]$




**Exercise 5.1.7** *Si una función verifica que* $f(a) = f(b)$ *,* $f$ *derivable en* $]a, b[$ *y existe un* $c \in ]a, b[ \; / \; f\,'(c) = 0$ *. ¿Es* $f$ *continua en* $[a, b]$*?*

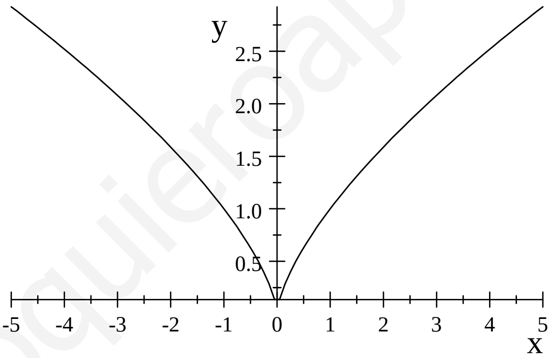
Ayuda: Considera la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ \sin x & si\ 0 < x < \pi \\ 1 & si\ x = \pi \end{cases}$

**Exercise 5.1.8** *Dada la función ¿* $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 2 & si\ x < 1 \\ ax + 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ *Determina los parámetros a y b para que esta función verifique las hipótesis del Teorema de Rolle en* $[0, 2]$*?*

Solución: $f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{3x}{2} + 2 & si\ x < 1 \\ \dfrac{x}{2} + 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

**Exercise 5.1.9** *Dada la función* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$*, comprueba que* $f(1) = f(-1)$ *y que a pesar de ello,* $f\ '(x)$ *no se anula en* $]-1, 1[$ *. Explica por qué este hecho no contradice el teorema de Rolle*

Fíjate en su gráfica




El punto $O(0, 0)$ es un punto de retroceso; ya que $\begin{cases} f'_{+}(0) = +\infty \\ f'_{-}(0) = -\infty \end{cases}$

Esta función es :

Continua en $[-1, 1]$

$f(-1) = f(1) = 1$

*Como* $f\ '(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow$ *f es derivable en* $\Re \sim \{0\}$

Como $f$ no verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[-1, 1]$; entonces no podemos afirmar ni negar que $\exists\ c \in ]-1, 1[$ tal que $f\ '(c) = 0$

Precisamente para esta función , su derivada $f\ '(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ nunca se anula. Este hecho pues; no contradice el teorema de Rolle en $[-1, 1]$ ya que en dicho intervalo no es aplicable

**Exercise 5.1.10** *Dada la función* $f(x) = x^3 - 4x$ *¿ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en* $[-1, 3]$*?. ¿ Y en* $[-2, 0]$ *?. Determina algún punto del intervalo ]-2,0[ en el que se anule* $f\ '(x)$

**Exercise 5.1.11** *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$*, comprueba que* $f(1) = f(3)$ *y que a pesar de ello,* $f\,'(x)$ *no se anula en* $]1,3[$ *. Explica por qué este hecho no contradice el teorema de Rolle*

**Exercise 5.1.12** *Comprueba que la función* $f(x) = x^6 + ax + b$ *no puede tener más de dos raíces distintas, independientemente del valor de* $a$ *y de* $b$

Demostración por el método de redución al absurdo

Supongamos que la función dada tiene más de dos raíces distintas. Puede ocurrir que:

a) Que $f(x) = 0$ tuviese tres raíces o soluciones distintas

Esto es:

Sean $c_1, c_2, c_3 \in \Re$ (con $c_1 < c_2 < c_3$) tales que $\begin{cases} f(c_1) = 0 \\ f(c_2) = 0 \\ f(c_3) = 0 \end{cases}$

Esta función por ser polinómica es continua y derivable en $\Re$. Dicha función pues, verifica las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos $[c_1, c_2]$ y $[c_2, c_3]$

Por lo tanto, existirían al menos $\begin{cases} c \in ]c_1, c_2[ \ / \ f\,'(c) = 0 \\ y \\ c' \in ]c_2, c_3[ \ / \ f\,'(c') = 0 \end{cases}$

Es decir , existirían al menos dos números reales que anulasen $f\,'(x)$

b) Que $f(x) = 0$ tuviese n raíces distintas (con $n > 3$

Razonando de forma análoga obtendríamos que la ecuación $f\,'(x) = 0$ tendría $n-1$ soluciones.

En ambas situaciones obtendríamos un absurdo, ya que la ecuación $6x^5 + a = 0$ ($f'(x) = 0$) solamente tiene una solución real

Por lo tanto; lo que hemos supuesto es falso

**Exercise 5.1.13** *¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función* $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$ *en el intervalo* $[0,1]$*? . Determina en* $]0,1[$ *el valor que anula* $f\,'(x) = 0$

**Exercise 5.1.14** *a) Dada una función* $f$ *derivable en* $\Re$*, pruébese que si la ecuación* $f(x) = 0$ *tiene al menos dos soluciones distintas* $x_1, x_2$ *entonces la ecuación* $f\,'(x) = 0$ *tiene al menos una en* $]x_1, x_2[$
*b) Factorizando el polinomio* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ *demuéstres que la ecuación* $f\,'(x) = 0$ *tiene las tres raíces reales*

Solución

a) Por ser $f$ derivable en $\Re \rightarrow f$ es continua en $\Re$

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ es continua en } [x_1, x_2] \\ f \text{ es derivable en } ]x_1, x_2[ \\ \text{Como } x_1, x_2 \text{ son raíces de } f(x) = 0 \ (f(x_1) = f(x_2) = 0 \end{array} \right\}$

Al verificar $f$ las hipótesis del teorema de Rolle en $[x_1, x_2]$; entonces podemos afirmar que $\exists c \in ]x_1, x_2[ \ / \ f\,'(c) = 0$

b) Si factorizamos el polinomio $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ tendremos

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Esta función $f$ e derivable en $\Re$ y las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $0, 1, 2, 3$

Por lo tanto, en virtud del apartado anterior existirá al menos una solución de la ecuación $f\ '(x) = 0$ en cada uno de los siguientes intervalos $]0, 1[, ]1, 2[, ]2, 3[$

Como $f\ '(x) = 0$ es una ecuación de tercer grado, la ecuación tendrá tres soluciones reales y además pertenecerán respectivamente a los intervalos $]0, 1[, ]1, 2[, ]2, 3[$

**Exercise 5.1.15** *a) Dada una función $f$ derivable en $\Re$, pruébese que si la ecuación*
*$f\ '(x) = 0$ no tiene soluciones entonces $f$ es inyectiva*[1]
*b) Demuéstrese que la función $f(x) = x^5 + 2x + 1$ es inyectiva*

Solución
a) M.Reducción al absurdo
Supongamos que $f$ no es inyectiva. Esto es:

$$\exists\ a, b \in \Re\ /\ a \neq b \text{ y } f(a) = f(b)$$

Por ser $f$ derivable en $\Re \rightarrow f$ es continua en $\Re$

La función $f$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[a, b]$ al ser continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y $f(a) = f(b)$. Por lo que $\exists c \in ]a, b[\ /\ f\ '(c) = 0$

Esto último es absurdo;ya que está en contradicción con la hipótesis de que la ecuación $f\ '(x) = 0$ no tine raíces reales

Así pues, lo que hemos supuesto es falso

*Nota: Otra demostración de este apartado a*

Si por hipótesis $f\ '(x)$ no se anula en $\Re$ ; entonces sólo caben dos posibilidades

- $f\ '(x) > 0\ \forall x \in \Re \rightarrow f$ es estrictamente creciente en $\Re$
- $f\ '(x) < 0\ \forall x \in \Re \rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $\Re$

En ambas situaciones; podemos afirmar que $f$ es inyectiva en $\Re$

b) Dada la función $f(x) = x^5 + 2x + 1$

$f$ es derivable en $\Re$ por ser una función polinómica y además $f\ '(x) = 5x^4 + 2 > 0\ \forall x \in \Re$ ; entonces en virtud del apartado anterior podemos afirmar que $f$ es inyectiva ( En concreto $f\ '(x) > 0 \rightarrow f$ es estrictamente creciente en $\Re \rightarrow f$ es inyectiva en $\Re$)

**Exercise 5.1.16** *Demuestra que la ecuación $x^8 + 5x - 3 = 0$ no puede tener más de dos raíces reales*
*Ayuda: Considera la función $f(x) = x^8 + 5x - 3$ . Si supones que admite tres raíces reales distintas; entonces la ecuación $f\ '(x) = 0$ tendrá al menos dos soluciones reales. ¿ Puede suceder esto último?*

**Exercise 5.1.17** *Demuestra que la ecuación $\tan x = x$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$*

[1] $f$ es inyectiva$\Leftrightarrow \forall a, b \in D(f)$ si $a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)$

*Solución*

Es obvio que el n$^o$ real 0 es solución de la ecuación $\tan x - x = 0$

Para demostrar que dicha ecuación no tiene más soluciones en $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, vamos a demostrar que no tiene ninguna otra solución positiva en $]0, \frac{\pi}{3}[$ ni negativa en $]-\frac{\pi}{3}, 0[$

Para ello, utilizaremos el método de reducción al absurdo

Caso a) Supongamos que la ecuación tiene otra solución $c$ positiva en $]0, \frac{\pi}{3}[$

La función $f(x) = \tan x - x$ es continua en $[0, c]$ , derivable en $]0, c[$ (siendo $f'(x) = \sec^2 x - 1$) y además $f(0) = f(c) = 0$ por ser ,ambos valores, soluciones de la ecuación $\tan x - x = 0$.

Por lo tanto, podemos afirmar que existe al menos un $h \in ]0, c[\ /\ f'(h) = 0$ ($\sec^2 h - 1 = 0$).

Esto último es absurdo; ya que la ecuación $\sec^2 x - 1 = 0$ tiene como soluciones $x = \begin{cases} 0 + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$ y ninguna de éstas pertenece al intervalo $]0, c[$ con $c < \frac{\pi}{3}$

Por lo tanto; lo que hemos supuesto es falso

Así pues, la ecuación $\tan x - x = 0$ no tiene una solución positiva en $]0, \frac{\pi}{3}[$

Caso b)Supongamos que la ecuación tiene otra solución $c$ negativa en $]-\frac{\pi}{3}, 0[$

La función $f(x) = \tan x - x$ es continua en $[c, 0]$ , derivable en $]c, 0[$ (siendo $f'(x) = \sec^2 x - 1$) y además $f(0) = f(c) = 0$ por ser ,ambos valores, soluciones de la ecuación $\tan x - x = 0$.

Por lo tanto, podemos afirmar que existe al menos un $h \in ]c, 0[\ /\ f'(h) = 0$ ($\sec^2 h - 1 = 0$).

Esto último es absurdo; ya que la ecuación $\sec^2 x - 1 = 0$ tiene como soluciones $x = \begin{cases} 0 + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$ y ninguna de éstas pertenece al intervalo $]c, 0[$ con $-\frac{\pi}{3} < c$

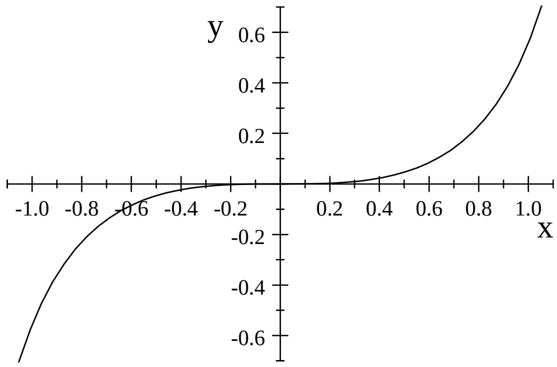
Por lo tanto; lo que hemos supuesto es falso

Así pues, la ecuación $\tan x - x = 0$ no tiene una solución negativa en $]-\frac{\pi}{3}, 0[$

*Conclusión final*:

La ecuación $\tan x - x = 0$ sólo tiene como solución $x = 0$ en $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

Aquí tienes la gráfica de la función $f(x) = \tan x - x$ en en $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$




**Exercise 5.1.18** *Pruébese que la única solución de la ecuación* $x\cos x - \sin x = 0$ *en el intervalo* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *es* $x = 0$

**Exercise 5.1.19** *Pruébese que la única solución de la ecuación* $x\sin x + \tan x = 0$ *en el intervalo* $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ *es* $x = 0$

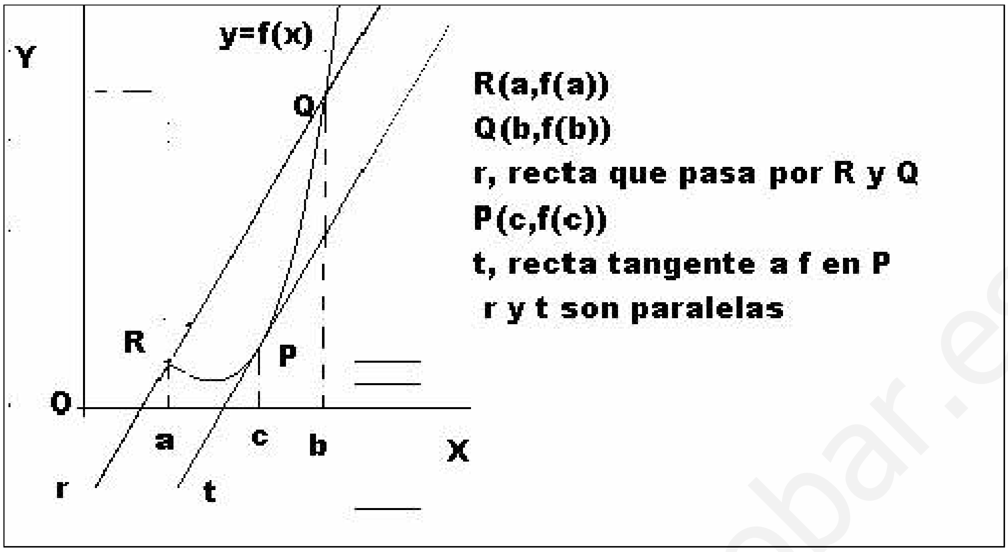
**Aplicación T. Rolle** El teorema de Rolle es útil para separar raíces de la ecuación $f(x) = 0$ ; ya que entre dos raíces consecutivas de $f\ '(x) = 0$ no puede haber más de una en la ecuación $f(x) = \dot{0}$ Pues de lo contrario, entre dos raíces de la ecuación $f(x) = 0$ por el teorema de Rolle habría al menos una solución de $f\ '(x) = 0$;con lo que las consideradas ya no serían consecutivas

**Nota:** Habrá una, si las imágenes para aquellos valores que anulan $f\ '(x)$ son de distinto signo y ninguna si tienen el mismo signo

## 5.2 Teorema del valor medio

**Teorema del valor medio** Si $f$ es una función continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$;entonces siempre existe al menos un $c \in ]a, b[$ tal que $f\ '(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

**Interpretacion geometrica** Lo que nos dice este teorema es que para toda función continua en un $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ siempre podremos garantizar la existencia de al menos un punto $P(c, f(c))$ (con $c \in\ ]a, b[$ )cuya recta tangente a la gráfica de $f$ es paralela a la recta secante a la gráfica de la función en los puntos $R(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$




**Demostracion** La ecuación de la recta secante a la gráfica de la función en los puntos $R(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$[2] es:

$$r \equiv \boxed{y_r = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$$

Consideramos la función auxiliar $H(x)$ que nos determina la diferencia de ordenadas entre la función $f$ y la recta secante $r$ del dibujo en el intervalo $[a, b]$

$$H(x) = f(x) - y_r(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \ \forall x \in [a, b]$$

Esta función es continua en $[a, b]$ por ser combinación lineal de funciones continuas en $[a, b]$ y es derivable en $]a, b[$ por ser combinación lineal de funciones derivables en $]a, b[$

Además :

$$H(a) = f(a) - y_r(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$
$$H(b) = f(b) - y_r(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$
$$\boxed{H(a) = H(b)}$$

Como esta función verifica las hipótesis del Teorema de Rolle, entonces podemos garantizar que $\exists c \in \,]a, b[\ /\ H\,'(c) = 0$[3]$\rightarrow f\,'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$$\rightarrow \boxed{f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

---

[2] $r \left\{ \begin{array}{l} R(a, f(a)) \\ Q(b, f(b)) \end{array} \right. \rightarrow r \left\{ \begin{array}{l} R(a, f(a)) \\ m_r = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array} \right. \rightarrow r \equiv y_r - f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

[3] $H\,'(x) = f\,'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

### 5.2.1 Consecuencias geométricas del Teorema del valor medio

**a)** $\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } ]a,b[ \\ f\ '(x)=0\ \forall x\in ]a,b[ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=f(a)\ \forall x\in[a,b]$ ($f$ es constante en $[a,b]$)

*Demostración*

Considero la función $f$ en el intervalo $[a,x]$ siendo $x$ tal que $a < x \leq b$

Esta función $f$ verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[a,x]$; ya que por hipótesis $f$ es continua en $[a,b]$ y es derivable en $]a,b[$. Por lo tanto, podemos afirmar que:

$$\exists c \in ]a,x[ \text{ tal que } \boxed{f\ '(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Como además $f\ '(x)=0\ \forall x\in]a,b[ \rightarrow f\ '(c)=0$

Conclusión:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0\ \forall x\in]a,b] \rightarrow f(x)-f(a)=0\ \forall x\in]a,b]$$

$$\underline{f(x)=f(a)\ \forall x\in[a,b] \ (\ f \text{ es constante en } [a,b])}$$

## b) Teorema fundamental del cálculo integral

$\left.\begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ son continuas en } [a,b] \\ f \text{ y } g \text{ son derivables en } ]a,b[ \\ f\ '(x)=g\ '(x)\ \forall x\in ]a,b[ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)-g(x)=f(a)-g(a)\ \forall x\in[a,b]$ [4]

*Demostración*

Considero la función $H(x)=f(x)-g(x)$ en el intervalo $[a,b]$

Esta función $H$ es continua en $[a,b]$ y es derivable en $]a,b[$ por ser resta de dos funciones que son continuas en $[a,b]$ y derivables en $]a,b[$

Además $H\ '(x)=f\ '(x)-g\ '(x)=0$[5] $\forall x\in]a,b[$

Esta función $H$ verifica las hipótesis del teorema anterior en el intervalo $[a,b]$ y por lo tanto; podemos afirmar que:

$H(x)=H(a)\ \forall x\in[a,b]$ ($H$ es constante en $[a,b]$)

$$f(x)-g(x)=f(a)-g(a)\ \forall x\in[a,b]$$

Luego $f$ y $g$ se diferencian solamente en una constante en $[a,b]$

### 5.2.2 Intervalos de monotonia

## c1) Intervalos de crecimiento

$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [a,b] \\ f \text{ es derivable en } ]a,b[ \\ f\ '(x)>0\ \forall x\in ]a,b[ \end{array}\right\} \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$

*Demostración*

Sean $x_1$ y $x_2$ dos puntos cualesquiera de $[a,b]$ tales que $x_1 < x_2$

[4] $f$ y $g$ se diferencian en una constante en $[a,b]$

[5] ya que por hipótesis $f\ '(x)=g\ '(x)\ \forall x\in]a,b[$

$\left.\begin{array}{l}\text{Por ser } f \text{ continua en } [a,b] \rightarrow f \text{ es continua en } [x_1,x_2] \\ \text{Por ser } f \text{ derivable en } [a,b] \rightarrow f \text{ es derivable en } [x_1,x_2]\end{array}\right\}$ $\rightarrow$Como $f$ verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$, entonces podemos afirmar que

$$\exists c \in ]x_1, x_2[ \text{ tal que } f\,'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Al ser $f\,'(x) > 0\ \forall x \in ]a,b[$; en particular $f\,'(c) > 0$ y por lo tanto tendremos que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Como además, hemos supuesto que $x_1 < x_2$ entonces tendremos la siguiente conclusión[6]:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \text{ Si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Acabamos pues; de demostrar que $f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$

c2) **Intervalos de decrecimiento**

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [a,b] \\ f \text{ es derivable en } ]a,b[ \\ f\,'(x) < 0\ \forall x \in ]a,b[ \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } [a,b]$$

[6] $\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \\ x_2 - x_1 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

### 5.2.3 Condiciones suficientes de máximo local

*Criterio de la primera derivada*

Dada una función $f$ continua en $[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)>0\ \forall x\in]a,x_0[ \\ f\,'(x)<0\ \forall x\in]x_0,b[ \\ x_0\in]a,b[ \\ \text{Si } f\,'(x_0)=0 \text{ o no existe } f\,'(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } P(x_0,f(x_0)) \text{ máximo local}$$

Demostración

Por ser $\left.\begin{array}{l} f\,'(x)>0\ \forall x\in]a,x_0[ \\ f\,'(x)<0\ \forall x\in]x_0,b[ \end{array}\right\}$ →la función es estrictamente creciente en el intervalo $]a,x_0[$ (a la derecha de $x_0$) y estrictamente decreciente en el intervalo $]x_0,b[$ (a la izquierda de $x_0$)

Como además, la función $f$ es continua en $x_0 \rightarrow f$ tiene en $P(x_{0,}f(x_0))$ un máximo local

Nota: Fíjate bien que no hace falta que la función sea derivable en $x_0$.

*Criterio de la segunda derivada*

Dada una función $f$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x_0)=0 \\ f\,''(x_0)<0 \\ x_0\in]a,b[ \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } P(x_0,f(x_0)) \text{ máximo local}$$

Demostración

Como $f\,''(x_0)<0 \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\,'(x)-f\,'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\,'(x)}{x-x_0}<0$

Por lo tanto, en virtud del teorema del signo del límite podemos afirmar que:

$$\exists\delta>0 \text{ (suf. pequeño) } / \ \forall x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\sim\{x_0\} \text{ se verifica que } \frac{f\,'(x)}{x-x_0}<0$$

Posibilidades

Si $x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\sim\{x_0\}$ y $x<x_0\rightarrow x-x_0<0$ y por lo tanto $f\,'(x)>0$ .

Por la condición necesaria de crecimiento en un punto entonces; la función es estrictamente creciente a la izquierda de $x_0$

Si $x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\sim\{x_0\}$ y $x>x_0\rightarrow x-x_0>0$ y por lo tanto $f\,'(x)<0$ .

Por la condición necesaria de decrecimiento en un punto entonces; la función es estrictamente decreciente a la derecha de $x_0$

Como la función en el punto de abcisa $x_{0,}$ pasa de ser estrictamente creciente a estrictamente decreciente, es evidente que en dicho punto $P(x_{0,}f(x_0))$ tiene un máximo local

### 5.2.4 Condiciones suficientes de mínimo local

*Criterio de la primera derivada*

Dada una función $f$ continua en $[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x) < 0 \ \forall x \in ]a, x_0[ \\ f\,'(x) > 0 \ \forall x \in ]x_0, b[ \\ x_0 \in ]a, b[ \\ \text{Si } f\,'(x_0) = 0 \text{ o no existe } f\,'(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } P(x_0, f(x_0)) \text{ mínimo}$$

local

Demostración

Por ser $\left.\begin{array}{l} f\,'(x) < 0 \ \forall x \in ]a, x_0[ \\ f\,'(x) > 0 \ \forall x \in ]x_0, a[ \end{array}\right\}$ $\rightarrow$la función es estrictamente decreciente en el intervalo $]a, x_0[$ (a la derecha de $x_0$) y estrictamente creciente en el intervalo $]x_0, b[$ (a la izquierda de $x_0$)

Como además, la función $f$ es continua en $x_0 \rightarrow f$ tiene en $P(x_{0,}f(x_0))$ un mínimo local

Nota: Fíjate bien que no hace falta que la función sea derivable en $x_0$.

*Criterio de la segunda derivada*

Dada una función $f$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x_0) = 0 \\ f\,''(x_0) > 0 \\ x_0 \in ]a, b[ \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } P(x_0, f(x_0)) \text{ mínimo local}$$

### 5.2.5 Determinación intervalos de monotonía , máximos y mínimos locales

Como consecuencia de los teoremas anteriores, para hallar los intervalos de monotonía ,así como los máximos o mínimos locales de una función $f$, bastará encontrar aquéllos en que $f\,'$ tiene signo constante; lo cual puede hacerse así:

1 Se hallan los valores para los cuales $f$ no es continua $\rightarrow c_1, c_2, ....c_m$( Para estos valores no hay derivada)

2 Se determinan los valores para los cuales $f\ \ '$ se anula (Se denominan puntos singulares)$\rightarrow b_1, b_2, ....b_s$. Estos valores son posibles máximos o mínimos locales

3 Se calculan las discontinuidades de $f\,'$ $r_1$,$r_2, ....r_t$ que no sean discontinuidades de $f$

Todos los números obtenidos anteriormente y ordenados convenientemente dividen a la recta real en una colección de intervalos; en cada uno de los cuales el signo de $f\,'$ es constante

Estudiaremos el signo de la derivada primera; determinando de esta forma los intervalos donde la función es estrictamente creciente y donde es estrictamente decreciente

Si obtenemos un punto donde la función es continua y pasa de ser estrictamente creciente (decreciente) a estrictamente decreciente (creciente) estaremos ante un máximo (mínimo) local

**Exercise 5.2.1** *Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función* $y = \dfrac{\ln x}{x}$. *Determina también sus máximos o mínimos locales*

$y = \dfrac{\ln x}{x} \rightarrow D(f) = ]0, +\infty[$ . La función es continua en $]0, +\infty[$

Como $y\ ' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \rightarrow D(f\ ') = ]0, +\infty[$ La función es derivable en $]0, +\infty[$

Valores que anulan $f\,'$ (Posibles máximos o mínimos locales)
$\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\to 1-\ln x=0\to \ln x=1\to x=e$
Estudio del signo de $f\,'$
$\forall x\in ]0,e[\to \ln x<1\to 1-\ln x>0\to f\,'(x)>0\to f$ es estr. creciente en $]0,e[$
$\forall x\in ]e,+\infty[\to \ln x>1\to 1-\ln x<0\to f\,'(x)<0\to f$ es estr. decreciente en $]e,+\infty[$

Como $f\,'(e)=0$.. Entonces en el punto $P(e,\dfrac{1}{e})$ la función tiene un máximo local

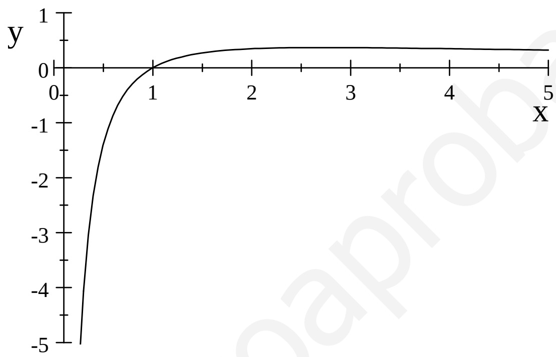



Figure 5.1:

**Exercise 5.2.2** *Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función* $y=\dfrac{x+5}{x^2-9}$. *Determina también sus máximos o mínimos locales*

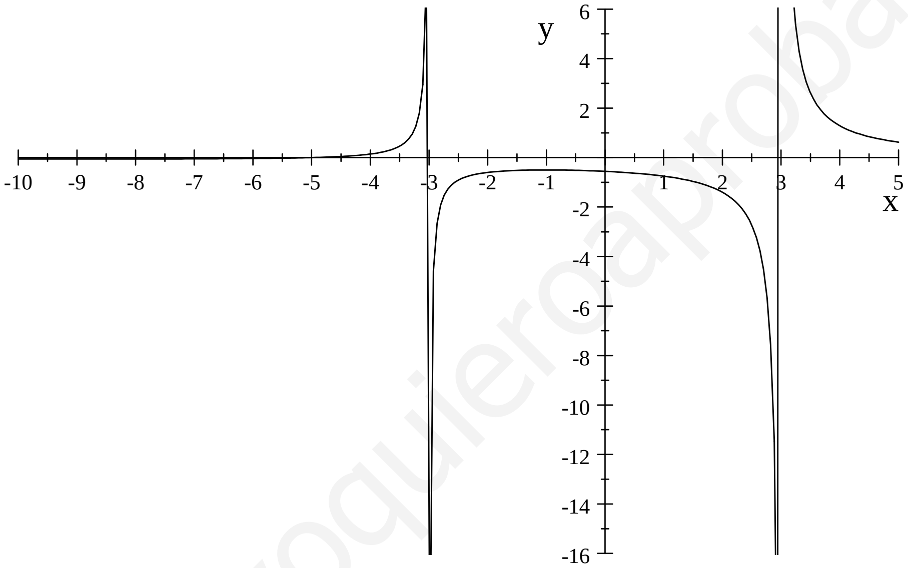
**Solución**
$y=\dfrac{x+5}{x^2-9}\to D(f)=\Re\sim\{3,-3\}\to f$ no es continua para $x=3$ y para $x=-3$ . Por lo tanto, no es derivable para estos valores
$y'=\dfrac{\left(x^2-9\right)-2x(x+5)}{\left(x^2-9\right)^2}=y=\dfrac{-x^2-10x-9}{\left(x^2-9\right)^2}=\dfrac{-(x+1)(x+9)}{\left(x^2-9\right)^2}$
$D(f\,')=\Re\sim\{3,-3\}$
Valores que anulan $f\,'$(posibles máximos o mínimos locales)
$\dfrac{-(x+1)(x+9)}{\left(x^2-9\right)^2}=0\to (x+1)(x+9)=0\to\left\{\begin{array}{ll} x+1=0\to & x=-1\\ x+9=0\to & x=-9\end{array}\right.$
Estudio del signo de $f\,'$
$\forall x\in ]-\infty,-9[\to\left\{\begin{array}{l} x+1<0\\ x+9<0\end{array}\right.\to -(x+1)(x+9)<0\to f\,'(x)<0\to f$ es est decrec. en $]-\infty,-9[$
$\forall x\in ]-9,-3[\to\left\{\begin{array}{l} x+1<0\\ x+9>0\end{array}\right.\to -(x+1)(x+9)>0\to f\,'(x)>0\to f$ es est crec. en $]-9,-3[$

$\forall x \in ]-3,-1[ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+1<0 \\ x+9>0 \end{array} \right. \rightarrow -(x+1)(x+9)>0 \rightarrow f\,'(x)>0 \rightarrow f$ es est crec. en $]-3,-1[$

$\forall x \in ]-1,3[ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+1>0 \\ x+9>0 \end{array} \right. \rightarrow -(x+1)(x+9)<0 \rightarrow f\,'(x)<0 \rightarrow f$ es est decrec. en $]-1,3[$

$\forall x \in ]3,+\infty[ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+1>0 \\ x+9>0 \end{array} \right. \rightarrow -(x+1)(x+9)<0 \rightarrow f\,'(x)<0 \rightarrow f$ es est decrec. en $]3,+\infty[$

La función tiene en el punto $P(-9,-\frac{1}{18})$ mínimo local y en el punto $Q(-1,-\frac{1}{2})$ un m´ximo local




**Exercise 5.2.3** *Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento; así como los máximos y míninos locales de las funciones*

$$\begin{array}{lll} y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-1} & y=\dfrac{1}{1+x^2} & y=x^4-x^2 \\ y=\dfrac{x-1}{(x+2)^2} & y=\dfrac{x^2-3}{1-x^2} & y=x^3-x^2 \\ y=\ln(1-x^2) & y=\dfrac{x^2-2}{x^2+1} & y=\dfrac{x+5}{x^2-9} \\ y=e^{x^2} & y=(x^2-x-1)\cdot e^x & y=\dfrac{x^3-1}{(x+2)^2} \end{array}$$

### 5.2.6 Problemas Teorema Valor medio

**Exercise 5.2.4** *Dada la parábola* $y=x^2-4x+5$. *Determina la ecuación de la recta secante a la gráfica de la función en los puntos de abcisas* $x=3$ *y* $x=5$. *Razónese que existe un punto de la gráfica en el que su recta tangente es paralela* *a la recta secante a dicha gráfica en los puntos $P(3, f(3)$ y $Q(5, f(5))$. Después calcúlalo*

*Solución*

Como la función $f(x) = x^2-4x+7$ verifica las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 4]$. Entonces, por el teorema del valor medio podemos afirmar que existe al menos un $c \in ]2, 4[$ tal que:

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = f\,'(c)$$

Como $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 7 = 3$; $f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 7 = 7$ y $f\,'(c) = 2c - 4$; entonces

$$\frac{7 - 3}{4 - 2} = 2c - 4 \to c = 3$$

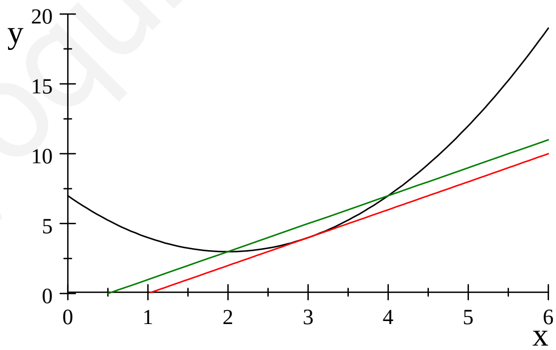
En el punto $H(3, 4)$ de la parábola su recta tangente ,$t$,es paralela a la recta ,$r$, secante a la gráfica en $P(2, 3)$ y $Q(4, 7))$

Vamos ahora a determinar la recta $r$ y la recta $t$

$1^o$ Determinamos los puntos de la recta $r$ secante a la parábola en los puntos $P(2, f(2))$ y $Q(4, f(4))$

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,3) \\ Q(4,7) \end{array} \right. \to r \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(2,3) \\ m_r = \dfrac{7-3}{4-2} = 2 \end{array} \right. \to r \equiv y - 3 = 2(x-2)$$

$$2^o\ t \equiv \left\{ \begin{array}{l} H(3,4) \\ m_t = m_r = 2 \end{array} \right\} \to t \equiv y - 4 = 2(x-3)$$




$y = x^2 - 4x + 7 \quad y = 2x - 2 \quad y = 2x - 1$

**Exercise 5.2.5** *Sea $f(x) = \ln x$. Si consideramos los puntos de la gráfica $P(1, 0), Q(e^2, 2)$. Razónese que existe un punto de la gráfica en el que su recta tangente es paralela a la recta secante a dicha gráfica en los puntos $P$ y $Q$.Después calcúlalo*

$D(f) = ]0, +\infty[ \to f$ es continua en $]0, +\infty[$.En particular , lo será en$[1, e^2]$

$f\,'(x) = \dfrac{1}{x} \to D(f\,') = ]0, +\infty[$ entonces $f$ es derivable en $]0, +\infty[$. En particular lo será en $]1, e^2[$

Esta función verifica las hipótesis del T.V.M en $[1, e^2]$. Por lo tanto; podemos afirmar que existe al menos un $c \in ]1, e^2[$ tal que

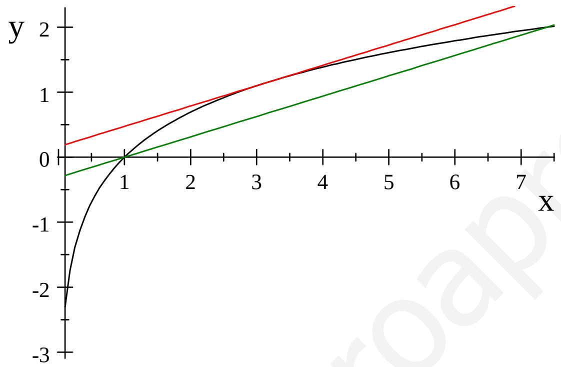
$$\frac{\ln e^2 - \ln 1}{e^2 - 1} = f'(c) = \frac{1}{c}$$

En el punto $H(c, \ln c)$ su recta tangente es paralela a la recta secante a la gráfica en $P(1,0)$ y $Q(e^2, 2)$)

Calculémoslo

$$\frac{\ln e^2 - \ln 1}{e^2 - 1} = \frac{2}{e^2 - 1} = \frac{1}{c} \to c = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

Solución $H(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}, \ln\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right)) \simeq H(\ 3.1945, 1.1614)$




**Exercise 5.2.6** *Para las funciones e intervalos que se indican, razónese si se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio, y en caso afirmativo aplíquese*

*a)* $f(x) = x^2 + 5x - 2$ *en* $[-1, 3]$

*b)* $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ *en* $[-1, 2]$

*c)* $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ *en* $[-1, 0]$

*d)* $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ *en* $[-1, 0]$

*e)* $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$ *en* $[-1, 0]$

*f)* $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$ *en* $[0, 3]$

### Aplicación del T.V.M al cálculo de valores aproximados

Si una función $f$ es continua en $[a, b]$ , derivable en $]a, b[$. Entonces por el Teorema del valor medio podemos garantizar que $\exists c \in ]a, b[ \ / \ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f\ '(c)$

Como $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f\ '(c)$ con $c \in ]a, b[$ entonces

$$f(b) - f(a) = f\ '(c) \cdot (b - a) \to f(b) = f(a) + f\ '(c) \cdot (b - a) \ \text{ con } c \in ]a, b[$$

Si elegimos un valor cómodo para $c$ podremos aproximar $f(b)$ y además acotar el error cometido

Casos

I) Si consideramos $f(b) \simeq f(a)$ entonces el error cometido es

$$E = |f(b) - f(a)| = |f\ '(c) \cdot (b-a)| = |f\ '(c)| \cdot |(b-a)|$$

Si además $f\ '$ está acotada en $]a,b[$ entonces $\exists M\ ' \in \Re\ /\ |f'(x)| \leq M\ '$ $\forall x \in ]a,b[$. Por lo que el error cometido será:

$$E \leq M\ ' \,|(b-a)|$$

II) Si consideramos que $f(b) \simeq f(a) + f\ '(a) \cdot (b-a)$ (Que $c = a$). Entonces el error cometido

$$E = |f(b) - f(a) - f'(a) \cdot (b-a)| = |f\ '(c) \cdot (b-a) - f'(a) \cdot (b-a)|$$

sacando factor común $b-a$

$$E = |f\ '(c) - f'(a)| \cdot |b-a|$$

Si además $f\ '$ es continua en $[a,b]$,y derivable en $]a,b[$; entonces aplicando el T.V.M a la función $f\ '$ en $[a,c]$; tendremos que

$$\exists h \in ]a,c[\ /\ f\ '(c) - f\ '(a) = f\ ''(h)(c-a)$$

Con lo que:

$$E = |f'(c) - f\ '(a)| \cdot |b-a| = |f\ ''(h)|\,|b-a|\,|c-a| < |f\ ''(h)|\,|b-a|^2$$

Por ultimo, si $f\ ''$ está acotada en $]a,b[$ entonces $\exists M'' \in \Re\ /\ |f\ ''(x)| \leq M''$ $\forall x \in ]a,b[$. Por lo que el error cometido será:

$$E = |f''(h)|\,|b-a|^2 \leq M''\,(b-a)^2$$

III) Si consideramos que $f(b) \simeq f(a) + f\ '(b) \cdot (b-a)$ (Que $c = b$). Entonces el error cometido

$$E = |f(b) - f(a) - f'(b) \cdot (b-a)| = |f\ '(c) \cdot (b-a) - f'(b) \cdot (b-a)|$$

sacando factor común $b-a$

$$E = |f\ '(c) - f'(b)| \cdot |b-a|$$

Si además $f\ '$ es continua en $[a,b]$,y derivable en $]a,b[$; entonces aplicando el T.V.M a la función $f\ '$ en $[c,b]$; tendremos que

$$\exists h \in ]c,b[\ /\ f\ '(b) - f\ '(c) = f\ ''(h)(b-c)$$

Con lo que:

$$E = |f\ '(c) - f\ '(b)| \cdot |b-a| = |f\ ''(h)|\,|b-a|\,|b-c| < |f\ ''(h)|\,|b-a|^2$$

Por ultimo, si $f\ ''$ está acotada en $]a,b[$ entonces $\exists M\ '' \in \Re\ /\ |f\ ''(x)| \leq M\ ''$ $\forall x \in ]a,b[$.Por lo que el error cometido será:

$$E = |f''(h)|\,|b-a|^2 \leq M\ ''\,(b-a)^2$$

**Exercise 5.2.7** *Aproximar $\sqrt{200}$ mediante el teorema del valor medio y después acotar el error cometido*

Consideramos la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo $[196,200]$ (Observa que $\sqrt{196}=14$)

Esta función verifica en dicho intervalo , las hipótesis del T.V.M . Por lo tanto podemos afirmar que existe al menos un $c\in]196,200[$ tal que:

$$\begin{aligned}\sqrt{200}-\sqrt{196} &= f'(c).(200-196)=\frac{4}{2\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}}\\ \sqrt{200} &= \sqrt{196}+\frac{2}{\sqrt{c}}=14+\frac{2}{\sqrt{c}}\end{aligned}$$

Si consideramos ahora que $c=196$ entonces

$$\sqrt{200}\simeq 14+\frac{2}{\sqrt{196}}=14+\frac{1}{7}\simeq 14.\,14285\,71$$

Recuerda que con esta elección el error cometido es

$E\leq M''(200-196)^2$ donde $M''$ es una cota superior de $|f''|$ en $[196,200]$

En nuestro caso $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$y $f''(x)=-\dfrac{1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$. Determinemos pues una cota superior de $|f''(x)|=\dfrac{1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$ en $]196,200[$

Como $x\in]196,200[\rightarrow 196<x<200$

$\sqrt{196}<\sqrt{x}<\sqrt{200}\rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{200}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{14}$

Elevando al cubo todos los miembros de esta desigualdad

$\dfrac{1}{\sqrt{200^3}}<\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}<\dfrac{1}{14^3}$

Dividiendo todo por 4

$\dfrac{1}{4\sqrt{200^3}}<\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}<\dfrac{1}{4\cdot 14^3}$

Como $|f''(x)|=\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}<\dfrac{1}{4\cdot 14^3}\ \forall x\in]196,200[$

entonces el error cometido $E<\dfrac{16}{4\cdot 14^3}=0.001\,45772\,595$

$\sqrt{200}\simeq 14.\,14285\,71$ con un error menor que $0.001\,45772\,595$

*Nota:* Si lo que deseamos es acotar $\sqrt{200}$ entre dos valores próximos a él procederemos de la siguiente manera:

Consideramos la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo $[196,200]$ (Observa que $\sqrt{196}=14$)

Esta función verifica en dicho intervalo , las hipótesis del T.V.M . Por lo tanto podemos afirmar que existe al menos un $c\in]196,200[$ tal que:

$$\begin{aligned}\sqrt{200}-\sqrt{196} &= f'(c).(200-196)=\frac{4}{2\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}}\\ \sqrt{200} &= \sqrt{196}+\frac{2}{\sqrt{c}}=14+\frac{2}{\sqrt{c}}\end{aligned}$$

Como $c\in]196,200[\rightarrow 196<c<200$

$14 = \sqrt{196} < \sqrt{c} < \sqrt{200} < \sqrt{225} = 15$
De donde : $\dfrac{1}{15} < \dfrac{1}{\sqrt{200}} < \dfrac{1}{\sqrt{c}} < \dfrac{1}{14}$

$$\frac{2}{15} < \frac{2}{\sqrt{x}} < \frac{2}{14}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} 14 + \frac{2}{15} &< \sqrt{200} < 14 + \frac{2}{14} \\ 14.\,13333\,33 &< \sqrt{200} < 14.\,14285\,71 \end{aligned}$$

**Exercise 5.2.8** *Aproximar* $4,0001^2$ *mediante el teorema del valor medio y después acotar el error cometido*

Consideramos la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[4, 4, 001]$
Esta función verifica en dicho intervalo , las hipótesis del T.V.M . Por lo tanto podemos afirmar que existe al menos un $c \in ]4, 4.001[$ tal que:

$$\begin{aligned} 40001^2 - 4^2 &= f\,'(c).(4.001 - 4) = 0.001 \cdot 2c = 0.002c \\ 4.0001^2 &= 16 + 0.002 \cdot c \end{aligned}$$

Si consideramos ahora que $c = 4$ entonces

$$4.0001^2 \simeq 16 + 0.008 = 16.0008$$

Recuerda que con esta elección el error cometido es

$E \leq M''(4.001 - 4)^2$ donde $M''$ es una cota superior de $|f\,''|$ en $[4, 4.001]$

En nuestro caso $f\,'(x) = 2x$y $f\,''(x) = 2.$ es obvio que $|f''(x)| = 2\ \forall x \in ]4, 4.001[$; por lo que el error cometido $E \leq 2 \cdot (4.001 - 4)^2 = 0.000002$

### Desigualdades aplicando T.V.M

**Exercise 5.2.9** *Demostrad que para todo* $x \in \Re^+$ *se verifica que:*
$\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$

Si consideramos la función $f(x) = \arctan x$ en $[0, x]$ con $x > 0$, esta función verifica las hipótesis del T.V.M en dicho intervalo
Por lo tanto, $\exists c \in ]0, x[\ /\ \dfrac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = f\,'(c) = \dfrac{1}{1+c^2}$
Esto es

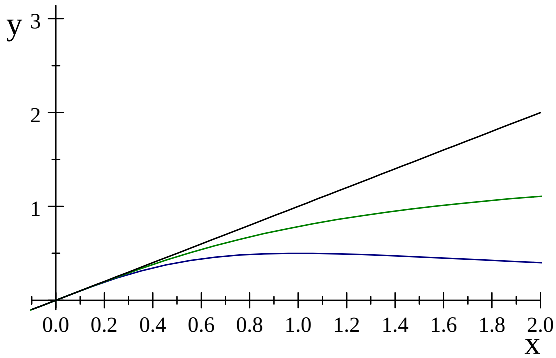
$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2} \text{ siendo } 0 < c < x$$

Como $0 < c < x \to 1 < 1 + c^2 < 1 + x^2$
Se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &< \frac{1}{1+c^2} < 1 \\ \frac{1}{1+x^2} &< \frac{\arctan x}{x} < 1 \end{aligned}$$

Si multiplicamos todos los términos de esta desigualdad por $x$ (positivo); entonces la nueva desigualdad no cambiará de sentido; con lo que:

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$$




**Exercise 5.2.10** *Demostrad que para todo $x \in \Re^-$ se verifica que:* $x < \arctan x < \dfrac{x}{1+x^2}$

Si consideramos la función $f(x) = \arctan x$ en $[x, 0]$ con $x < 0$, esta función verifica las hipótesis del T.V.M en dicho intervalo

Por lo tanto, $\exists c \in ]x, 0[\ /\ \dfrac{\arctan 0 - \arctan x}{0 - x} = f\,'(c) = \dfrac{1}{1+c^2}$

Esto es

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2} \text{ siendo } x < c < 0$$

Como $x < c < 0 \to 0 < c^2 < x^2$

Y también se verificará que:

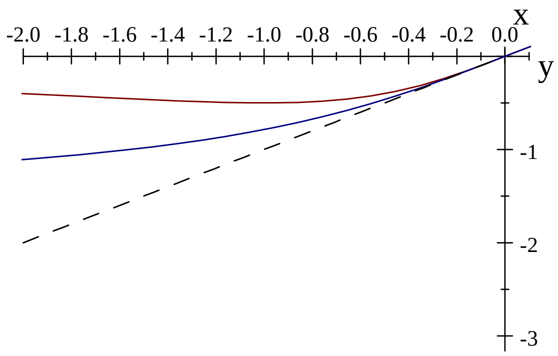
$$1 < 1 + c^2 < 1 + x^2$$

Se obtiene que:

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$
$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan x}{x} < 1$$

Si multiplicamos todos los términos de esta desigualdad por $x$ (negativo); entonces la nueva desigualdad cambiará de sentido; con lo que:

$$x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}$$




**Exercise 5.2.11** *Demostrad que* $\frac{1}{\cos^2\alpha} < \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta-\alpha} < \frac{1}{\cos^2\beta}$ *siendo* $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$

La función $y = \tan x$ en $[\alpha, \beta]$ verifica las hipótesis del T.V.M. por ser $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto; podemos afirmar que existirá al menos un $c \in ]\alpha, \beta[$ de manera que:

$$\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta-\alpha} = f\,'(c) = \sec^2 c = \frac{1}{\cos^2 c}$$

Como $0 < \alpha < c < \beta < \frac{\pi}{2}$ entonces

$$\cos\beta < \cos c < \cos\alpha \text{ ya que } y = \cos x \text{ es est. decrec.en } [0, \frac{\pi}{2}]$$

De donde:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2\beta}$$

Así pues:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} < \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta-\alpha} < \frac{1}{\cos^2\beta}$$

**Exercise 5.2.12** *Demostrad que* $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x \ \forall x \in ]-1, +\infty[ \sim \{0\}$

$1^o$) En primer lugar vamos a comprobar que es cierta si $x > 0$

La función $y = \ln(1+x)$ es continua y derivable[7] en $[0, x]$ con $x > 0$.

Por lo tanto; en virtud del teorema del valor medio podemos afirmar que $\exists c \in ]0, x[$ de manera que:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0} &= f'(c) = \frac{1}{1+c} \\ \frac{\ln(1+x)}{x} &= \frac{1}{1+c} \end{aligned}$$

[7] $D(f) = ]-1, +\infty[$
$f\,'(x) = \frac{1}{1+x}$ y $D(f\,') = ]-1, +\infty[$

Como $0 < c < x \to 1 < 1 + c < 1 + x$
de donde:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$$

Con lo que:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

Si multiplicamos todos los términos de esta desigualdad por $x$ (positivo); entonces la nueva desigualdad no cambiará de sentido; con lo que:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

$2^o$) En segundo lugar vamos a comprobar que es cierta si $-1 < x < 0$

La función $y = \ln(1 + x)$ es continua y derivable[8] en $[x, 0]$ con $-1 < x < 0$.
Por lo tanto; en virtud del teorema del valor medio podemos afirmar que $\exists c \in ]x, 0[$ de manera que:

$$\begin{aligned} \frac{\ln 1 - \ln(1+x)}{0-x} &= f'(c) = \frac{1}{1+c} \\ \frac{\ln(1+x)}{x} &= \frac{1}{1+c} \end{aligned}$$

Como $-1 < x < c < 0 <\to 0 < 1 + x < 1 + c < 1$
de donde:

$$1 < \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+x}$$

Con lo que:

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}$$

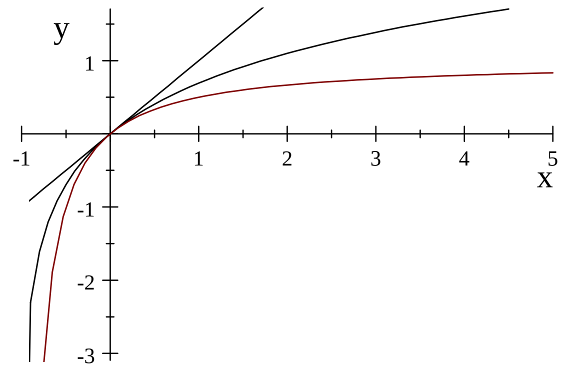
Si multiplicamos todos los términos de esta desigualdad por $x$ (negativo); entonces la nueva desigualdad cambiará de sentido; con lo que:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

*Conclusión:*

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x \ \forall x \in ]-1, +\infty[ \sim \{0\}$$

[8] $D(f) = ]-1, +\infty[$
$f\,'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ y $D(f\,') = ]-1, +\infty[$




**Exercise 5.2.13** *Sea $f$ una función definida en $\Re$ tal que el punto $O(0,0)$ es de su gráfica. Si $f$ es derivable en $\Re$ y además $|f\ '(x)| < 1$.*

*Comprobad que* $\begin{cases} a) -x < f(x) < x \ \forall x \in \Re^+ \\ \qquad y \\ b) \ x < f(x) < -x \ \forall x \in \Re^- \end{cases}$

Como esta función es derivable en $\Re \rightarrow$ es continua en $\Re$

*a)* $f$ verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[0,x]$ con $x > 0 \rightarrow$ $\exists c \in ]0,x[$ de manera que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= f'(c) \\ \frac{f(x)}{x} &= f'(c) \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto a ambos lados de la igualdad

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} = |f'(c)|$$

Al ser $x > 0$; $|x| = x$. Como además por hipótesis $|f\ '(x)| < 1$ entonces en particular $|f\ '(c)| < 1$

Con lo que:

$$\frac{|f(x)|}{x} < 1$$

Si multiplicamos todos los términos de esta desigualdad por $x$ (positivo); entonces la nueva desigualdad no cambiará de sentido

$$\begin{aligned} |f(x)| &< x \\ &\Updownarrow \\ -x &< f(x) < x \end{aligned}$$

*b)* $f$ verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[x,0]$ con $x < 0 \rightarrow$ $\exists c \in ]x,0[$ de manera que:

$$\begin{aligned} \frac{f(0)-f(x)}{0-x} &= f'(c) \\ \frac{f(x)}{x} &= f'(c) \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto a ambos lados de la igualdad

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} = |f'(c)|$$

Al ser $x < 0$; $|x| = -x$. Como además por hipótesis $|f\ '(x)| < 1$ entonces en particular $|f\ '(c)| < 1$

Con lo que:

$$\frac{|f(x)|}{-x} < 1$$

Si multiplicamos todos los términos de esta desigualdad por $-x$ (positivo); entonces la nueva desigualdad no cambiará de sentido

$$\begin{array}{ccc} |f(x)| & < & -x \\ & \Updownarrow & \\ x & < & f(x) < -x \end{array}$$

**Exercise 5.2.14** *Demostrad que* $1 + \dfrac{x_1}{2\sqrt{1+x_1}} < \sqrt{1+x_1} < 1 + \dfrac{x_1}{2}$ *si* $x_1 > 0$

La función $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $[0, x_1]$ verifica las hipótesis del T.V.M; ya que $D(f) = [-1, +\infty[, f\ '(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ y $D(f\ ') = ]-1, +\infty[$

Por lo tanto, $\exists c \in ]0, x_1[$ tal que $\dfrac{\sqrt{1+x_1}-1}{x_1 - 0} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}$

Como $0 < c < x_1 \rightarrow 1 < 1 + c < 1 + x_1$

de donde:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x_1}} < \frac{1}{2\sqrt{1+c}} < 1$$

Con lo que:

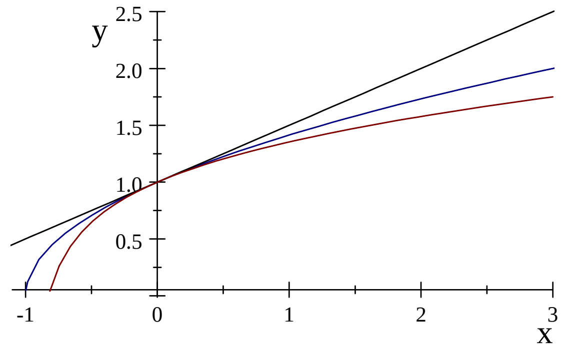
$$\frac{1}{2\sqrt{1+x_1}} < \frac{\sqrt{1+x_1}-1}{x_1} < \frac{1}{2}$$

Si multiplicamos todos los términos de esta desigualdad por $x_1$ (positivo); entonces la nueva desigualdad no cambiará de sentido; con lo que:

$$\frac{x_1}{2\sqrt{1+x_1}} < \sqrt{1+x_1} - 1 < \frac{x_1}{2}$$

Sumando 1 a todos los miembros de esta desigualdad; ésta no cambia:

$$1 + \frac{x_1}{2\sqrt{1+x_1}} < \sqrt{1+x_1} < 1 + \frac{x_1}{2}$$




Nota: Como ejercicio podíais demostrar que se verifica la misma desigualdad si $-1 < x_1 < 0$

Es decir que

$$\boxed{1 + \frac{x_1}{2\sqrt{1+x_1}} < \sqrt{1+x_1} < 1 + \frac{x_1}{2} \text{ si } -1 < x_1 < 0}$$

**Exercise 5.2.15** *Demostrad que* $x < \tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x}$ *si* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

La función $f(x) = \tan x$ en $[0, x]$ con $x > 0$ verifica las hipótesis del TVM al ser $x < \dfrac{\pi}{2}$; ya que es continua en $[0, x]$ y derivable en $]0, x[$

Por lo tanto; $\exists c \in ]0, x[$ tal que $\dfrac{\tan x}{x} = \sec^2 c = \dfrac{1}{\cos^2 c}$

Como $0 < c < x < \dfrac{\pi}{2}$ entonces

$$\cos x < \cos c < \cos 0 = 1; \text{ ya que } y = \cos x \text{ es est. decrec.en } [0, \frac{\pi}{2}]$$

De donde:

$$1 < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 x}$$

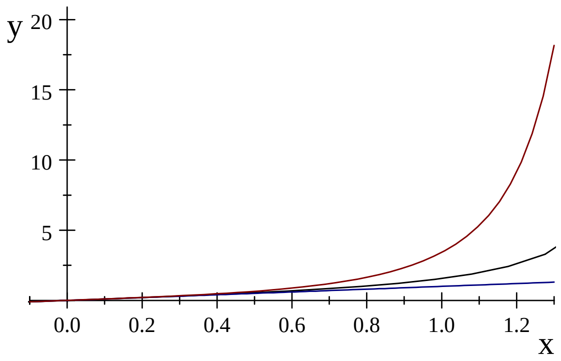
Con lo que

$$1 < \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x}$$

Si multiplicamos todos los términos de esta desigualdad por $x$ (positivo); entonces la nueva desigualdad no cambiará de sentido; con lo que:

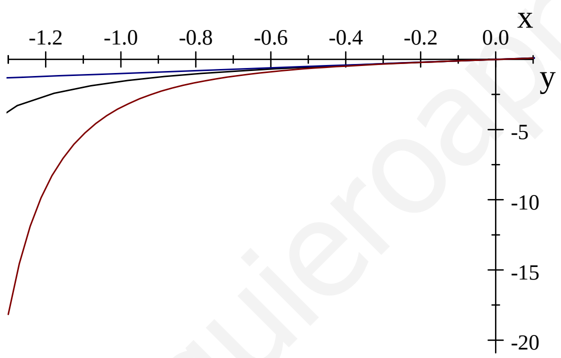
$$x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x}$$

Mira sus gráficas




**Exercise 5.2.16** *Demostrad que* $\dfrac{x}{\cos^2 x} < \tan x < x$ *si* $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$

Resuélvelo tú. Aquí tienes sus gráficas




**Exercise 5.2.17** *Demostrad que* $x < \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *si* $0 < x < 1$

La función $f(x) = \arcsin x$ tiene por dominio $D(f) = [-1, 1]$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to D(f') = ]-1, 1[$

Como $f$ es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $]-1, 1[$ ;entonces verifica las hipótesis del TVM en $[0, x]$ con $0 < x < 1$

Por lo tanto; $\exists c \in ]0, x[$ tal que $\dfrac{\arcsin x}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}$

Como $0 < c < x < 1 \to 0 < c^2 < x^2 < 1$

de donde:

$$-1 < -x^2 < -c^2 < 0 \to 0 < 1 - x^2 < 1 - c^2 < 1$$

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

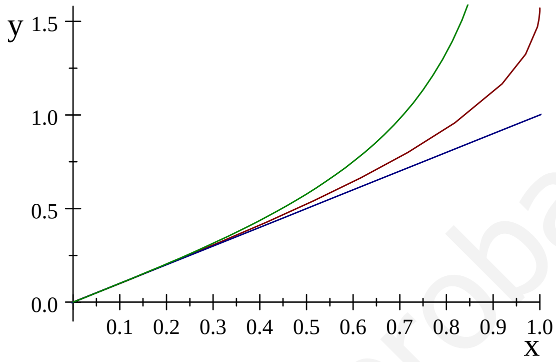
Con lo que:

$$1 < \frac{\arcsin x}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si multiplicamos todos los términos de esta desigualdad por $x$ (positivo); entonces la nueva desigualdad no cambiará de sentido:

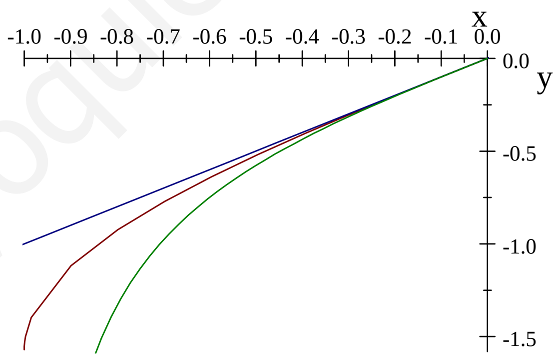
$$x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

A continuación tienes las gráficas




**Exercise 5.2.18** *Demostrad que* $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < \arcsin x < x$ *si* $-1 < x < 0$

Demuéstralo como ejercicio
Mira las gráficas




**Límites utilizando T.V.M**

**Exercise 5.2.19** *Demuestra que* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Vamos a demostrar que $\lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
Para ello; consideramos la función $f(x) = e^x$ en $[0, x]$ con $x > 0$
Esta función verifica las hipóteis del TVM en $[0, x]$; por lo que

$$\exists c \in ]0, x[ \ / \ \frac{e^x - 1}{x} = f\,'(c) = e^c$$

Observa que como $0 < c < x$ afirmar que $x \to 0^+$ es equivalente a afirmar que $c \to 0^+$; por lo que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{c\to 0+} e^c = 1$$

Demuestra tú que $\lim_{x\to 0-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (Considera la función anterior pero en el intervalo $[x, 0]$ con $x < 0$)

**Exercise 5.2.20** *Demuestra que* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Vamos a demostrar que $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$
Para ello; consideramos la función $f(x) = \sin x$ en $[0, x]$ con $x > 0$
Esta función verifica las hipóteis del TVM en $[0, x]$; por lo que

$$\exists c \in ]0, x[\ /\ \frac{\sin x}{x} = f\ '(c) = \cos c$$

Observa que como $0 < c < x$ afirmar que $x \to 0^+$ es equivalente a afirmar que $c \to 0^+$; por lo que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{c\to 0+} \cos c = 1$$

Demuestra tú que $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$ (Considera la función anterior pero en el intervalo $[x, 0]$ con $x < 0$)

**Exercise 5.2.21** *Demuestra que* $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Vamos a demostrar que $\lim_{x\to 0+} \frac{\tan x}{x} = 1$
Para ello; consideramos la función $f(x) = \tan x$ en $[0, x]$ con $0 < x < \frac{\pi}{2}$
Esta función verifica las hipóteis del TVM en $[0, x]$; por lo que

$$\exists c \in ]0, x[\ /\ \frac{\tan x}{x} = f\ '(c) = \sec^2 c$$

Observa que como $0 < c < x$ afirmar que $x \to 0^+$ es equivalente a afirmar que $c \to 0^+$; por lo que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan x}{x} = \lim_{c\to 0+} \sec^2 c = 1$$

Demuestra tú que $\lim_{x\to 0-} \frac{\tan x}{x} = 1$ (Considera la función anterior pero en el intervalo $[x, 0]$ con -$\frac{\pi}{2} < x < 0$)

**Exercise 5.2.22** *Demuestra que* $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

Vamos a demostrar que $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$
Para ello; consideramos la función $f(x) = \arctan x$ en $[0, x]$ con $x > 0$
Esta función verifica las hipóteis del TVM en $[0, x]$; por lo que

$$\exists c \in ]0, x[ \ / \ \frac{\arctan x}{x} = f\,'(c) = \frac{1}{1+c^2}$$

Observa que como $0 < c < x$; afirmar que $x \to 0^+$ es equivlente a afirmar que $c \to 0^+$; por lo que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{c\to 0+} \frac{1}{1+c^2} = 1$$

Demuestra tú que $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$ (Considera la función anterior pero en el intervalo $[x, 0]$ con $x < 0$)

**Exercise 5.2.23** *Justificar que* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$

Consideramos la función $y = \sqrt{x}$ en $[n, n+1]$ siendo $n$ cualquier número natural

Como se verifican las hipótesis del TVM en $[n, n+1]$; entonces podemos afirmar que:

$$\begin{array}{ccl} \exists c & \in & ]n, n+1[ \ / \ \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = f\,'(c) = \dfrac{1}{2\sqrt{c}} \\ & \Updownarrow & \\ \exists c & \in & ]n, n+1[ \ / \ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}} \end{array}$$

Como $c \in ]n, n+1[ \to n < c < n+1$
De donde

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

O sea que:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Tomando límites cuando n tiende a infinito

$$\mathop{lim}_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \mathop{lim}_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \mathop{lim}_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Como $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} = \mathop{lim}\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = 0$ ;entonces por el criterio del emparedado; tendremos

$$\mathop{lim}_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$$

## 5.3 T.V.M e INFINITESIMOS EQUIVALENTES.

**Exercise 5.3.1** *a) Demuestra que* $\forall x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ *se verifica que:*

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

*b) Demuestra que* $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ *se verifica que:*

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

*c) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
*d) ¿Las funciones* $f(x) = \sin x$ *y* $g(x) = x$ *son infinitésimos equivalentes en* $x = 0$*?*
*e) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $y = \sin x$ *en* $x = 0$ *es la recta* $y = x$
*f) Calcula el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(3x+\pi)\sin 3x}{x}$$

Solución:

a) Considero la función $f(x) = \sin x$.

Como esta función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}$ ( $f\,'(x) = \cos x$). Entonces; esta función verifica las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, x]$ con $x < \dfrac{\pi}{2}$

Por lo tanto; podemos garantizar que:

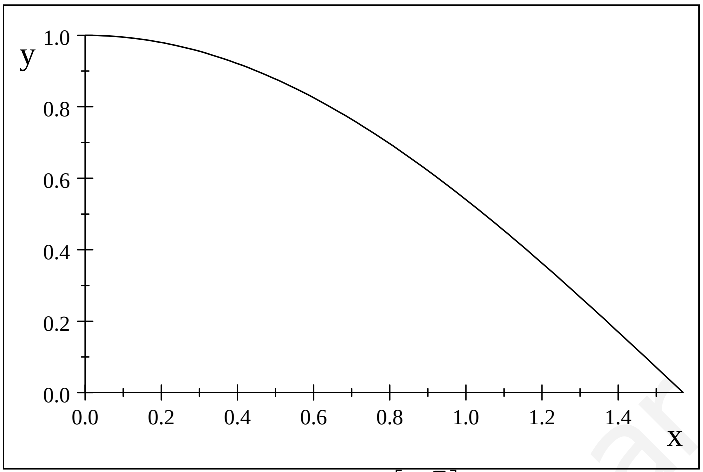
$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{f(x) - f(0)}{x} = f\,'(c)$$

Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{\sin x}{x} = \cos c$$

Vamos a acotar $\cos c$ sabiendo que $0 < c < x < \dfrac{\pi}{2}$

Como la función $y = \cos x$ es estrictamente decreciente en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (Mira su gráfica en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$)




$y = \cos x$ en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

entonces; podemos afirmar que:

$$\text{Si } 0 < c < x < \frac{\pi}{2} \to 0 = \cos\frac{\pi}{2} < \boxed{\cos x < \cos c < \cos 0 = 1}$$

Así pues

$$\text{Para cualquier } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ se verifica } \cos x < \cos c < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{Para cualquier } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ se verifica } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

b) Considero la función $f(x) = \sin x$.

Como esta función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}$ ( $f'(x) = \cos x$). Entonces; esta función verifica las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[x, 0]$ con $-\dfrac{\pi}{2} < x$

Por lo tanto; podemos garantizar que:

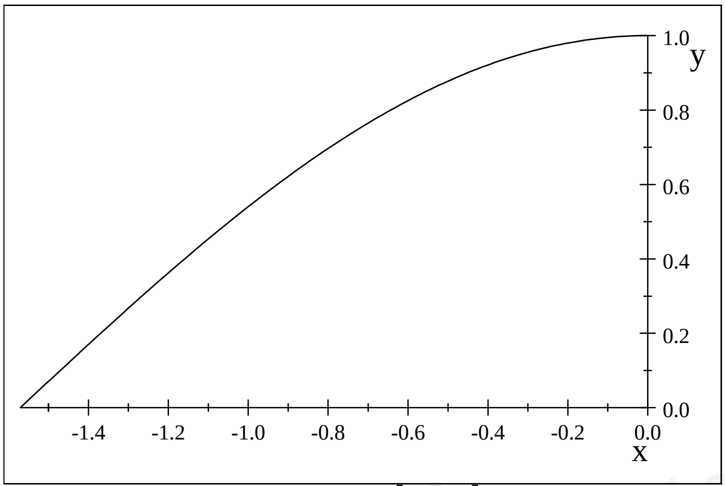
$$\text{existe al menos un } c \in (x, 0) \text{ tal que } \frac{f(0) - f(x)}{-x} = f'(c)$$

Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (x, 0) \text{ tal que } \frac{\sin x}{x} = \cos c$$

Vamos a acotar $\cos c$ sabiendo que $-\dfrac{\pi}{2} < x < c < 0$

Como la función y=$\cos x$ es estrictamente creciente en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ (Mira su gráfica en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$)




$y = \cos x$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

entonces; podemos afirmar que:

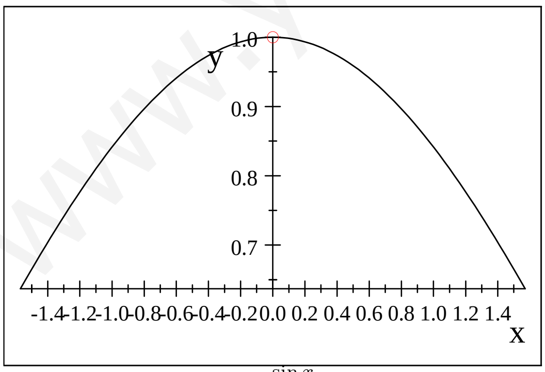
$$\text{Si } -\frac{\pi}{2} < \boxed{x < c < 0} \to \cos\frac{\pi}{2} < \boxed{\cos x < \cos c < \cos 0} = 1$$

Así pues

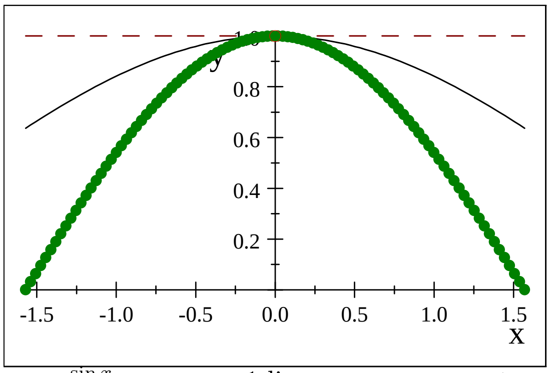
$$\text{Para cualquier } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \text{ se verifica } \cos x < \cos c < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{Para cualquier } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \text{ se verifica } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

**Conclusión** Si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \{0\}$ **se verifica que** $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Nota: Aquí tienes las gráficas de las funciones $y = \frac{\sin x}{x}$ , $y = 1$ , $y = \cos x$ .Fíjate que la función $y = \frac{\sin x}{x}$ no está definida en $x = 0$




$y = \frac{\sin x}{x}$



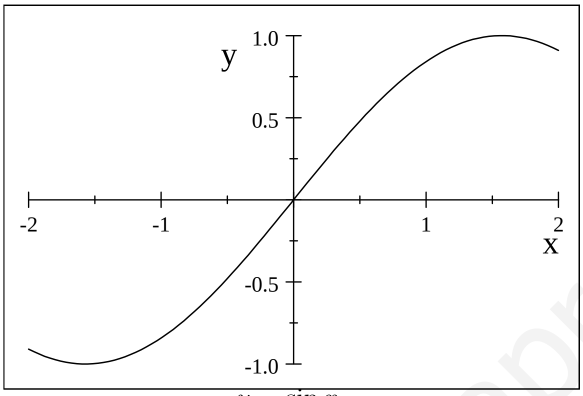

$y = \frac{\sin x}{x}$ curva $y = 1$ lineas $y = \cos x$ puntos

$$\text{c) Como} \left[\begin{array}{l} \text{Si } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \{0\} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \end{array}\right] \to \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

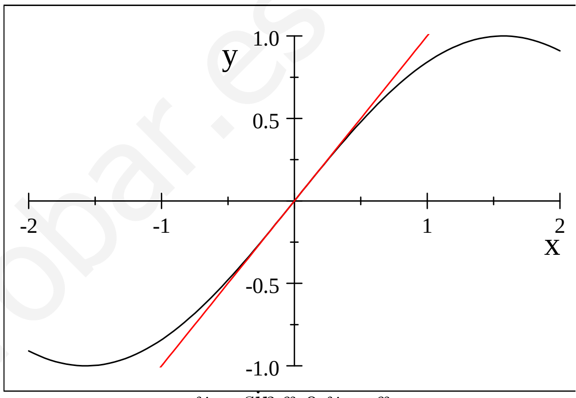
d) Las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = x$ son infinitésimos equivalentes en $x = 0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

e) La ecuación de la recta tangente, $t$, a la función $f(x) = \sin x$ en $x = 0$ es la recta que pasa por el punto $P(0, \sin 0)$ y cuya pendiente $m_t = f\,'(0) = \cos 0 = 1$

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(0,0) \\ m_t = f'(0) = \cos 0 = 1 \end{array} \right. \to y = x$$



$y = \sin x$



$y = \sin x$ e $y = x$

f) Vamos ahora a calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(3x+\pi)\sin 3x}{x}$$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$

Como la función $f(x) = \sin 3x$ es un infinitésimo equivalente en $x = 0$ a la función $h(x) = 3x$; entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(3x+\pi)\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot 3x\cos(3x+\pi)}{x} = \lim_{x\to 0} 6\cos(3x+\pi) = 6\cos\pi = -6$$

**Exercise 5.3.2** *a) Demuestra que* $\forall x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$1 < \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x}$$

*Sugerencia: Aplica primero el Terema del valor medio a la función* $y = \tan x$ *en* $[0, x]$ *con* $x < \frac{\pi}{4}$ *y después lo aplicas en* $[x, 0]$ *con* $-\frac{\pi}{4} < x$
*b) Calcula el* $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$
*c) ¿Las funciones* $f(x) = \tan x$ *y* $g(x) = x$ *son infinitésimos equivalentes en* $x = 0$*?*
*d) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $y = \tan x$ *en* $x = 0$ *es la recta* $y = x$
*e) Calcula el siguiente límite:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(3x - \pi)\tan^2 5x}{9x^2}$$

Solución:

a) Considero la función $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Como su dominio de definición es:

$$D(f) = \mathbb{R} \sim \{x \in \mathbb{R} \ / \ \cos x = 0\} = \mathbb{R} \sim \left\{\frac{1}{2}\pi + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Podemos afirmar que es continua en $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Calculamos su derivada

$$f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

.Como $D(f\ ') = D(f) \rightarrow$La función es derivable en $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$1^o$ Aplicamos el Teorema del valor medio a la función $y = \tan x$ en $[0, x]$ con $x < \frac{\pi}{4}$

Según lo anterior, $f$ es continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$

Así pues; podemos garantizar que:

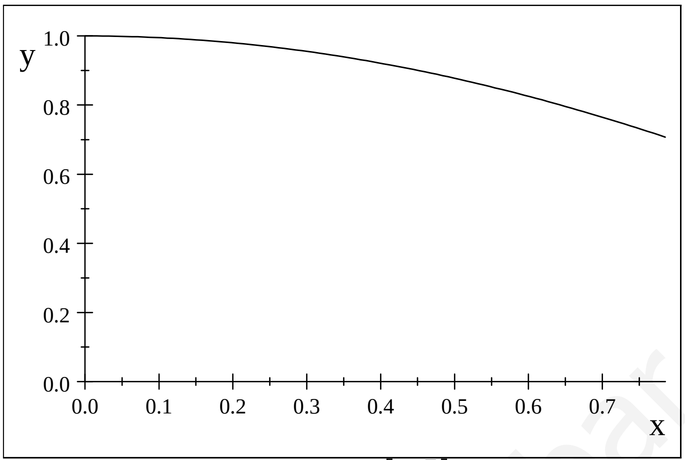
$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{f(x) - f(0)}{x} = f\ '(c)$$

Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

Vamos a acotar $\frac{1}{\cos^2 c}$ sabiendo que $0 < c < x < \frac{\pi}{4}$

Como la función $y = \cos x$ es estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (Mira su gráfica en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$)




$y = \cos x$ en $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

entonces; podemos afirmar que:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Si } 0 & < & c < x < \dfrac{\pi}{4} \to \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4} < \boxed{\cos x < \cos c < \cos 0 = 1} \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } \boxed{0 < c < x} & < & \dfrac{\pi}{4} \to \dfrac{1}{2} = \cos^2\dfrac{\pi}{4} < \boxed{\cos^2 x < \cos^2 c < \cos^2 0 = 1} \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } \boxed{0 < c < x} & < & \dfrac{\pi}{4} \to \boxed{1 = \frac{1}{\cos^2 0} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 x}} < \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}} = 2
\end{array}$$

Así pues

$$\begin{array}{lcl}
\text{Para cualquier } x & \in & \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \text{ se verifica } 1 < \dfrac{1}{\cos^2 c} < \dfrac{1}{\cos^2 x} \text{ si } \boxed{0 < c < x} \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Para cualquier } x & \in & \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \text{ se verifica } 1 < \dfrac{\tan x}{x} < \dfrac{1}{\cos^2 x} \text{ si } \boxed{0 < c < x}
\end{array}$$

$2^o$ Aplicamos el Teorema del valor medio a la función $y = \tan x$ en $[x, 0]$ con $-\dfrac{\pi}{4} < x$

Según el dominio de $f$ y de $f\,' \to$ $f$ es continua en $[x, 0]$ y derivable en $(x, 0)$

Así pues; podemos garantizar que:

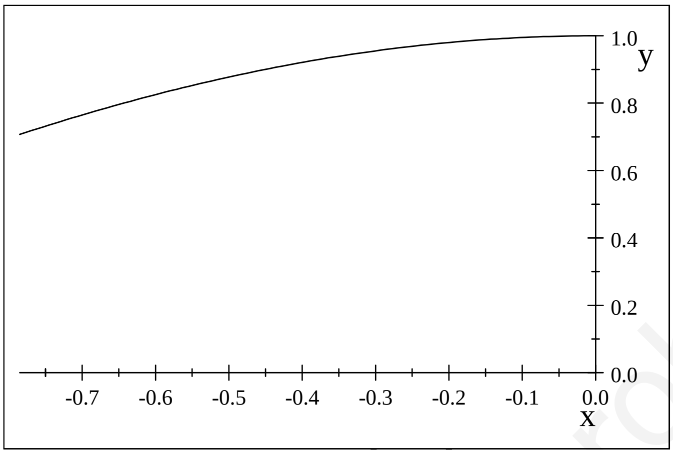
$$\text{existe al menos un } c \in (x, 0) \text{ tal que } \frac{f(0) - f(x)}{-x} = f\,'(c)$$

Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (x, 0) \text{ tal que } \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

Vamos a acotar $\frac{1}{\cos^2 c}$ sabiendo que $-\dfrac{\pi}{4} < x < c < 0$

Como la función $y = \cos x$ es estrictamente creciente en $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ (Mira su gráfica en $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$)




$y = \cos x$ en $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$

entonces; podemos afirmar que:

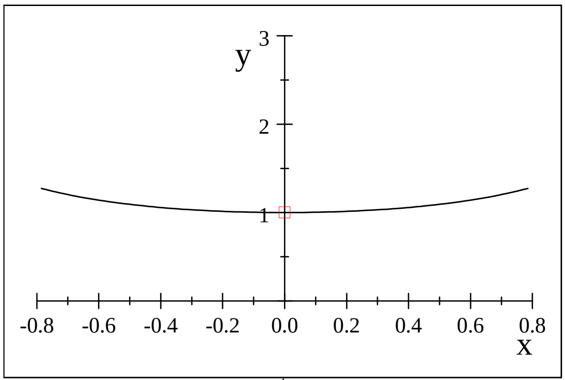
$$\begin{array}{lcl}
\text{Si } -\frac{\pi}{4} & < & x < c < 0 \to \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \boxed{\cos x < \cos c < \cos 0 = 1} \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } -\frac{\pi}{4} & < & \boxed{x < c < 0} \to \frac{1}{2} = \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \boxed{\cos^2 x < \cos^2 c < \cos^2 0 = 1} \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } -\frac{\pi}{4} & < & \boxed{x < c < 0} \to \boxed{1 = \frac{1}{\cos^2 0} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 x}} < \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2
\end{array}$$

Así pues

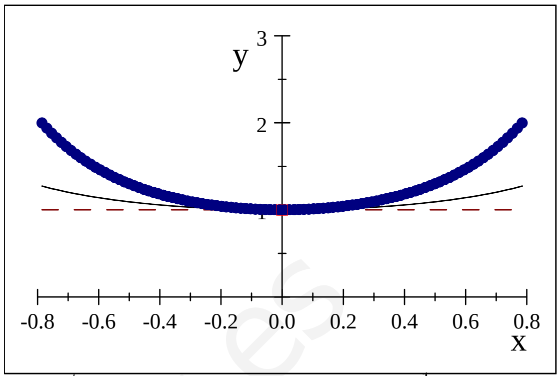
$$\begin{array}{lcl}
\text{Para cualquier } x & \in & \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{ se verifica } 1 < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 x} \text{ si } \boxed{x < c < 0} \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Para cualquier } x & \in & \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ se verifica } 1 < \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x} \text{ si } \boxed{x < c < 0}
\end{array}$$

**Conclusión** : Si $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \sim \{0\}$ **se verifica que** $1 < \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x}$

Nota: Aquí tienes las gráficas de las funciones $y = \frac{\tan x}{x}$ , $y = 1$ , $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ .Fíjate que la función $y = \frac{\tan x}{x}$ no está definida en $x = 0$




$y = \frac{\tan x}{x}$



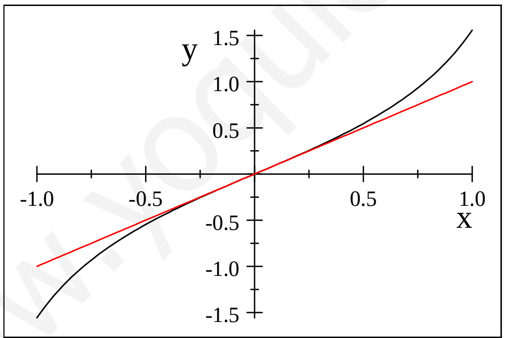

$y = \frac{\tan x}{x}$ curva $y = 1$ lineas $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ puntos

b) Como $\left[\begin{array}{l} \text{Si } x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \sim \{0\} \;\; 1 < \dfrac{\tan x}{x} < \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \end{array}\right] \to \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

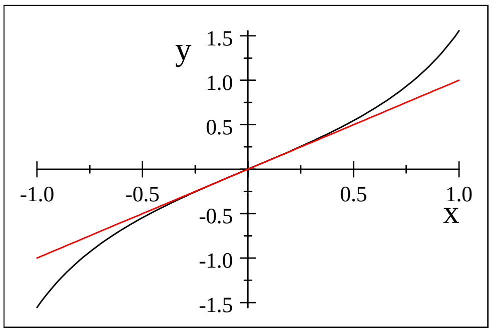
c) Las funciones $f(x) = \tan x$ y $g(x) = x$ son infinitésimos equivalentes en $x = 0$ ya que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

e) La ecuación de la recta tangente, $t$, a la función $f(x) = \tan x$ en $x = 0$ es la recta que pasa por el punto $P(0, \tan 0)$ y cuya pendiente $m_t = f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(0,0) \\ m_t = f'(0)1 \end{array} \right. \to y = x$$




$y = \tan x$




$y = \tan x$ e $y = x$

e) El $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\cos(3x-\pi)\tan^2 5x}{9x^2}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Como la función $t(x) = \tan 5x$ es un infinitésimo equivalente en $x = 0$ a la función $h(x) = 5x$; entonces; $\tan^2 5x$ es un infinitésimo equivalente a $(5x)^2 = 25x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(3x - \pi)\tan^2 5x}{9x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2{\cdot}25x^2 \cos(3x - \pi)}{9x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{50 \cos(3x - \pi)}{9} = \frac{50}{9} \cos(-\pi) = -\frac{50}{9}$$

**Exercise 5.3.3** *a) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^+ \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$$

*b) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^- \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1$$

*c) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$
*d) ¿Las funciones* $g(x) = e^x - 1y$ $h(x) = x$ *son infinitésimos equivalentes en* $x = 0$?
*e) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $g(x) = e^x - 1$ *en* $x = 0$ *es la función* $h(x) = x$
*f) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(e^{3x}-1\right)^2 \sin 5x}{4x^2}$

**Solución:**

Consideramos la función $f(x) = e^x$ que es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (Fíjate que $f\,'(x) = e^x$)

a) Esta función verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, x]$ con $x > 0$ (al ser continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$).

Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{f(x) - f(0)}{x} = f\,'(c)$$

Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{e^x - 1}{x} = e^c$$

Vamos ahora a acotar $e^c$ sabiendo que $0 < c < x$ Como la función $y = e^x$ es estrictamente creciente para todo número real; entonces:

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 &< c < x \to 1 = e^0 < e^c < e^x \\ &\Updownarrow \\ \text{Si } 0 &< c < x \to 1 = e^0 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \end{aligned}$$

Conclusión : $\forall x > 0$ siempre se verifica que $1 < \frac{e^x-1}{x} < e^x$

b) Esta función verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[x, 0]$ con $x > 0$ (al ser continua en $[x, 0]$ y derivable en $(x, 0)$).

Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (x, 0) \text{ tal que } \frac{f(0) - f(x)}{-x} = f\,'(c)$$

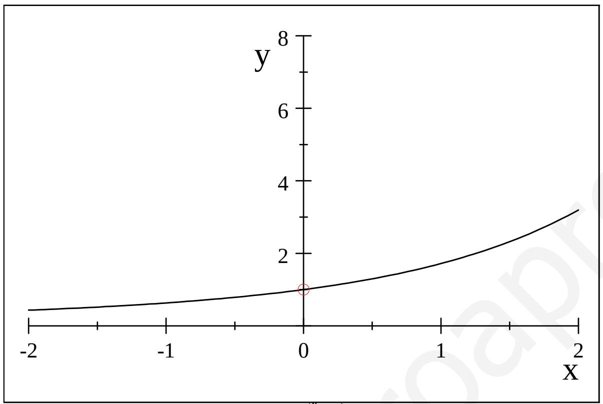
Esto es;

$$\begin{aligned} \text{existe al menos un } c &\in (0, x) \text{ tal que } \frac{1 - e^x}{-x} = e^c \\ &\Updownarrow \\ \text{existe al menos un } c &\in (0, x) \text{ tal que } \frac{e^x - 1}{x} = e^c \end{aligned}$$

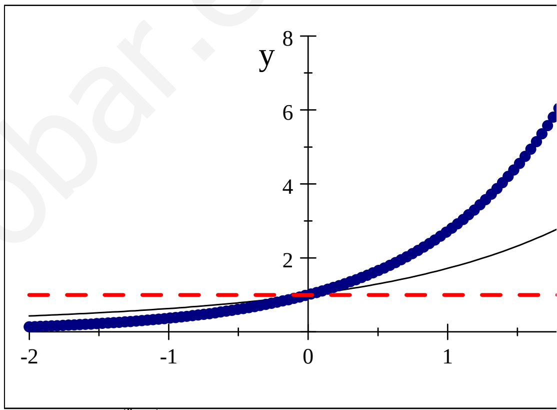
Vamos ahora a acotar $e^c$ sabiendo que $x < c < 0$ Como la función $y = e^x$ es estrictamente creciente para todo número real; entonces:

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow e^x < e^c < 1 = e^0 \\ & \Updownarrow & \\ \text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow e^x < \dfrac{e^x - 1}{x} < e^0 = 1 \end{array}$$

Conclusión : $\forall x < 0$ siempre se verifica que $e^x < \frac{e^x-1}{x} < 1$




$y = \frac{e^x-1}{x}$




$y = \frac{e^x-1}{x}$ curva $y = 1$ lineas $y = e^x$ puntos

c) Para calcular el $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x}$ determinaremos sus límites laterales

¿$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x-1}{x}$? y ¿$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x-1}{x}$?

$$\left[ \begin{array}{l} Como \left[ \begin{array}{c} 1 < \frac{e^x-1}{x} < e^x \ \forall x > 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \end{array} \right] \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1 \\ Como \left[ \begin{array}{c} e^x < \frac{e^x-1}{x} < 1 \ \forall x > 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \end{array} \right] \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1 \end{array} \right] \rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

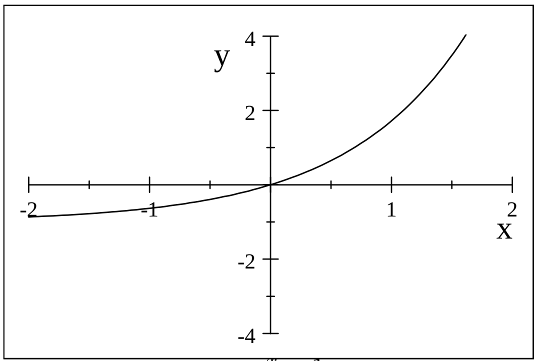
Así pues:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

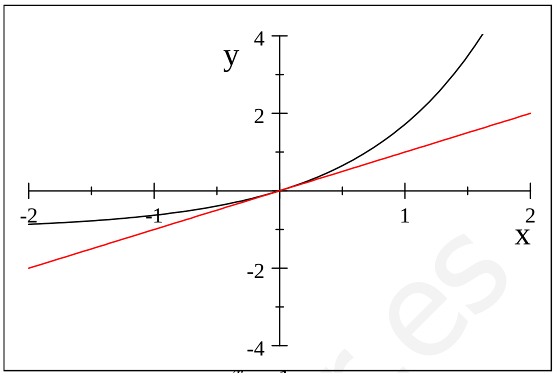
d) Las funciones $g(x) = e^x - 1$ y $h(x) = x$ son infinitésimos equivalentes en $x = 0$ ya que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

e) La ecuación de la recta tangente, $t$, a la función $g(x) = e^x - 1$ en $x = 0$ es la recta que pasa por el punto $P(0, e^0 - 1)$ y cuya pendiente $m_t = g\,'(0) = e^0 = 1$

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(0,0) \\ m_t = g\,'(0) = 1 \end{array} \right. \rightarrow y = x$$




$y = e^x - 1$




$y = e^x - 1$ e $y = x$

d) El $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(e^{3x}-1\right)^2 \sin 5x}{4x^2}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$

Como $\left[\begin{array}{c} e^{3x}-1 \text{ es un infinitésimo equivalente a } 3x \text{ en } x=0 \\ y \\ \sin 5x \text{ es un infinitésimo equivalente a } 5x \text{ en } x=0 \end{array}\right]$ entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{3x}-1\right)^2 \sin 5x}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(3x)^2\, 5x}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{45x^3}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{45x}{4} = 0$$

**Exercise 5.3.4** *a) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^+ \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$\ln 2 < \frac{2^x - 1}{x} < 2^x \ln 2$$

*b) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^- \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$2^x \ln 2 < \frac{2^x - 1}{x} < \ln 2$$

*c) Comprueba que* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = \ln 2$ *y después calcula* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x \ln 2}$
*d) ¿Las funciones* $g(x) = 2^x - 1 y$ $h(x) = x \ln 2$ *son infinitésimos equivalentes en* $x = 0$?
*e) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $g(x) = 2^x - 1$ *en* $x = 0$ *es la función* $h(x) = x \ln 2$
*f) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(2^{3x}-1\right)^2 \sin x}{4x^3}$

**Solución:**

Consideramos la función $f(x) = 2^x$ que es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (Fíjate que $f\,'(x) = 2^x \ln 2$)

a) Esta función verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, x]$ con $x > 0$ (al ser continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$).

Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{f(x) - f(0)}{x} = f\,'(c)$$

Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{2^x - 1}{x} = 2^c \ln 2$$

Vamos ahora a acotar $2^c$ sabiendo que $0 < c < x$ Como la función $y = 2^x$ es estrictamente creciente para todo número real; entonces:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Si } 0 & < & c < x \to 1 = 2^0 < 2^c < 2^x \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } 0 & < & c < x \to 1 \ln 2 < 2^c \ln 2 < 2^x \ln 2 \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } 0 & < & c < x \to \ln 2 < \dfrac{2^x - 1}{x} < 2^x \ln 2
\end{array}$$

Conclusión : $\forall x > 0$ siempre se verifica que $\ln 2 < \frac{2^x-1}{x} < 2^x \ln 2$

b) Esta función verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[x, 0]$ con $x > 0$ (al ser continua en $[x, 0]$ y derivable en $(x, 0)$).

Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (x, 0) \text{ tal que } \frac{f(0) - f(x)}{-x} = f\,'(c)$$

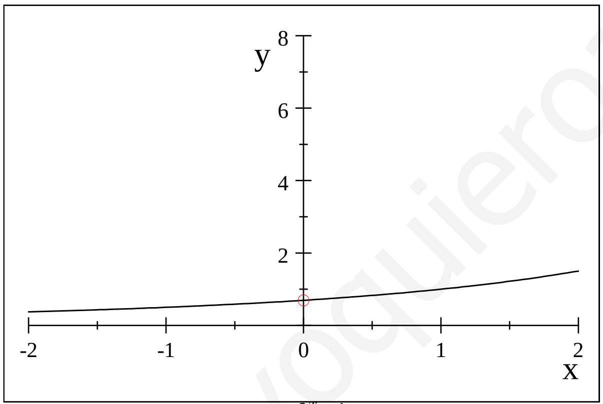
Esto es;

$$\begin{array}{rcl} \text{existe al menos un } c & \in & (0,x) \text{ tal que } \dfrac{1-2^x}{-x} = 2^c \ln 2 \\ & \Updownarrow & \\ \text{existe al menos un } c & \in & (0,x) \text{ tal que } \dfrac{2^x-1}{x} = 2^c \ln 2 \end{array}$$

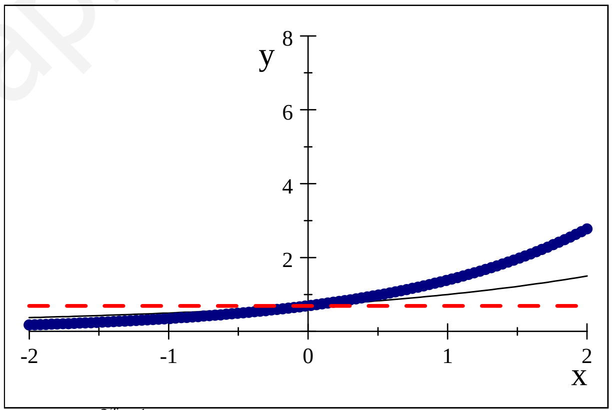
Vamos ahora a acotar $2^c$ sabiendo que $x < c < 0$ Como la función $y = 2^x$ es estrictamente creciente para todo número real; entonces:

$$\begin{array}{rcl} \text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow 2^x < 2^c < 2^0 = 1 \\ & \Updownarrow & \\ \text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow 2^x \ln 2 < 2^c \ln 2 < \ln 2 \\ \text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow 2^x \ln 2 < \dfrac{2^x-1}{x} < \ln 2 \end{array}$$

Conclusión : $\forall x < 0$ siempre se verifica que $2^x \ln 2 < \frac{2^x-1}{x} < \ln 2$




$y = \frac{2^x-1}{x}$




$y = \frac{2^x-1}{x}$ curva $y = \ln 2$ lineas $y = 2^x$ puntos

c) Para calcular el $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$ determinaremos sus límites laterales ¿$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2^x-1}{x}$? y ¿$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2^x-1}{x}$?

$$\left[ \begin{array}{l} Como \left[ \begin{array}{c} \ln 2 < \frac{2^x-1}{x} < 2^x \ln 2 \ \forall x > 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2^x \ln 2 = \ln 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln 2 = \ln 2 \end{array} \right] \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2^x-1}{x} = \ln 2 \\ Como \left[ \begin{array}{c} 2^x \ln 2 < \frac{2^x-1}{x} < \ln 2 \ \forall x < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} 2^x \ln 2 = \ln 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \ln 2 = \ln 2 \end{array} \right] \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2^x-1}{x} = \ln 2 \end{array} \right]$$

Así pues:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = \ln 2$$

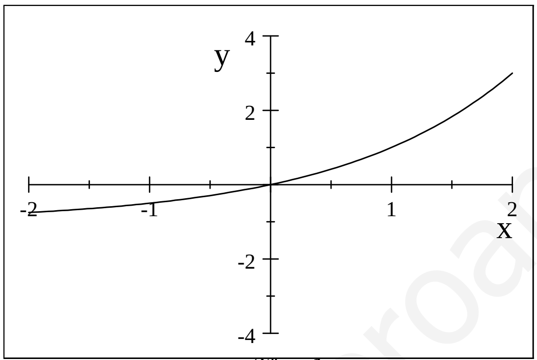
Como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\ln 2$ entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln 2$$

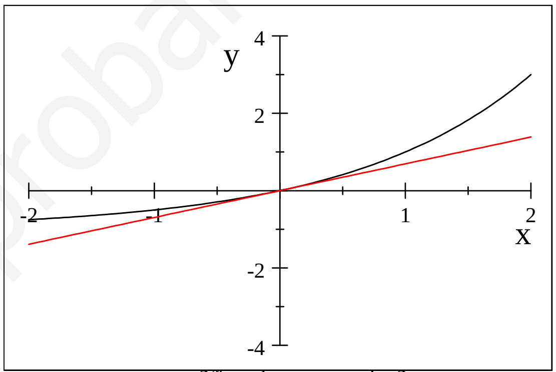
d) Las funciones $g(x)=2^x-1$ y $h(x)=x\ln 2$ son infinitésimos equivalentes en $x=0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x\ln 2}=1$

e) La ecuación de la recta tangente, $t$, a la función $g(x)=2^x-1$ en $x=0$ es la recta que pasa por el punto $P(0,2^0-1)$ y cuya pendiente $m_t=g'(0)=2^0\ln 2=\ln 2$

$$t\equiv\left\{\begin{array}{c} P(0,0)\\ m_t=g'(0)=\ln 2\end{array}\right.\rightarrow y=x\ln 2$$




$y=2^x-1$




$y=2^x-1$ e $y=x\ln 2$

d) El $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(2^{3x}-1\right)^2\sin x}{4x^3}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\text{Como}\left[\begin{array}{c} 2^{3x}-1 \text{ es un infinitésimo equivalente a } 3x\ln 2 \text{ en } x=0\\ y\\ \sin x \text{ es un infinitésimo equivalente a } x \text{ en } x=0\end{array}\right]\text{entonces}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(2^{3x}-1\right)^2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x\ln 2)^2\,x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^3\ln^2 2}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{9\ln^2 2}{4}=\frac{9\ln^2 2}{4}$$

**Exercise 5.3.5** *a) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^+ \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

*b) Demuestra que* $\forall x \in (-1,0)$ *se verifica que:*

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}$$

*c) Calcula* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
*d) ¿Las funciones* $g(x) = \ln(1+x)$*y* $h(x) = x$ *son infinitésimos equivalentes en* $x = 0$?
*e) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $g(x) = \ln(1+x)$ *en* $x = 0$ *es la función* $h(x) = x$
*f) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+5x)\sin x}{4x^3}$

Solcuión
La la función $f(x) = \ln(1+x)$ tiene por dominio el conjunto

$$D(f) = (-1,0)$$

Calculamos su derivada $f\,'(x) = \frac{1}{1+x}$.El dominio de $f\,'$ es igual al $D(f)$
a) A la función $f(x) = \ln(1+x)$ le podemos aplicar el T.V.M en $[0,x]$ con $x > 0$; ya que dicha función es continua en $[0,x]$ y derivable en $(0,x)$
Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (0,x) \text{ tal que } \frac{f(x)-f(0)}{x} = f\,'(c)$$

Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (0,x) \text{ tal que } \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c}$$

Vamos ahora a acotar $\frac{1}{1+c}$sabiendo que $0 < c < x$ Como la función $y = \frac{1}{x}$es estrictamente decreciente para todo número real positivo ; entonces:

$$\begin{aligned}
\text{Si } 0 &< c < x \to 1 < 1+c < 1+x \\
&\Updownarrow \\
\text{Si } 0 &< c < x \to \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \\
&\Updownarrow \\
\text{Si } 0 &< c < x \to \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(x+1)}{x} < 1
\end{aligned}$$

Conclusión : $\forall x > 0$ siempre se verifica que $\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(x+1)}{x} < 1$
b) A la función $f(x) = \ln(1+x)$ le podemos aplicar el T.V.M en $[x,0]$ con $-1 < x < 0$; ya que dicha función es continua en $[x,0]$ y derivable en $(x,0)$

Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (x,0) \text{ tal que } \frac{f(x)-f(0)}{-x} = f\,'(c)$$

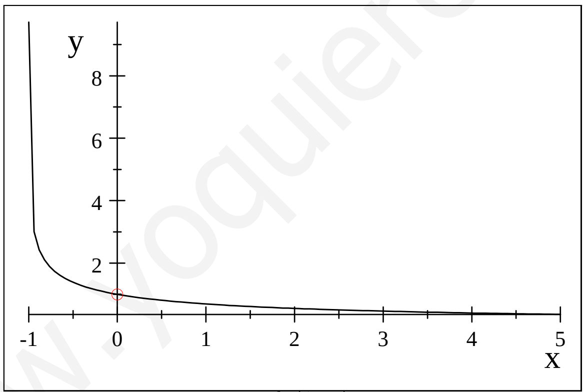
Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (x,0) \text{ tal que } \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c}$$

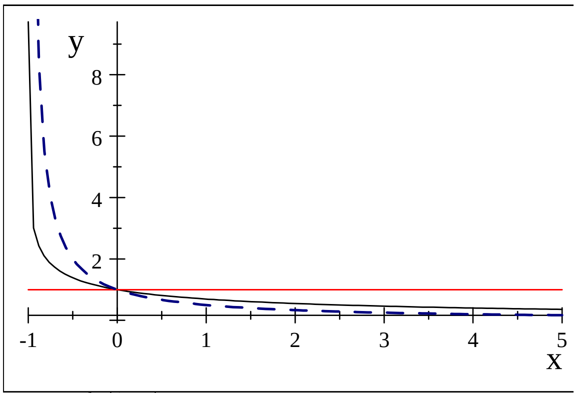
Vamos ahora a acotar $\frac{1}{1+c}$sabiendo que $x < c < 0$ Como la función $y = \frac{1}{x}$es estrictamente decreciente para todo número real negativo ; entonces:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow 1 + x < 1 + c < 1 \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow 1 < \dfrac{1}{1+c} < \dfrac{1}{1+x} \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow 1 < \dfrac{\ln(x+1)}{x} < \dfrac{1}{1+x}
\end{array}$$

Conclusión : $\forall x \in (-1,0)$ siempre se verifica que $1 < \frac{\ln(x+1)}{x} < \frac{1}{1+x}$
Fíjate en las gráficas siguientes:




$y = \frac{\ln(1+x)}{x}$




$y = \frac{\ln(1+x)}{x}$ curva $y = 1$ linea $y = \frac{1}{x+1}$puntos

c) Para calcular el $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ determinaremos sus límites laterales
¿$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$? y ¿$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x}$?

$$\left[\begin{array}{ll}
Como \left[\begin{array}{c}
\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \;\forall x > 0 \\
\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 \\
\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1
\end{array}\right] & \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \\
Como \left[\begin{array}{c}
1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x} \;\forall x < 0 \\
\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1+x} = 1 \\
\lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1
\end{array}\right] & \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1
\end{array}\right]$$

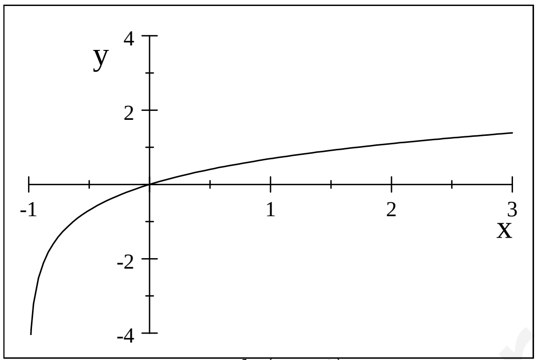
Así pues:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

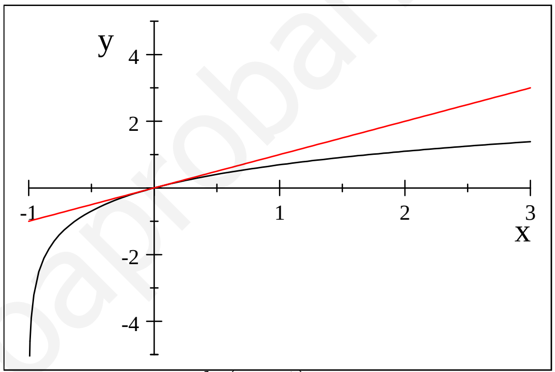
d) Las funciones $g(x)=\ln(1+x)$ y $h(x)=x$ son infinitésimos equivalentes en $x=0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

e) La ecuación de la recta tangente, $t$, a la función $g(x)=\ln(1+x)$ en $x=0$ es la recta que pasa por el punto $P(0,\ln 1)$ y cuya pendiente $m_t=g\,'(0)=\frac{1}{1+0}=1$

$$t\equiv\left\{\begin{array}{c} P(0,0)\\ m_t=g\,'(0)=1\end{array}\right. \rightarrow y=x$$



$y=\ln(x+1)$



$y=\ln(x+1)$ e $y=x$

f) El $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+5x)\sin x}{4x^3}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$

Como $\left[\begin{array}{c}\ln(1+5x)\ \text{ es un infinitésimo equivalente a } 5x \text{ en } x=0\\ y\\ \sin x \text{ es un infinitésimo equivalente a } x \text{ en } x=0\end{array}\right]$; entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+5x)\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^3}{4x^3}=\frac{25}{4}$$

**Exercise 5.3.6** *a) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^{+} \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$\frac{\log_2 e}{1+x} < \frac{\log_2(1+x)}{x} < \log_2 e$$

*b) Demuestra que* $\forall x \in (-1, 0)$ *se verifica que:*

$$\log_2 e < \frac{\log_2(1+x)}{x} < \frac{\log_2 e}{1+x}$$

*c) Comprueba que* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x}$ *y después calcula* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x \log_2 e}$
*d) ¿Las funciones* $g(x) = \log_2(1+x)$*y* $h(x) = x \log_2 e$ *son infinitésimos equivalentes en* $x = 0$*?*
*e) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $g(x) = \log_2(1+x)$ *en* $x = 0$ *es la función* $h(x) = x \log_2 e$
*f) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\log_2(1+5x))^2 \sin 2x}{x^3}$

Solcuión
La la función $f(x) = \log_2(1+x)$ tiene por dominio el conjunto

$$D(f) = (-1, 0)$$

Calculamos su derivada $f\,'(x) = \frac{1}{1+x} \log_2 e$. El dominio de $f\,'$ es igual al $D(f)$

a) A la función $f(x) = \log_2(1+x)$ le podemos aplicar el T.V.M en $[0, x]$ con $x > 0$; ya que dicha función es continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$

Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{f(x) - f(0)}{x} = f\,'(c)$$

Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (0, x) \text{ tal que } \frac{\log_2(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} \log_2 e$$

Vamos ahora a acotar $\frac{1}{1+c}$sabiendo que $0 < c < x$ Como la función $y = \frac{1}{x}$es estrictamente decreciente para todo número real positivo ; entonces:

$$\begin{aligned}
\text{Si } 0 &< c < x \to 1 < 1 + c < 1 + x \\
&\Updownarrow \\
\text{Si } 0 &< c < x \to \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \\
&\Updownarrow \\
\text{Si } 0 &< c < x \to \frac{1}{1+x} \log_2 e < \frac{1}{1+c} \log_2 e < \log_2 e \\
&\Updownarrow \\
\text{Si } 0 &< c < x \to \frac{\log_2 e}{1+x} < \frac{\log_2(x+1)}{x} < \log_2 e
\end{aligned}$$

Conclusión : $\forall x > 0$ siempre se verifica que $\frac{\log_2 e}{1+x} < \frac{\log_2(x+1)}{x} < \log_2 e$

b) A la función $f(x) = \log_2(1+x)$ le podemos aplicar el T.V.M en $[x, 0]$ con $-1 < x < 0$; ya que dicha función es continua en $[x, 0]$ y derivable en $(x, 0)$

Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (x, 0) \text{ tal que } \frac{f(x) - f(0)}{-x} = f\,'(c)$$

Esto es;

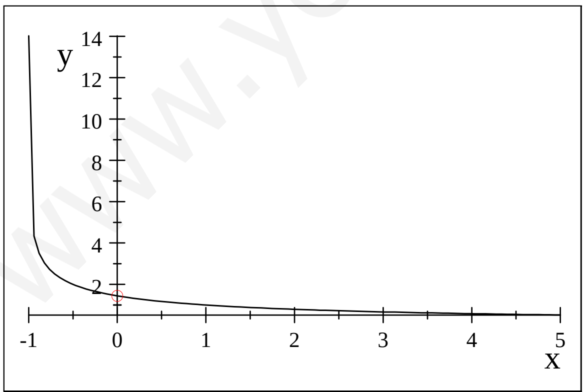
$$\text{existe al menos un } c \in (x, 0) \text{ tal que } \frac{\log_2(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} \log_2 e$$

Vamos ahora a acotar $\frac{1}{1+c}$ sabiendo que $x < c < 0$ Como la función $y = \frac{1}{x}$es estrictamente decreciente para todo número real negativo ; entonces:

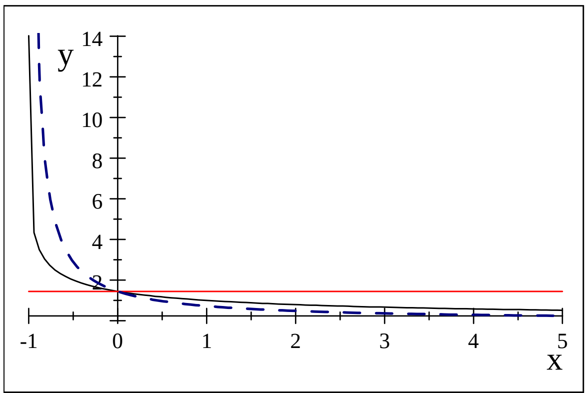
$$\begin{array}{lcl}
\text{Si } x & < & c < 0 \to 1 + x < 1 + c < 1 \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } x & < & c < 0 \to 1 < \dfrac{1}{1+c} < \dfrac{1}{1+x} \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } x & < & c < 0 \to \log_2 e < \dfrac{\log_2 e}{1+c} < \dfrac{\log_2 e}{1+x} \\
\text{Si } x & < & c < 0 \to \log_2 e < \dfrac{\log_2(x+1)}{x} < \dfrac{\log_2 e}{1+x}
\end{array}$$

Conclusión : $\forall x \in (-1, 0)$ siempre se verifica que $\log_2 e < \frac{\log_2(x+1)}{x} < \frac{\log_2 e}{1+x}$

Fíjate en las gráficas siguientes:




$y = \frac{\log_2(1+x)}{x}$




$y = \frac{\log_2(1+x)}{x}$ $y = \log_2 e$ $y = \frac{\log_2 e}{x+1}$puntos

c) Para calcular el $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x}$ determinaremos sus límites laterales

¿ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\log_2(1+x)}{x}$? y ¿ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\log_2(1+x)}{x}$?

$$\left[\begin{array}{l} \textit{Como}\left[\begin{array}{c} \frac{\log_2 e}{1+x} < \frac{\log_2(1+x)}{x} < \log_2 e \ \forall x > 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log_2 e}{1+x} = \frac{\log_2 e}{1+x} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \log_2 e = \log_2 e \end{array}\right] \to \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log_2(1+x)}{x} = \log_2 e \\ \textit{Como}\left[\begin{array}{c} \log_2 e < \frac{\log_2(1+x)}{x} < \frac{\log_2 e}{1+x} \ \forall x < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\log_2 e}{1+x} = \log_2 e \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \log_2 e = \log_2 e \end{array}\right] \to \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\log_2(1+x)}{x} = \log_2 e \end{array}\right]$$

Así pues:

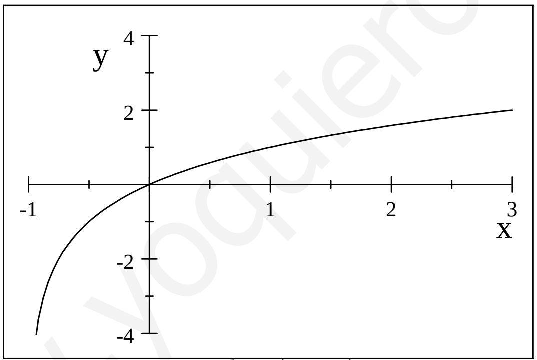
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} = \log_2 e$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} = \log_2 e \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x\log_2 e} = \frac{1}{\log_2 e} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} = 1$

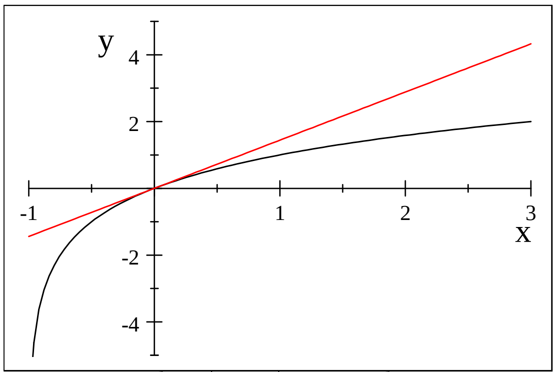
d) Las funciones $g(x) = \log_2(1+x)$ y $h(x) = x\log_2 e$ son infinitésimos equivalentes en $x = 0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x\log_2 e} = 1$

e) La ecuación de la recta tangente, $t$, a la función $g(x) = \log_2(1+x)$ en $x = 0$ es la recta que pasa por el punto $P(0, \log_2 1)$ y cuya pendiente $m_t = g\,'(0) = \frac{1}{1+0}\log_2 e = \log_2 e$

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(0,0) \\ m_t = g\,'(0) = \log_2 e \end{array} \right. \to y = x\log_2 e$$



$y = \log_2(x+1)$



$y = \log_2(x+1)$ e $y = x\log_2 e$

f) El $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\log_2(1+5x))^2 \sin 2x}{x^3}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$

Como $\left[\begin{array}{c} \log_2(1+5x) \text{ es un infinitésimo equivalente a } 5x\log_2 e \text{ en } x=0 \\ y \\ \sin 2x \text{ es un infinitésimo equivalente a } 2x \text{ en } x = 0 \end{array}\right]$

; entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\log_2(1+5x))^2 \sin 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(5x\log_2 e)^2 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{50x^3 (\log_2 e)^2}{x^3} = 50 (\log_2 e)^2$$

**Exercise 5.3.7** *a) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^{+} \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$-\ln 2 < \frac{2^{-x}-1}{x} < -2^{-x}\ln 2$$

*b) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^{-} \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$-2^{-x}\ln 2 < \frac{2^{-x}-1}{x} < -\ln 2$$

*c) Comprueba que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{-x}-1}{x} = -\ln 2$ *y después calcula* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{-x}-1}{-x\ln 2}$
*d) ¿Las funciones* $g(x) = 2^{-x}-1$*y* $h(x) = -x\ln 2$ *son infinitésimos equivalentes en* $x = 0$*?*
*e) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $g(x) = 2^{-x}-1$ *en* $x = 0$ *es la función* $h(x) = -x\ln 2$
*f) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2^{-3x}-1\right)^2 \sin x}{4x^3}$

**Solución:**
Consideramos la función $f(x) = 2^{-x}$ que es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (Fíjate que $f\,'(x) = -2^{-x}\ln 2$)
a) Esta función verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[0,x]$ con $x > 0$ (al ser continua en $[0,x]$ y derivable en $(0,x)$).
Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (0,x) \text{ tal que } \frac{f(x)-f(0)}{x} = f\,'(c)$$

Esto es;

$$\text{existe al menos un } c \in (0,x) \text{ tal que } \frac{2^{-x}-1}{x} = -2^{-c}\ln 2$$

Vamos ahora a acotar $2^{-c}$ sabiendo que $0 < c < x$ Como la función $y = 2^{-x}$ es estrictamente decreciente para todo número real; entonces:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Si } 0 & < & c < x \to 2^{-x} < 2^{-c} < 1 = 2^0 \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } 0 & < & c < x \to 2^{-x}\ln 2 < 2^{-c}\ln 2 < 1\ln 2 \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } 0 & < & c < x \to -\ln 2 < -2^{-c}\ln 2 < -2^{-x}\ln 2 \\
\text{Si } 0 & < & c < x \to -\ln 2 < \dfrac{2^{-x}-1}{x} < -2^{-x}\ln 2
\end{array}$$

Conclusión : $\forall x > 0$ siempre se verifica que $-\ln 2 < \frac{2^{-x}-1}{x} < -2^{-x}\ln 2$
b) Esta función verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[x,0]$ con $x > 0$ (al ser continua en $[x,0]$ y derivable en $(x,0)$).
Por lo tanto; podemos garantizar que:

$$\text{existe al menos un } c \in (x,0) \text{ tal que } \frac{f(0)-f(x)}{-x} = f\,'(c)$$

Esto es;

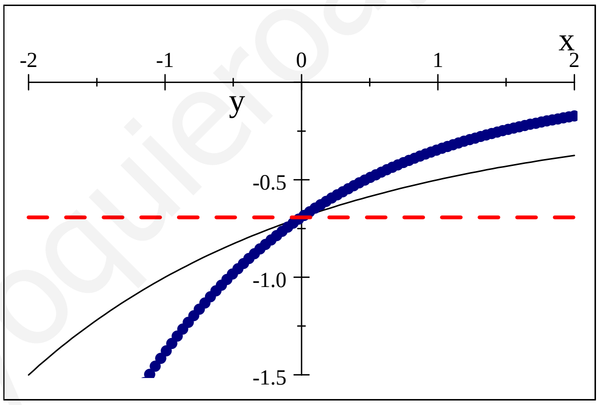
$$
\begin{array}{rcl}
\text{existe al menos un } c & \in & (0,x) \text{ tal que } \dfrac{1-2^{-x}}{-x} = -2^{-c}\ln 2 \\
 & \Updownarrow & \\
\text{existe al menos un } c & \in & (0,x) \text{ tal que } \dfrac{2^{-x}-1}{x} = -2^{-c}\ln 2
\end{array}
$$

Vamos ahora a acotar $2^{-c}$ sabiendo que $x < c < 0$ Como la función $y = 2^{-x}$ es estrictamente decreciente para todo número real; entonces:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow 1 = 2^0 < 2^{-c} < 2^{-x} \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow 1\ln 2 < 2^{-c}\ln 2 < 2^{-x}\ln 2 \\
 & \Updownarrow & \\
\text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow -2^{-x}\ln 2 < -2^{-c}\ln 2 < -\ln 2 \\
\text{Si } x & < & c < 0 \rightarrow -2^{-x}\ln 2 < \dfrac{2^{-x}-1}{x} < -\ln 2
\end{array}
$$

Conclusión : $\forall x < 0$ siempre se verifica que $-2^{-x}\ln 2 < \frac{2^{-x}-1}{x} < -\ln 2$

La grafica de $y = \frac{2^{-x}-1}{x}$ no etá definida en $x = 0$




$y = \frac{2^{-x}-1}{x}$ curva $y = -\ln 2$ lineas $y = -2^{-x}\ln 2$ puntos

c) Para calcular el $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{x}-1}{x}$ determinaremos sus límites laterales ¿ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2^{x}-1}{x}$? y ¿ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2^{x}-1}{x}$?

$$
\text{Como} \left[ \begin{array}{c} -\ln 2 < \frac{2^{-x}-1}{x} < -2^{-x}\ln 2 \ \forall x > 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -2^{-x}\ln 2 = -\ln 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln 2) = -\ln 2 \end{array} \right] \rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{-x}-1}{x} = -\ln 2
$$

$$
\text{Como} \left[ \begin{array}{c} -2^{-x}\ln 2 < \frac{2^{-x}-1}{x} < -\ln 2 \ \forall x < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -2^{-x}\ln 2 = -\ln 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} (-\ln 2) = -\ln 2 \end{array} \right] \rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{2^{-x}-1}{x} = -\ln 2
$$

Así pues:

$$
\lim_{x\to 0} \frac{2^{-x}-1}{x} = -\ln 2
$$

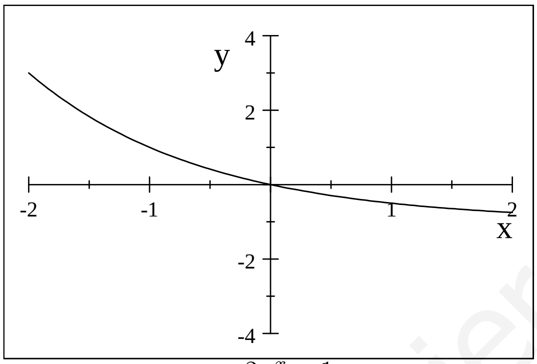
Como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{-x}-1}{x}=-\ln 2$ entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{-x}-1}{-x\ln 2}=\frac{1}{-\ln 2}\lim_{x\to 0}\frac{2^{-x}-1}{x}=\frac{1}{-\ln 2}\cdot(-\ln 2)=1$$

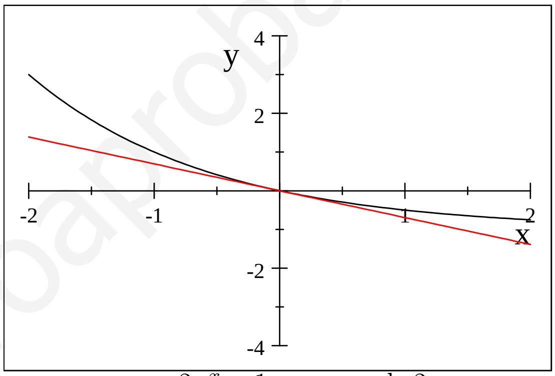
d) Las funciones $g(x)=2^{-x}-1$ y $h(x)=-x\ln 2$ son infinitésimos equivalentes en $x=0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{-x}-1}{-x\ln 2}=1$

e) La ecuación de la recta tangente, $t$, a la función $g(x)=2^{-x}-1$ en $x=0$ es la recta que pasa por el punto $P(0,2^{-0}-1)$ y cuya pendiente $m_t=g\,'(0)=-2^{-0}\ln 2=-\ln 2$

$$t\equiv\left\{\begin{array}{c} P(0,0)\\ m_t=g\,'(0)=-\ln 2\end{array}\right.\rightarrow y=-x\ln 2$$




$y=2^{-x}-1$




$y=2^{-x}-1$ e $y=-x\ln 2$

d) El $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(2^{-3x}-1\right)^2\sin x}{4x^3}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\text{Como}\left[\begin{array}{c} 2^{-3x}-1 \text{ es un infinitésimo equivalente a } -3x\ln 2 \text{ en } x=0\\ y\\ \sin x \text{ es un infinitésimo equivalente a } x \text{ en } x=0\end{array}\right]\text{entonces}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(2^{-3x}-1\right)^2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(-3x\ln 2)^2\,x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^3\ln^2 2}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{9\ln^2 2}{4}=\frac{9\ln^2 2}{4}$$

**Exercise 5.3.8** *a) Demuestra que* $\forall x\in\mathbb{R}^+\sim\{0\}$ *se verifica que:*

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}<\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{2}$$

*b) Demuestra que* $\forall x\in(-1,0)$ *se verifica que:*

$$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

*c) Comprueba que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$ *y después calcula* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}$

*d) ¿Las funciones* $g(x)=\sqrt{1+x}-1$*y* $h(x)=\frac{x}{2}$ *son infinitésimos equivalentes*

*en* $x = 0$?
*e) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $g(x) = \sqrt{1+x} - 1$ *en* $x = 0$ *es la función* $h(x) = \frac{x}{2}$
*f) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1+5x} - 1\right)\sin x}{4x^3}$

**Exercise 5.3.9** *a) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^+ \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} < \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{3}$$

*b) Demuestra que* $\forall x \in (-1, 0)$ *se verifica que:*

$$\frac{1}{3} < \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

*c) Comprueba que* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{3}$ *y después calcula* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\frac{x}{3}}$
*d) ¿Las funciones* $g(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$*y* $h(x) = \frac{x}{3}$ *son infinitésimos equivalentes en* $x = 0$?
*e) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $g(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$ *en* $x = 0$ *es la función* $h(x) = \frac{x}{3}$
*f) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt[3]{1-7x} - 1\right)\sin x}{4x^2}$

**Exercise 5.3.10** *a) Demuestra que* $\forall x \in \mathbb{R}^+ \sim \{0\}$ *se verifica que:*

$$3(1+x)^2 < \frac{(1+x)^3 - 1}{x} < 3$$

*b) Demuestra que* $\forall x \in (-1, 0)$ *se verifica que:*

$$3 < \frac{(1+x)^3 - 1}{x} < 3(1+x)^2$$

*c) Comprueba que* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^3-1}{x} = 3$ *y después calcula* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3 - 1}{3x}$
*d) ¿Las funciones* $g(x) = (1+x)^3 - 1$*y* $h(x) = 3x$ *son infinitésimos equivalentes en* $x = 0$?
*e) Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $g(x) = (1+x)^3 - 1$ *en* $x = 0$ *es la función* $h(x) = 3x$
*f) Calcula el* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left((1+8x)^3 - 1\right)\sin x}{4x^4}$

## 5.4 Teorema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ continuas en } [a,b] \\ f \text{ y } g \text{ derivables en } ]a,b[ \\ f\,' \text{ y } g' \text{ no se anulan a la vez en } ]a,b[ \\ g(b) \neq g(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in ]a,b[ / \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f\,'(c)}{g\,'(c)}$$

**Demostración**

Consideramos la función auxiliar $H(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$

Esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ por ser combinación lineal de las funciones $f$ y $g$ que por hipótesis son continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$

Además las imágenes de $H$ en los extremos $a$ y $b$ coinciden

$$\begin{array}{l} H(a) = (f(b) - f(a))\, g(a) - (g(b) - g(a))\, f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \\ H(b) = (f(b) - f(a))\, g(b) - (g(b) - g(a))\, f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \end{array}$$

Como $H$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en $[a, b]$, podemos afirmar que $\exists c \in ]a, b[$ tal que $H\,'(c) = 0$[9]

Esto es, que

$$\begin{array}{c} 0 = (f(b) - f(a))\, g\,'(c) - (g(b) - g(a))\, f\,'(c) \\ (g(b) - g(a))\, f\,'(c) = (f(b) - f(a))\, g\,'(c) \end{array}$$

Como por hipótesis $g(b) \neq g(a) \to g(b) - g(a) \neq 0$

Entonces

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g\,'(c)$$

$$\text{Como } g\,'(c) \neq 0^{10} \to \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f\,'(c)}{g\,'(c)}$$

### 5.4.1 Problemas T. Cauchy

**Exercise 5.4.1** *Comprueba que las funciones* $f(x) = x^3 + 1$ *y* $g(x) = x^2 + 3$ *verifican las hipótesis y la tesis del Teorema de Cauchy en el intervalo* $[0, 2]$

Ambas funciones son continuas y derivables en $\Re$ al ser polinómicas. Así pues, son continuas en $[0, 2]$ y derivables en $]0, 2[$, siendo sus derivadas respectivamente $f\,'(x) = 3x^2$ y $g\,'(x) = 2x$

Ninguna de sus derivadas se anulan a la vez en $]0, 2[$ y además $g(0) = 3$ no coincide con $g(2) = 7$

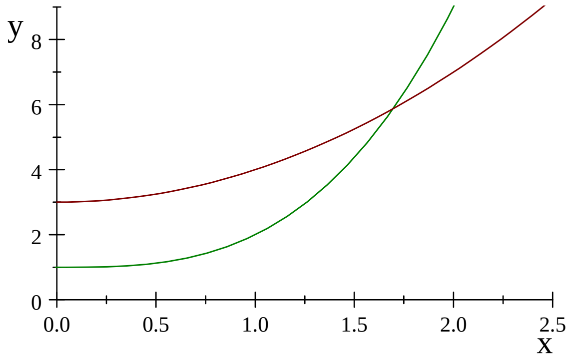
Por todo esto; ambas funciones verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en $[0, 2]$ y consecuentemente podemos afirmar que:

$$\begin{array}{ccl} \exists c & \in & ]0, 2[ \; / \; \dfrac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \dfrac{f\,'(c)}{g\,'(c)} \\ & \Updownarrow & \\ \exists c & \in & ]0, 2[ \; / \; \dfrac{8}{4} = \dfrac{3c^2}{2c} = \dfrac{3c}{2} \end{array}$$

Dicho valor es $\to c = \dfrac{4}{3}$

[9] $H\,'(x) = (f(b) - f(a))\, g\,'(x) - (g(b) - g(a))\, f\,'(x)$

[10] Si $g\,'(c) = 0 \to f\,'(c) = 0$ .
$c$ anularía a la vez a $f\,'$ y a $g\,'$. Lo que contradice la hipótesis de que $f\,'$ y $g'$ no se anulan a la vez en $]a, b[$




**Exercise 5.4.2** *Comprueba que las funciones* $f(x) = x^2 + 1$ *y* $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *verifican las hipótesis y la conclusión del Teorema de Cauchy en el intervalo* $[0, 2]$

Ambas funciones son continuas y derivables en $\Re$; en particular son continuas en $[0, 2]$ y derivables en $]0, 2[$, , siendo sus derivadas respectivamente $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Ninguna de sus derivadas se anulan a la vez en $]0, 2[$ y además $g(0) = 1$ no coincide con $g(2) = \dfrac{1}{5}$

Por todo esto; ambas funciones verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en $[0, 2]$ y consecuentemente podemos afirmar que:

$$\begin{array}{rcl}\exists c & \in & ]0,2[\ /\ \dfrac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \\ & \Updownarrow & \\ \exists c & \in & ]0,2[\ /\ \dfrac{4}{\frac{1}{5}-1} = \dfrac{2c}{\frac{-2c}{(1+c^2)^2}} \\ \exists c & \in & ]0,2[\ /\ -5 = -\left(1+c^2\right)^2\end{array}$$

Resolviendo la ecuación $5 = \left(1+c^2\right)^2 \rightarrow 1 + c^2 = \pm\sqrt{5}$

Las únicas soluciones reales son:

$$c = \left\{\begin{array}{l}\sqrt{-1+\sqrt{5}} \simeq 1.11178\,59405 \in ]0,2[ \\ -\sqrt{-1+\sqrt{5}} \simeq -1.11178\,59405 \notin ]0,2[\end{array}\right.$$

Dicho valor es $\rightarrow c = \sqrt{-1+\sqrt{5}}$

**Exercise 5.4.3** *Aplicar si es posible el teorema de Cauchy a las funciones* $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ *y* $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$ *en* $[0, 1]$

- Por ser polinómicas ambas funciones son derivables y continuas en $\Re$
- En particular, $f$ y $g$ son continuas en $[0, 1]$ y derivables en $]0, 1[$; siendo sus derivadas respectivamente $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 2x$ y $g'(x) = 12x^2 - 6x - 2$

- $g(1) = -1; g(0) = 0$
- Veamos ahora si sus derivadas se anulan a la vez en $]0, 1[$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12x^3 - 6x^2 - 2x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \notin ]0,1[ \\ x = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\sqrt{33} \in ]0,1[ \\ x = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{33} \notin ]0,1[ \end{array} \right. \\ 12x^2 - 6x - 2 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\sqrt{33} \in ]0,1[ \\ x = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{33} \notin ]0,1[ \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Como sus derivadas se anulan a la vez en $]0, 1[$( en concreto para $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\sqrt{33}$); estas funciones no verifican las hipótesis del teorema de Cauchy y por lo tanto no podemos aplicarlo

**Exercise 5.4.4** *Aplicar si es posible el teorema de Cauchy a las funciones* $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$ *y* $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 1$ *en* $[0, 3]$
*¿Y en el intervalo* $[2, 3]$

**Exercise 5.4.5** *Comprobar que al aplicar el teorema de Cauchy a la funciones seno y coseno en* $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ *el punto de la tesis es el punto medio del intervalo* $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

$$\text{Ayuda:} \left\{ \begin{array}{l} \sin b - \sin a = 2 \sin\left(\dfrac{b-a}{2}\right) \cos\left(\dfrac{b+a}{2}\right) \\ \cos b - \cos a = -2 \sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \sin\left(\dfrac{b-a}{2}\right) \end{array} \right\}$$

**Exercise 5.4.6** *Demuestra que para todo* $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ *siempre existe al menos un* $y \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ *con* $y < x$ *tal que se verifica la ecuación*

$$\cot x - \csc x + \tan y = 0$$

Consideramos las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sin x$ en $[0, x]$ con $x < \dfrac{\pi}{2}$
Ambas funciones verifican las hipótesis del T. de Cauchy ya que:

- Son continuas en $[0, x]$
- Son derivables en $]0, x[$ siendo sus derivadas $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = \cos x$
- Sus derivadas no se anulan a la vez en $]0, x[$
- $g(0) \neq g(x)$ ya que $g(x) = \sin x$ es est. creciente en en $[0, \frac{\pi}{2}]$

Por todo ello; podemos aplicar el T. de Cauchy a estas funciones y por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \exists y & \in & ]0, x[ \ / \ \dfrac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \dfrac{f'(y)}{g'(y)} \\ & \Updownarrow & \\ \exists y & \in & ]0, x[ \ / \ \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} = \dfrac{-\sin y}{\cos y} \end{array}$$

Como $\dfrac{\cos x - 1}{\sin x} = \dfrac{-\sin y}{\cos y} \to \cot x - \csc x = -\tan y$

Con lo que queda demostrado que dado cualquier $x \in ]0, \dfrac{\pi}{2}[$ siempre existe al menos un $y \in ]0, \dfrac{\pi}{2}[$ con $y < x$ tal que se verifica la ecuación

$$\cot x - \csc x + \tan y = 0$$

**Exercise 5.4.7** *Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$ . ¿Se puede aplicar el teorema de Cauchy en el interalo $[0,1]$?*
*En caso afirmativo, determina el punto de la tesis con dos cifras decimales exactas haciendo uso del Teorema de Bolzano*

- Ambas funciones son continuas y derivables en $\Re$. Por lo tanto son continuas en $[0,1]$ y derivables en $]0,1[$
- Sus derivadas $f\,'(x) = 2x$ y $g\,'(x) = e^x$
- Sus derivadas no se anulan simultaneamente en $]0,1[$
- $g(1) = e$ y $g(0) = 1$

Al verificar $f$ y $g$ las hipótesis del T. de Cauchy en $]0,1[$; entonces podemos afirmar que

$$\begin{array}{l} \exists c \in\ ]0,1[\ /\ \dfrac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \dfrac{f\,'(c)}{g\,'(c)} \\ \Updownarrow \\ \exists c \in\ ]0,1[\ /\ \dfrac{1}{e-1} = \dfrac{2c}{e^c} \\ \Updownarrow \\ \exists c \in\ ]0,1[\ /\ e^c + 2c - 2ec = 0 \end{array}$$

Ya sabemos que la ecuación $e^x - 2ex + 2x = 0$, tiene al menos una solución denominada $c$ en $]0,1[$. Para determinarla con dos cifras decimales exactas utilizaremos el teorema de Bolzano

Consideraremos la función $F(x) = e^x - 2ex + 2x$, que es continua en $\Re$ y dividiremos el intervalo $]0,1[$ en diez partes iguales y calcularemos sus imágenes en cada uno de estos valores:

$F(0.1) = e^{0.1} - 2 \cdot 0.1e + 2 \cdot 0.1 = .76151\,45523\,8$
$F(0.2) = e^{0.2} - 2 \cdot 0.2e + 2 \cdot 0.2 = .53409\,00267\,8$
$F(0.3) = e^{0.3} - 2 \cdot 0.3e + 2 \cdot 0.3 = .31888\,97105$
$F(0.4) = e^{0.4} - 2 \cdot 0.4e + 2 \cdot 0.4 = .11719\,92348\,7$
$F(0.5) = e^{0.5} - 2 \cdot 0.5e + 2 \cdot 0.5 = -6.95605\,57759 \times 10^{-2}$
$F(0.6) = e^{0.6} - 2 \cdot 0.6e + 2 \cdot 0.6 = -.23981\,93937\,6$
$F(0.7) = e^{0.7} - 2 \cdot 0.7e + 2 \cdot 0.7 = -.39184\,18523\,7$
$F(0.8) = e^{0.8} - 2 \cdot 0.8e + 2 \cdot 0.8 = -.52370\,99970\,4$
$F(0.9) = e^{0.9} - 2 \cdot 0.9e + 2 \cdot 0.9 = -.63330\,41800\,7$

Por el Teorema de Bolzano sabemos que la solución de la ecuación se encuentra en el intervalo $]0.4, 0.5[$

Si ahora dividiesemos este intervalo a su vez en diez partes iguales y calculasemos sus imágenes;entonces podríamos ser más precisos a la hora de determinar la solución.

$F(0.41) = e^{0.41} - 2 \cdot 0.41e + 2 \cdot 0.41 = 9.78266\,85776 \times 10^{-2}$
$F(0.42) = e^{0.42} - 2 \cdot 0.42e + 2 \cdot 0.42 = 7.86048\,19713 \times 10^{-2}$
$F(0.43) = e^{0.43} - 2 \cdot 0.43e + 2 \cdot 0.43 = 5.95351\,51074 \times 10^{-2}$
$F(0.44) = e^{0.44} - 2 \cdot 0.44e + 2 \cdot 0.44 = 4.06192\,09467 \times 10^{-2}$
$F(0.45) = e^{0.45} - 2 \cdot 0.45e + 2 \cdot 0.45 = 2.18585\,39877 \times 10^{-2}$
$F(0.46) = e^{0.46} - 2 \cdot 0.46e + 2 \cdot 0.46 = 3.25470\,28122 \times 10^{-3}$
$F(0.47) = e^{0.47} - 2 \cdot 0.47e + 2 \cdot 0.47 = -1.51907\,25534 \times 10^{-2}$
$F(0.48) = e^{0.48} - 2 \cdot 0.48e + 2 \cdot 0.48 = -3.34761\,53128 \times 10^{-2}$
$F(0.49) = e^{0.49} - 2 \cdot 0.49e + 2 \cdot 0.49 = -5.15999\,71934 \times 10^{-2}$

En virtud del Teorema de Bolzano sabemos que la solución de la ecuación propuesta se encuentra en el intervalo $]0.46, 0.47[$

Como nos piden dicha solución con dos cifras decimales exactas; bastará con determinar si ésta se encuentra en el intervalo $]0.46, 0.465[$ (en cuyo caso $c \simeq 0.46$) o en el intervalo $]0.465, 0.47[$(en cuyo caso $c \simeq 0.47$)

Calculemos pues $F(0.46), F(0.465), F(0.47)$

$F(0.46) = e^{0.46} - 2 \cdot 0.46e + 2 \cdot 0.46 = 3.25470\,28122 \times 10^{-3}$
$F(0.465) = e^{0.465} - 2 \cdot 0.465e + 2 \cdot 0.465 = -5.98791\,15798 \times 10^{-3}$
$F(0.47) = e^{0.47} - 2 \cdot 0.47e + 2 \cdot 0.47 = -1.51907\,25534 \times 10^{-2}$

Por Bolzano sabemos que la solución se encuentra en $]0.46, 0.465[$. Por lo tanto podemos afirmar que:

$$c \simeq 0.46$$

## 5.5 Regla de L'Hôpital

**Regla de L'Hôpital** Sean $f$ y $g$ funciones que verifican las siguientes condiciones:

**1)** $f$ y $g$ son continuas en $[a, b]$

**2)** $f$ y $g$ son derivables en $]a, b[$ salvo quizás en $x_0 (x_0 \in ]a, b[)$

**3)** $g\,'(x) \neq 0 \ \forall x \in ]a, b[ \sim \{x_0\}$

**4)** $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f\,'(x)}{g'(x)} = l$

**5)** $g(x_0) = f(x_0) = 0$

Con estas hipótesis siempre se verificará la siguiente tesis

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f\,'(x)}{g'(x)} = l$$

Tenemos que comprobar que:

- – a) $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = l$

– b) $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f\,'(x)}{g\,'(x)}=l$

Consideramos las funciones $f$ y $g$ en $[x_0,x]$ siendo $x\in]a,b[$ y $x_0$ el punto de las hipótesis $2^a$,$3^a$ y $5^a$

Veamos que ambas funciones verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en $[x_0,x]$

a) $f$ y $g$ son continuas en $[x_0,x]$ por serlo ambas en $[a,b]$ (H1)

b) $f$ y $g$ son derivables en $]x_0,x[$ por serlo ambas en $]a,b[$ (H2)

c)Al ser $g\,'(x)\neq 0\ \forall x\in]a,b[\sim\{x_0\}$(H3) entonces $g\,'(x)\neq 0\ \forall x\in]x_0,x[$. Evidentemente como $g\,'$ no se anula en $]x_0,x[$; entonces $f\,'$ y $g\,'$ no se anulan a la vez en $]x_0,x[$

- d)Como $g\ (x_0)=0$ entonces $g(x)\neq 0$; ya que si ocurriese que $g(x)=0$ entonces por el teorema del valor medio $\exists\ h\in]x_0,x[$.tal que $g\,'(h)=0$, lo cual , no puede ocurrir por la hipótesis $3^a$ de este teorema

Como estas dos funciones verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en $[x_0,x]$; entonces podemos garantizar la existencia de al menos un $c\in]x_0,x[$ tal que:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f\,'(c)}{g\,'(c)}$$

Al ser $g(x_0)=f(x_0)=0$ por la hipótesis $5^a$; entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f\,'(c)}{g\,'(c)}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c\to x_0^+}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Observa que $c\in]x_0,x[$,por lo tanto afirmar que $x\to x_0^+$ es equivalente a afirmar que $c\to x_0^+$. Así pues:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to x_0^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \text{ en virtud de la hipótesis } 4^a$$

Demuestra tú como ejercicio el apartado b)

**Exercise 5.5.1** *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{x^2}$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ . Recurriendo a la regla de L'hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}$$

Continúa la misma indeterminación. Repetimos la regla de L'hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2}=-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

**Exercise 5.5.2** $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$

Todos estos límites presentan la indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando una sola vez la regla de L'Hôpital obtendremos los límites.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}}}{\frac{1}{n}} = 1$$

## 5.5.1 Límites resueltos por L'hôpital

**Exercise 5.5.3** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{5x^2} = \frac{0}{0}$

Aplico la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 3x\cdot\cos 3x}{10x}=\frac{0}{0}$$
Vuelvo a aplicar la regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 0}\frac{18\cos^2 3x-18\sin^2 3x}{10}=\frac{9}{5}$$

**Exercise 5.5.4** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{7x^2}=\frac{0}{0}$

Aplico la regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{14x}=\frac{0}{0}$$
Vuelvo a aplicar la regla de L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0}\frac{25\cos 5x}{14}=\frac{25}{14}$$

**Exercise 5.5.5** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\frac{0}{0}$

Aplico la regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+7)^2}}\right)}{1}=\frac{1}{12}$$

**Exercise 5.5.6** $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right)=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}$

Aplico la regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\frac{1}{x-1}}{1}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=1$$

**Exercise 5.5.7** $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\frac{0}{0}$
Aplico la regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3}{1}=\ln 3$$

**Exercise 5.5.8** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}$
Aplico la regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2}{3}$$

**Exercise 5.5.9** $\lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1}{x-2}=\frac{0}{0}$
Aplico la regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{1}=\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3$$

**Exercise 5.5.10** $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{0}{0}$

Aplico la regla de L'Hôpital
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{n(1+x)^{n-1}}{1} = n$

### 5.5.2 Generalización l'Hôpital

**Generalización l'Hôpital** Este método también es válido para :

- Las indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$
- Cuando $x \to +\infty$ (o $-\infty$) en lugar de tender a un número $x_0$
- Las indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

Tendremos que transformar $A - B$ de la siguiente manera según convenga:

$$\begin{aligned} A - B &= A(1 - \frac{B}{A}) = \left(\frac{(1 - \frac{B}{A})}{\frac{1}{A}}\right) \\ A - B &= B(\frac{A}{B} - 1) = \left(\frac{(\frac{A}{B} - 1)}{\frac{1}{B}}\right) \\ A - B &= AB(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}) = \frac{(\frac{1}{B} - \frac{1}{A})}{\frac{1}{AB}} \end{aligned}$$

En ocasiones tan sólo tendremos que restar ambas expresiones.

- Las indeterminaciones del tipo $0 \cdot +\infty$
  Se pueden convertir en indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ realizando alguna de las transformaciones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot B = \frac{A}{\frac{1}{B}} \\ o \\ A \cdot B = \frac{B}{\frac{1}{A}} \end{array} \right\}$$

  Una vez elegida convenientemente una de las dos opciones; después aplicaremos la regla de L'hôpital

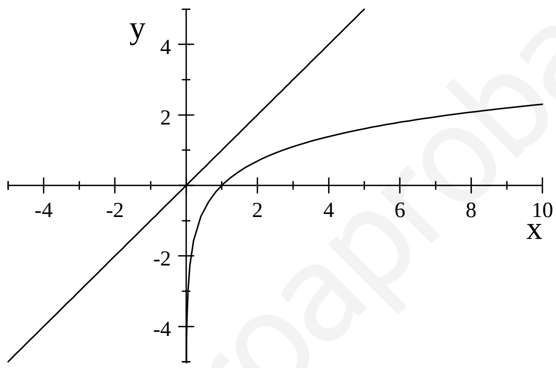
- Las indeterminaciones $1^{\infty}, \infty^0$ y $0^0$ En estos casos se utiliza la relación: $A^B = e^{B \ln A}$ con lo que obtendremos en el exponente un límite que presentará la indeterminación anterior

**Exercise 5.5.11** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

El límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ presenta la indeterminación $\dfrac{+\infty}{+\infty}$
Aplicando L'hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Si te fijas en las gráficas, para valores de $x$ positivos y cada vez más grandes las imágenes de la función identidad $f(x) = x$ son cada vez mayores que las imágenes de la función logarítmica $g(x) = \ln x$




Por lo tanto, es evidente que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ nos diese 0
¿Cuál crees que sería el valor del siguiente límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x}$ ?
Comprueba tu contestación utilizando la regla de L'hôpital

**Exercise 5.5.12** $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$

El límite $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$ presenta la indeterminación $0^0$
Utilizando pues la relación $A^B = e^{B \ln A}$ tendremos

$$\lim_{x\to 0+} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln x} \qquad (*)$$

Calculamos ahora el límite del exponente $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln x$ que presenta la indeterminación $0 \cdot (-\infty)$. Para poder obtener la indeterminación $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ realizamos la siguiente transformación:

$$\lim_{x\to 0+} \sin x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$$

Como ya nos aparece la indeterminación deseada $\dfrac{-\infty}{+\infty}$; aplicamos l'hôpital

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

Operando esto

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}$$

Ahora nos aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$. Reiteramos l'hôpital

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x} = \lim_{x\to 0+}\frac{2\sin x\cos x}{-(\cos x - x\sin x)} = \frac{0}{-1} = 0$$

Sustituyendo en (*) tendremos que

$$\lim_{x\to 0+} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\ln x} = e^0 = 1$$

Nota: Habrás observado que este límite es muy largo. Sin embargo si hubiesemos utilizado que $\sin x \sim x$ cuando $x \to 0$ entonces:

$$\lim_{x\to 0+}\sin x\ln x = \lim_{x\to 0+} x\ln x$$

Este límite presenta la indeterminación $0\cdot(-\infty)$

Como $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

Aparece la indeterminación $\frac{-\infty}{+\infty}$. Aplicando la susodicha regla

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

Y por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\ln x} = e^0 = 1$

**Exercise 5.5.13** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

Este límite presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$

Aplicando la Regla de L'hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{1-\cos x}$$

También presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$ .Volviendo a aplicar L'hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 x)\tan x}{\sin x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x + 2\tan^3 x}{\sin x}\end{aligned} \tag{3}$$

También presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ .Volviendo a aplicar L'hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x + 2\tan^3 x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x + 6\tan^2 x\sec^2 x}{\cos x} = 2$$

Nota: Si utilizasemos que $\sin x \sim x$ y $\tan x \sim x$ cuando $x \to 0$; entonces a partir de la relación (3) tendríamos

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 x)\tan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 x)x}{x} = \lim_{x\to 0} 2(1+\tan^2 x) = 2$$

**Exercise 5.5.14** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2}$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$
Aplicando la Regla de L'hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} \tag{4}$$

También presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ .Volviendo a aplicar L'hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Nota: Si utilizasemos que $e^x - 1 \sim x$ cuando $x \to 0$; entonces a partir de la relación (4) tendríamos

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

**Exercise 5.5.15** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x + 2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Este límite presenta la indeterminación $1^\infty$
Utilizando la relación $A^B = e^{B\ln A}$; tendremos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x + 2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)} \tag{5}$$

Calculemos por separado el límite del exponente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)}{x}$$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$; aplicando l'hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3^x+2^x}\cdot\left(\frac{3^x\ln 3 + 2^x\ln 2}{2}\right)}{1} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(3^x\ln 3 + 2^x\ln 2)}{3^x+2^x} = \frac{\ln 3 + \ln 2}{2} = \frac{\ln 3 + \ln 2}{2} = \ln\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Con lo que sustituyendo en la expresión (5) tendremos que el límite a calcular es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)} = e^{\ln\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

**Exercise 5.5.16** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x(e^x+1)}\right)$ *:*

Este límite presenta la indeterminación $\infty-\infty$
realizando dicha resta; obtendremos

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\,(e^x+1)} \tag{6}$$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ . Aplicando la regla de l'hôpital

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1\,(e^x+1)+xe^x}=\frac{1}{4}$$

Nota: Si a partir de la relación (6) utilizasemos que $e^x-1\sim x$ cuando $x\to 0$ entonces

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\,(e^x+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\,(e^x+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{4}$$

**Exercise 5.5.17** $\lim\limits_{x\to 1+}(x-1)\ln(x-1)$

Este límite presenta la indeterminación $0\cdot(-\infty)$ Si transformamos dicho producto en el siguiente cociente $\dfrac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}$

$$\lim_{x\to 1+}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{x\to 1+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}$$

Entonces el límite presentará ahora la indeterminación $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ y aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1+}-(x-1)=0$$

**Exercise 5.5.18** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x^3}{1-x^2}\right)$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$
Aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x^3}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-3x^2}{-2x}\right)=\frac{3}{2}$$

**Exercise 5.5.19** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(1-x)^3}{1-x^2}\right)$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$
Aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(1-x)^3}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-3\,(1-x)^2}{-2x}\right)=0$$

**Exercise 5.5.20** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$
Aplicando la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ vuelve a presentar la indeterminación $\dfrac{0}{0}$
Aplicando la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}$ vuelve a presentar la indeterminación $\dfrac{0}{0}$
Aplicando la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

**Exercise 5.5.21** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}$

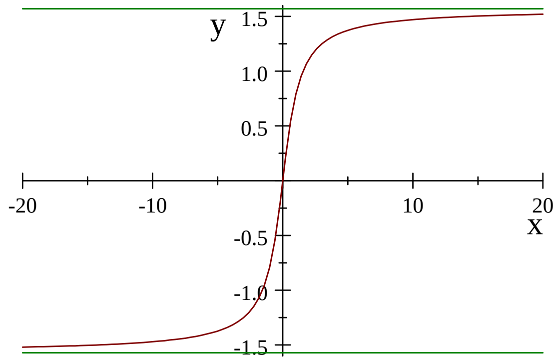
Este límite presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$
Aplicando la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\cot x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sec^2 x}{\csc^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}=-1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1-\dfrac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\tan x\cdot\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}\right)$$

**Exercise 5.5.22** $\lim\limits_{x\to -\infty}x\left(\arctan x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ayuda: La gráfica de $y=\arctan x$




$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ y $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} x\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = -\infty(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = -\infty \cdot 0$

$\lim_{x\to-\infty} x\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{x}}$

Aplico la regla de L'hôpital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Como $\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{1+x^2}$

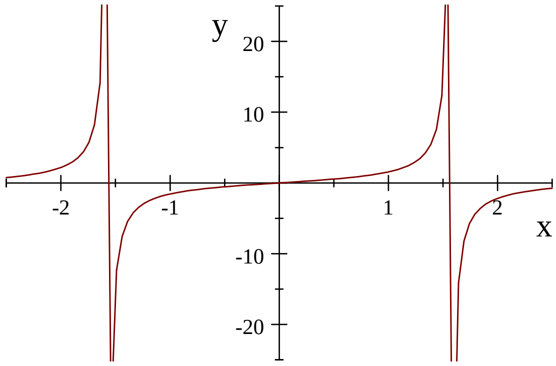
Ahora nos aparece la indeterminación $\frac{-\infty}{\infty}$

Aplicando la regla de L'hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$$

**Exercise 5.5.23** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Ayuda: La gráfica de $y = \tan x$




$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = +\infty(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = +\infty \cdot 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot x}$$

Aplico la regla de L'hôpital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-1}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin^2 x = 1$$

**Exercise 5.5.24** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\infty(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = -\infty \cdot 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot x}$$

Aplico la regla de L'hôpital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{-1}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \sin^2 x = 1$$

**Exercise 5.5.25** $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(\pi - 2\arctan\sqrt{x})$

Como $\lim_{x\to+\infty} \arctan(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}$ , el límite $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(\pi - 2\arctan\sqrt{x})$ presenta la indeterminación $\infty \cdot 0$

Transformando $\sqrt{x}\,(\pi - 2\arctan\sqrt{x})$ de la siguiente manera:

$$\sqrt{x}\,(\pi - 2\arctan\sqrt{x}) = \frac{\pi - 2\arctan\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,(\pi-2\arctan\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Este límite presenta ahora la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}+1}=2$$

**Exercise 5.5.26** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\pi-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\arcsin 1=\frac{1}{2}\pi$, el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\pi-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ presenta la indeterminación $\infty\cdot 0$

Transformando $\sqrt{x}\,(\pi-2\arctan\sqrt{x})$ de la siguiente manera:

$$\sqrt{x}\left(\pi-2\arctan\sqrt{x}\right)=\frac{\pi-2\arctan\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\pi-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}$$

Este límite presenta ahora la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Simplificando, nos quedará así:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2$$

**Exercise 5.5.27** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x}$

Evaluando el límite directamente obtenemos la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'hôpital:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)-\sin x}{2\sin x\cos x-\sin x}$$

Esta expresión presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'hôpital:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)-\sin x}{\sin 2x-\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{1}{4}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)-\cos x}{2\cos 2x-\cos x}=\frac{-\frac{1}{4}+1}{2+1}=\frac{1}{4}$$

**Exercise 5.5.28** $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

Evaluando el límite directamente obtenemos la indeterminación $\infty - \infty$. Como $\cot x - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x\cos x - \sin x}{(\sin x)x}$,entonces:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{(\sin x)\,x}$$

Este último presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{(\sin x)\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$

Evaluándolo, obtenemos otra vez $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0$$

**Exercise 5.5.29** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

**Exercise 5.5.30** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$

**Exercise 5.5.31** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

**Exercise 5.5.32** $\lim_{x\to +\infty} x^2(2\arctan x^2 - \pi)$ *Ayuda:* $\lim_{x\to+\infty}\arctan x^2 = \frac{\pi}{2}$

**Exercise 5.5.33** *Suponiendo que una función $y = f(x)$ es derivable hasta el orden dos en $\Re$.Demostrar que* $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{\frac{1}{2}(x-a)^2} = f''(a)$

Evaluándolo, obtenemos $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'hôpital :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{\frac{1}{2}(x-a)^2} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = f''(a)$$

## 5.6 Máximos y mínimos condicionados

**Exercise 5.6.1** *Hallar un número positivo que sumado con su inverso nos dé una suma mínima*

Si llamamos $x$ a dicho número; entonces la expresión que nos permite calcular la suma de él con su inversa es:

$$S = x + \frac{1}{x}$$

Por la naturaleza del problema, el dominio de esta función es el conjunto $]0, +\infty[$

Vamos pues a determinar el valor de $x$ para el cual $S$ es mínima

- Calculamos $S\,' \to S\,' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ $(D(f\,') = ]0,+\infty[)$
- Valores que anulan $S\,'$ (posibles máximos o mínimos locales)

$$\frac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x^2 - 1 = 0 \to \begin{cases} x = 1 \in ]0,+\infty[ \\ x = -1 \notin ]0,+\infty[ \end{cases}$$

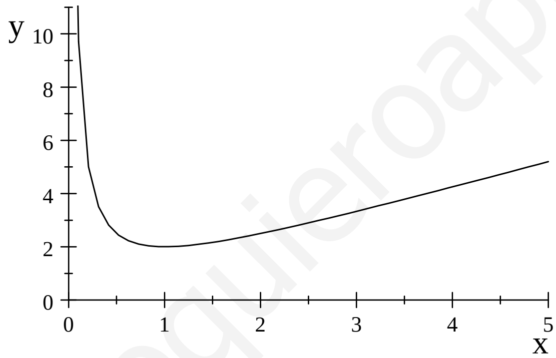
- Estudio del signo de $S\,'$

Si $0 \;<\; x < 1;\ x^2 - 1 < 0;\ S' = \dfrac{x^2-1}{x^2} < 0 \to S$ es est. decreciente en $]0,1[$

Si $1 \;<\; x;\ x^2 - 1 > 0;\ S' = \dfrac{x^2-1}{x^2} > 0 \to S$ es est. creciente en $]1,+\infty[$

Por lo tanto; por la condición suficiente de mínimo local (criterio de la $1^a$ derivada) podemos afirmar que para $x = 1$ la suma $S = 2$ es mínima

La gráfica de la función $S = x + \dfrac{1}{x}$ en $]0,+\infty[$




El punto $P(1,2)$ es mínimo local y absoluto de $S$ en$]0,+\infty[$

**Exercise 5.6.2** *Con un alambre de 2 m de longitud se quiere formar un rectángulo desuperficie máxima*

Si denominamos $x$ a la anchura e $y$ a la altura de dicho rectángulo; entonces su superficie es

$$S = x \cdot y \qquad (*)$$

Como nos dicen que el perímetro ha de ser de 2 $m$ entonces

$$2 = 2x + 2y \to 1 = x + y \to y = 1 - x$$

sustituyendo la expresión obtenida para $y$ en (*) tendremos:

$$S = x(1-x) = x - x^2$$

- El dominio de esta función es $]0,+1[$
- $S\,' = 1 - 2x$ $(D(S\,') = ]0,+1[$

- Valores que anulan $S\,'$ (posibles máximos o mínimos locales)

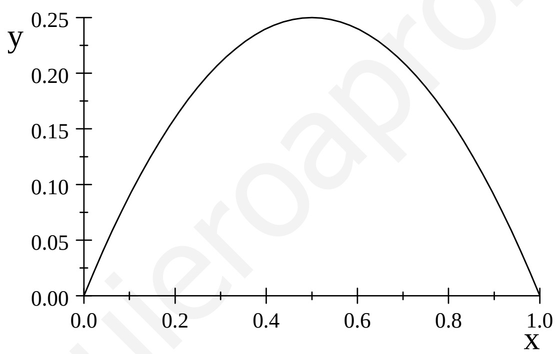
$$1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \in ]0,1[$$

- Estudio del signo de $S'$

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 &< x < \frac{1}{2};\ S' = 1 - 2x > 0; \rightarrow S \text{ es est. creciente en } ]0, \frac{1}{2}[ \\ \text{Si } \frac{1}{2} &< x < 1;\ S' = 1 - 2x < 0 \rightarrow S \text{ es est. decreciente en } ]\frac{1}{2}, 1[ \end{aligned}$$

Por lo tanto; por la condición suficiente de máximo local (criterio de la $1^a$ derivada) podemos afirmar que para $x = \frac{1}{2}$ m la superficie $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ $m^2$ es máxima

La gráfica de la función $S = x - x^2$ en $]0,1[$ es :




El punto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ es máximo local y absoluto de $S$ en$]0,1[$

**Exercise 5.6.3** *Con una cuerda de 30 m se quiere formar un triángulo isósceles deárea máxima. ¿ ¿Cuál es el valor de dicha área?*

Si denominamos $x$ a los dos lados iguales y $2y$ al lado desigual; entonces la altura de dicho triángulo la podemos expresar en función de $x$ e $y$

$$h = \sqrt{x^2 - y^2}$$

Su superficie es pues:

$$S = y \cdot \sqrt{x^2 - y^2} \qquad (**)$$

Por ser el perímetro de 30 m tendremos:

$$30 = 2x + 2y \rightarrow x = 15 - y$$

Sustituyendo en (**) la expresión obtenida para $y$ tendremos

$$S = y \cdot \sqrt{(15 - y)^2 - y^2} = y\sqrt{(225 - 30y)} = \sqrt{225y^2 - 30y^3}$$

- $D(f) = \{y \in \Re^+ \ /225 - 30y > 0\} = ]0, \frac{15}{2}[$

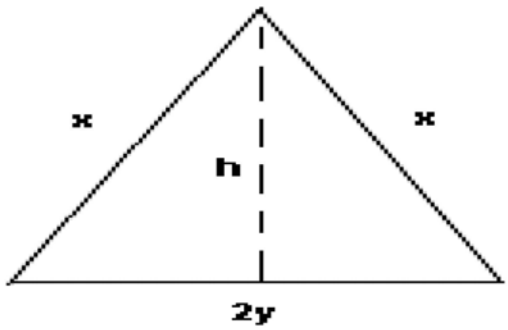



Figure 5.2:

- $\dfrac{dS}{dy} = S\,' = \dfrac{225y - 45y^2}{\sqrt{225y^2 - 30y^3}} = \dfrac{225 - 45y}{\sqrt{(225 - 30y)}}$
- Valores que anulan $S\,'$(posibles máximos o mínimos locales)

$$\frac{225 - 45y}{\sqrt{(225 - 30y)}} = 0; 225 - 45y = 0 \rightarrow y = 5m$$

- Estudio del signo de $S\,'$

  Si $0 \;<\; y < 5;\; S' = \dfrac{225 - 45y}{\sqrt{(225 - 30y)}} > 0; \rightarrow S$ es est. creciente en $]0, 5[$

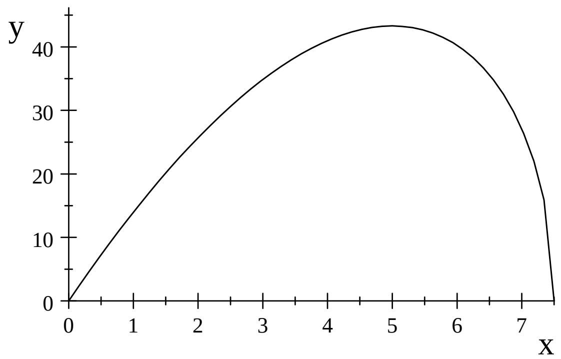
  Si $5 \;<\; x < \dfrac{15}{2};\; S' = \dfrac{225 - 45y}{\sqrt{(225 - 30y)}} < 0 \rightarrow S$ es est. decreciente en $]5, \dfrac{15}{2}[$

Por lo tanto; por la condición suficiente de máximo local (criterio de la $1^a$ derivada) podemos afirmar que para $y = 5$ la superficie $S = 5\sqrt{(225 - 150)} = 25\sqrt{3}\ m^2$es máxima

Fíjate que si $y = 5\ m \rightarrow x = 10\ m$

Luego; para que la superficie sea máxima el triángulo ha de ser equilátero

La gráfica de la función $S = y\sqrt{(225 - 30y)}$ en $]0, 7.5[$ es



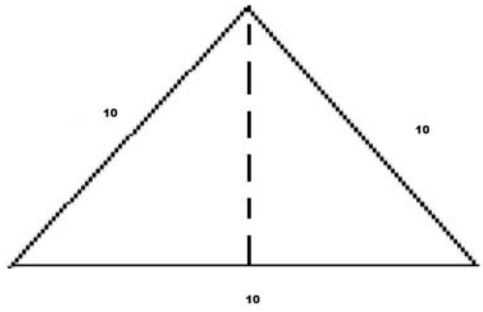



Figure 5.3:

El punto $P(5, 25\sqrt{3})$ es máximo local y absoluto de $S$ en$]0, 7.5[$

**Exercise 5.6.4** *De todos los rectángulos de área* $16\ m^2$. *¿Cuáles son las dimensiones del que tiene menor perímetro?*

Si denominamos $x$ a la anchura e $y$ a la alturade dicho rectángulo. Como el rectángulo tiene de supeficie 16 $\text{m}^2$;entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x.y = 16 \rightarrow y = \dfrac{16}{x} \\ P = 2x + 2y \end{array}\right\} \rightarrow P = 2x + \frac{32}{x} \text{ con } x \in ]0, +\infty[$$

- $P\ ' = 2 - \dfrac{32}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 32}{x^2}$

- Valores que anulan $P\ '$

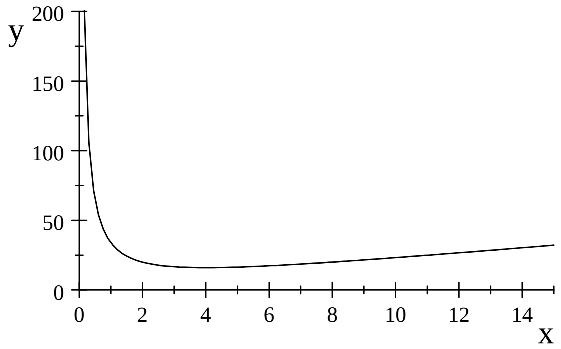
$$\frac{2x^2 - 32}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 32 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \in ]0, +\infty[ \\ x = -4 \notin ]0, +\infty[ \end{array} \right.$$

- Estudio del signo de $P'$

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 &< x < 4;\ P' = \frac{2x^2 - 32}{x^2} < 0; \rightarrow P \text{ es est. decreciente en } ]0, 4[ \\ \text{Si } 4 &< x;\ P' = \frac{2x^2 - 32}{x^2} > 0 \rightarrow P \text{ es est. decreciente en } ]4, +\infty[ \end{aligned}$$

Por lo tanto; por la condición suficiente de mínimo local (criterio de la $1^a$ derivada) podemos afirmar que para $x = 4$ m el perímetro $P = 8 + \dfrac{32}{4} = 16$ m es mínimo

La gráfica de la función $P = 2x + \dfrac{32}{x}$ en $]0, +\infty[$ es :




El punto $P(4,16)$ es mínimo local y absoluto de la función $P = 2x + \dfrac{32}{x}$ en $]0, +\infty[$

**Exercise 5.6.5** *Un jardinero ha de construir un parterre en forma de sector circular y que tenga un perímetro de 20 m . ¿ Qué radio ha de tener para lograr que el área sea máxima? ¿ Cual será entonces la longitud de su arco y su amplitud?*

Nota1 : Si denominas $x$ al ángulo en radianes ,$r$ al radio y $l$ a la longitud del arco; has de saber que $x = \dfrac{l}{r}$entonces como el perímetro es de 20 m resultará que:

$$2r + l = 20 \to 2r + rx = 20 \to x = \frac{20 - 2r}{r} \tag{a}$$

Nota 2: Si el área de un círculo de radio $r$ es $\pi r^2$ y a dicha superficie le corresponde una vuelta completa o sea $2\pi$ radianes; entonces la superficie del sector circular de radio $r$ y ángulo en radianes 1 es

$$S = \frac{r^2}{2}$$

Y la del sector de ángulo en radianes $x$ es:

$$S = \frac{r^2 x}{2} \tag{b}$$

Sustituyendo la expresión para $x$ de $(a)$ en la expresión $(b)$ tendremos:

$$S = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{20 - 2r}{r} = 10r - r^2$$

- Observa que $r$ ha de ser un número positivo que no puede ser igual o superior a10 $cm$
- $S\,' = 10 - 2r$
- Valores que anulan $S\,'$

$$10 - 2r = 0 \to r = 5$$

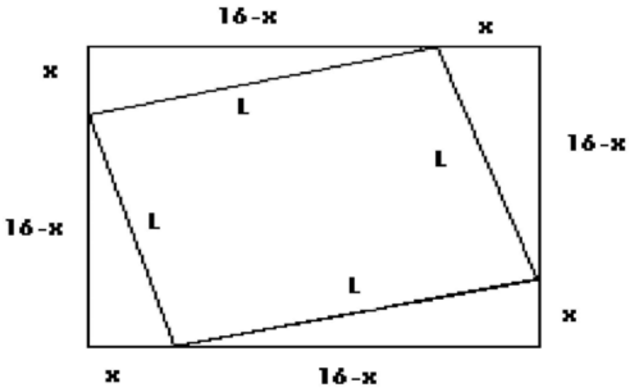
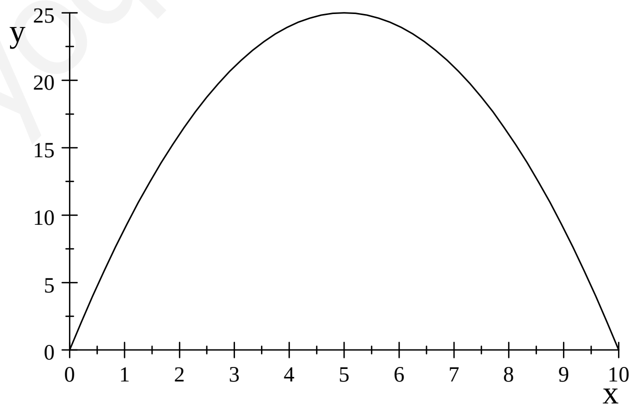



Figure 5.4:

- Como $S'' = -2$ ; entonces para $r = 5$ la superficie $S = 50 - 25 = 25cm^2$ es máxima
- Sustituyendo en la expresión a el valor de $r$ obtendremos que el ángulo en radianes es:
$$x = \frac{20 - 2 \cdot 5}{5} = 2 \text{ rad}$$
- Por ultimo, la longitud del arco correspondiente a este sector circular es $l = 10cm$

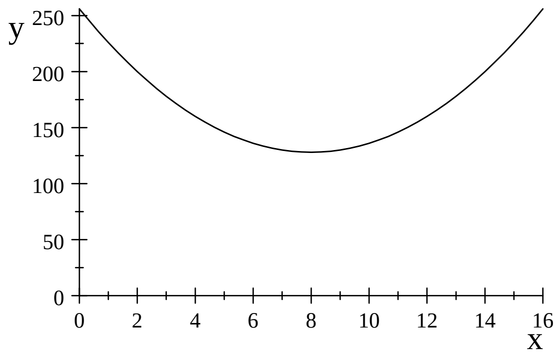
La gráfica de la función $S = 10r - r^2$ en el intervalo $[0, 10]$ es:




**Exercise 5.6.6** (Septiembre 2004) *De todos los cuadrados inscritos en un cuadrado de lado* 16 *m determina aquél cuya superficie sea mínima*

Es evidente, que la superficie del cuadrado inscrito es:
$S = L^2 = x^2 + (16 - x)^2 = 2x^2 - 32x + 256$ donde $x \in ]0, 16[$

El mínimo local y absoluto en $]0,16[$ de la función $S = 2x^2 - 32x + 256$, ha de ser el vértice de la parábola.
Si dibujamos su gráfica




Vemos que su mínimo es $V(8,128)$
Comprobémoslo

$$S' = 2x + 2(16 - x)(-1) = 4x - 32$$

Valores que anulan $S'$

$$4x - 32 = 0 \rightarrow x = 8$$

Estudio del signo de $S'$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } 0 < x < 8;\ S' < 0 \rightarrow S \text{ es est. decreciente en } ]0,8[ \\ \text{Si } 8 < x < 16;\ S' > 0\ \rightarrow S \text{ es est. creciente en } ]8,16[ \end{array}\right\}$$

Por la condición suficiente de mínimo local, podemos afirmar que para $x = 8$ $m$ , $S(8) = 128\ m^2$ es mínima. Fíjate que el lado del cuadrado mide $L = 8\sqrt{2}$

**Exercise 5.6.7** *De todos los rectángulos inscritos en un cuadrado de lado* 10 *m determina aquél cuya superficie sea máxima*

$$\left[\begin{array}{c} \text{Fíjate que:} \\ \overline{PQ} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2} \\ \overline{QR} = \sqrt{(10-x)^2 + (10-x)^2} = (10-x)\sqrt{2} \end{array}\right]$$

Es evidente; que la superficie del rectángulo $PQRT$ es:

$$S = \overline{PQ} \cdot \overline{QR} = 2x(10 - x) = 20x - 2x^2 \text{ donde } x \in ]0.10[$$

El máximo local y absoluto en $]0,10[$ de la función $S = 20x - 2x^2$, ha de ser el vértice de la parábola. Fíjate en su gráfica, y observarás que su máximo es el vértice $V(5,50)$

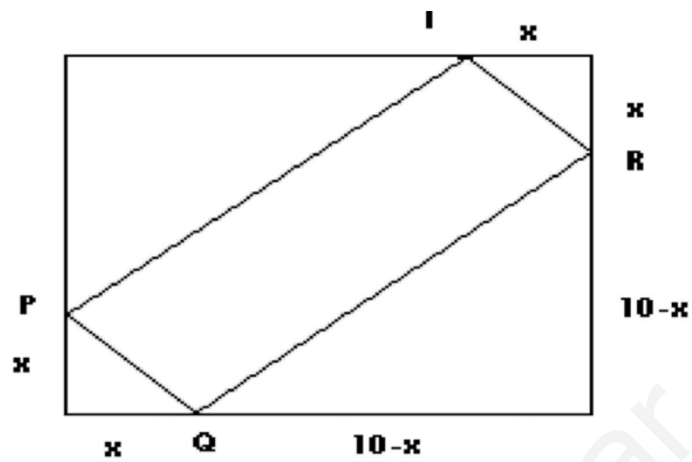
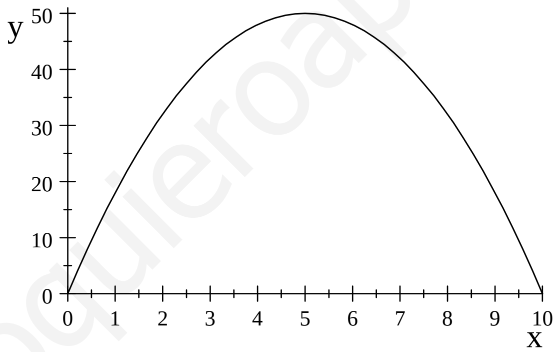



Figure 5.5:




Comprobémoslo
Calculemos de esta función su máximo

$$S' = 20 - 4x$$

Valores que anulan $S'$

$$20 - 4x = 0 \rightarrow x = 5$$

Estudio del signo de $S'$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } 0 < x < 5;\ S' > 0 \rightarrow S \text{ es est. creciente en } ]0,5[ \\ \text{Si } 5 < x < 10;\ S' < 0 \rightarrow S \text{ es est. decrecreciente en } ]5,10[ \end{array}\right\}$$

Por la condición suficiente de máximo local, podemos afirmar que para $x = 5$ $m$ , $S(5) = 50\ m^2$ es máxima. Fíjate que el rectángulo es un cuadrado cuyo lado mide $L = 5\sqrt{2}\ m$

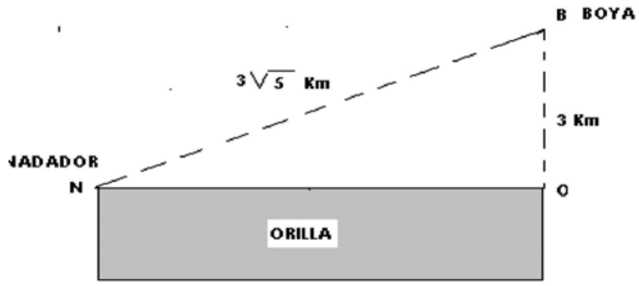



Figure 5.6:

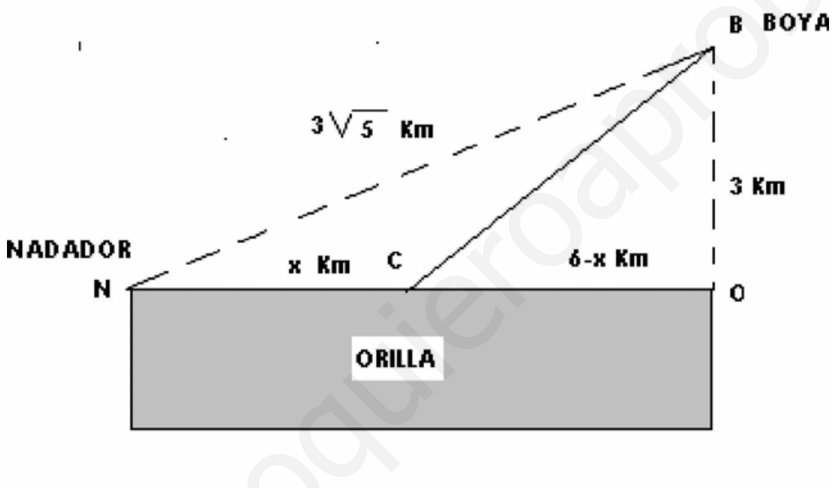



Figure 5.7:

**Exercise 5.6.8** (Junio 2004) *Desde un punto $N$ de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 km de la costa y dista $3\sqrt{5}$ km del punto $N$. Si recorriendo la orilla (que se supone recta y plana), su velocidad media es de 5 $\dfrac{km}{h}$ y nadando, de 3 $\dfrac{km}{h}$. ¿Cuánto tiempo deberá caminar hasta lanzarse al mar, para alcanzar la boya en el menor tiempo posible?*

Si te fijas en el dibujo $\overline{NO} = \sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2 - 3^2} = 6$

Si consideramos un punto $C$ y designamos por $x$ al segmento $\overline{NC}$, es evidente que $\overline{CO} = 6 - x$

El segmento $\overline{NC}$ es el trayecto que realiza andando el nadador. Como nos dicen que anda a una velocidad de 5 $\dfrac{km}{h}$ $\rightarrow$El tiempo empleado en recorrer esa distancia es $T_{\overline{NC}} = \dfrac{x}{5}$.

El segmento $\overline{CB} = \sqrt{3^2 + (6-x)^2}$ es el trayecto que realiza nadando . Como nos dicen que nada a una velocidad de 3 $\dfrac{km}{h}$ →El tiempo empleado en recorrer esa distancia es $T_{\overline{CB}} = \dfrac{\sqrt{3^2+(6-x)^2}}{3}$

El tiempo total empleado será:

$$T = T_{\overline{NC}} + T_{\overline{CB}} = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{3^2+(6-x)^2}}{3} \text{ con } x \in [0,6]$$

Calculemos pues el valor de $x$ para que el tiempo empleado sea mínimo

$$\frac{dT}{dx} = T' = \tfrac{1}{5} - \tfrac{(6-x)}{3\sqrt{3^2+(6-x)^2}}$$

Valores que anulan $T'$

$$\tfrac{1}{5} - \tfrac{(6-x)}{3\sqrt{3^2+(6-x)^2}} = 0 \to \tfrac{(6-x)}{\sqrt{3^2+(6-x)^2}} = \tfrac{3}{5}$$

Elevando al cuadrado, tendremos:

$$\tfrac{(6-x)^2}{3^2+(6-x)^2} = \tfrac{9}{25} \to 25\,(6-x)^2 = 81 + 9\,(6-x)^2$$

Aislando $(6-x)^2$

$$(6-x)^2 = \frac{81}{16} \to \begin{cases} 6-x = \dfrac{9}{4} \to x = \frac{15}{4} \\ 6-x = -\dfrac{9}{4} \to x = \frac{33}{4} > 6 \text{ no me sirve} \end{cases}$$

El único valor que anula $T'$ es $x = \frac{15}{4}\ Km$

Calculemos ahora la segunda derivada

$$\frac{dT'}{dx} = T'' = \tfrac{1}{3\sqrt{3^2+(6-x)^2}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{(6-x)^2}{\left(\sqrt{3^2+(6-x)^2}\right)^3}$$

Vamos a simplificarla

$$\frac{dT'}{dx} = T'' = \tfrac{1}{3\sqrt{3^2+(6-x)^2}}\left[1 - \tfrac{(6-x)^2}{3^2+(6-x)^2}\right] = \tfrac{1}{3\sqrt{3^2+(6-x)^2}} \cdot \tfrac{9}{3^2+(6-x)^2} = \tfrac{3}{\left(\sqrt{3^2+(6-x)^2}\right)^3}$$

$$Como \quad \left.\begin{array}{c} T'(\frac{15}{4}) = 0 \\ y \\ T''(\frac{15}{4}) = \frac{3}{\left(\sqrt{3^2+(6-\frac{15}{4})^2}\right)^3} = \frac{64}{1125} > 0 \end{array}\right\}$$

Por la condición suficiente de mínimo local (criterio de la segunda derivada), podemos afirmar que:

Para $x = \frac{15}{4}\ Km$ el tiempo empleado en llegar de $N$ a $B$ ,de la manera descrita en el problema, $T = \dfrac{\frac{15}{4}}{5} + \dfrac{\sqrt{3^2+(6-\frac{15}{4})^2}}{3} = 2\ h$ es mínimo

**Exercise 5.6.9** (Junio 2004) *Encontrar razonadamente el punto de la curva* $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ *en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esa pendiente.*

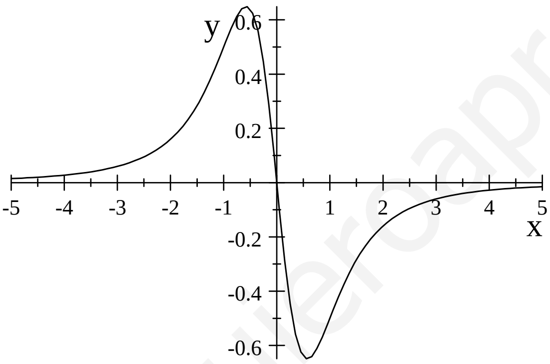
Calculemos $y'$

$$\text{Si } y = (1+x^2)^{-1} \to y' = -1(1+x^2)^{-2} = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

*Nos están pidiendo los valores de* $x$ *para los cuales la función* $H = y'$ *es máxima, siendo*

$$H = y' = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} \text{ (El dominio de } H \text{ es } \Re)$$

Si te fijas en su gráfica (la de $H$)




Observarás, que existe un único máximo local y absoluto para esta función. Determinémoslo

Obtengamos su derivada

$$H' = y'' = \frac{-2\left(1+x^2\right)^2 + 2x \cdot 4x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{\left(1+x^2\right)\left[-2(1+x^2)+8x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Calculemos los valores que anulan $H'$ (Posibles máximos y mínimos de $H$)

$$6x^2 - 2 = 0 \to \begin{cases} x = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ x = \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

*Estudio del signo de* $H'$ (*El signo de* $H'$ *depende del signo de* $6x^2-2$)

$$\begin{aligned} \text{Si } x &< -\frac{1}{3}\sqrt{3} \to H' > 0 \to H \text{ es est. creciente en}] - \infty, -\frac{1}{3}\sqrt{3}[ \\ \text{Si } -\frac{1}{3}\sqrt{3} &< x < \frac{1}{3}\sqrt{3} \to H' < 0 \to H \text{ es est. decreciente en } ] - \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}[ \\ \text{Si } \frac{1}{3}\sqrt{3} &< x \to H' > 0 \to H \text{ es est. creciente en } ]\frac{1}{3}\sqrt{3}, \infty[ \end{aligned}$$

Luego; podemos afirmar que:

Para $x=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ; $H=-\frac{2\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2\right)^2}=\frac{3}{8}\sqrt{3}$ es máxima

Para $x=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ; $H=-\frac{2\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2\right)^2}=-\frac{3}{8}\sqrt{3}$ es mínima

*Conclusión:*

El punto de la curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima es el punto de coordenadas

$$x=-\frac{1}{3}\sqrt{3}\;y=\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3}{4}.$$

El valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto es $\frac{3}{8}\sqrt{3}$

La ecuació de su recta tangente en ese punto es:

$$y-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\sqrt{3}(x+\frac{1}{3}\sqrt{3})$$

Nota: Este punto $P(\,-\frac{1}{3}\sqrt{3},\dfrac{3}{4})$ es el punto de inflexión cóncavo-convexo de la función $y=\dfrac{1}{1+x^2}$. Compruébalo tú, utilizando el criterio de la segunda derivada

Si nos hubiesen pedido también: ¿Cuál es el punto de la curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ en el que su recta tangente tiene pendiente mínima?

Dicho punto es el punto de coordenadas

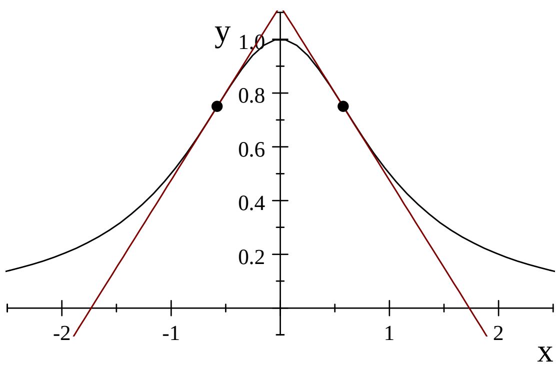
$$x=\frac{1}{3}\sqrt{3}\;y=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3}{4}.$$

El valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto es $-\frac{3}{8}\sqrt{3}$

La ecuació de su recta tangente en ese punto es:

$$y-\frac{3}{4}=-\frac{3}{8}\sqrt{3}(x-\frac{1}{3}\sqrt{3})$$

Nota: Este punto $Q(\,\frac{1}{3}\sqrt{3},\dfrac{3}{4})$ es el punto de inflexión convexo-cóncavo de la función $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.Compruébalo tú, utilizando el criterio de la segunda derivada



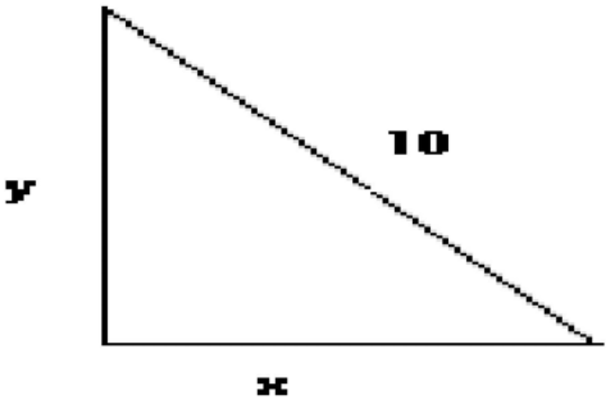



Figure 5.8:

**Exercise 5.6.10** *De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa* 10 $m$ *determina las dimensiones del que tenga superficie máxima*

Como $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=100 \\ S=\dfrac{x\cdot y}{2} \end{array}\right\} \to S=\dfrac{x\cdot\sqrt{100-x^2}}{2}$ con $x\in ]0,10[$

Nota: $S$ es máxima$\Leftrightarrow$ $H=S^2=\dfrac{x^2\cdot\left(100-x^2\right)}{4}=\dfrac{1}{4}\left(100x^2-x^4\right)$ lo es

Calculemos $H'$

$$H'=\frac{1}{4}\cdot\left(200x-4x^3\right)$$

Puntos singulares de $H$ (Valores que anulan $H'$)

$$200x-4x^3=0\to\left\{\begin{array}{l} x=0 \text{ no es del dominio} \\ x=5\sqrt{2} \\ x=-5\sqrt{2} \text{ no es del dominio} \end{array}\right.$$

Estudio del signo de $H'$ en $]0,10[$

$$\begin{array}{rcl} \text{Si } 0 & < & x<5\sqrt{2}\to H'>0\to H \text{ es est. creciente en } ]0,5\sqrt{2}[ \\ \text{Si } 5\sqrt{2} & < & x<10\to H'<0\to H \text{ es est. decreciente en } ]5\sqrt{2},10[ \end{array}$$

Por lo tanto; para $x=5\sqrt{2}$ $\quad H=S^2=\dfrac{1}{4}\left(100\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(5\sqrt{2}\right)^4\right)=625$ es máxima

Así pues; el triángulo rectangulo de hipotenusa 10 $m$ y cuya superficie $\left(S=25m^2\right)$ es máxima es el que tiene por catetos$\left\{\begin{array}{l} x=5\sqrt{2} \\ y=\sqrt{100-50}=5\sqrt{2} \end{array}\right.$. Se trata de un triángulo rectángulo isósceles.

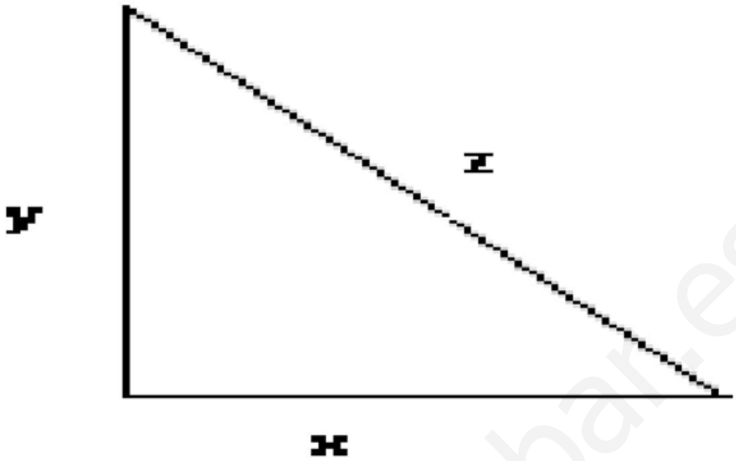


Figure 5.9:

**Exercise 5.6.11** *De todos los triángulos rectángulos de superficie* 100 $m^2$ *determina las dimensiones del que tenga perímetro mínimo*

$$\text{Como } \left.\begin{array}{l} 100 = \dfrac{x \cdot y}{2} \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{200}{x} \\ x^2 + \dfrac{40000}{x^2} = z^2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{200}{x} \\ \sqrt{x^2 + \dfrac{40000}{x^2}} = z \end{array}\right\}$$

La función a minimizar es el perímetro del triangulo.

Como $P = x + y + z \to P = x + \dfrac{200}{x} + \sqrt{x^2 + \dfrac{40000}{x^2}}$ con $x \in ]0, +\infty[$

$$P' = 1 - \frac{200}{x^2} + \frac{\left(2x - \frac{80000}{x^3}\right)}{2\sqrt{\left(x^2 + \frac{40000}{x^2}\right)}} = \frac{x^2 - 200}{x^2} + \frac{\left(x^4 - 40000\right)}{x^2\sqrt{\left(x^4 + 40000\right)}}$$

Para facilitar los valores que anulan $P'$ vamos a factorizar su expresión:

$$P' = \frac{x^2 - 200}{x^2} + \frac{\left(x^4 - 40000\right)}{x^2\sqrt{\left(x^4 + 40000\right)}} =^{11} \frac{\left(x^2 - 200\right)}{x^2}\left[1 + \frac{\left(x^2 + 200\right)}{\sqrt{\left(x^4 + 40000\right)}}\right]$$

Valores que anulan $P'$

$\dfrac{\left(x^2 - 200\right)}{x^2}\left[1 + \dfrac{\left(x^2 + 200\right)}{\sqrt{\left(x^4 + 40000\right)}}\right] =^{12} 0 \to \left(x^2 - 200\right) = 0 \to x = \begin{cases} 10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} \text{ no es del dominio} \end{cases}$

Estudio del signo de $P'$

Si $0 < x < 10\sqrt{2} \to P' < 0 \to P$ es est. decreciente en $]0, 10\sqrt{2}[$

[11] $\left(x^4 - 40000\right) = \left(x^2 - 200\right)\left(x^2 + 200\right)$

[12] $1 + \dfrac{\left(x^2 + 200\right)}{\sqrt{\left(x^4 + 40000\right)}} > 0$

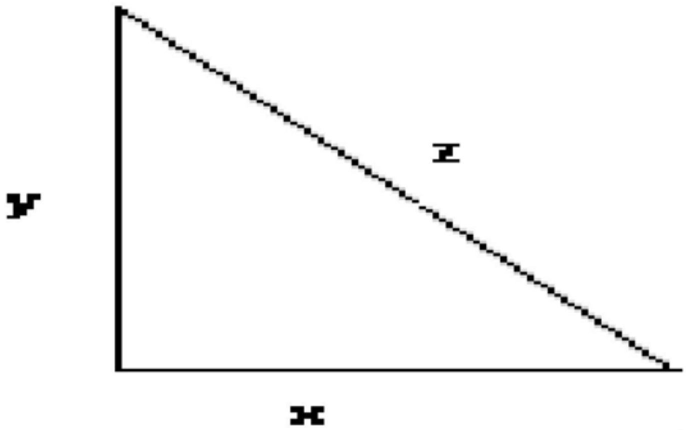



Figure 5.10:

Si $x > 10\sqrt{2} \rightarrow P' > 0 \rightarrow P$ es est. creciente en $]10\sqrt{2}, +\infty[$

Para $x = 10\sqrt{2}\, m \qquad y = \dfrac{200}{10\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}\, m \qquad z = \sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2 + \dfrac{40000}{\left(10\sqrt{2}\right)^2}} =$ $20\ m$ el perímetro $P = 20\sqrt{2} + 20$ es mínimo.

*Se trata pues de un triángulo rectángulo isósceles.*

**Exercise 5.6.12** *De todos los triángulos rectángulos de perímetro* 30 $m$ *determina las dimensiones del que tenga superficie máxima.*

La función a maximizar es la superficie $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$

Intentemos encontrar una relación entre las variables $x$ e $y$, a partir de los datos del problema.

Por ser el perímetro de 30 $m$

$$x + y + z = 30 \tag{5.1}$$

Por el teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{5.2}$$

De la expresión (1) despejamos $z$ y elevamos al cuadrado, obteniendo:

$$z^2 = (30 - x - y)^2 = 900 - 60x - 60y + x^2 + 2xy + y^2 \tag{5.3}$$

Sustituyendo lo obtenido para $z^2$ en la expresión (2); tendremos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 900 - 60x - 60y + x^2 + 2xy + y^2 && (5.4) \\ 0 &= 900 - 60x - 60y + 2xy && (5.5) \end{aligned}$$

Aislando $y$ de la expresión (5)

$$y = \frac{60x - 900}{2x - 60} = \frac{30(x-15)}{(x-30)} \tag{5.6}$$

Así pues; la función a maximizar es:

$$S = \frac{30x(x-15)}{2(x-30)} = 15\frac{(x^2-15x)}{(x-30)} \text{ con } x \in ]0,30[$$

La derivada de $S$ es:

$$S' = 15\frac{(2x-15)(x-30)-(x^2-15x)}{(x-30)^2} = 15\frac{x^2-60x+450}{(x-30)^2}$$

Valores que anulan $S'$ (posibles máximos o mínimos locales)

$$x^2 - 60x + 450 = 0 \to \begin{cases} x = 30 + 15\sqrt{2} \notin ]0,30[ \\ x = 30 - 15\sqrt{2} \end{cases}$$

Estudio del signo de $S'$

$$\text{Si } 0 < x < 30 - 15\sqrt{2} \to S' > 0 \to S \text{ es est. crec. en } ]0, 30-15\sqrt{2}[$$

$$\text{Si } 30 - 15\sqrt{2} < x < 30 \to S' < 0 \to S \text{ es est. decrec. en } ]30-15\sqrt{2}, 30[$$

Luego para $x = 30 - 15\sqrt{2}$ $m$ $y = \dfrac{30(30-15\sqrt{2}-15)}{(30-15\sqrt{2}-30)} = 30 - 15\sqrt{2}$ $m$ la superficie $S = \dfrac{\left(30-15\sqrt{2}\right)^2}{2} = \dfrac{225}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)^2$ $m^2$ es máxima

*Se trata pues de un triángulo rectángulo isósceles.*

**Exercise 5.6.13** *¿ Qué dimensiones tiene el rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio* 8 *m de radio?*

**Exercise 5.6.14** *Se necesita construir un marco rectangular para una ventana de 1 $m^2$ de área. El coste del marco se estima en* 500 *pts por cada metro de altura y* 320 *m. de anchura. ¿Cuáles son las dimensiones para que el coste sea mínimo?*

**Exercise 5.6.15** *Una hoja de papel tiene 18 $cm^2$ de texto impreso . Los márgenes superior e inferior han de tener* 2 *cm cada uno y los laterales* 1 *cm*
*¿ Dimensiones del papel para que el gasto sea mínimo?*

**Exercise 5.6.16** *Una hoja de papel debe contener 18 $cm^2$ de texto impreso. Los márgenes superior e inferio han de tener* 2 *cm cada uno y los laterales* 1 *cm*
*¿ Dimensiones del papel para que el perímetro sea mínimo?*

**Exercise 5.6.17** *Se desea construir un bote cilíndrico de volumen* 1 $m^3$*.¿ Cuáles son las dimensiones del que tenga superficie mínima?*

**Exercise 5.6.18** (Septiembre 2005) *El perímetro de un sector circular de radio R vale 4 m . ¿ Cuántos radianes* $\alpha$ *ha de medir su ángulo central para que su área sea máxima?*
*El área de otro sector circular es* $1\ m^2$. *¿Para qué radio es mínimo su perímetro?*

**Exercise 5.6.19** *Se desea inscribir en un triángulo equilátero, de* $10$ *m de lado, un rectángulo de manera que su base esté contenida en uno de sus lados.¿ Dimensiones de dicho rectángulo para que su superficie sea máxima?*

**Exercise 5.6.20** *¿ Cuáles son las dimensiones de un cilindro inscrito en una esfera de radio 6 m para que su volumen sea máximo?*

**Exercise 5.6.21** *¿ Cuáles son las dimensiones de un rectángulo inscrito en una semicircunferencia de radio 6 m para que su superficie sea máxima?*
*Nota: Uno de los lados ha de estar contenido en el diámetro de la semicircunferencia*

**Exercise 5.6.22** *¿ Cuáles son las dimensiones de un triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia de radio 6 m para que su superficie sea máxima?*
*Nota: La hipotenusa es el diámetro de la semicircunferencia*

**Exercise 5.6.23** *De un rectángulo de dimensiones 20 cm de altura por 18 cm de anchura, cortamos en las cuatro esquinas un cuadrado exactamente igual y después construimos una caja rectangular. ¿Cuánto ha de valer el lado del cuadrado para que el volumen de la caja sea máximo?*

**Exercise 5.6.24** *De todos los conos circunscritos en la esfera de radio* $6$ *m. Determina las dimensiones del que tenga volumen mínimo*
*Ayuda: El volumen de un cono es*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

**Exercise 5.6.25** *¿ Cuáles son las dimensiones de un triángulo rectángulo que está inscrito en una semicircunferencia de radio 6 m para que su superficie sea máxima?*
*Nota: La hipotenusa ha de estar contenida en el diámetro de la semicircunferencia*

**Exercise 5.6.26** *Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz* $g = 10$ *cm y de capacidad máxima.¿Cuál debe ser el radio ,r, de la base y la altura* $h$*?*
*Ayuda: El volumen de un cono es*

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ g^2 &= h^2 + r^2 \end{aligned}$$

Como la generatriz es de 10 cm$\rightarrow 100 = h^2 + r^2 \rightarrow r^2 = 100 - h^2$
La funcióna maximizar es :

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(100 - h^2\right)h = \frac{1}{3}\pi\left(100h - h^3\right) \text{ con } h \in [0, 10]$$

Nota:Si $\begin{bmatrix} h=0 \to V=0 \\ h=10 \to V=0 \end{bmatrix}$
Calculamos la primera y segunda derivada de la función volumen

$$\begin{aligned} V\,'(h) &= \frac{1}{3}\pi(100-3h^2) \\ V\,''(h) &= \frac{1}{3}\pi(-6h) \end{aligned}$$

El único valor que anulan la primera derivada es $h=\frac{10}{3}\sqrt{3}$ y como para él se verificda además que $V\,''(\frac{10}{3}\sqrt{3})=\dfrac{1}{3}\pi(-20\sqrt{3})$ <0. Entonces, por la criterio de la segunda derivada de máximo local (en este caso es absoluto también); podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} \text{Para } h &= \frac{10}{3}\sqrt{3}\text{ cm y } r=\sqrt{100-\left(\frac{10}{3}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{10}{3}\sqrt{6}\text{ cm} \\ \text{El volumen V} &= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{10}{3}\sqrt{6}\right)^2\frac{10}{3}\sqrt{3}=\frac{2000}{27}\sqrt{3}\pi\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

**Exercise 5.6.27** *Calcula la altura y el radio que debe tener un bote cilíndrico de leche condensada, cuya área total (dos tapas también) es de 150 cm$^2$ para que su volumen sea máximo*
*Ayuda: La superficie total de un cilindro y su volumen son respectivamente*

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2+2\pi rh \\ V &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

**Exercise 5.6.28** *De todas las rectas que pasan por el punto $P(1,2)$ encuentra la que determina con los ejes coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima*
*Ayuda: la ecuación canónica de una recta en el plano, que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $P(a,0),Q(0,b)$ es:*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

**Exercise 5.6.29** *Determina el punto de la recta $3x+y-4=0$ cuya distancia al punto $Q(2,-1)$ sea mínima. Calcula la distancia del punto $Q$ a la recta dada*

Como la recta viene dada por la ecuación $3x+y-4=0\to y=-3x+4$
Se trata de determinar el punto de la recta $P(x,-3x+4)$ tal que:

$$dist(P,Q)=\left\|\overrightarrow{QP}\right\| \text{ sea mínima}$$

$$\begin{bmatrix} P(x,-3x+4) \\ Q(2,-1) \end{bmatrix} \to \overrightarrow{QP}=(x-2,-3x+4+1)\to\overrightarrow{QP}(x-2,-3x+5)$$

La función a minimizar es:

$$H(x)=dist(P,Q)=\sqrt{(x-2)^2+(-3x+5)^2}$$

Minimizar una función que siempres es positiva para cualquier valor de su dominio es equivalente a minimizar el cuadrado de ésta

El problema queda reducido a determinar el mínimo de la función

$$J(x) = H^2(x) = (x-2)^2 + (-3x+5)^2$$

Para ello, calculamos su primera y su segunda derivada derivada

$$\begin{aligned} J'(x) &= 2(x-2) + 2(-3x+5)(-3) = 20x - 34 \\ J''(x) &= 20 \end{aligned}$$

El único valor que anula su primera derivada es $x = \frac{17}{10}$ y además para él se verifica que $J''(\frac{17}{10}) > 0$. Entonces; por el criterio de la segunda derivada para mínimos locales (es también mínimo absoluto); podemos afirmar que para el punto de la recta $P(\frac{17}{10}, -3\frac{17}{10}+4) = P\left(\frac{17}{10}, -\frac{11}{10}\right)$ se verifica que $J$ es mínima

Calculemos ahora $J$ y $H$

$$J(\frac{17}{10}) = \left(\frac{17}{10} - 2\right)^2 + \left(-\frac{51}{10} + 5\right)^2 = \frac{1}{10} \to H = dist(P,Q) = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Nota: Recuerda que para calcular la distancia de un punto $Q(a,b)$ a una recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$ se utiliza la fórmula:

$$dist(Q,r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Segun lo anterior, la distancia que nos han pedido la podíamos haber calculado así:

$$dist(Q(2,-1), r \equiv 3x + y - 4) = \frac{|3{\cdot}2 + 1(-1) - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

**Exercise 5.6.30** *Unos altos hornos producen al día $x$ toneladas de acero de baja ca-
lidad y $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo*

Solución:

El coste de producción diaria viene dado por la función

$$\begin{aligned} C &= 100x + 250\frac{40-5x}{10-x} = 100x + 250\frac{5x-40}{x-10} \\ C &= \frac{\left(100x^2 + 250x - 10000\right)}{x-10} \text{ con } 0 \le x \le 8 \end{aligned}$$

Nota: Si el valor de venta de la producción diaria es máximo $\to$ el coste ha de ser máxímo

Fíjate que si $\left[\begin{array}{c} x = 0 \to C = 1000 \; euros \\ x = 8 \to C = 800 \text{ euros} \end{array}\right]$

Calculemos pues el valor de $x \in [0,8]$ para que el coste sea máximo.

$C(x) = \frac{\left(100x^2+250x-10000\right)}{x-10} \to C' = \frac{100}{(x-10)^2}\left(x^2 - 20x + 75\right)$

Valores que anulan $C\,'$ son:

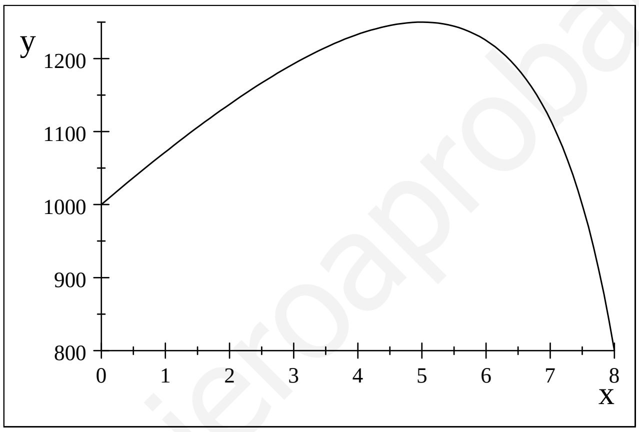
$$x^2 - 20x + 75 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 15 \text{ no interesa} \\ 5 \end{cases}$$

Calculemos el coste para $x = 5$

$$C(5) = \frac{\left(100\left(5^2\right) + 250\,(5) - 10000\right)}{5 - 10} = 1250$$

Como $C(5) > C(0)$ y $C(5) > C(8)$ $\rightarrow$El máximo absoluto para la función coste en $[0, 8]$ es $x = 5$ y $C(5) = 1250$ euros

La gráfica de la función coste $C = \frac{\left(100x^2+250x-10000\right)}{x-10}$ en $[0, 8]$ es



# Chapter 6

# CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD



Ya sabemos como determinar si una función es estric. creciente o decreciente en un punto. Pero nos interesa determinar si la función crece o decrece de forma cóncava o convexa.

Nuestra finalidad va a ser definir y caracterizar las funciones cóncavas o convexas en un punto.

## 6.1 Función cóncava en un punto

Dada una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$. Sea $x_0 \in ]a,b[$

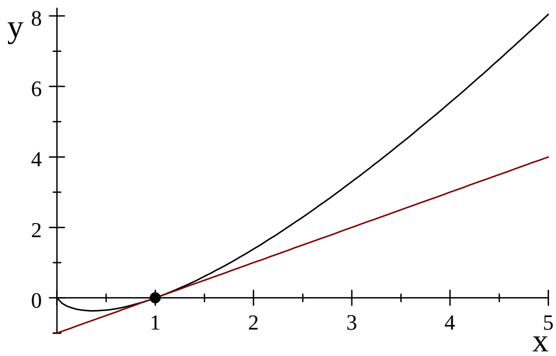
Diremos que una función $y = f(x)$ es cóncava en un punto $x_0$; siempre que podamos encontrar un entorno de centro $x_0$ y de radio $\delta$ (suficientemente pequeño) de tal manera que en dicho entorno la recta tangente a la función en ese punto quede por debajo de la gráfica de $f$ (salvo en el punto de tangencia $P(x_0, f(x_0))$ )

$f$ es cóncava en $x_0 \Leftrightarrow \exists\ \delta > 0$ (tan pequeño como queramos) tal que $\forall x \in E^*_\delta(x_0) \subset ]a,b[$ siempre se verifica que $y_t(x) < f(x)$

Es decir que

$$y_t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) < f(x)$$
$$\forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \sim \{x_0\} \subset ]a,b[$$
$$f'(x_0)(x - x_0) < f(x) - f(x_0)\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \sim \{x_0\} \subset ]a,b[$$

*Ejemplo:* La funció $y = x \ln x$ es cóncava en el punt $P(1,0)$




En ese punto $P$ la ecuación de su recta tangente es $y = x - 1$. Fíjate que alrededor de ese punto, los puntos de la gráfica de la función quedan por encima de esa recta tangente.

### 6.1.1 Caracterización de las funciones cóncavas

**Teorema** Sea $f$ una función continua en $[a, b]$, derivable hasta el orden dos $\forall x \in ]a, b[$. Si $f\,'$ es estrictamente creciente en ]a,b[$\Leftrightarrow f$ es cóncava en $]a, b[$

*Demostración de* $\Rightarrow$ [1]

Método reducción al absurdo

Supongamos que $f$ no es concava en $]a, b[\rightarrow \exists x_0 \in ]a, b[$ en el que $f$ no es cóncava

Al ser $f$ no cóncava en $x_0$ podemos afirmar que $\forall \delta > 0$ (con $E^*_\delta(x_0) \subset ]a, b[$) $\exists x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\sim \{x_0\}$ tal que $y_t(x) \geq f(x)$

Es decir:

$$f\,'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\sim \{x_0\}$$
$$f\,'(x_0)(x - x_0) \geq f(x) - f(x_0)\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\sim \{x_0\}$$

Posibilidades:

a) Si $x > x_0$ entonces $f\,'(x_0) \geq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Como la función $f$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x_0, x]$,entonces podemos afirmar que $\exists c \in ]x_0, x[\subset]a, b[$ tal que:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f\,'(c)$$

[1] *Ayuda:*

- Diremos que una función $g$ es estrictamente creciente en $]a, b[\Leftrightarrow \forall\ c, t \in ]a, b[\ g(c) < g(t)$ siempre que $c < t$
- $g$ no es estrictamente creciente en $]a, b[\Leftrightarrow \exists\ c, t \in ]a, b[$ con $c < t$ tal que $g(c) \geq g(t)$
- $g$ no es estrictamente creciente en $]a, b[\Leftrightarrow$Encontramos, al menos dos números reales , $c$ y $t$ con $c < t$ , del intervalo $]a, b[$ tal que $g(c)$ no es menor que $g(t)$

Así pues:

Hemos encontrado dos números reales $c$ y $x_0 \in ]a,b[$ tal que $f\ '(x_0) \geq f\ '(c)$ siendo $c > x_0$.Podemos afirmar que entonces, la función $f'$ no es estrictamente creciente.

Lo cual es absurdo; está en contradición con la hipótesis de que $f\ '$ es estrictamente creciente en $]a,b[$

b) Si $x < x_0$ entonces $f\ '(x_0) \leq \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Como la función $f$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x,x_0]$,entonces podemos afirmar que $\exists c \in ]x,x_0[ \subset ]a,b[$ tal que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f\ '(c)$$

Así pues:

Hemos encontrado dos números reales $c$ y $x_0 \in ]a,b[$ tal que $f\ '(x_0) \leq f\ '(c)$ siendo $x_0 > c$. Podemos afirmar que entonces, la función $f'$ no es estrictamente creciente.

Lo cual es absurdo; está en contradición con la hipótesis de que $f\ '$ es estrictamente creciente en $]a,b[$

Como en ambas situaciones llegamos a un absurdo. Entonces lo que hemos supuesto es falso

*Demostración de* $\Leftarrow$

Por ser f cóncava en $]a,b[ \rightarrow$ entonces $f$ es cóncava $\forall x_0 \in ]a,b[$

Por lo tanto sea cual sea $x_0 \in ]a,b[$ siempre podremos encontrar un $\delta > 0$ (tan pequeño como queramos) tal que $\forall x \in E^*_\delta(x_0) \subset ]a,b[$ siempre se verifica que $y_t(x) < f(x)$

Es decir que

$$f\ '(x_0)(x-x_0) < f(x)-f(x_0)\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[ \sim \{x_0\} \subset ]a,b[$$

Posibilidades:

**a)** Si $x > x_0$ entonces $f\ '(x_0) < \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Como la función $f$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x_0,x]$,entonces podemos afirmar que $\exists c \in ]x_0,x[ \subset ]a,b[$ tal que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f\ '(c)$

Por lo tanto:

Si $x_0 < c < x$ entonces $f\ '(x_0) < f\ '(c)$ con $c \in ]x_0,x[$

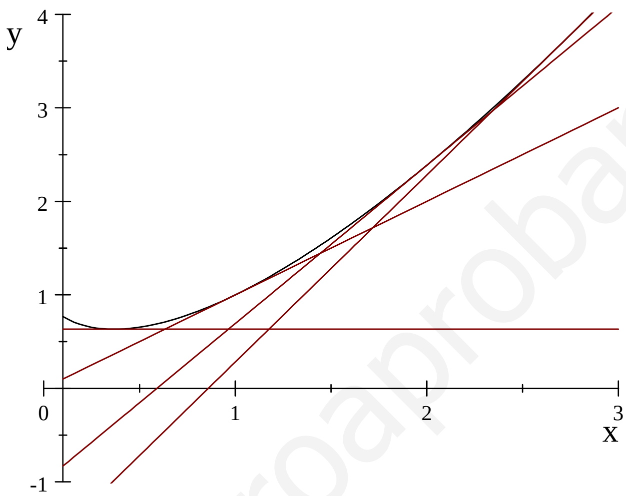
**b)** Si $x < x_0$ entonces $f\ '(x_0) > \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Como la función $f$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x,x_0]$,entonces podemos afirmar que $\exists c \in ]x,x_0[ \subset ]a,b[$ tal que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f\ '(c)$

Por lo tanto:

Si $x < c < x_0$ entonces $f\,'(c) < f\,'(x_0)$ con $c \in ]x_0, x[$
En ambos casos hemos comprobado que:
$\forall\ x_0 \in ]a,b[$ siendo $c \neq x_0$ y $c \in ]a,b[$ siempre se verifica que:
$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x_0 < c & \text{entonces } f\,'(x_0) < f\,'(c) \\ \text{Si } c < x_0 & \text{entonces } f\,'(c) < f\,'(x_0) \end{array}\right\} \rightarrow f\,' \text{ es est. creciente en } ]a,b[$$

*Interpretación geométrica de este teorema*




*A medida que las $x$ son cada vez mayores dentro del intervalo $]a,b[$, siempre observamos que las pendientes de sus correspondientes rectas tangentes son cada vez mayores$\Leftrightarrow$la función $f$ es siempre cóncava en $]a,b[$*

### 6.1.2 Condición suficiente de concavidad en un punto

**Teorema** Sea $f$ una función continua en $[a,b]$ y tal que $f\,''(x_0) > 0$ siendo $x_0 \in ]a,b[$.Con estas hipótesis siempre podremos afirmar que la función $f$ es cóncava en $x_0$

*DEMOSTRACION*
Por ser $f\,''(x_0) > 0 \rightarrow f\,'$ es est. creciente en $x_0$ , y por lo tanto en virtud del teorema de caracterización de funciones cóncavas podemos afirmar que $f$ será cóncava en $x_0$

### 6.1.3 Condición suficiente de concavidad en un intervalo

**Teorema** Sea $f$ una función continua en $[a,b]$ y tal que $f\,''(x) > 0\ \forall x \in ]a,b[$.Con estas hipótesis siempre podremos afirmar que la función $f$ es cóncava en $]a,b[$

## 6.2 Función convexa en un punto

Dada una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$. Sea $x_0 \in ]a,b[$

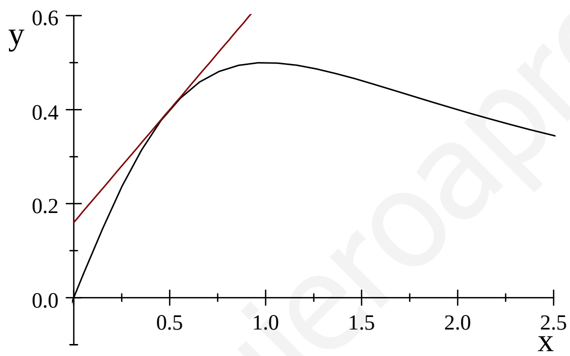
Diremos que una función $y = f(x)$ es cóncava en un punto $x_0$; siempre que podamos encontrar un entorno de centro $x_0$ y de radio $\delta$ (suficientemente pequeño) de tal manera que en dicho entorno la recta tangente a la función en ese punto quede por encima de la gráfica de $f$ (salvo en el punto de tangencia $P(x_0, f(x_0))$ )

$f$ es cóncava en $x_0 \Leftrightarrow \exists\ \delta > 0$ (tan pequeño como queramos) tal que $\forall x \in E^*_\delta(x_0) \subset ]a, b[$ siempre se verifica que $y_t(x) > f(x)$

Es decir que

$$y_t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) > f(x)$$
$$\forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\sim \{x_0\} \subset ]a, b[$$
$$f'(x_0)(x - x_0) > f(x) - f(x_0)\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\sim \{x_0\} \subset ]a, b[$$

*Ejemplo:* La funció $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ es convexa en el punt $P(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5})$




En ese punto $P$ la ecuación de su recta tangente es $y = \dfrac{12}{25}x + \dfrac{4}{25}$. Fíjate que alrededor de ese punto, los puntos de la gráfica de la función quedan por debajo de esa recta tangente.

### 6.2.1 Caracterización de las funciones convexas

**Teorema** Sea $f$ una función continua en $[a, b]$, derivable hasta el orden dos $\forall x \in ]a, b[$. Si $f\ '$ es estrictamente decreciente en ]a,b[$\Leftrightarrow f$ es convexa en $]a, b[$

*Demostración de* $\Rightarrow$ [2]

Método reducción al absurdo

Supongamos que $f$ no es convexa en $]a, b[ \rightarrow \exists x_0 \in ]a, b[$ en el que $f$ no es convexa

[2] *Ayuda:*

- Diremos que una función $g$ es estrictamente decreciente en $]a, b[\Leftrightarrow \forall\ c, t \in ]a, b[\ g(c) < g(t)$ siempre que $c > t$
- $g$ no es estrictamente decreciente en $]a, b[\Leftrightarrow \exists\ c, t \in ]a, b[$ con $c > t$ tal que $g(c) \geq g(t)$
- $g$ no es estrictamente creciente en $]a, b[\Leftrightarrow$Encontramos , al menos dos números reales , $c$ y $t$ siendo $c > t$ , del intervalo $]a, b[$ tal que $g(c)$ no es menor que $g(t)$

Al ser $f$ no convexa en $x_0$ ; podemos afirmar que $\forall\delta > 0$ (siendo $E^*_\delta(x_0) \subset ]a,b[$) $\exists x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\}$tal que $y_t(x) \leq f(x)$

Es decir:

$$y_t(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\}$$
$$f'(x_0)(x-x_0) \leq f(x) - f(x_0)\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\}$$

Posibilidades:

a) Si $x > x_0$ entonces $f'(x_0) \leq \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Como la función $f$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x_0,x]$,entonces podemos afirmar que $\exists c \in ]x_0,x[\subset ]a,b[$ tal que:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$$

Así pues:

Hemos encontrado dos números reales $c$ y $x_0 \in ]a,b[$ tal que $f'(x_0) \leq f'(c)$ siendo $x_0 < c$. Podemos afirmar entonces, la función $f'$ no es estrictamente decreciente.

Lo cual es absurdo; ya que está en contradición con la hipótesis de que $f'$ es estrictamente decreciente en $]a,b[$

b) Si $x < x_0$ entonces $f\ '(x_0) \geq \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Como la función $f$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x,x_0]$,entonces podemos afirmar que $\exists c \in ]x,x_0[\subset ]a,b[$ tal que:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$$

Así pues:

Hemos encontrado dos números reales $c$ y $x_0 \in ]a,b[$ tal que $f\ '(x_0) \geq f\ '(c)$ siendo $x_0 > c$.Podemos afirmar entonces que la función $f'$ no es estrictamente decreciente.

Lo cual es absurdo; ya que está en contradición con la hipótesis de que $f\ '$ es estrictamente decreciente en $]a,b[$

Como en ambas situaciones llegamos a un absurdo. Entonces lo que hemos supuesto es falso

*Demostración de* $\Leftarrow$

Por ser f convexa en $]a,b[\rightarrow$ entonces $f$ es convexa $\forall x_0 \in ]a,b[$

Por lo tanto sea cual sea $x_0 \in ]a,b[$ siempre podremos encontrar un $\delta > 0$ (tan pequeño como queramos) tal que $\forall x \in E^*_\delta(x_0) \subset ]a,b[$ siempre se verifica que $y_t(x) > f(x)$

Es decir que

$$y_t(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) > f(x)$$
$$\forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\} \subset ]a,b[$$
$$f'(x_0)(x-x_0) > f(x) - f(x_0)\ \forall x \in E^*_\delta(x_0) = ]x_0-\delta, x_0+\delta[\sim \{x_0\}$$

Posibilidades:

**a)** Si $x > x_0$ entonces $f'(x_0) > \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Como la función $f$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x_0, x]$,entonces podemos afirmar que $\exists c \in ]x_0, x[ \subset ]a, b[$ tal que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$

Por lo tanto:

Si $x_0 < c < x$ entonces $f'(x_0) > f'(c)$ con $c \in ]x_0, x[$

**b)** Si $x < x_0$ entonces $f'(x_0) < \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Como la función $f$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x, x_0]$,entonces podemos afirmar que $\exists c \in ]x, x_0[ \subset ]a, b[$ tal que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$

Por lo tanto:

Si $x < c < x_0$ entonces $f'(c) > f'(x_0)$ con $c \in ]x_0, x[$

En ambos casos hemos comprobado que:

$\forall\ x_0 \in ]a, b[$ siendo $c \neq x_0$ y $c \in ]a, b[$ siempre se verifica que:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x_0 < c & \text{entonces } f\,'(x_0) > f\,'(c) \\ \text{Si } c < x_0 & \text{entonces } f\,'(c) > f\,'(x_0) \end{array}\right\} \rightarrow f\,' \text{ es est.}$$

decreciente en $]a, b[$

nota: *A medida que las $x$ son cada vez mayores dentro del intervalo $]a, b[$, siempre observamos que las pendientes de sus correspondientes rectas tangentes son cada vez menores$\Leftrightarrow$la función $f$ es siempre convexa en $]a, b[$*

### 6.2.2 Condición suficiente de convexidad en un punto

**Teorema** Sea $f$ una función continua en $[a, b]$ y tal que $f\,''(x_0) < 0$ siendo $x_0 \in ]a, b[$.Con estas hipótesis siempre podremos afirmar que la función $f$ es convexa en $x_0$

*DEMOSTRACION*

Por ser $f\,''(x_0) < 0 \rightarrow f\,'$ es est. decreciente en $x_0$ , y por lo tanto en virtud del teorema de caracterización de funciones convexas podemos afirmar que $f$ será convexa en $x_0$

### 6.2.3 Condición suficiente de convexidad en un intervalo

**Teorema** Sea $f$ una función continua en $[a, b]$ y tal que $f\,''(x_0) < 0\ \forall\ x \in ]a, b[$.Con estas hipótesis siempre podremos afirmar que la función $f$ es convexa en $]a, b[$

### 6.2.4 Procedimientos para determinar los intervalos de concavidad y convexidad

Estos dos condiciones suficientes de concavidad y convexidad nos indican que para determinar los intervalos de concavidad y convexidad de una función, será suficiente con estudiar el signo de $f\,''$

## 6.3 Definición de punto de inflexión

Diremos que una función $y = f(x)$ tiene en $P(x_0, f(x_0))$ un punto de inflexión si en él la función pasa de ser cóncava a convexa o de convexa a cóncava

NOTA: Fíjaos que no hemos afirmado todavía nada acerca de la derivabilidad de $f$ en $x_0$ (así pues, puede ser o no derivable)

### 6.3.1 Clasificación puntos de inflexión

- Pto inflexi. convexo-cóncavo de tangente no horizontal
  - Pto inflexi. cóncavo-convexo de tangente no horizontal
  - Pto inflexi. convexo-cóncavo de tangente horizontal
  - Pto inflexi. cóncavo-convexo de tangente horizontal
  - Pto inflexi. convexo-cóncavo no derivable
  - Pto inflexi. cóncavo-cconvexo no derivable

### 6.3.2 Condición necesaria para la determinación de punto de inflexión

**Teorema** $\left.\begin{array}{l} Sea\ f\ una\ función\ continua\ en\ [a,b] \\ Sea\ x_0 \in ]a,b[\ /\ \exists\ f\ ''(x_0) \\ Sea\ P(x_0, f(x_0))\ un\ punto\ de\ inflexión \end{array}\right\} \Longrightarrow f\ ''(x_0) = 0$

*DEMOSTRACION*

Por el método de reducción al absurdo.Supongamos que $f\ ''(x_0) \neq 0$;entonces sólo se pueden presentar las siguientes situaciones .$f\ ''(x_0) > 0$ o que $f\ ''(x_0) < 0$

Posibilidades:

1) Si $f\ ''(x_0) > 0$ la función será cóncava en $x_0$

2) Si $f\ ''(x_0) < 0$ la función será convexa en $x_0$

En ambos casos obtenemos una contradicción con la hipotésis de que$f$ tiene en $x_0$ un pto de inflex. Por lo tanto lo que hemos supuesto es falso.

Así pues, en toda función que verifique las hipótesis dadas, siempre se verificará que $f\ ''(x_0) = 0$

NOTA: El recíproco de este teorema no es cierto, ya que existen funciones cuya segunda derivada en un punto es nula y sin embargo no es un punto de inflexión. Por ejemplo $y = x^4$ en $x = 0$ verifica que $f\ ''(0) = 0$ y en $P(0, 0)$ tiene un mínimo local

### 6.3.3 Condiciones suficientes puntos de inflexión

#### A) CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

*TEOREMA A1*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } f \text{ continua en } [a,b] \\ \text{Sea } x_0 \in\ ]a,b[ \\ \text{Si } \exists h > 0\ /\ \forall x \in ]x_0 - h, x_0 + h[ \subset ]a,b[ \text{ existe } f\ ''(x) \text{ salvo quizás en } x_0 \\ f\ ''(x) < 0\ \forall x \in ]x_0 - h, x_0[ \text{(convex. a la izq. de } x_0) \\ f\ ''(x) > 0\ \forall x \in ]x_0, x_0 + h[\ \text{(cóncav. a la der. de } x_0) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$P(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo

*TEOREMA A2*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } f \text{ continua en } [a,b] \\ \text{Sea } x_0 \in ]a,b[ \\ \text{Si } \exists h>0 \ / \ \forall x \in ]x_0-h, x_0+h[ \subset ]a,b[ \text{ existe } f\ ''(x) \text{ salvo quizás en } x_0 \\ f\ ''(x)>0 \ \forall x \in ]x_0-h, x_0[ (\text{cóncav. a la izq. de } x_0) \\ f\ ''(x)<0 \ \forall x \in ]x_0, x_0+h[ \ (\text{convex. a la der. de } x_0) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$P(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo

COMENTARIO: Estos dos teoremas A1,A2 nos aseguran que en aquellos puntos de continuidad en los que cambie el signo de la segunda derivada habrá un pto de inflexión siempre que la función sea continua en dicho punto(si la función pasa de ser cóncava a convexa ó de convexa a cóncava)

## B) CRITERIO DE LA TERCERA DERIVADA

*TEOREMA B1*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } f \text{ continua en } [a,b] \\ \text{Sea } x_0 \in ]a,b[ \\ \text{Si } f\ ''(x_0)=0 \\ f\ '''(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow P(x_0, f(x_0)) \text{ es un punto de inflexión}$$

*Demostración*

Si llamamos $F(x) = f\ ''(x)$, entonces $F\ '(x) = f\ '''(x)$

Partimos de la hipótesis de que $f\ '''(x_0) \neq 0; \rightarrow F\ '(x_0) \neq 0$ , por lo tanto sólo se pueden presentar dos posibilidades ó $F\ '(x_0) > 0$ ó $F\ '(x_0) < 0$

Veamos que ocurriría si $F\ '(x_0) > 0$ ($1^a$Posibi)

Por ser $F\ '(x_0) > 0$ →F es estrictamente creciente en $x_0$,entonces $\exists h > 0$ / $\forall \in ]x_0 - h, x_0 + h[\subset ]a, b[$ se verifica que :

a) Si $x < x_0 \rightarrow f\ ''(x)$=$F(x) < F(x_0) = f\ ''(x_0) = 0$ (es decir $f\ ''(x) < 0$) la función es convexa a la izquierda de $x_0$

b) Si $x > x_0 \rightarrow f\ ''(x)$=$F(x) > F(x_0) = f\ ''(x_0) = 0$ (es decir $f\ ''(x) < 0$) la función es cóncava a la derecha de $x_0$

Por lo tanto en virtud del *teorema A1* , la función presenta en $x_0$ un pto de inflexión

Razona tú, que ocurriría en la $2^a$ Posibil.

*Procedimiento para calcular puntos de inflexión*

Este *teorema B1* nos permite enunciar el siguiente método para determinar los ptos de inflexión de una función

1) Se calcula la primera derivada

2) Se calcula la segunda derivada

3) Los valores que anulan la derivada segunda serán los posibles ptos de inflexión. Sea $x_0$ uno de ellos

4) Calculamos la $3^a$ derivada y sustituimos dicho punto $x_0$ en ella

Casos

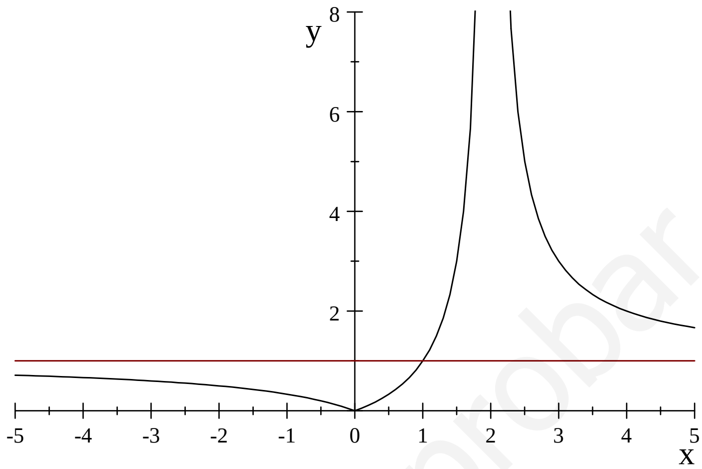
a) Si $f\ '''(x_0) \neq 0 \rightarrow P(x_0, f(x_0))$ Pto de inflex.

c) Si $f\ '''(x_0) = 0$ , entonces tendremos que recurrir al estudio del signo de la derivada segunda, a la derecha y a la izquierda de dicho punto

Nota :El recíproco de estos teoremas $A1, A2\ y\ B1$ no es cierto, ya que existen funciones que tienen ptos de inflex. en algún pto y sin embargo en él no son derivables

Ejemplo1: La funcion $y = 3x + \sqrt[3]{x-2}$ tiene un punto de inflexión en $x = 2$ y sin embargo no es derivable en él (Compruébalo)

Ejemplo2: La funcion $y = \left|\dfrac{x}{x-2}\right|$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$ y sin embargo no es derivable en él (Mira la gráfica ) Nota: En dicho punto también tenemos un mínimo local y absoluto




### 6.3.4 Problemas concavidad , convexidad

**Exercise 6.3.1** *Determinar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los ptos de inflexión de las funciones siguientes:*

$$\begin{array}{lll} y = x^5 - 5x^4 & y = x^3 - 3x^2 & y = x^4 - x^2 \\ y = \dfrac{x-1}{(x+2)^2} & y = \dfrac{x+3}{x^2+1} & y = x^3 - x^2 - x \\ y = \ln(1-x^2) & y = \dfrac{x^2-2}{x^2+1} & y = \dfrac{x-2}{x^2+1} \\ y = x \cdot e^x & y = x^2 \cdot e^x & y = \dfrac{x^3-1}{(x+2)^2} \end{array}$$

**Exercise 6.3.2** *Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de las funciones y los puntos de inflexión de:*

$$\begin{array}{lll} y = \dfrac{x^2-2x}{x^2-1} & y = x - \arctan x & y = x^4 - 9x^2 \\ y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} & y = \dfrac{x-3}{x^2+4} & y = x^3 - x^2 \\ y = \dfrac{\ln(x)}{x} & y = \dfrac{x^2-2}{x^2+1} & y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1} \\ y = \dfrac{x}{\ln x} & y = x^2 \cdot e^{-x} & y = \dfrac{x^2+1}{(x+2)^2} \end{array}$$

### 6.3.5 Condiciones suficientes máximos y minimos locales

**C) CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA**

*TEOREMA C1*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sea } f \text{ continua en } [a,b] \\ \text{Si } f \text{ es derivable hasta el orden 2 en } ]a,b[ \\ \text{Si } f\,'(x_0)=0 \\ \text{Si } f\,''(x_0)<0\end{array}\right\} \to P(x_0,f(x_0)) \text{ es un máx-}$$

imo local

*TEOREMA A2*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sea } f \text{ continua en } [a,b] \\ \text{Si } f \text{ es derivable hasta el orden 2 en } ]a,b[ \\ \text{Si } f\,'(x_0)=0 \\ \text{Si } f\,''(x_0)>0\end{array}\right\} \to P(x_0,f(x_0)) \text{ es un mín-}$$

imo local

COMENTARIO: El teorema c1 nos asegura que si un punto de la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal y además en dicho punto la función es convexa;entonces, podemos afirmar que en dicho punto tenemos un máximo local.

El teorema c2 nos asegura que si un punto de la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal y además en dicho punto la función es cóncava; entonces, podemos afirmar que dicho punto es un mínimo local.

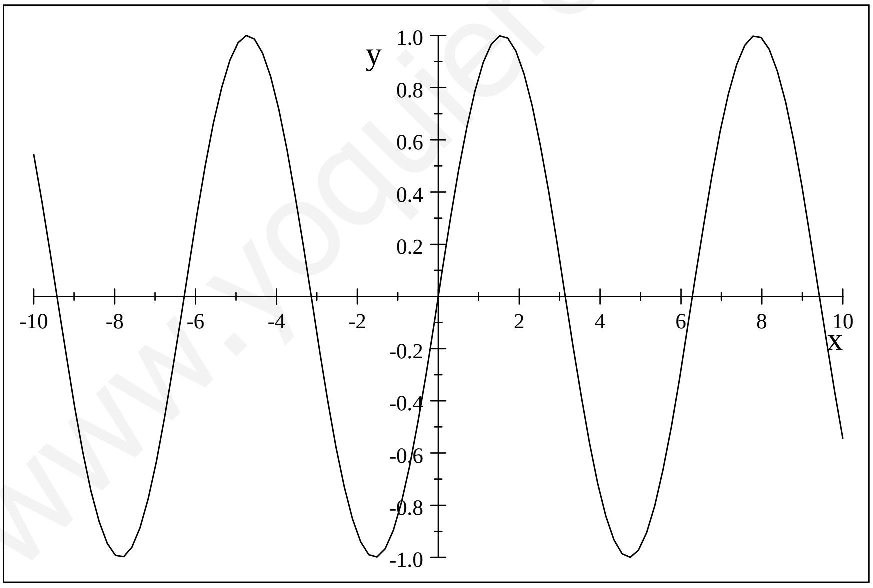
# Chapter 7

# Gráficas de funciones

## 7.1 Funciones trigonométricas

### 7.1.1 $y = \sin x$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

La función $y = \sin x$ de $\Re$ en $[-1, 1]$ no es una función inyectiva como se puede ver en su gráfica.

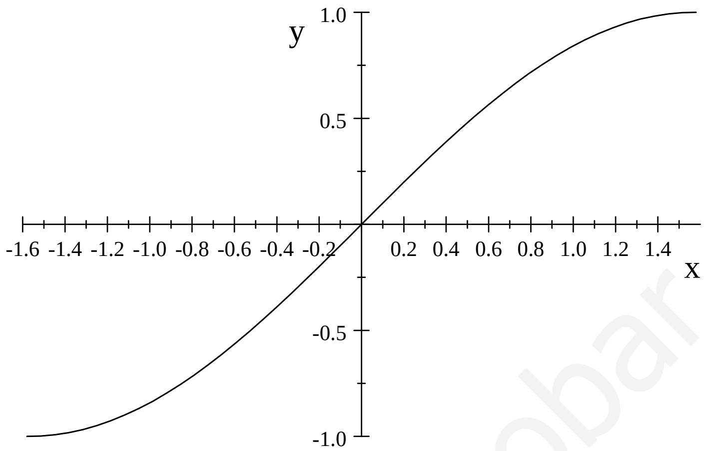



$y = \sin x$

Sin embargo; si consideramos la función $y = \sin x$ de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en $[-1, 1]$ ,ésta si que es es una función biyectiva del conjunto $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en el conjunto $[-1, 1]$

Su tabla de valores es:

| $x$ | $-\frac{1}{2}\pi$ | $-\frac{1}{3}\pi$ | $-\frac{1}{4}\pi$ | $-\frac{1}{6}\pi$ | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sin x$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |




Gráfica de $y = \sin x$ en $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$

### 7.1.2 $y = \arcsin x$ en $[-1, 1]$

Al ser ,$f(x) = \sin x$, una función biyectiva del conjunto $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ en el conjunto $[-1, 1]$. Entonces; admite función inversa ,$f^{-1}(x) = \arcsin x$, respecto de la composición de aplicaciones. Verificándose:

$$D(f^{-1}) = \operatorname{Im} f = [-1, 1] \quad i \quad \operatorname{Im}\left(f^{-1}\right) = D(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

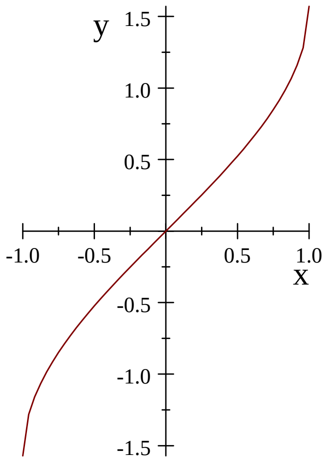
Fíjate que $f^{-1}(x) = y = \arcsin x$ es$\Leftrightarrow \sin y = x$

Por lo que, una tabla de valores para esta función es:

| $y = \arcsin x$ | $-\frac{1}{2}\pi$ | $-\frac{1}{3}\pi$ | $-\frac{1}{4}\pi$ | $-\frac{1}{6}\pi$ | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |

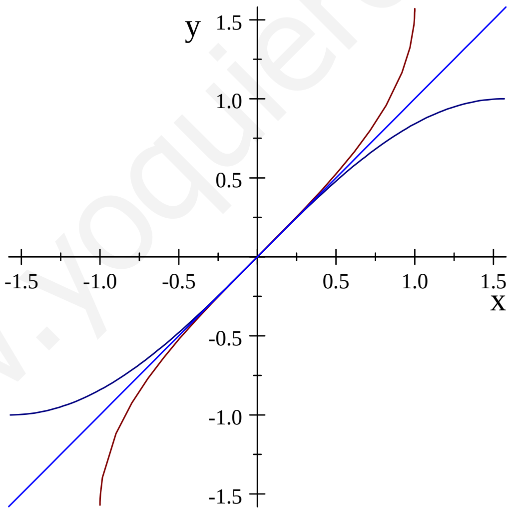
*Nota: La tabla de valores de la función* $y = \arcsin x$ *se obtiene intercambiando los valores de las variables* $x$ *e* $y$ *en la tabla de la función* $y = \sin x$

Siendo su gráfica




$y = \arcsin x$ en $[-1, 1]$

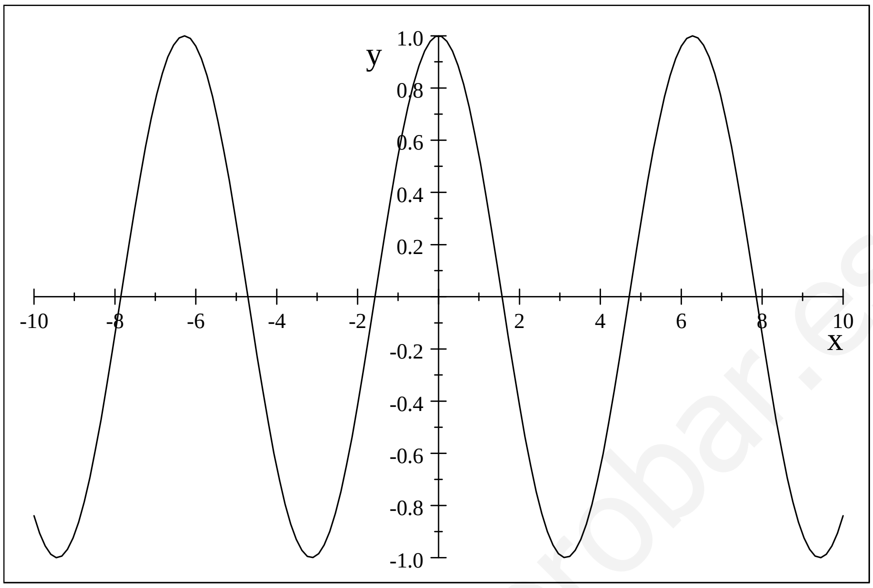
Como ambas funciones son inversas respecto a la composición de aplicaciones, sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$




Gráficas de $y = \sin x$ e $y = \arcsin x$

### 7.1.3 $y = \cos x$ en $[0, \pi]$

La función $y = \cos x$ de $\Re$ en $[-1, 1]$ no es una función inyectiva como se puede ver en su gráfica.



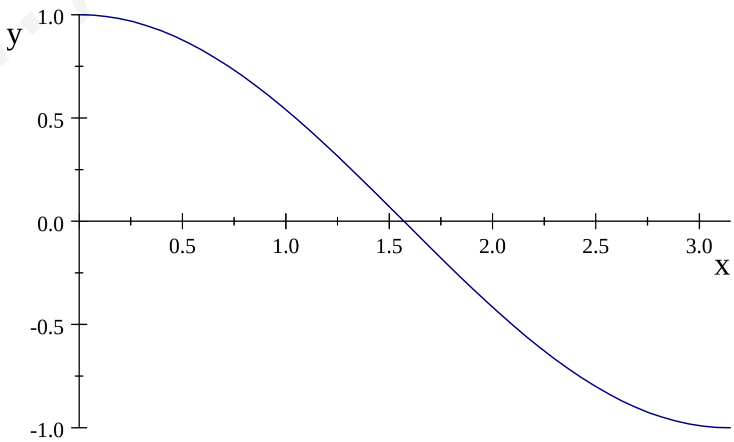

$y = \cos x$

Sin embargo; si consideramos la función $y = \cos x$ de $[0, \pi]$ en $[-1, 1]$ ,ésta si que es es una función biyectiva del conjunto $[0, \pi]$ en el conjunto $[-1, 1]$

Su tabla de valores es:

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \cos x$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-1$ |

Su representación gráfica es:




Gráfica de $y = \cos x$ en $[0, \pi]$

### 7.1.4 $y = \arccos x$ en $[-1, 1]$

Como la función ,$f(x) = \cos x$, es una biyección del conjunto $[0, \pi]$ en el conjunto $[-1, 1]$. Entonces; admite función inversa ,$f^{-1}(x) = \arccos x$, respecto de la composición de aplicaciones. Verificándose:

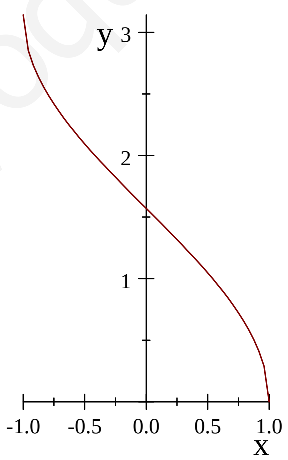
$$D(f^{-1}) = \operatorname{Im} f = [-1, 1] \quad i \quad \operatorname{Im}\left(f^{-1}\right) = D(f) = [0, \pi]$$
$$\text{Fíjate que } f^{-1}(x) = y = \arccos x \text{ es} \Leftrightarrow \cos y = x$$

Por lo que, una tabla de valores para esta función es:

| $y = \arccos x$ | $0$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-1$ |

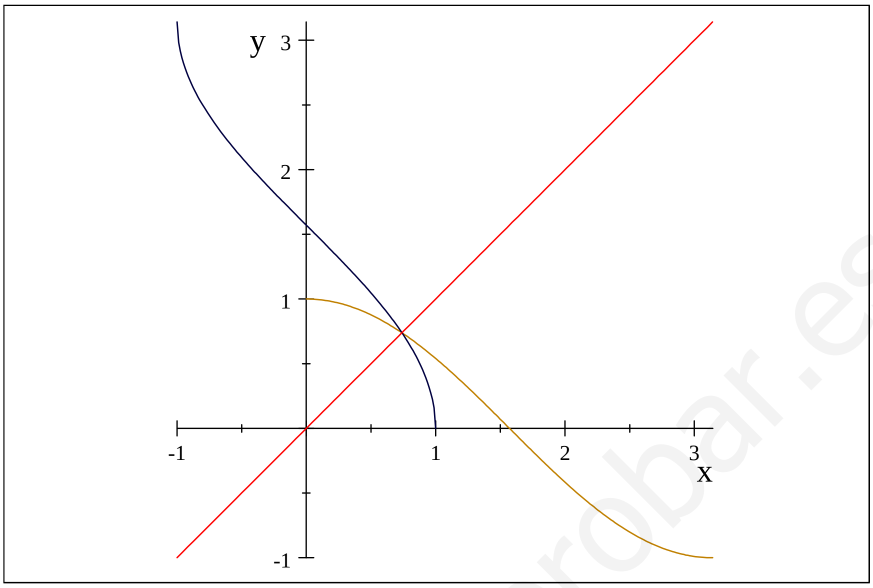
*Nota: La tabla de valores de la función* $y = \arccos x$ *se obtiene intercambiando los valores de las variables* $x$ *e* $y$ *en la tabla de la función* $y = \cos x$

Siendo su gráfica




$y = \arccos x$ en $[-1, 1]$

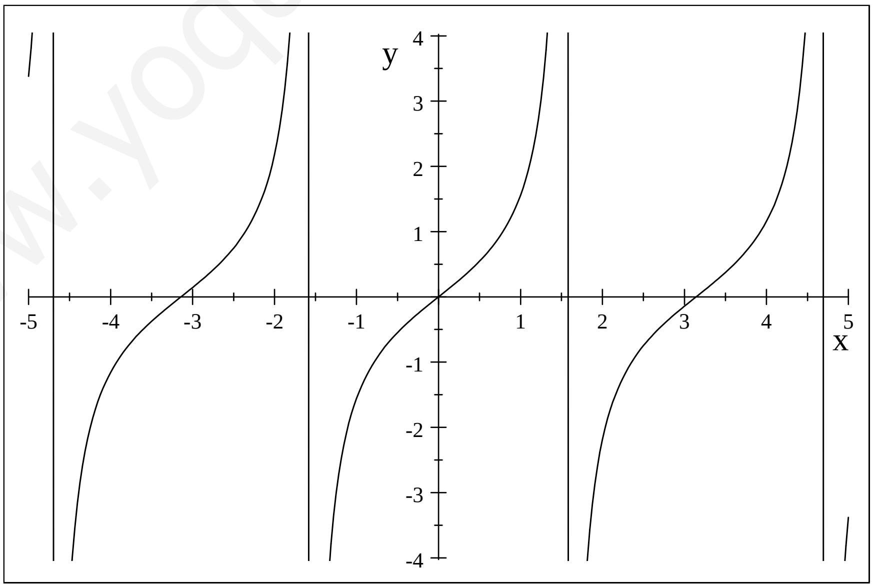
Como ambas funciones son inversas respecto a la composición de aplicaciones, sus gráficas son simétricas respecte de la recta $y = x$




Gráficas de $y = \cos x$ e $y = \arccos x$

### 7.1.5 $y = \tan x$ en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La función $y = \tan x$ de $\Re \sim \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in Z\right\}$ en $\Re$ no es una función inyectiva como se puede ver en su gráfica.



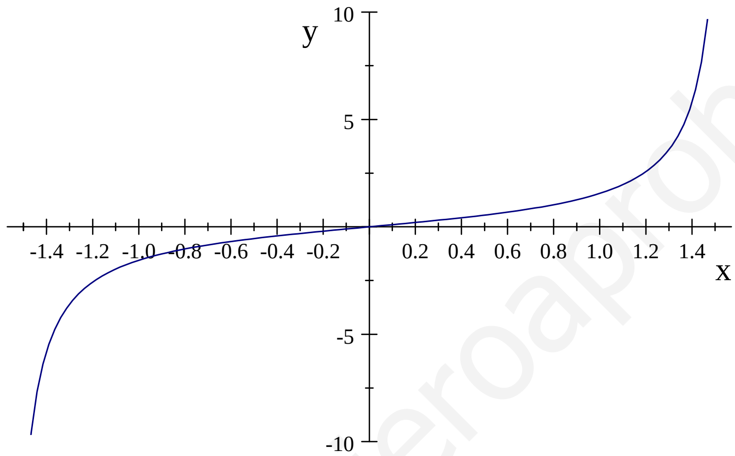

$y = \tan x$

Sin embargo; si consideramos la función $y = \tan x$ de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en el conjunto$\Re$, ,ésta si que es es una función biyectiva del conjunto $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en el conjunto $\Re$

Su tabla de valores es:

| $x$ | $-\frac{1}{2}\pi$ | $-\frac{1}{3}\pi$ | $-\frac{1}{4}\pi$ | $-\frac{1}{6}\pi$ | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \tan x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | -$\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |

Su representación gráfica es:




[

## 7.1.6 $y = \arctan x$

Como la función ,$f(x) = \tan x$, es una biyección del conjunto$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en el conjunto $\Re$. Entonces; admite función inversa ,$f^{-1}(x) = \arctan x$, respecto de la composición de aplicaciones. Verificándose:

$$D(f^{-1}) = \operatorname{Im} f = ]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[ \quad i \quad \operatorname{Im}\left(f^{-1}\right) = D(f) = \Re$$

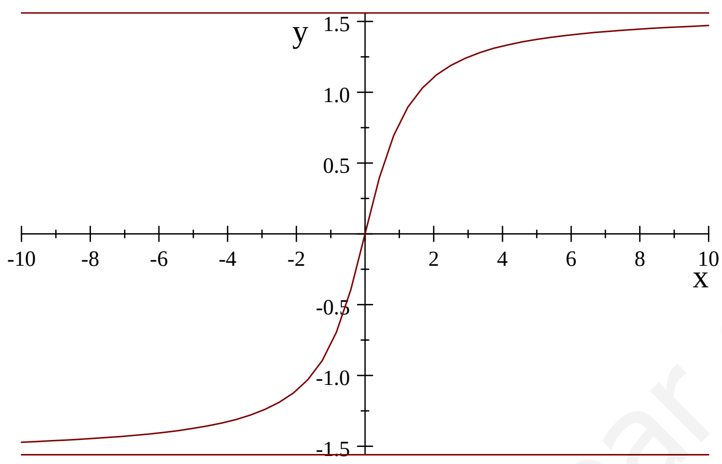
Fíjate que $f^{-1}(x) = y = \arctan x$ es$\Leftrightarrow$ $\tan y = x$

Por lo que, una tabla de valores para esta función es:

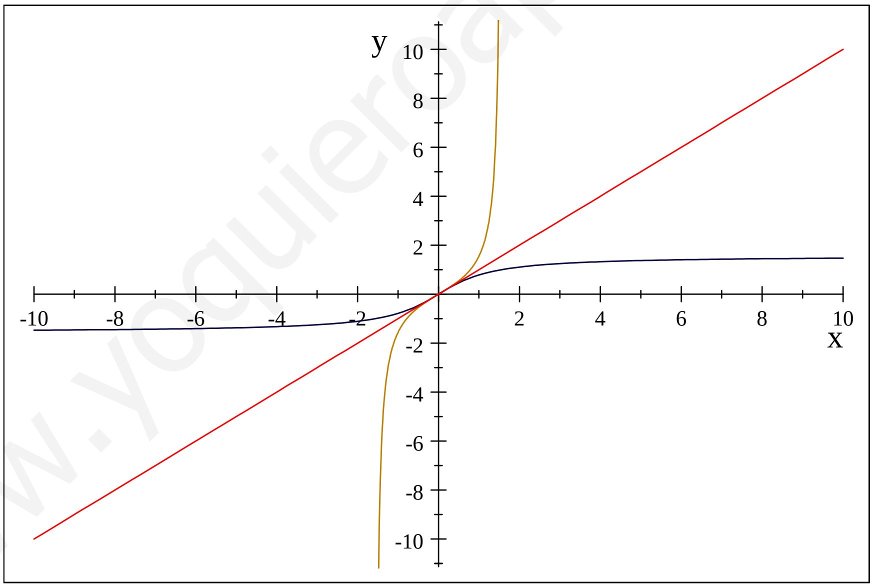
| $y = \arctan x$ | $-\frac{1}{2}\pi$ | $-\frac{1}{3}\pi$ | $-\frac{1}{4}\pi$ | $-\frac{1}{6}\pi$ | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | -$\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |

*Nota: La tabla de valores de la función $y = \arctan x$ se obtiene intercambiando los valores de las variables $x$ e $y$ en la tabla de la función $y = \tan x$*

Siendo su gráfica



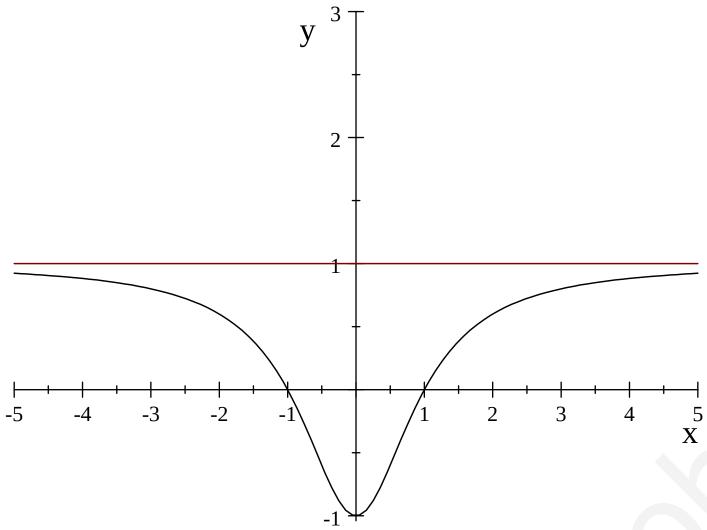

Como ambas funciones son inversas respecto a la composición de aplicaciones, sus gráficas son simétricas respecte de la recta $y = x$



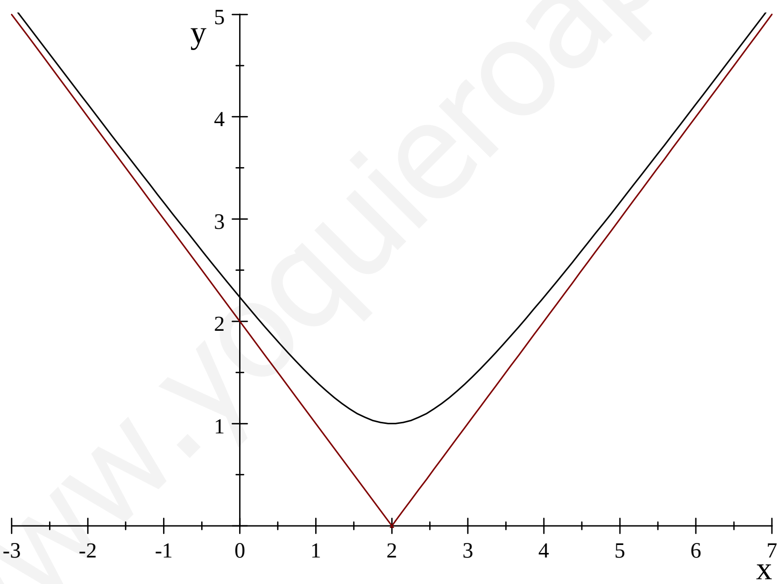

Gráficas de $y = \tan x$ e $y = \arctan x$

## 7.2 Ejercicios de gráficas para estudiar

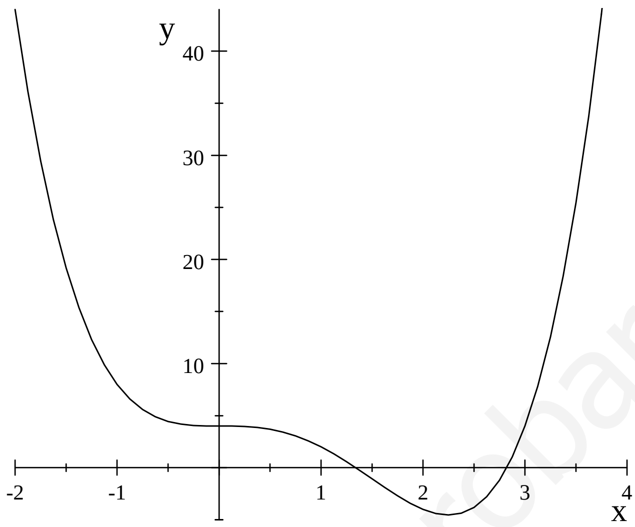
**Exercise 7.2.1** *Gráfica de* $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$




**Exercise 7.2.2** *Gráfica de* $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$



**Exercise 7.2.3** *Gráfica de* $y = x^4 - 3x^3 + 4$




Nota: La gráfica de esta función corta al eje de las $X$ en dos puntos
Para determinarlos, has de resolver la ecuación $x^4 - 3x^3 + 4 = 0$
Tendremos que aplicar el teorema de Bolzano a la función:

$f(x) = x^4 - 3x^3 + 4$ en los siguientes intervalos $[1.3\ ,\ 1.4]$ y $[2.8, 2.9]$

Calculemos la primera.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [1.3, 1.4] \\ f(1.3) = 1.3^4 - 3 \cdot 1.3^3 + 4 = 0.\,2651 \\ f(1.4) = 1.4^4 - 3 \cdot 1.4^3 + 4 = -0.\,3904 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (1.3, 1.4)\ /\ f(c) = 0$$

Precisemos un poco más esta solución.

Como $\left.\begin{array}{l} f(1.3) = 0.\,2651 \\ f(1.35) = 1.35^4 - 3 \cdot 1.35^3 + 4 = -5.\,9619 \cdot 10^{-2} \\ f(1.4) = 1.4^4 - 3 \cdot 1.4^3 + 4 = -0.\,3904 \end{array}\right\}$ entonces podemos afirmar que $c \in (1.3, 1.35)$ . Con lo que; una aproximación de esta solución con un error menor que una décima será 1.3.

$$c \simeq 1.3$$

Calculemos la segunda.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [2.8, 2.9] \\ f(2.8) = 2.8^4 - 3 \cdot 2.8^3 + 4 = -0.\,3904 \\ f(2.9) = 2.9^4 - 3 \cdot 2.9^3 + 4 = 1.\,5611 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists h \in (1.3, 1.4)\ /\ f(h) = 0$$

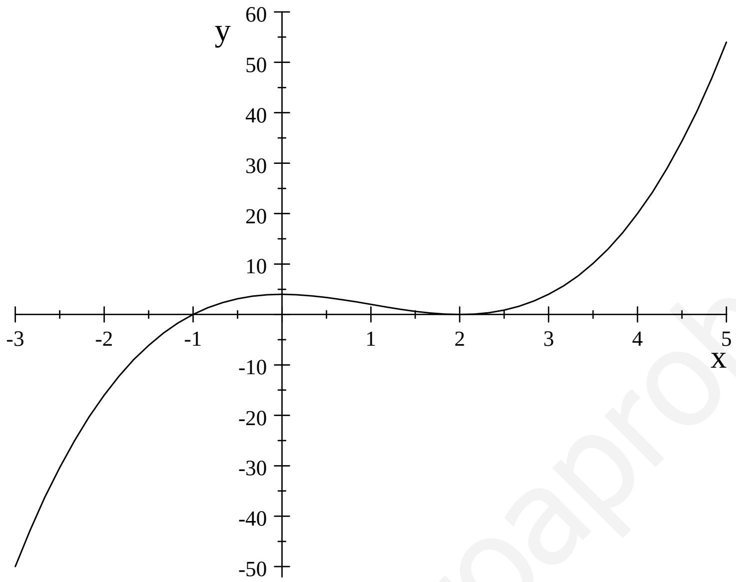
Precisemos un poco más esta solución.

Como $\left.\begin{array}{l} f(2.8) = -0.\,3904 \\ f(2.85) = 2.85^4 - 3 \cdot 2.85^3 + 4 = 0.\,52763 \\ f(2.9) = 1.\,5611 \end{array}\right\}$ : entonces podemos afirmar que $h \in (2.8, 2.85)$ . Con lo que; una aproximación de esta solución con un error menor que una décima será 2.8.

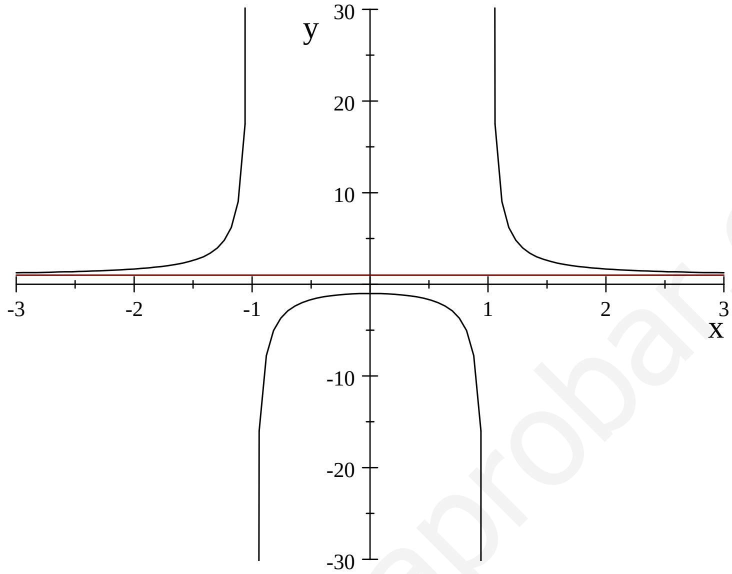
$$h \simeq 2.8$$

La gráfica de la función $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4$ corta al eje de las $X$ aproximadamente en los puntos $P(1.3, 0)$ y $Q(2.8, 0)$

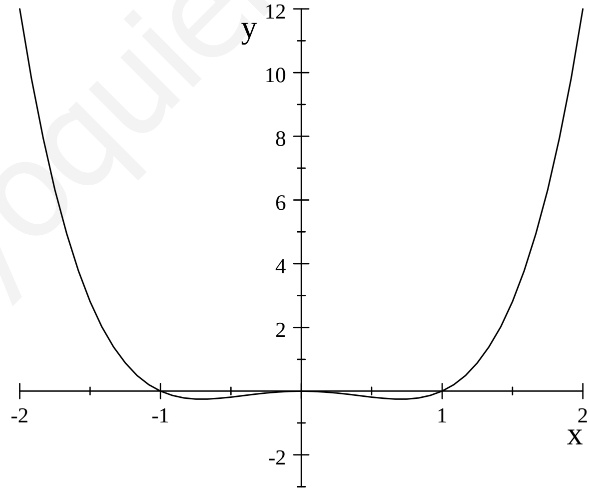
**Exercise 7.2.4** *Gráfica de* $y = x^3 - 3x^2 + 4$



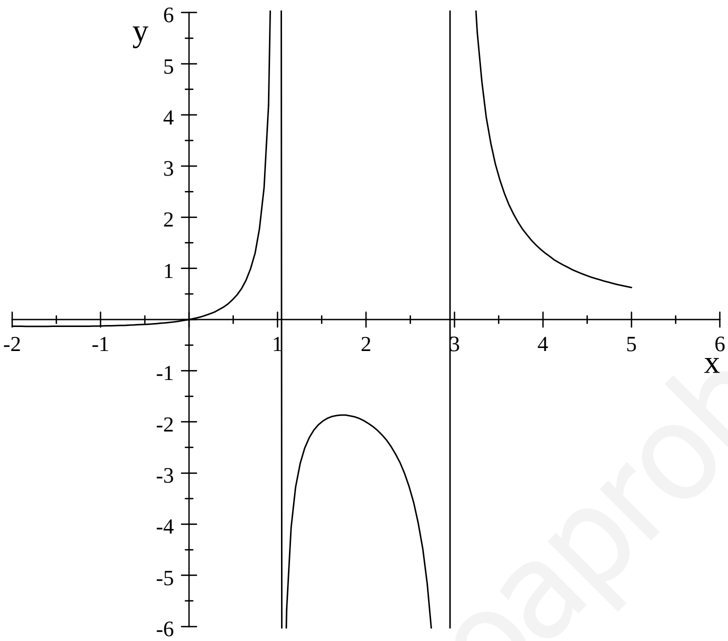
**Exercise 7.2.5** *Gráfica de* $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$




**Exercise 7.2.6** $y = x^4 - x^2$

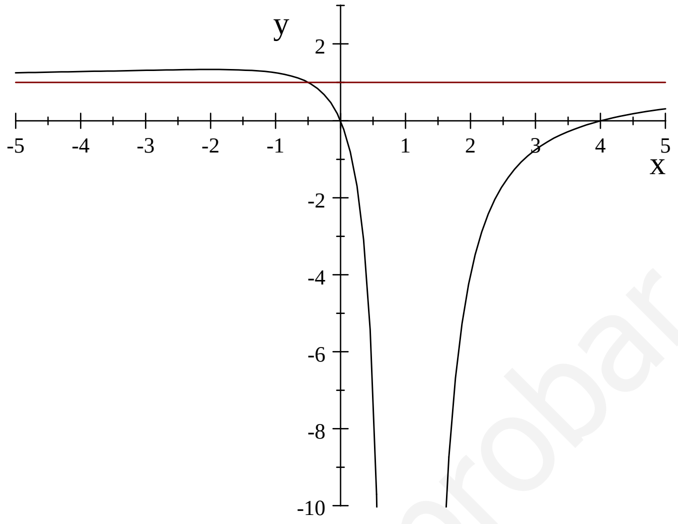


**Exercise 7.2.7** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

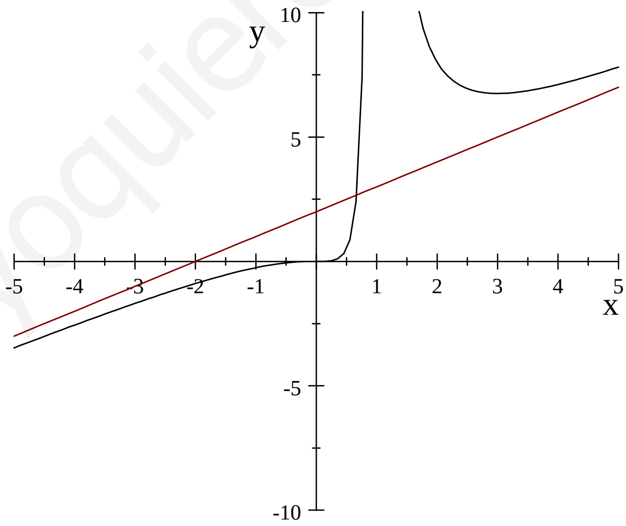



**Exercise 7.2.8**

$$y = \frac{x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

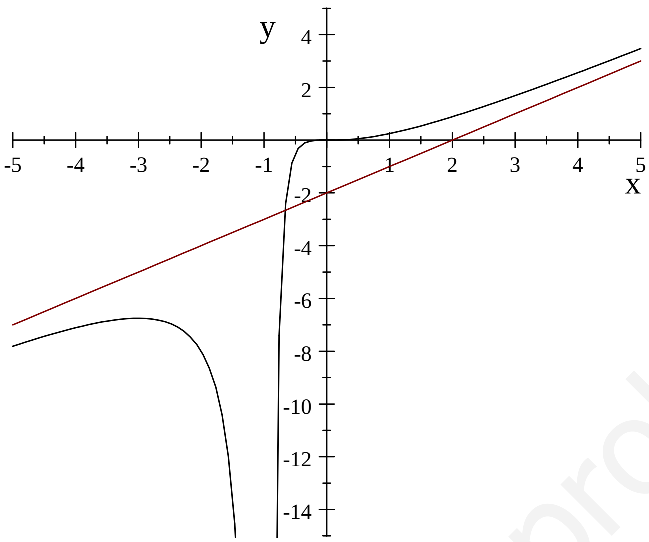



**Exercise 7.2.9** $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

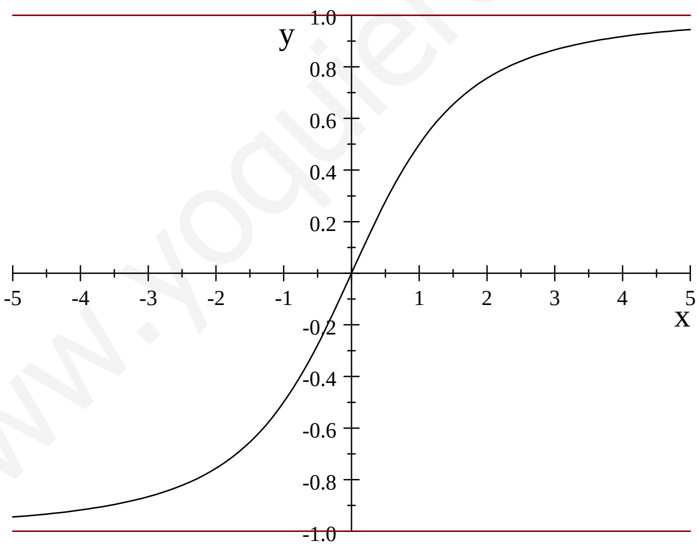



**Exercise 7.2.10**

*Gráfica de* $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

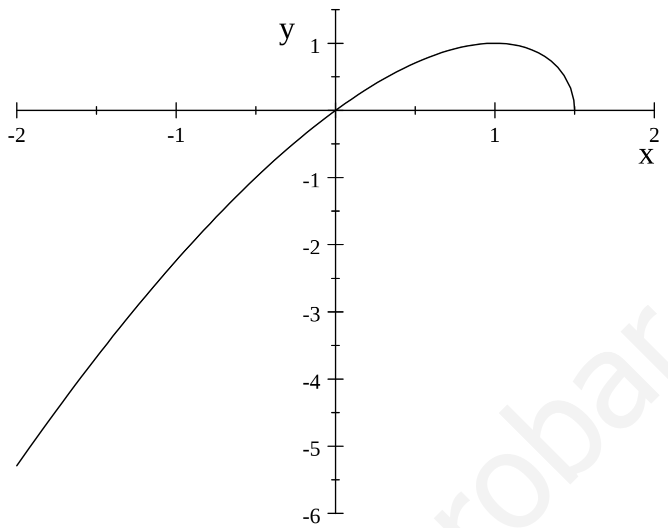



**Exercise 7.2.11** *Gráfica de* $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

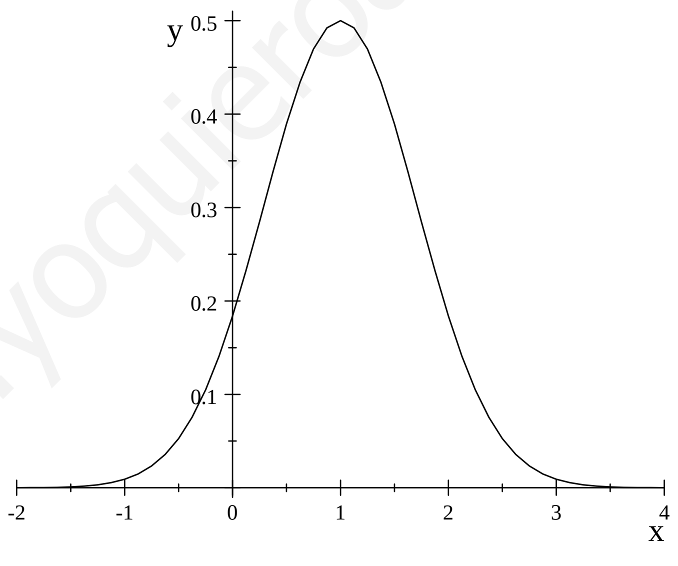



**Exercise 7.2.12**

*Gráfica de* $y = x\sqrt{3-2x}$

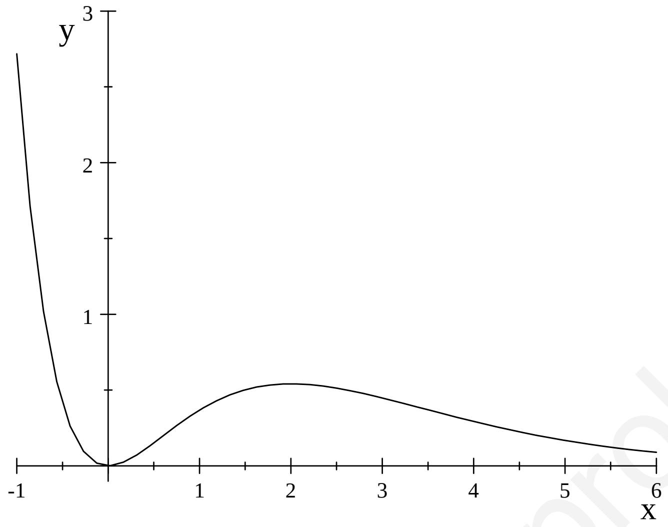



**Exercise 7.2.13** *Gráfica de* $y = \frac{1}{2}e^{-(x-1)^2}$

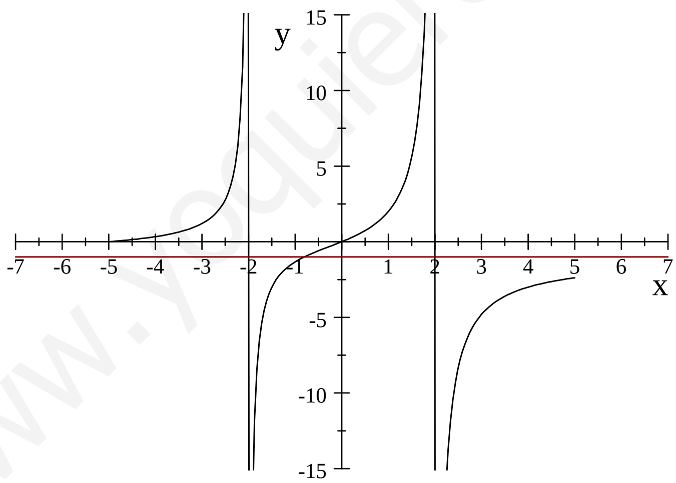



**Exercise 7.2.14**

*Gráfica de* $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

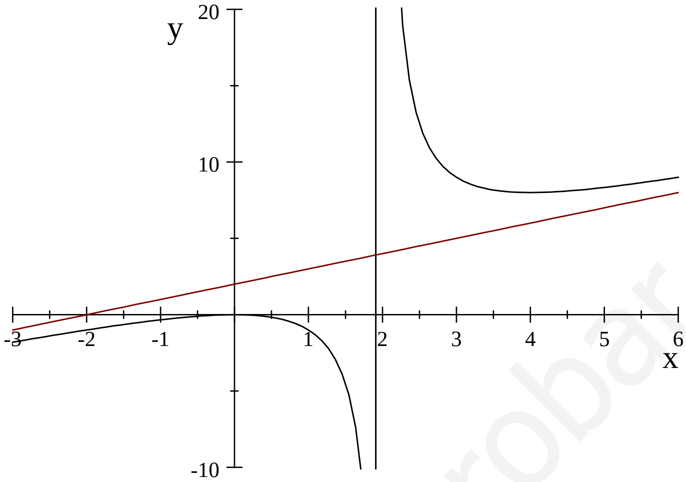



**Exercise 7.2.15** *Gráfica de* $y = \dfrac{x^2 + 5x}{4 - x^2}$

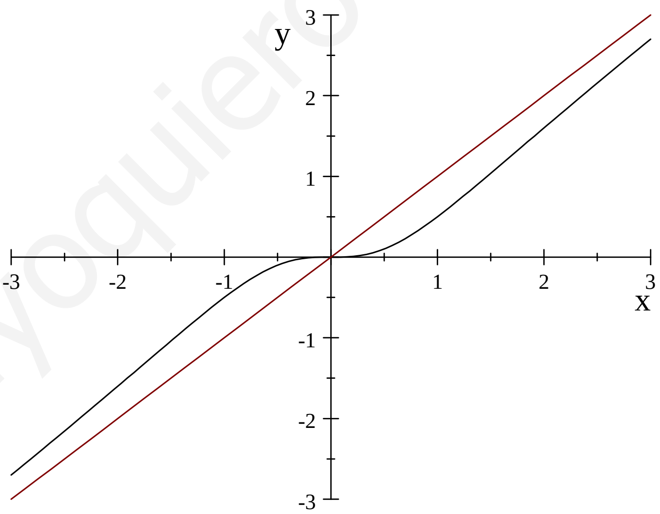



**Exercise 7.2.16**

*Gráfica de* $y = \dfrac{x^2}{x-2}$

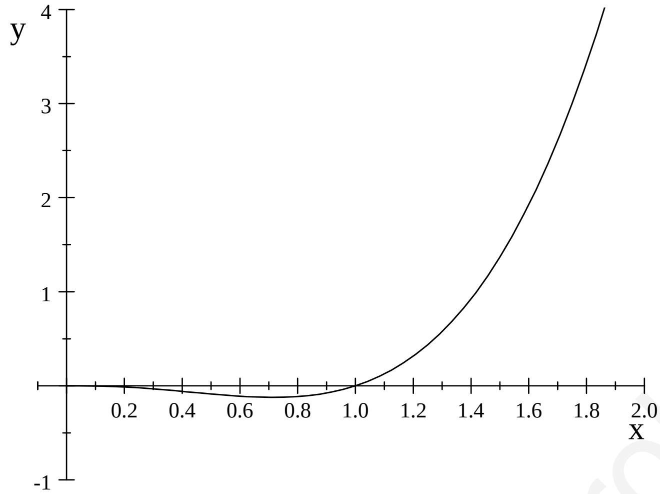



**Exercise 7.2.17** *Gráfica de* $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

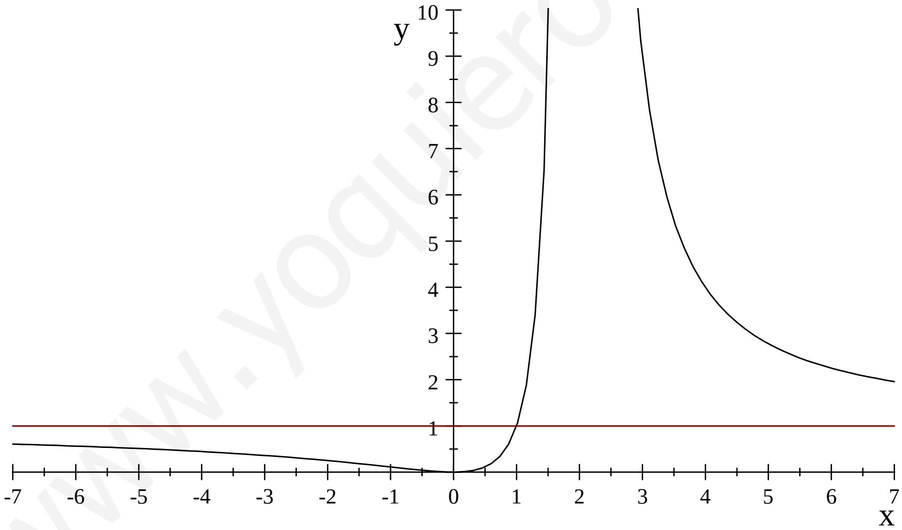



**Exercise 7.2.18**

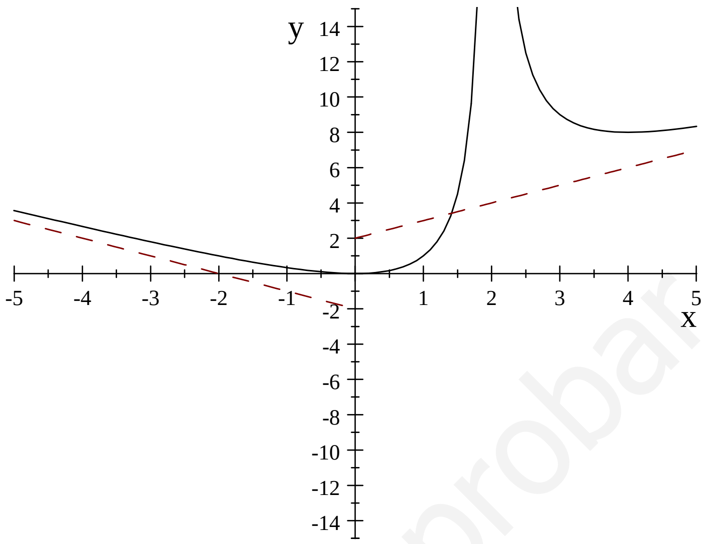
*Gráfica de* $y = x^3 \ln x$




**Exercise 7.2.19** *Gráfica de* $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

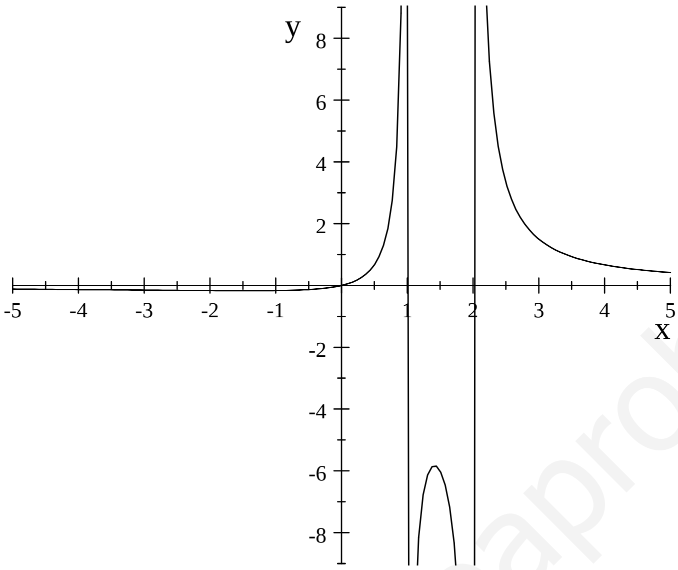


**Exercise 7.2.20** *Gráfica de* $y = \left|\dfrac{x^2}{x-2}\right|$

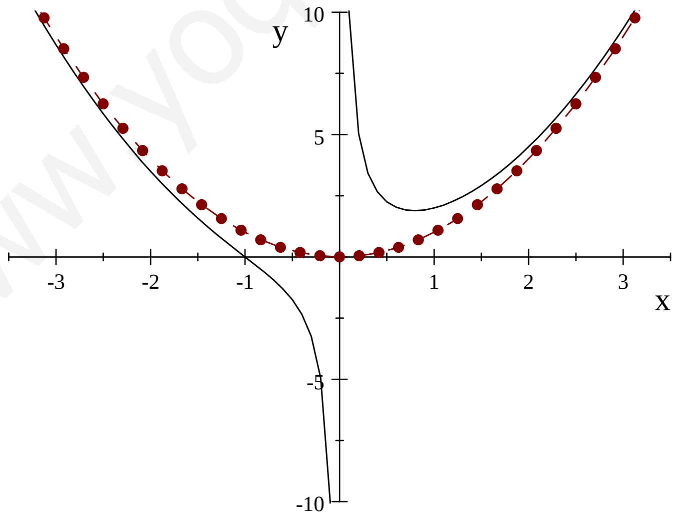



**Exercise 7.2.21**

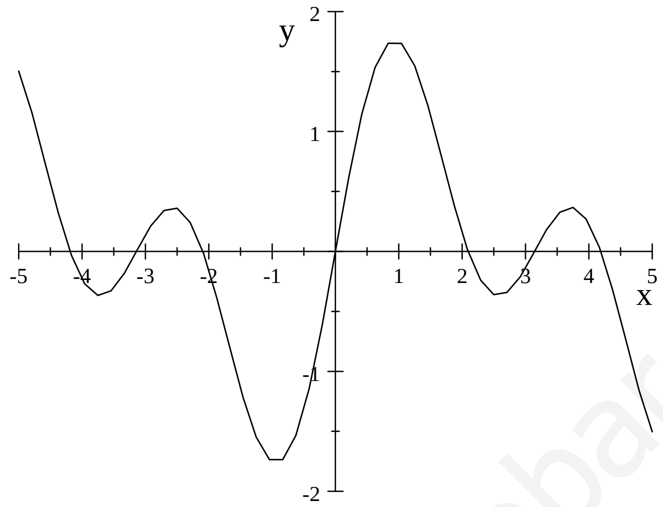
*Gráfica de* $y = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$



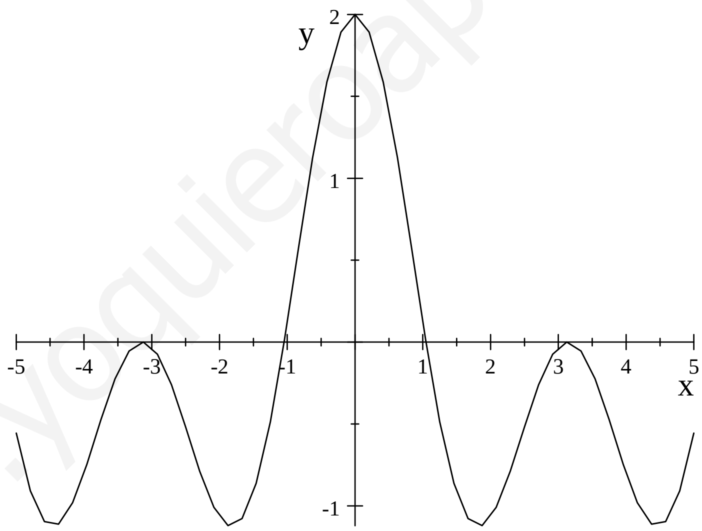

**Exercise 7.2.22** *Gráfica de* $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$




**Exercise 7.2.23** *Gráfica de* $y = \sin 2x + \sin x$

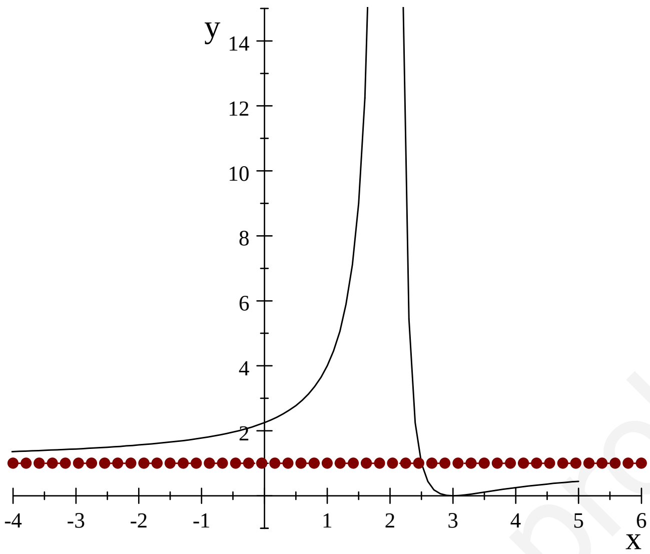



**Exercise 7.2.24** *Gráfica de* $y = \cos 2x + \cos x$

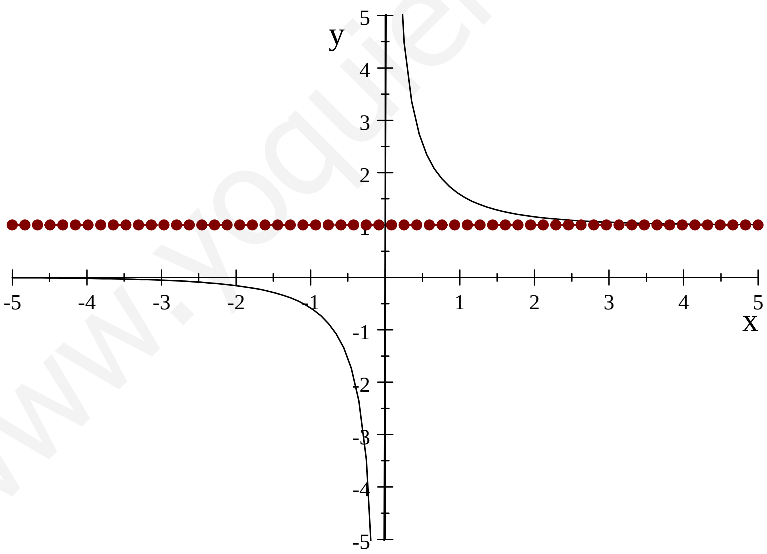



**Exercise 7.2.25**

*Gráfica de* $y = \dfrac{(x-3)^2}{(x-2)^2}$

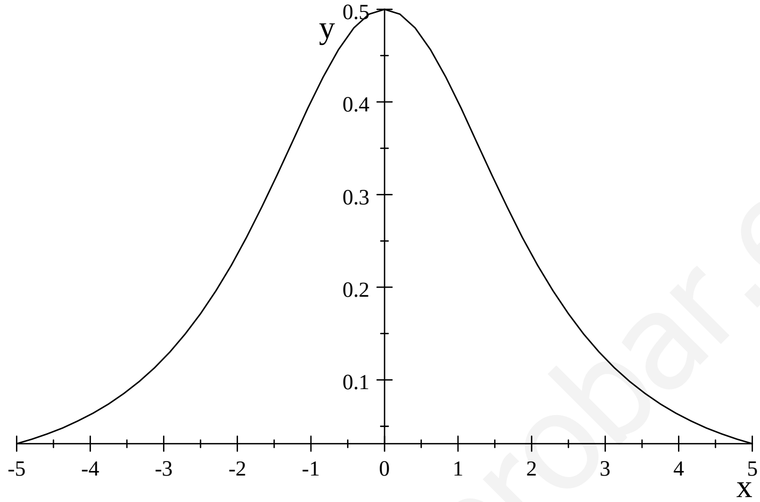



**Exercise 7.2.26** *Gráfica de* $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

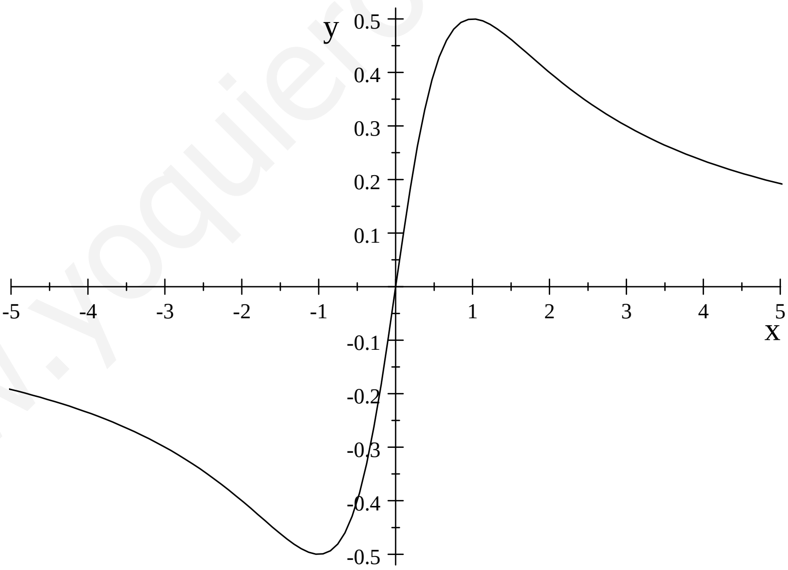



**Exercise 7.2.27**

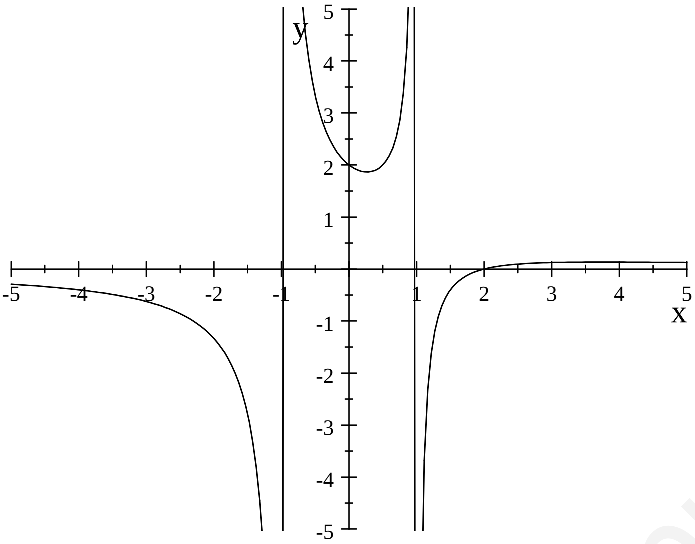
*Gráfica de* $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^{2x}}$



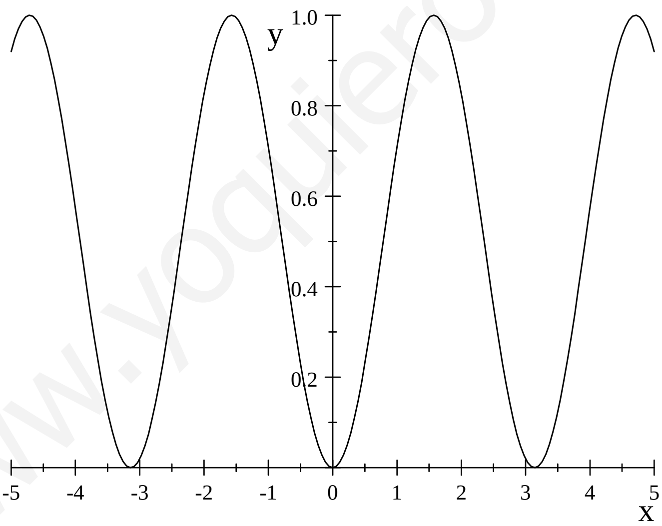

**Exercise 7.2.28** *Gráfica de* $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$



**Exercise 7.2.29** *Gráfica de* $y = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

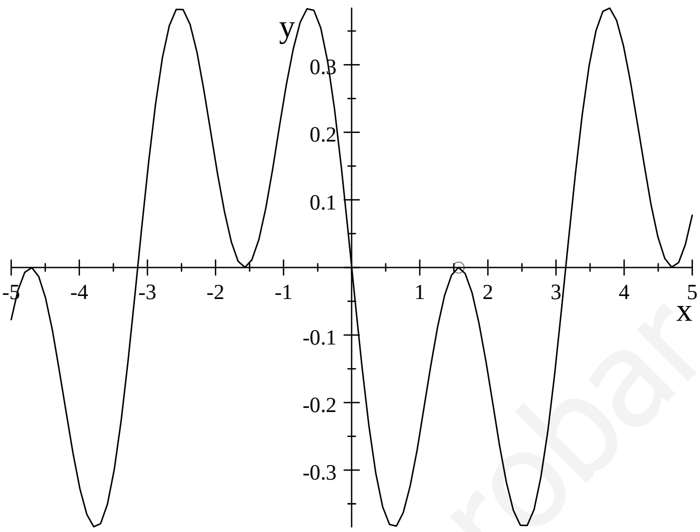



- **Exercise 7.2.30** *Gráfica de* $y = \sin^2 x$

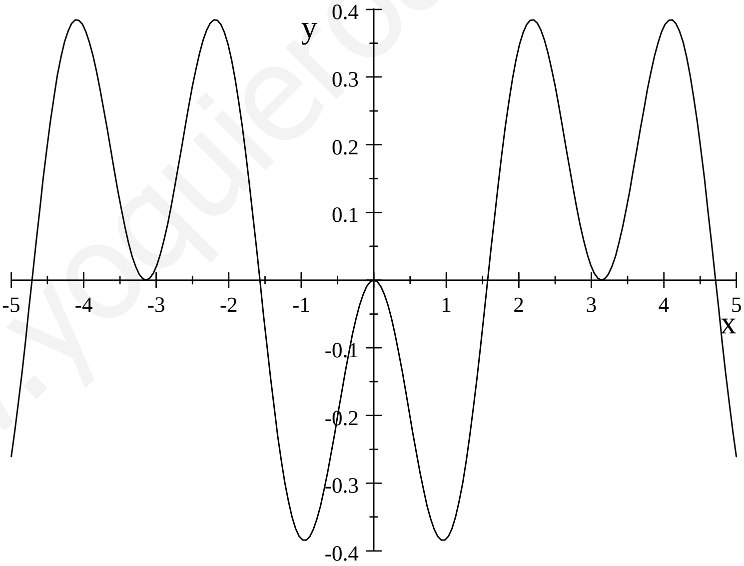



- **Exercise 7.2.31**

*Gráfica de* $y = \sin^3 x - \sin x$

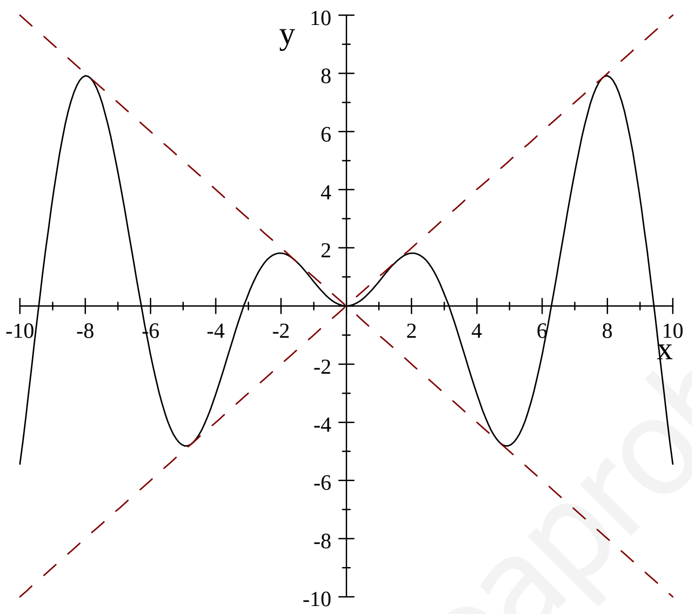



**Exercise 7.2.32** *Gráfica de* $y = \cos^3 x - \cos x$

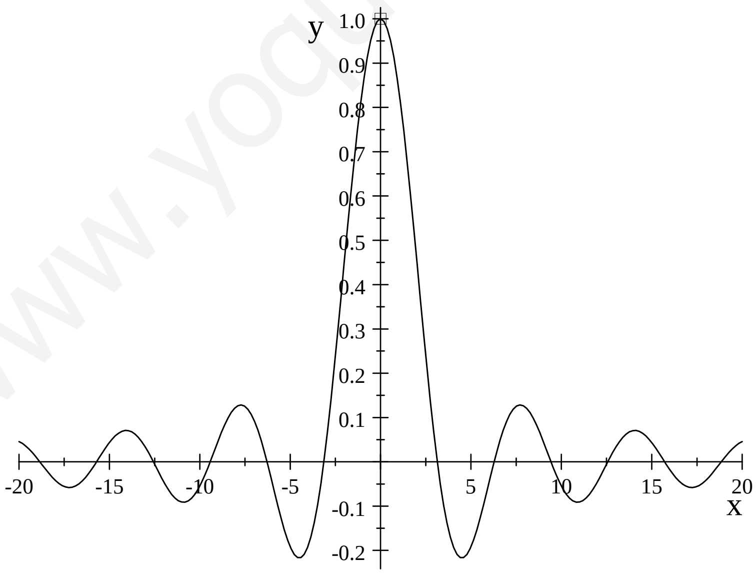



**Exercise 7.2.33**

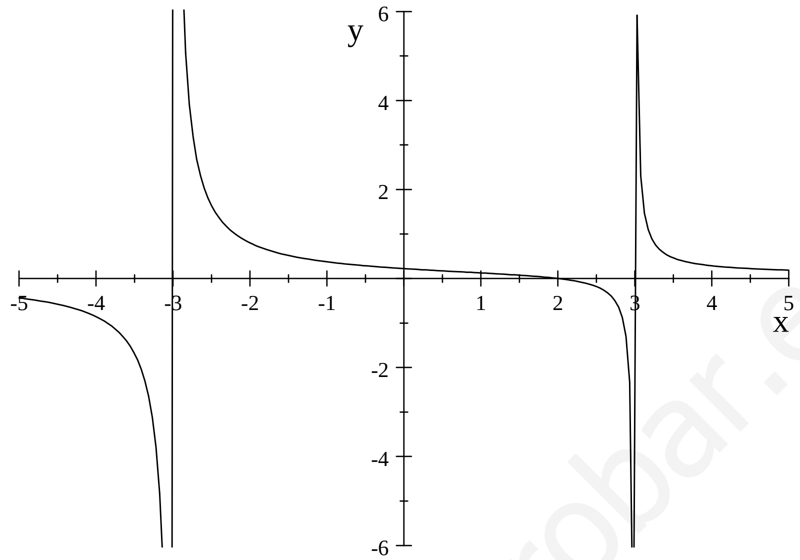
*Gráfica de* $y = x \sin x$



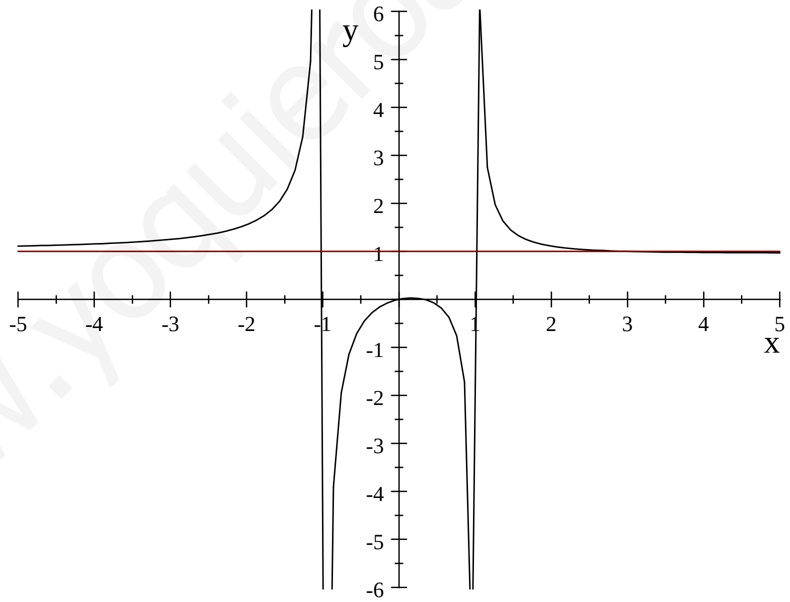

**Exercise 7.2.34** *Gráfica de* $y = \dfrac{\sin x}{x}$




**Exercise 7.2.35** *Gráfica de* $y = \dfrac{x-2}{x^2-9}$




**Exercise 7.2.36** *Gráfica de* $y = \dfrac{3x^2 - x}{3x^2 - 3}$



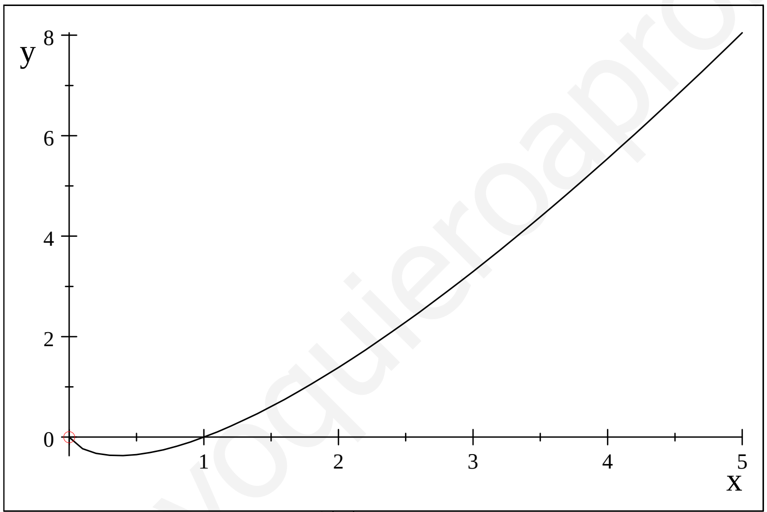
## 7.3 Gráficas de funciones logarítmicas y exponenciales

- $f(x) = x \ln x$

$D(f) = (0, +\infty)$

$f\begin{pmatrix} x \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \\ 0.0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \ln x \\ -0.230\,26 \\ -4.\,605\,2 \times 10^{-2} \\ -6.\,907\,8 \times 10^{-3} \\ -9.\,210\,3 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$ Es evidente que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^-$

$f\begin{pmatrix} x \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \ln x \\ 23.\,026 \\ 460.\,52 \\ 6907.\,8 \\ 92103. \end{pmatrix}$ Es evidente que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$




$f(x) = x \ln x$

$y\,' = 1 + \ln x$
La función es estrictamente decreciente en $(0, \frac{1}{e})$
La función es estrictamente creciente en $(\frac{1}{e}, +\infty)$
El punto $P(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e})$ es un mínimo local y absoluto
$y\,'' = \frac{1}{x}$
Esta función no tiene puntos de inflexión. Es cóncava en $D(f)$

- $g(x) = \frac{x}{\ln x}$

$D(g) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

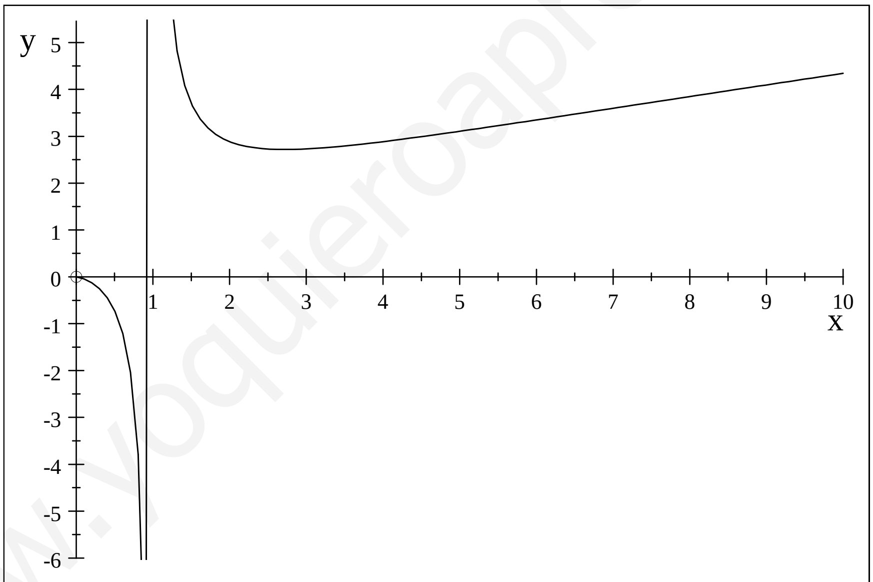
$g\begin{pmatrix} x \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \\ 0.0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln x} \\ -4.\,342\,9 \times 10^{-2} \\ -2.\,171\,5 \times 10^{-3} \\ -1.\,447\,6 \times 10^{-4} \\ -1.\,085\,7 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$ Es evidente que $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0^-$

$$g\begin{pmatrix} x \\ 0.9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ 0.9999 \\ 0.99999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln x} \\ -8.5421 \\ -98.504 \\ -998.5 \\ -9998.5 \\ -99999. \end{pmatrix} \text{ y } g\begin{pmatrix} x \\ 1.1 \\ 1.01 \\ 1.001 \\ 1.0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln x} \\ 11.541 \\ 101.5 \\ 1001.5 \\ 10002. \end{pmatrix}$$

$x = 1$ es una asíntota vertical de ramas divergentes; ya que:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$$

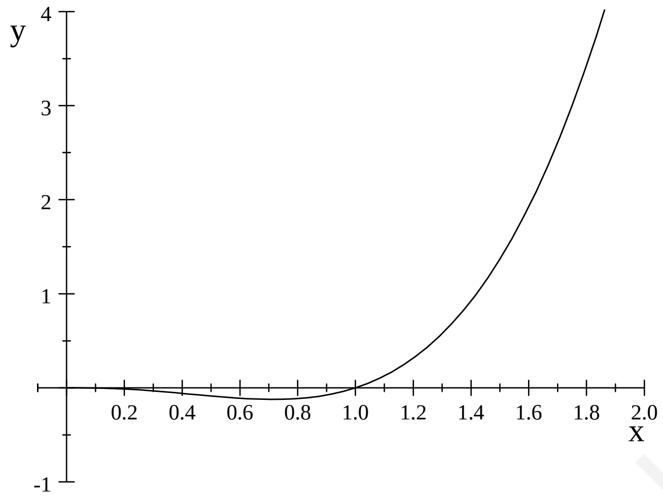
$$g\begin{pmatrix} x \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln x} \\ 4.3429 \\ 21.715 \\ 144.76 \\ 1085.7 \end{pmatrix} \text{ Es evidente que: } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$




$g(x) = \frac{x}{\ln x}$

$y\,' = \frac{-1+\ln x}{(\ln x)^2}$
La función es estrictamente decreciente en $(0,1) \cup (1,e)$
La función es estrictamente creciente en $(e,+\infty)$
El punto $P(e,e)$ es un mínimo local
$y\,'' = \frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}$
La función es convexa en $(0,1) \cup (e^2,+\infty)$ y cóncava en $(1,e^2)$
Esta función tiene un punto de inflexión cóncavo-convexo en $(e^2, \dfrac{e^2}{2})$.

- Gráfica de $y = x^3 \ln x$




- $h(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

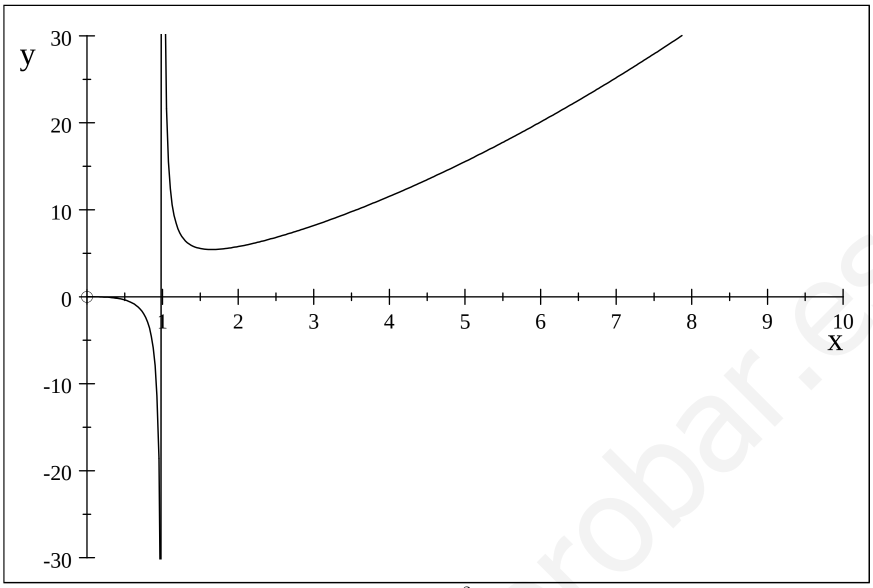
$$h\begin{pmatrix} x \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \\ 0.0001 \\ 0.00001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{\ln x} \\ -4.3429\times10^{-3} \\ -2.1715\times10^{-5} \\ -1.4476\times10^{-7} \\ -1.0857\times10^{-9} \\ -8.6859\times10^{-12} \end{pmatrix} \text{Es evidente que } \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0^-$$

$$h\begin{pmatrix} x \\ 0.9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ 0.9999 \\ 0.99999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{\ln x} \\ -7.6879 \\ -97.519 \\ -997.5 \\ -9997.5 \\ -99998. \end{pmatrix} \text{ y } h\begin{pmatrix} x \\ 1.1 \\ 1.01 \\ 1.001 \\ 1.0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{\ln x} \\ 12.695 \\ 102.52 \\ 1002.5 \\ 10003. \end{pmatrix}$$

$x = 1$ es una asíntota vertical de ramas divergentes; ya que:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = +\infty$$

$$h\begin{pmatrix} x \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{\ln x} \\ 43.429 \\ 2171.5 \\ 1.4476\times10^{5} \\ 1.0857\times10^{7} \end{pmatrix} \text{Es evidente que } \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$




$y = \frac{x^2}{\ln x}$

$y\,' = \frac{x}{\ln^2 x}\,(2\ln x - 1)$
La función es estrictamente decreciente en $(0,1) \cup (1, \sqrt{e})$
La función es estrictamente creciente en $(\sqrt{e}, +\infty)$
El punto $P(\sqrt{e}, 2e)$ es un mínimo local
$y\,'' = \frac{1}{\ln^3 x}\left(2\ln^2 x - 3\ln x + 2\right)$
La función es convexa en $(0,1)$ y cóncava en $(1,+\infty)$
No tiene puntos de inflexión

- $t(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$

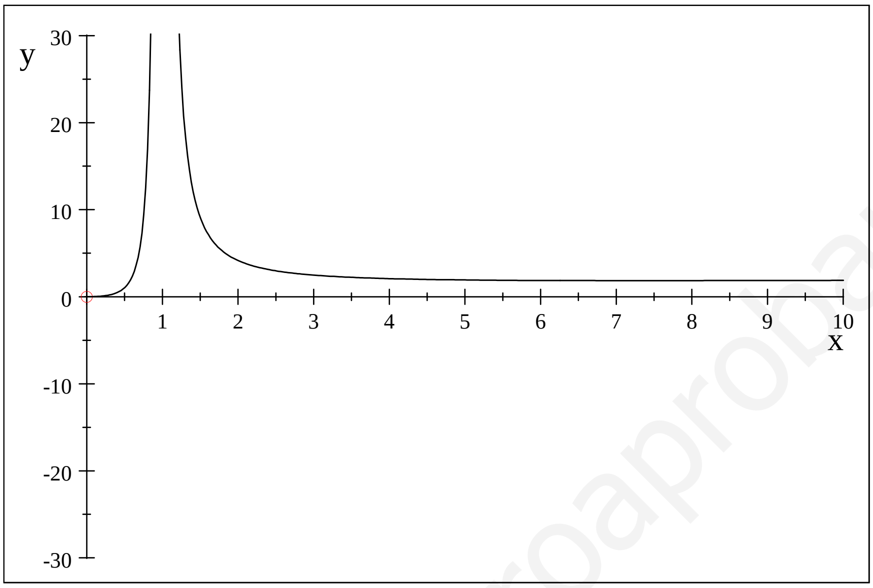
$$t\begin{pmatrix} x \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \\ 0.0001 \\ 0.00001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln^2 x} \\ 1.886\,1 \times 10^{-2} \\ 4.715\,3 \times 10^{-4} \\ 2.095\,7 \times 10^{-5} \\ 1.178\,8 \times 10^{-6} \\ 7.544\,5 \times 10^{-8} \end{pmatrix} \text{Es evidente que} \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0^-$$

$$t\begin{pmatrix} x \\ 0.9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ 0.9999 \\ 0.99999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln^2 x} \\ 81.075 \\ 9801.1 \\ 9.98 \times 10^{5} \\ 9.998 \times 10^{7} \\ 9.999\,8 \times 10^{9} \end{pmatrix} \text{y } t\begin{pmatrix} x \\ 1.1 \\ 1.01 \\ 1.001 \\ 1.0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln^2 x} \\ 121.09 \\ 10201. \\ 1.002 \times 10^{6} \\ 1.000\,2 \times 10^{8} \end{pmatrix}$$

$x = 1$ es una asíntota vertical de ramas convergentes; ya que:

$$\lim_{x\to 1^-} t(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} t(x) = +\infty$$

$$t\begin{pmatrix} x \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \\ 10000 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln^2 x} \\ 1.8861 \\ 4.7153 \\ 20.957 \\ 117.88 \end{pmatrix} \text{ Es evidente que } \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$




$t(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$

Si $x \to +\infty$ entonces $\frac{x}{(\ln x)^2} \to +\infty$ (pero de forma mucho más lenta que en el ejercicio anterior.

$y\,' = \frac{1}{\ln^3 x}(\ln x - 2)$

La función es estrictamente decreciente en $\left(1, e^2\right)$

La función es estrictamente creciente en $(0,1) \cup (e^2, +\infty)$

El punto $P(e^2, \frac{e^2}{4})$ es un mínimo local

$y\,'' = -\frac{2}{x \ln^4 x}(\ln x - 3)$

La función es cóncava en $(0,1) \cup (1, e^3)$ y convexa en $(e^3, +\infty)$

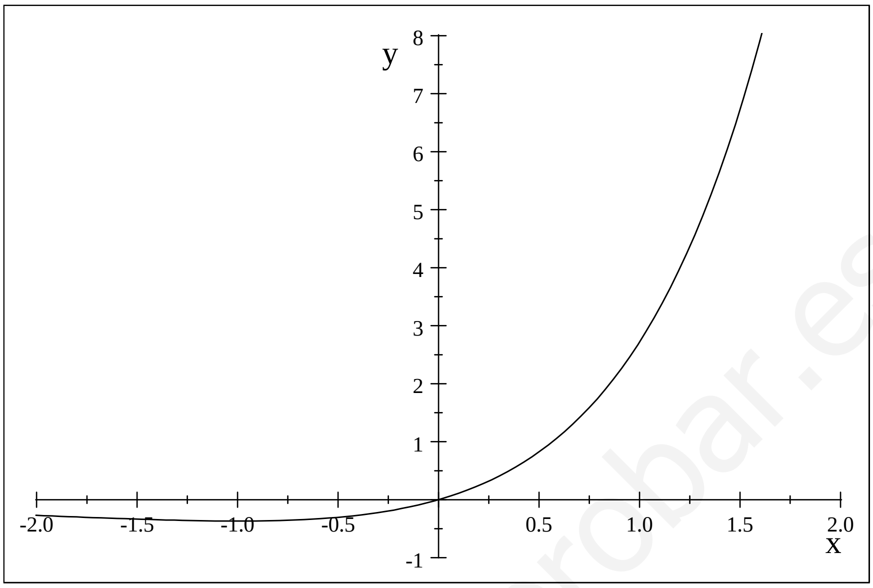
El punto $Q(e^3, \frac{e^3}{9})$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo

- $r(x) = xe^x$

$D(r) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$$r\begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2026 \times 10^{5} \\ 2.6881 \times 10^{45} \\ 1.9701 \times 10^{437} \\ 8.8068 \times 10^{4346} \end{pmatrix} \to \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$$

$$r\begin{pmatrix} -10 \\ -100 \\ -1000 \\ -10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5400 \times 10^{-4} \\ -3.7201 \times 10^{-42} \\ -5.0760 \times 10^{-432} \\ -1.1355 \times 10^{-4339} \end{pmatrix} \to \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$$




$y\,' = (1+x)e^x$

La función es estrictamente decreciente en $(-\infty,-1)$

La función es estrictamente creciente en $(-1,+\infty)$

El punto $P(-1,-\frac{1}{e})$ es un mínimo local y absoluto

$y\,'' = (2+x)e^x$

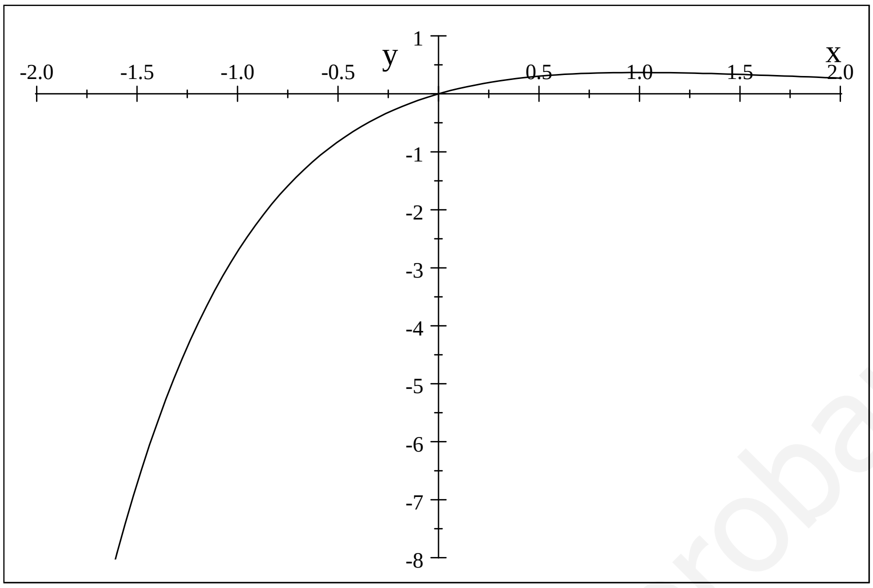
La función es convexa en $(-\infty,-2)$ y cóncava en $(-2,+\infty)$

El punto $Q(-2,-\frac{2}{e^2})$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo

- $s(x) = xe^{-x}$

$$s\begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5400 \times 10^{-4} \\ 3.7201 \times 10^{-42} \\ 5.0760 \times 10^{-432} \\ 1.1355 \times 10^{-4339} \end{pmatrix} \to \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0^+$$

$$s\begin{pmatrix} -10 \\ -100 \\ -1000 \\ -10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2026 \times 10^{5} \\ -2.6881 \times 10^{45} \\ -1.9701 \times 10^{437} \\ -8.8068 \times 10^{4346} \end{pmatrix} \to \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$$




$y\,' = (1-x)e^{-x}$
La función es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$
La función es estrictamente decreciente en $(1, +\infty)$
El punto $P(1, \frac{1}{e})$ es un máxmo local y absoluto
$y\,'' = (-2+x)e^{-x}$
La función es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$
El punto $Q(2, \frac{2}{e^2})$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo

- $j(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$D(j) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

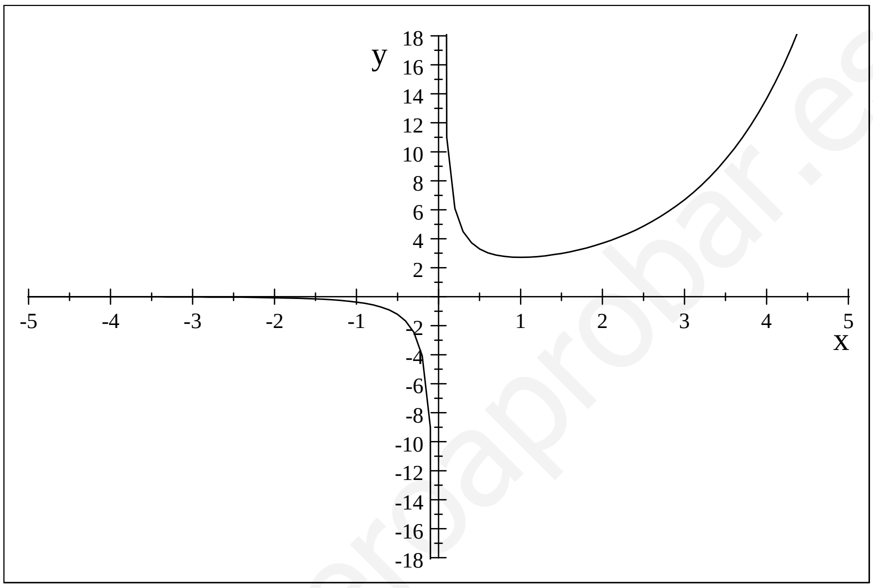
$$j\begin{pmatrix} -10 \\ -100 \\ -1000 \\ -10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5400 \times 10^{-6} \\ -3.7201 \times 10^{-46} \\ -5.0760 \times 10^{-438} \\ -1.1355 \times 10^{-4347} \end{pmatrix} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0^-$$

$$j\begin{pmatrix} x \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.001 \\ 0.0001 \\ 0.00001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}e^x \\ 11.052 \\ 101.01 \\ 101.01 \\ 1001.0 \\ 10001. \\ 1.0\times 10^5 \end{pmatrix} \text{ y } j\begin{pmatrix} x \\ -0.1 \\ -0.01 \\ -0.01 \\ -0.001 \\ -0.0001 \\ -0.00001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}e^x \\ -9.0484 \\ -99.005 \\ -99.005 \\ -999.0 \\ -9999.0 \\ -99999. \end{pmatrix}$$

$x =$ es una asíntota vertical de ramas divergentes; ya que:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$j\begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2202.6 \\ 2.6881 \times 10^{41} \\ 1.9701 \times 10^{431} \\ 8.8068 \times 10^{4338} \end{pmatrix} \to \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty :$$




$y\,' = \frac{e^x(x-1)}{x^2} \frac{d\left(\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)}{dx}$

La función es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

La función es estrictamente creciente en $(1, +\infty)$

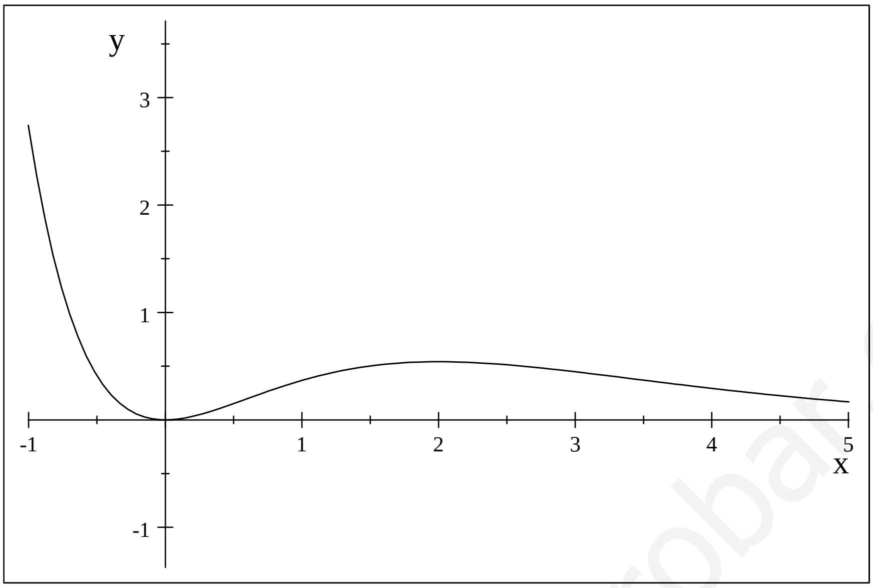
El punto $P(1, e)$ es un mínimo local

$y\,'' = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$

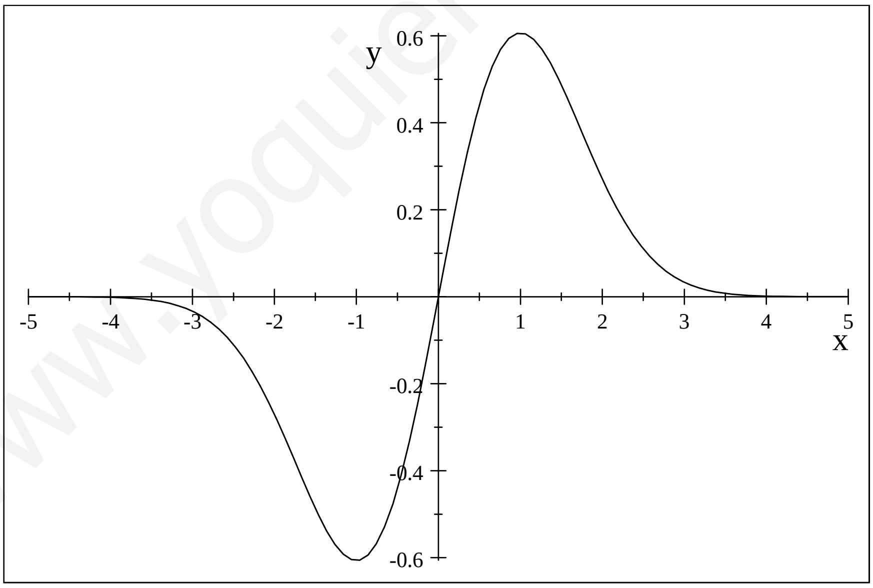
La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$

No hay puntos de inflexión

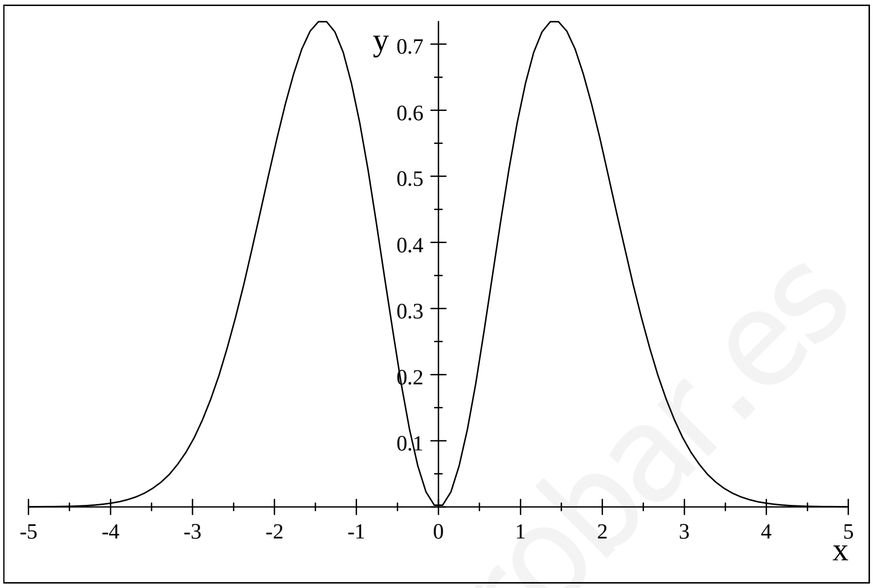
- $y = x^2 e^{-x}$



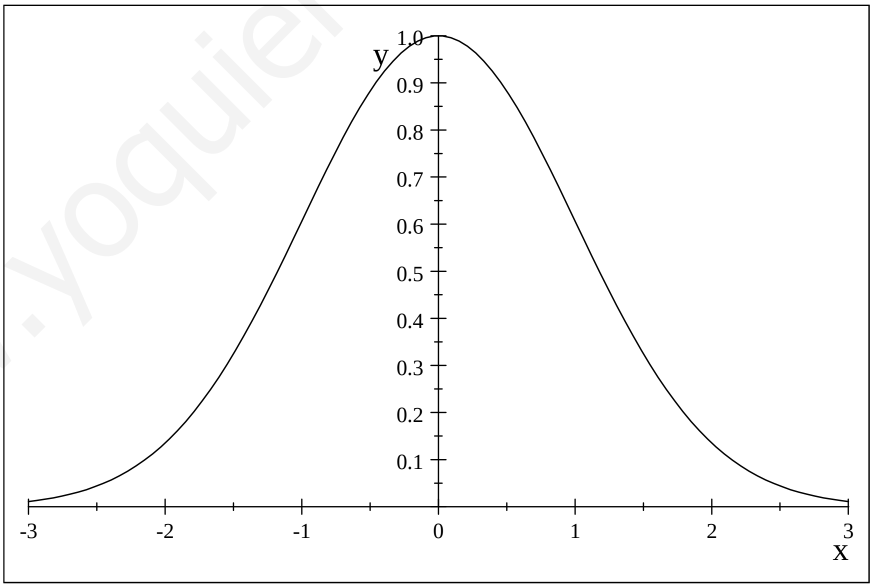

- $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$



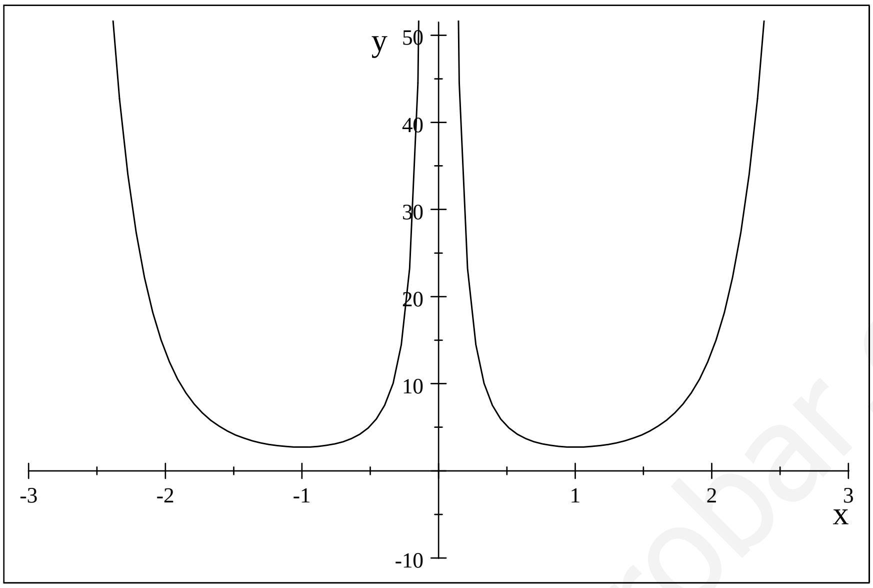

- $y = x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$



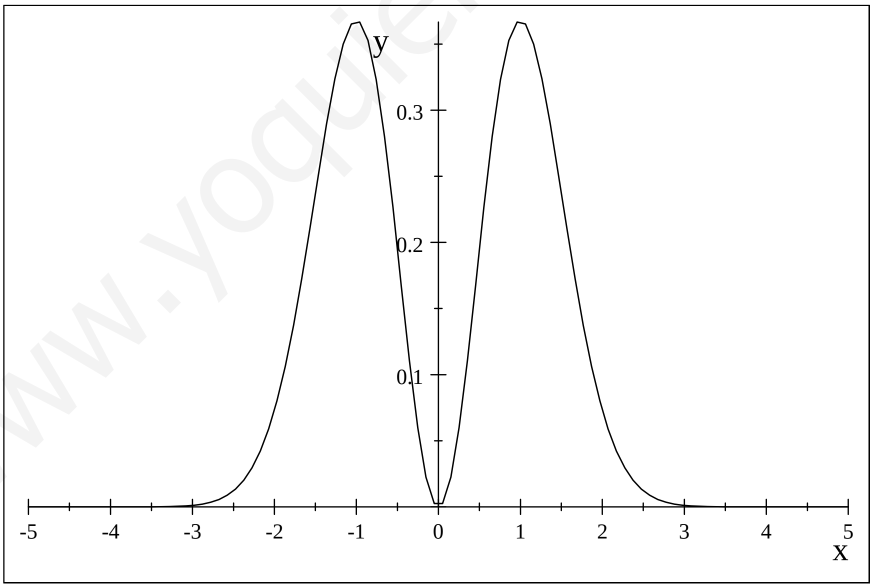

- $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$



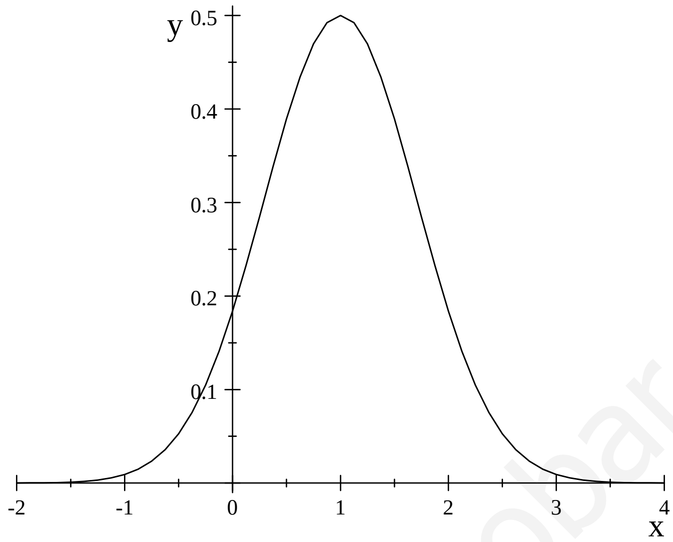

- $y = \frac{e^{x^2}}{x^2}$




- $y = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$




**Exercise 7.3.1** *Gráfica de* $y = \dfrac{1}{2}e^{-(x-1)^2}$


y
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-2
-1
0
1
2
3
4
x

# Part III

# Examen de Cálculo

### 7.3.1 $1^a$ Pregunta

*Opción A*

Dada la función $f(x) = x^2{+}1$ determina aplicando la definición $f\,'(-3)$.Calcula también en el punto de abcisa $x = -3$ su recta tangente

**Solución:**

Como $f\,'(-3) = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+1-10}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

Este límite presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$.

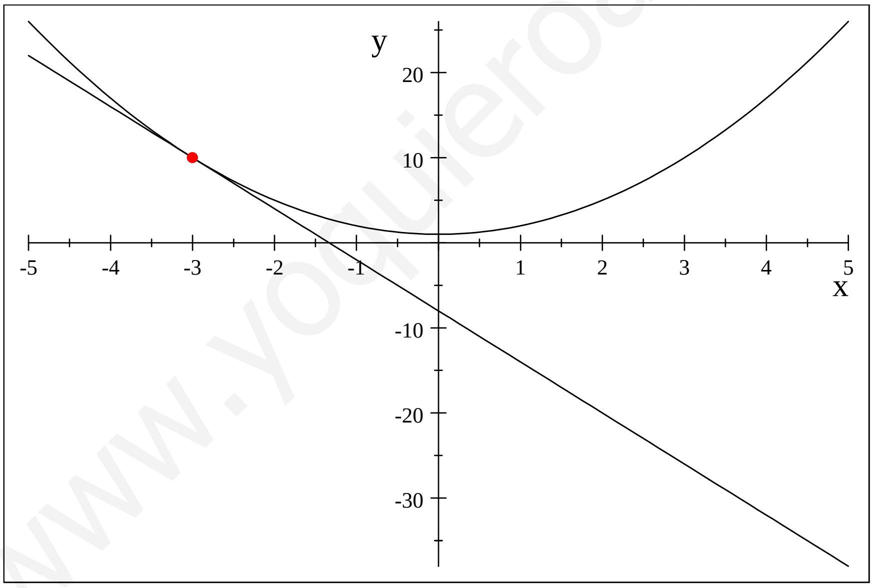
Al ser $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$;entonces:

$$f\,'(-3) = \lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3) = -6$$

La recta, $t$, tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ para $x = -3$,es la recta que pasa por $P(-3, 10)$ y cuya pendiente $m_t = f\,'(-3) = -6$

$$\begin{aligned} t \ &\equiv \ \left\{ \begin{array}{c} P(-3,10) \\ m_t = f'(-3) = -6 \end{array} \right. \rightarrow y - 10 = -6(x+3) \\ t \ &\equiv \ y = -6x - 8 \end{aligned}$$

Aquí tienes las graficas de $y = x^2 + 1$ e $y = -6x - 8$




Larecta $y = -6x - 8$ es tangente en $P(-3, 10)$ a $y = x^2 + 1$

*Opción B*

Dada la función $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ determina la ecuación de su recta tangente en el punto de abcisa $x = 2$

**Solución:**

$y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \rightarrow y' = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4}$

si sacamos factor común en el numerador los factores $x^2(x-1)$ tendremos:

$y' = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)[3(x-1)-2x]}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)[x-3]}{(x-1)^4}$

Si simplificamos, tendremos

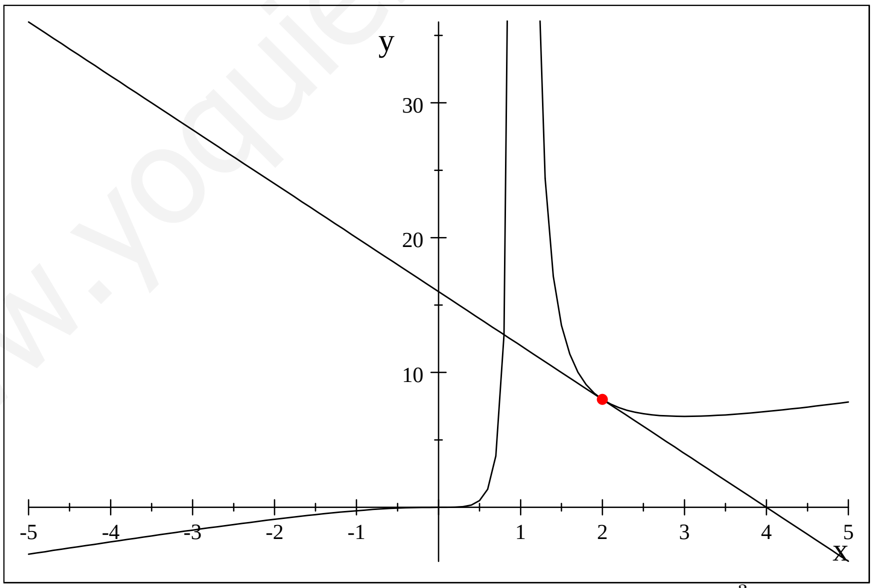
$$y' = \frac{x^2\,(x-3)}{(x-1)^3}$$

En particular para $x = 2$ tendremos que $f\,'(2) = -4$

La recta, $t$, tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ para $x = 2$,es la recta que pasa por $P(2, \frac{8}{(2-1)^2})$ y cuya pendiente $m_t = f\,'(2) = -4$

$$\begin{aligned} t &\equiv \left\{ \begin{array}{c} P(2,8) \\ m_t = f\,'(2) = -4 \end{array} \right. \rightarrow y - 8 = -4(x-2) \\ t &\equiv y = -4x + 16 \end{aligned}$$

Aquí tienes las gráficas de $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ e $y = -4x + 16$




Larecta $y = -4x + 16$ es tangente en $P(2,8)$ a $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

### 7.3.2 $2^a$ Pregunta

*Opcion A*

Dada la ecuación $x^3+3x-1=0$. Justifica que existe al menos una solución en $(0,1)$.y deterrmínala con dos cifras decimales exactas.

**Solución**

Consideramos la función polinómica $f(x)=x^3+3x-1$.

Por ser polinómica es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto continua en $[0,1]$

Además; las imágenes para esta función en los extremos del intervalo son de signos diferentes.$f(0)=-1, f(1)=3$

Como esta función verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo [0,1] entonces; podemos garantizar la existencia de al menos un $c\in(0,1)$ para el cual $f(c)=0$ ($c$ es solución de la ecuación $x^3+3x-1=0$).

Para ser más precisos dividiremos el intervalo $(0,1)$ en diez partes iguales y calcularemos sus imágenes para éstos.

$f(x)=x^3+3x-1$

$$\text{Como } f\begin{pmatrix} 0\\ 0.1\\ 0.2\\ \mathbf{0.3}\\ \mathbf{0.4}\\ 0.5\\ 0.6\\ 0.7\\ 0.8\\ 0.9\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ -0.699\\ -0.392\\ \mathbf{-0.073}\\ \mathbf{0.264}\\ 0.625\\ 1.016\\ 1.443\\ 1.912\\ 2.429\\ 3 \end{pmatrix} \to f\begin{pmatrix} 0.3\\ 0.31\\ \mathbf{0.32}\\ \mathbf{0.33}\\ 0.34\\ 0.35\\ 0.36\\ 0.37\\ 0.38\\ 0.39\\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.073\\ -4.0209\times10^{-2}\\ \mathbf{-7.232\times10^{-3}}\\ \mathbf{2.5937\times10^{-2}}\\ 5.9304\times10^{-2}\\ 9.2875\times10^{-2}\\ 0.12666\\ 0.16065\\ 0.19487\\ 0.22932\\ 0.264 \end{pmatrix}$$

$\to c\in(0.32, 0.33)$

Por último; como $f\begin{pmatrix} \mathbf{0.32}\\ \mathbf{0.325}\\ 0.33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-7.232\times10^{-3}}\\ \mathbf{9.3281\times10^{-3}}\\ 2.5937\times10^{-2} \end{pmatrix}$ La solución de la ecuación $x^3+3x-1=0$ en el intervalo $(0,1)$ con dos cifras decimales exactas podemos considerar que es

$$c\simeq 0.32$$

*Opción B*

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1\\ 4x-4 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ determina los valores de $a$ y $b$ para que la función sea continua y derivable

Para que sea continua en $x=1$ se ha de verificar que:

$$f(1)=\lim_{x\to1} f(x)$$

Ahora bien; como la función cambia de criterio en $x=1$, para que exista el límite de la función en $x=1$,tienen que existir los límites laterales y ser iguales

Como $\begin{bmatrix} f(1)=4-4=0\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(4x-4)=0 \end{bmatrix}$ y $f$ ha de ser continua en $x=1$ se ha de verificar la relación:

$$1+a+b=0\to b=-a-1$$

La función que buscamos es de la forma $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - a - 1 & \text{si } x < 1 \\ 4x - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Determinemos $a$ para que $f$ sea derivable en $x = 1$

Nota1 : Resaltemos que $\begin{bmatrix} f\ '(x) = 2x + a \text{ si } x < 1 \\ f\ '(x) = 4 \text{ si } x > 1 \end{bmatrix}$

Nota 2: $f$ es derivable en $x = 1 \Leftrightarrow \underset{+}{f}\ '(1) = \underset{+}{f}\ '(1)\ y\ \underset{+}{f}\ '(1) \in \mathbb{R}$

$\underset{+}{f}\ '(1) = \lim_{x \to 1^+} f\ '(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + a) = 2 + a$

$\underset{-}{f}\ '(1) = \lim_{x \to 1^-} f\ '(x) = \lim_{x \to 1^-} (4) = 4$

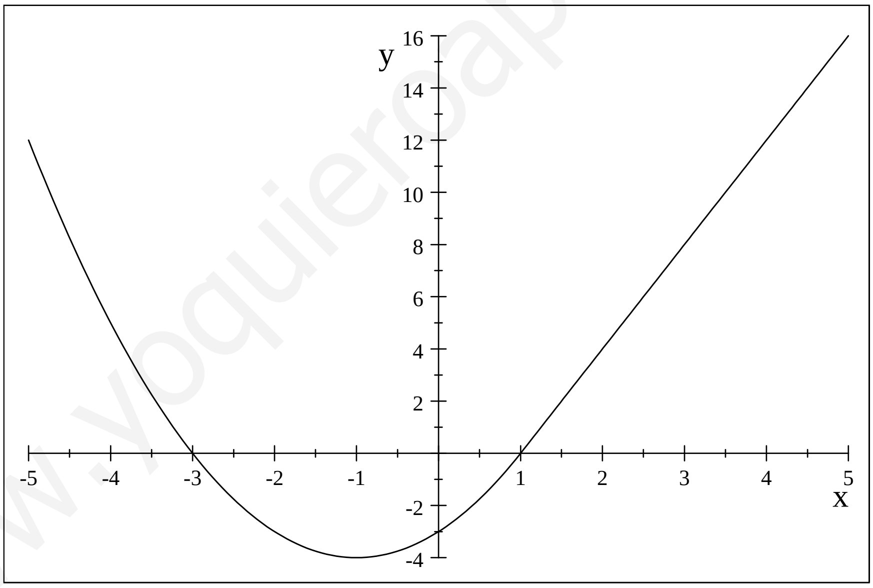
Como $f$ ha de ser derivable en $x = 1$; entonces:

$$2 + a = 4 \to a = 2$$

La función que nos piden es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 4x - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Veamos su gráfica




### 7.3.3 $3^a$ Pregunta

*Opción A*

Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ Determina los coeficientes $a, b$ y $c$ si sabemos que el punto P(2,3) es un punto deinflexión de tangente horizontal

Solución

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f\ '(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f\ ''(x) = 6x^2 + 2a$

El punto $P(2,3)$ es de su gráfica; entonces:

$$3 = 8 + 4a + 2b + c \qquad (0)$$

Como para $x = 2$ su recta tangente es horizontal$\rightarrow f\ '(2) = 0$

$$0 = 12 + 4a + b \qquad (1)$$

Si en $x = 2$ tenemos un punto de inflexión y sabemos que para dicho valor es derivable hasta el orden 2(ya que es una función polinómica). Entonces; por la condición necesaria de punto de inflexión se ha de verificar que $f\ ''(2) = 0$

$$0 = 24 + 4a \rightarrow a = -6$$

sustituyendo el valor de $a$ en (1) obtendremos $b$

$$0 = 12 - 24 + b \rightarrow b = 12$$

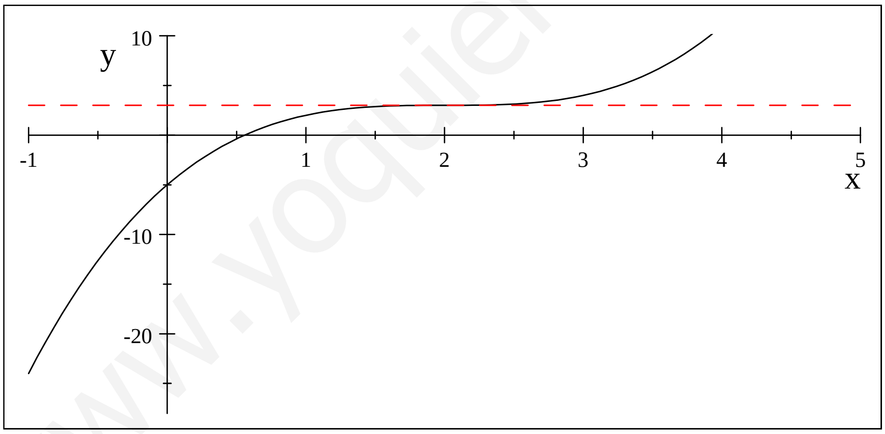
Sustituyendo los valores de $a$ y de $b$ que hemos obtenido en (0)

$$3 = 8 - 24 + 24 + c \rightarrow c = -5$$

La solución es la función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

Veamos su gráfica




La recta $y = 3$ es tangente $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ en $P(2,3)$

*Opción B*

Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ Determina los coeficientes $a, b$ y $c$ si sabemos que:
a) El punto $P(0, -4)$ es de su gráfica
b) En $x = 2$ tenemos un máximo local
c= Para $x = 1$ tenemos un punto de infexión
Solución
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
$f\ '(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x^2 + 2a$
El punto $P(0, -4)$ es de su gráfica; entonces:

$$-4 = c$$

Como para $x = 2$ tenemos un máximo local y sabemos que existe su derivada en él ( por ser $f$ una función polinómica). Entonces ; por la condición necesaria de máximo local se ha de verificar que $\rightarrow f'(2) = 0$(recta tangente es horizontal)

$$0 = 12 + 4a + b \tag{2}$$

Si en $x = 1$ tenemos un punto de inflexión y sabemos que para dicho valor es derivable hasta el orden 2(ya que es una función polinómica). Entonces; por la condición necesaria de punto de inflexión se ha de verificar que $f''(2) = 0$

$$0 = 6 + 2a \rightarrow a = -3$$

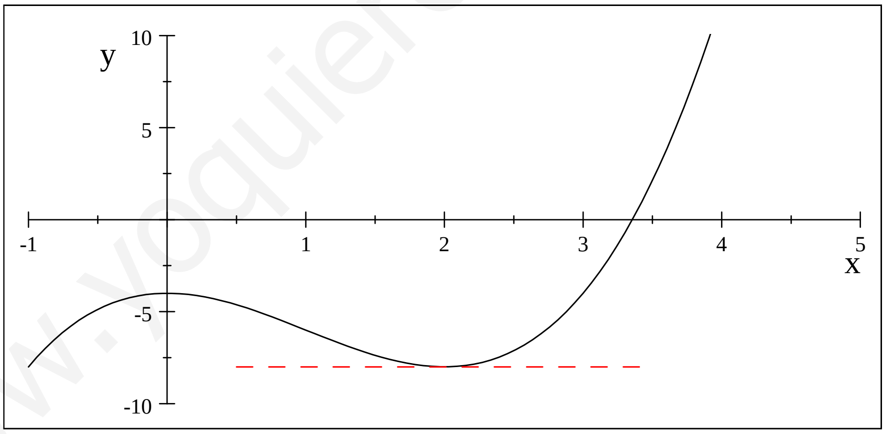
sustituyendo el valor de $a$ en (2) obtendremos $b$

$$0 = 12 - 12 + b \rightarrow b = 0$$

La solución es la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$$

Veamos su gráfica




$y = x^3 - 3x^2 - 4$

### 7.3.4 $4^a$ Pregunta

*Opción A*

Determina los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$

**Solución:**

El dominio de definición de $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$ es:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Por lo tanto; $f$ es continua en $\mathbb{R}$; en particular es continua en $[-1,1]$

Al ser continua en $[-1,1]$ por El Teorema de Weierstrass podemos afirmar que :

$$\exists c \in [-1,1] \ / \ P(c.f(c)) \text{ es máximo absoluto de } f \text{ en [-1,1]}$$
$$\exists c' \in [-1,1] \ / \ Q(c.f(c)) \text{ es mínimo absoluto de } f \text{ en [-1,1]}$$

Garantizada la existencia de al menos un máximo y un mínimo absoluto en $[-1,1]$.La cuestión a determinar es "¿Dónde se encuentran?

Los buscaremos en los extremos del intervalo o en los puntos del abierto de tangente horizontal .

$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} \rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f\,'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

Reescribimos su derivada así$\rightarrow f\,'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1-2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Como el dominio de su derivada es $\mathbb{R} \sim \{0\}$. La función no es derivable en $x = 0$

Así pues; determinemos

$1^o$ Las imágenes de la función en los puntos de tangente horizontal del intervalo $(-1,1)$

Resolvemos la ecuación $f\,'(x) = 0$

$$\frac{1-2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \rightarrow 1 - 2\sqrt[3]{x} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{8}$$

$$\text{Para } x = \tfrac{1}{8} \rightarrow \boxed{f(\tfrac{1}{8}) = \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}} - \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{8}\right)^2} = \tfrac{1}{4}}$$

$2^o$ Las imágenes de la función en los puntos no derivables del intervalo (-1,1)

Como para $x = 0$ la función no es derivable. Calculamos $f(0)$

$$f(0) = 0$$

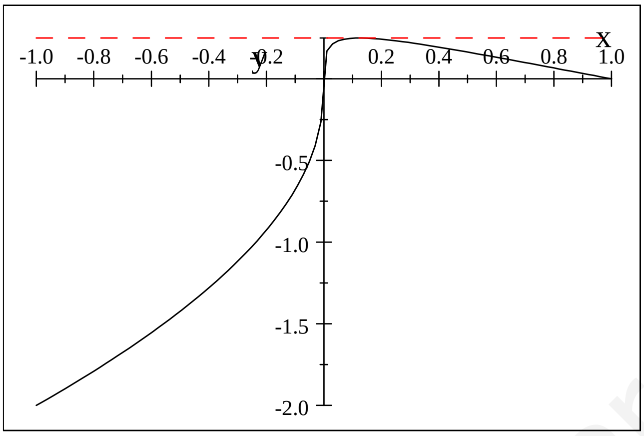
$3^o$ Las imágenes de la función en los extremos del intervalo

$$f(1) = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{1^2} = 0 \qquad f(-1) = \sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{(-1)^2} = -2$$

Como $f(-1) < f(0) = f(1) < f(\frac{1}{8})$ entonces:

$P(-1,-2)$ míni. absoluto de $f$ en $[-1,1]$ $\qquad Q(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4})$ máx absoluto de $f$ en $[-1,1]$

Aquí tienes su gráfica:




*Opción B*

Determina los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = x - \sin x$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

**Solución:**

El dominio de definición de $f(x) = x - \sin x$ es:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Por lo tanto, $f$ es continua en $\mathbb{R}$; en particular es continua en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Al ser continua en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ por El Teorema de Weierstrass podemos afirmar que :

$$\exists c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ / \ P(c.f(c)) \text{ es máximo absoluto de } f \text{ en } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$\exists c' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ / \ Q(c.f(c)) \text{ es mínimo absoluto de } f \text{ en } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Garantizada la existencia de al menos un máximo y un mínimo absoluto en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.La cuestión a determinar es "¿Dónde se encuentran?

Los buscaremos en los extremos del intervalo o en los puntos del abierto de tangente horizontal o en los puntos del abierto donde la función no es derivable.

$f(x) = x - \sin x \to f\ '(x) = 1 - \cos x$

Como el dominio de su derivada es $\mathbb{R}$. La función es derivable en $\mathbb{R}$

Así pues; determinemos

$1^o$ Las imágenes de la función en los puntos de tangente horizontal del intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Resolvemos la ecuación $f\ '(x) = 0$

$$1 - \cos x = 0 \to x = 0 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$$

El único punto de la gráfica de tangente horizontal en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ está en $x = 0$

$$\text{Para } x = 0 \to f(0) = 0$$

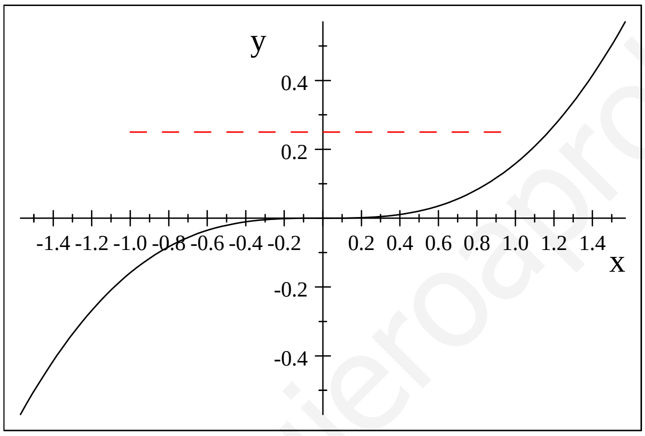
$2^o$ Las imágenes de la función en los extremos del intervalo

$$
\begin{aligned}
f(-\frac{\pi}{2}) &= -\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\pi \approx -0.570\,80 \\
f(\frac{\pi}{2}) &= \frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.570\,80
\end{aligned}
$$

Como $f(-\frac{\pi}{2}) < f(0) < f(\frac{\pi}{2})$ entonces:

$P(-\frac{\pi}{2}, 1-\frac{1}{2}\pi)$ míni. absoluto de $f$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\qquad$ $Q(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\pi-1)$ máx absoluto de $f$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Aquí tienes su gráfica:




Nota: *El punto* $O(0,0)$ *es un punto de inflexión de tangente horizontal*

### 7.3.5 $5^a$ Pregunta

*Opción A*

Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^4 - x^3$

**Solución**

$f(x) = x^4 - x^3$ $\qquad f'(x) = 4x^3 - 3x^2$ $\qquad f''(x) = 12x^2 - 6x$

a) El dominio de definición es $\mathbb{R}$.Luego; la función es continua en $\Re$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

c) Puntos de corte de la gráfica con el eje de las $X$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^4 - x^3 \\ y = 0 \end{array}\right\} \to x^4 - x^3 = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = 0 \\ x = 1 \to y = 0 \end{array}\right]$$

La gráfica corta al eje de las $X$ en $O(0,0)$ y $P(1,0)$

d) Puntos de corte de la gráfica con el eje de las $Y$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^4 - x^3 \\ x = 0 \end{array}\right\} \to y = 0$$

La gráfica corta al eje de las $Y$ en $O(0,0)$

e) Puntos de la gráfica de tangente horizontal

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 3x^2 = 0 \to x^2(4x - 3) = 0 \to \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

Para $\left[\begin{array}{c} x = 0 \to y = 0 \\ x = \frac{3}{4} \to y = \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{256} \end{array}\right]$. Los únicos puntos de su gráfica de tangente horizontal son:

$$O(0,0) \text{ y } T(\frac{3}{4}, -\frac{27}{256})$$

Pero; tenemos la siguiente duda.¿ Para estos puntos la gráfica tiene o no máximos o mínimos locales?

Para determinarlo, estudiaremos el signo de la primera derivada

Si $x < 0 \to \left[\begin{array}{c} x^2 > 0 \\ 4x - 3 < 0 \end{array}\right] \to f'(x) < 0$

Entonces; por la condición suficiente de decrecimiento podemos afirmar que:

$$f \text{ es estrictamente decreciente en } (-\infty, 0)$$

Si $0 < x < \dfrac{3}{4} \to \left[\begin{array}{c} x^2 > 0 \\ 4x - 3 < 0 \end{array}\right] \to f'(x) < 0$

Entonces; por la condición suficiente de decrecimiento podemos afirmar que:

$$f \text{ es estrictamente decreciente en } (0, \frac{3}{4})$$

Si $\dfrac{3}{4} < x \to \left[\begin{array}{c} x^2 > 0 \\ 4x - 3 > 0 \end{array}\right] \to f'(x) > 0$

Entonces; por la condición suficiente de crecimiento podemos afirmar que:

$$f \text{ es estrictamente creciente en } (\frac{3}{4}, +\infty)$$

Observa que para el punto de su gráfica de abcisa $x = \frac{3}{4}$ la función pasa de ser estrictamente decreciente a creciente. Entonces; podemos afirmar utilizando el criterio de la $1^a$ derivada (*para mínimos locales*) lo siguiente:

$$\text{El punto } T(\frac{3}{4}, -\frac{27}{256}) \text{ es un mínimo local de la función}$$

e) Puntos de la gráfica cuya segunda derivada se anula

Resolvemos la ecuación $f\,''(x) = 0$

$$12x^2 - 6x = 0 \to x\,(12x - 6) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para $\left[\begin{array}{c} x = 0 \to y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \to y = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} \end{array}\right]$. Los únicos puntos de su gráfica para los cuales $f\,''(x) = 0$ son:

$$O(0,0) \text{ y } R(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$$

Pero; tenemos la siguiente duda.¿ Para estos puntos la gráfica tiene o no puntos de inflexión?

Para determinarlo, estudiaremos el signo de la segunda derivada

Si $x < 0 \to \left[\begin{array}{c} x < 0 \\ 12x - 6 < 0 \end{array}\right] \to f\,''(x) > 0$

Por la condición suficiente de concavidad podemos afirmar que:

$$f \text{ es cóncava en } (-\infty, 0)$$

Si $0 < x < \dfrac{1}{2} \to \left[\begin{array}{c} x > 0 \\ 12x - 6 < 0 \end{array}\right] \to f\,''(x) < 0$

Por la condición suficiente de convexidad podemos afirmar que:

$$f \text{ es convexa en } (0, \frac{1}{2})$$

Si $\dfrac{1}{2} < x \to \left[\begin{array}{c} x > 0 \\ 12x - 6 > 0 \end{array}\right] \to f\,''(x) > 0$

Por la condición suficiente de concavidad podemos afirmar que:

$$f \text{ es cóncava en } (\frac{1}{2}, +\infty)$$

Observa que

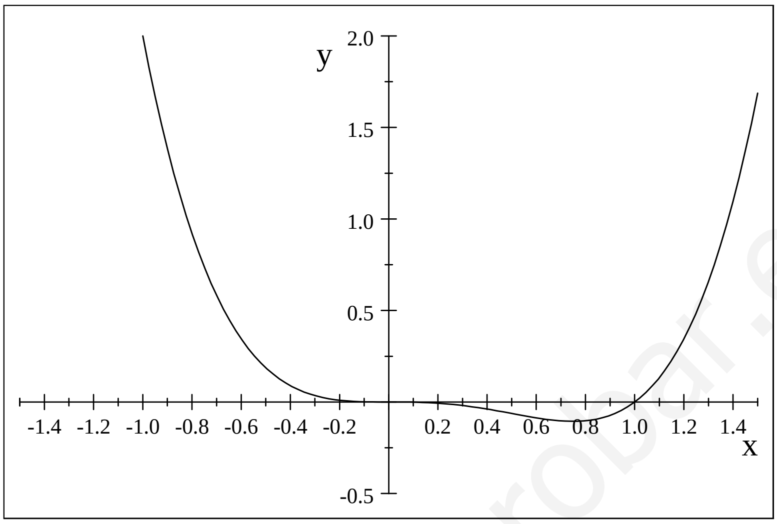
a) Para el punto de su gráfica de abcisa $x = 0$, la función pasa de ser cóncava a convexa. Entonces; podemos afirmar utilizando el criterio del signo de la $2^a$ derivada (para puntos de inflexión) lo siguiente:

$$\text{El punto } O(0,0) \text{ es un punto de inflexión cóncavo-convexo}$$

a) Para el punto de su gráfica de abcisa $x = \frac{1}{2}$ , la función pasa de ser convexa a .cóncava. Entonces; podemos afirmar utilizando el criterio del signo de la $2^a$ derivada (para puntos de inflexión) lo siguiente:

$$\text{El punto } (R(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})) \text{ es un punto de inflexión convexo-cóncavo}$$

Mira su gráfica:




Nota: El punto $O(0,0)$ es un es un punto de inflexión cóncavo-convexo de recta tangente horizontal

*Opción B*

Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$

**Solución**

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$ $\quad f\,'(x)=\dfrac{-16x}{\left(x^2-9\right)^2}$ $\quad f\,''(x)=\frac{48\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-9\right)^3}$

a) El dominio de definición es $\mathbb{R}\sim\{-3,3\}$ .Luego; la función es continua en $\mathbb{R}\sim\{-3,3\}$

b) La función es par; ya que $f(x)=f(-x)$. Su gráfica será simétrica con respecto al eje de las $Y$

c) La función no es continua para $x=-3$, ni tampoco para $x=3$

Tiene como asíntotas verticales las rectas $x=-3$ y $x=3$.

Estudiemos su comportamiento a cada lado de las asíntotas verticales

Para $x=-3$

$\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-9}=\frac{8}{0^-}=-\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-9}=\frac{8}{0^+}=+\infty$

La recta $x=-3$ es una asíntota vertical de ramas divergentes

Para $x=3$

$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-9}=\frac{8}{0^+}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-9}=\frac{8}{0^-}=-\infty$

La recta $x=3$ es una asíntota vertical de ramas divergentes

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=1^+$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=1^+$

La recta $y=1$ es una asíntota horizontal de la función

e) Puntos de corte de la gráfica con el eje de las $X$

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2-1}{x^2-9} \\ y=0 \end{array}\right\}\to x^2-1=0\to\left[\begin{array}{c} x=1\to y=0 \\ x=-1\to y=0 \end{array}\right]$$

La gráfica corta al eje de las $X$ en $P(-1,0)$ y $Q(1,0)$

f) Puntos de corte de la gráfica con el eje de las $Y$

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2-1}{x^2-9} \\ x=0 \end{array}\right\}\to y=\frac{1}{9}$$

La gráfica corta al eje de las $Y$ en $T(0,\frac{1}{9})$

g) Puntos de la gráfica de tangente horizontal

Resolvemos la ecuación $f\,'(x)=0$ teniendo presente que el dominio de $f$ es el mismo que el dominio de $f$

$$\frac{-16x}{\left(x^2-9\right)^2}=0\to x=0$$

El único punto de su gráfica de tangente horizontal es:

$$T(0,\frac{1}{9})$$

Pero; tenemos la siguiente duda.¿ Para este punto la gráfica tiene o no máximo o mínimo local?

Para determinarlo, estudiaremos el signo de la primera derivada

Si $x < -3 \rightarrow -16x > 0 \rightarrow f\ '(x) > 0$

Entonces; por la condición suficiente de crecimiento podemos afirmar que:

$$f \text{ es estrictamente creciente en en el intervalo } (-\infty, -3)$$

Si $-3 < x < 0 \rightarrow -16x > 0 \rightarrow f\ '(x) > 0$

Entonces; por la condición suficiente de crecimiento podemos afirmar que:

$$f \text{ es estrictamente creciente en el intervalo } (-3, 0)$$

Si $0 < x < 3 \rightarrow -16x < 0 \rightarrow f\ '(x) < 0$

Entonces; por la condición suficiente de decrecimiento podemos afirmar que:

$$f \text{ es estrictamente decreciente en } (0, 3)$$

Si $3 < x \rightarrow -16x < 0 \rightarrow f\ '(x) < 0$

Entonces; por la condición suficiente de decrecimiento podemos afirmar que:

$$f \text{ es estrictamente decreciente en } (3, +\infty)$$

Observa que:. para el punto de su gráfica de abcisa $x = 0$ la función pasa de ser estrictamente creciente a decreciente. Entonces; podemos afirmar utilizando el criterio de la $1^a$ derivada (*para máximos locales*) lo siguiente:

$$\text{El punto } T(0, \frac{1}{9}) \text{ es un máximo local de la función}$$

h) Puntos de la gráfica cuya segunda derivada se anula

Resolvemos la ecuación $f\ ''(x) = 0$ teniendo presente que el dominio de $f\ ''$ es el mismo que el dominio de $f$

$$\frac{48\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-9\right)^3} = 0 \text{ no tiene solución}$$

No hay puntos de inflexión

Pero; tenemos la siguiente duda.¿ En qué intervalos la función es cóncava o convexa?

Para determinarlo, estudiaremos el signo de la segunda derivada

Si $x < -3 \rightarrow \left[\begin{array}{c} 48\left(x^2+3\right) > 0 \\ \left(x^2-9\right)^3 > 0 \end{array}\right] \rightarrow f\ ''(x) > 0$

Por la condición suficiente de concavidad podemos afirmar que:

$$f \text{ es cóncava en el intervalo } (-\infty, -3)$$

Si $-3 < x < 3 \rightarrow \left[\begin{array}{c} 48\left(x^2+3\right) > 0 \\ \left(x^2-9\right)^3 < 0 \end{array}\right] \rightarrow f\ ''(x) < 0$

Por la condición suficiente de convexidad podemos afirmar que:

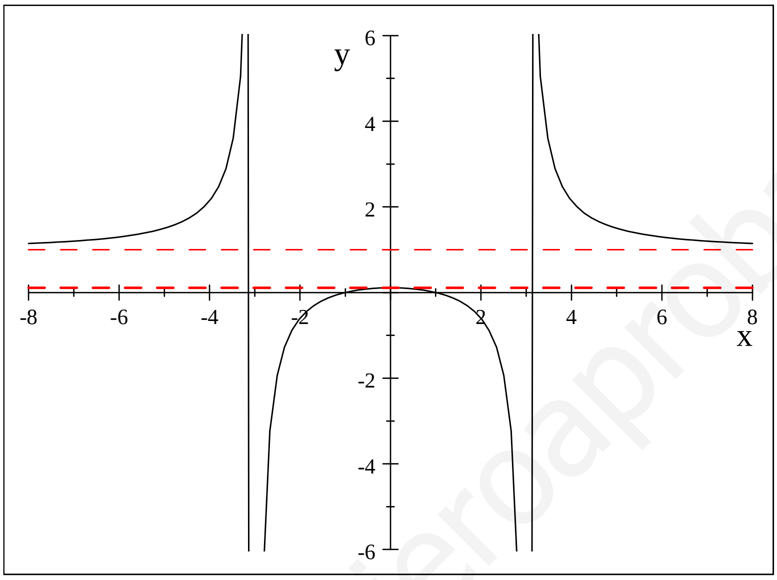
$$f \text{ es convexa en el intervalo } (-3, -3)$$

Si $3 < x \rightarrow \left[ \begin{array}{c} 48\left(x^2+3\right) > 0 \\ \left(x^2-9\right)^3 > 0 \end{array} \right] \rightarrow f\,''(x) > 0$

Por la condición suficiente de concavidad podemos afirmar que:

$$f \text{ es cóncava en el intervalo } (3, +\infty)$$

Mira su gráfica:




Nota: En este ejercicio podíamos haber omitido el estudio de su curvatura por ser evidente su gráfica

### 7.3.6 $6^a$ Pregunta

*Opción A*

De todas las rectas que pasan por el punto $P(2,3)$ determina las dimensiones de aquélla que forma con los ejes de coordenadas y en el primer cuadrante un triángulo de área mínima.

*Ayuda: Si una recta corta a los ejes de coordenadas en los puntos* $R(a,0)$ *y* $T(0,b)$ *su ecuación es:*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

**Solución:**

Si la recta *corta a los ejes de coordenadas en los puntos* $R(a,0)$ *y* $T(0,b)$ es evidente que la superfiice del triángulo que determina viene dada por la relación:

$$S=\frac{a{\cdot}b}{2} \qquad (*)$$

La ecuación de ligadura, que me permite relacionar las variables $a$ y $b$, se obtiene de la condición de que el punto $P(2,3)$ pertenezca a dicha recta: Como todo punto de una recta , ha de verificar su ecuación; entonces, tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{a}+\frac{3}{b} &= 1\rightarrow\frac{2}{a}=1-\frac{3}{b}\rightarrow\frac{2}{a}=\frac{b-3}{b}\\ a &= \frac{2b}{b-3}\text{ Relación entre } a \text{ y } b\end{aligned}$$

Como $a=\frac{2b}{b-3}$ con $b>3$ sustituyendo en la relación $(*)$ tendremos que la superficie depende sólo de la variable $b$.

$$S=\frac{\frac{2b}{b-3}{\cdot}b}{2}=\frac{b^2}{b-3}$$

Con lo que el problema; queda reducido a determinar el mínimo local de la función $S$ sabiendo que $b>3$

$S=\frac{b^2}{b-3}\rightarrow S\,'=\frac{b(b-6)}{(b-3)^2}\rightarrow S\,''=\frac{18}{(b-3)^3}$

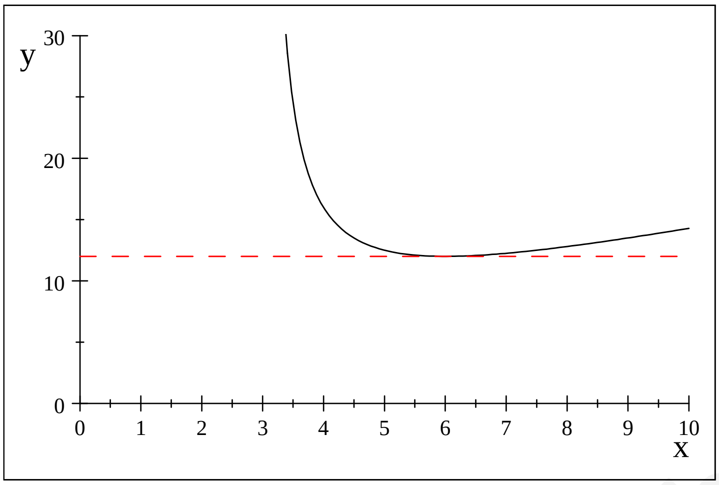
Valores que anulan $S\,'$

$$\frac{b\,(b-6)}{(b-3)^2}=0\rightarrow\left\{\begin{array}{c} b=0 \text{ no puede ser}\\ b=6\end{array}\right.$$

Vamos a utilizar el criterio de la segunda derivada para la determinación del mínimo local (también es absoluto) de esta función

Al ser $\left[\begin{array}{c} S\,'(6)=0\\ S\,''(6)=\frac{18}{(6-3)^3}=\frac{2}{3}\end{array}\right]\rightarrow$para $b=6$ la superficie $S=\frac{6^2}{6-3}=12\ u^2$ es mínima

Mira la gráfica de la superficie en $(3,+\infty)$




Nota : Si $b = 6$, como $a = \frac{2b}{b-3}$ entonces:

$$a = \frac{12}{3} = 4$$

La recta buscada es ésta:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

*Opción B*

Se desea construir el marco de una ventana rectangular de superficie $1\ m^2$. Si sabemos que los marcos laterales cuestan 2.5 euros por metro lineal y los otros dos cuestan a 3 euros por metro lineal.

Determina las dimensiones de la ventana para que el coste sea el mínimo posible.

**Solución**

Sean $\left[ \begin{array}{c} x \rightarrow \text{longitud en metros de la altura del rectángulo} \\ y \rightarrow \text{longitud en metros de la base del rectángulo} \end{array} \right]$

La función coste es evidente que es

$$C = 2{\cdot}x{\cdot}2.5 + 2{\cdot}y{\cdot}3 \rightarrow 5x + 6y$$

La relación de ligadura entre las variables$x$ e $y$ es

$$1 = S = x{\cdot}y \rightarrow y = \frac{1}{x}$$

Sustituyendo el valor de $y$ en la función $C$ coste; tendremos

$$C = 5x + \frac{6}{x} \text{ con } x > 0$$

Calculemos $C\,'$ y $C\,''$

$C\,' = 5 - \frac{6}{x^2}$ $\qquad C\,'' = \frac{12}{x^3}$

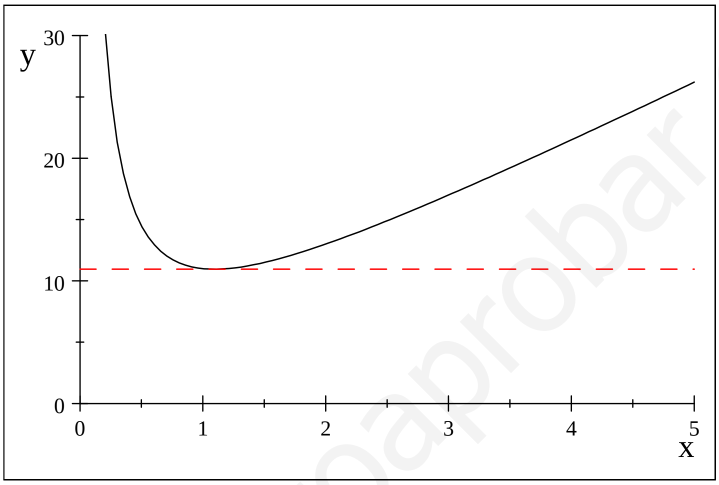
Valores que anulan $C\,'$

$$5 - \frac{6}{x^2} = 0 \rightarrow \left[ \begin{array}{c} x = -\frac{1}{5}\sqrt{30} \text{ imposible} \\ x = \frac{1}{5}\sqrt{30} \approx 1.095\,4 \end{array} \right]$$

Vamos a utilizar el criterio de la segunda derivada para la determinación del mínimo local (también es absoluto) de esta función

Al ser $\left[\begin{array}{c} C\,'(\frac{1}{5}\sqrt{30}) = 0 \\ C\,''(\frac{1}{5}\sqrt{30}) = \frac{12}{(\frac{1}{5}\sqrt{30})^3} > 0 \end{array}\right]$ →para $x = \frac{1}{5}\sqrt{30}$ el coste $C = 5(\frac{1}{5}\sqrt{30}) + \frac{6}{(\frac{1}{5}\sqrt{30})} = 10.954$ euros es mínimo

Mira la gráfica de la función Coste en $(0, +\infty)$




Nota Si $x = \frac{1}{5}\sqrt{30} \rightarrow y = \frac{1}{6}\sqrt{30}$

### 7.3.7 7$^a$ Pregunta

*Opción A*

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ se puede aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$. en caso afirmativo aplícalo y obtén dicho punto.

Interpreta geométricamente qué ocurre en dicho punto

**Solución**

El teorema de ROLLE dice:

$$\text{Si} \left[\begin{array}{c} f \text{ es continua en [a,b]} \\ f \text{ es derivable en } (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right] \to \exists\ c \in (a,b) \text{ tal que } f\ '(c) = 0$$

Interpretación geométrica:

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el $(a,b)$ y sus imágenes en los extremos coinciden; entonces el teorema de Rolle nos garantiza que existe al menos un punto de la gráfica en el interior del intervalo cuya recta tangente es horizontal

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9} \qquad f\ '(x) = \frac{-10x}{(x^2-9)^2}$$

como el dominio de la función y de su derivada coinciden con el conjunto

$$D(f) = D(f\ ') = \mathbb{R} \sim \{-3,3\}$$

La función es continua y derivable en $\mathbb{R} \sim \{-3,3\}$.

En particular, $f$ será continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$

Como además $f(1) = f(-1) = \frac{3}{8}$

la función verifica las hipótesis del teorema de Rolle y por lo tanto,; podemos afirmar que:

$\exists c \in (a,b)$ tal que$f\ '(c) = 0$ (en el punto $P(c, f(c))$ su recta tangente es horizontal

Calculémoslo

$$\frac{-10x}{(x^2-9)^2} = 0 \to x = 0$$

El punto $P(0, \frac{4}{9})$ es un punto de la gráfica de tangente horizontal

*Opción B*

¿Se puede aplicar el Teorema del Valor Medio a la función $y = \sqrt{1+x}$ en el intervalo $[0,3]$?. En caso afirmativo, aplícalo

Determina dicho punto de la gráfica y explica el significado geométrico de éste

**Solución:**

El teorema del Valor Medio dice:

$$\text{Si} \left[\begin{array}{c} f \text{ continua en [a,b]} \\ f \text{ derivable en } (a,b) \end{array}\right] \to \exists\ c \in (a,b) \ / \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f\ '(c)$$

Interpretación geométrica:

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en $(a,b)$. El teorema del valor medio nos garantiza que existe al menos un punto del abierto cuya recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos de la gráfica $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b)$

La función dada $y = \sqrt{1+x}$ tiene por dominio el intervalo $[-1, +\infty)$
Su derivada es $y\,' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ siendo su dominio $D(f\,') = (-1, +\infty)$
Como es continua en $[-1, +\infty)$ y derivable en $(-1, +\infty)$. En particular, se verifica:

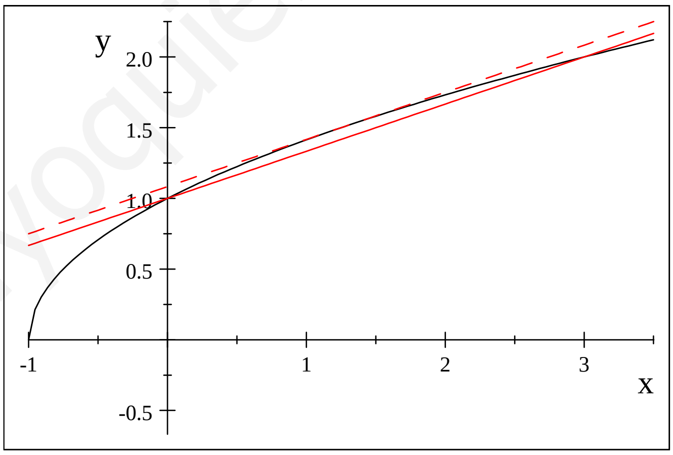
$$\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [0,3] \\ f \text{ es derivable en } (0,3) \end{array}$$

como verifica las hipótesis del T:V.M; entonces, podemos grarantizar que:

$$\exists c \in (0,3) \text{ tal que} \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = f\,'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}$$

Calculémoslo
$$\frac{2-1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \to c = \frac{5}{4}$$

El punto de la gráfica $P(\frac{5}{4}, \sqrt{1+\frac{5}{4}}\,) = P(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ es tal que su recta tangente, $t$, es paralela a la recta, $r$,que pasa por $A(0,1)$ y $B(3,2)$
Comprobémoslo:
$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(0,1) \\ B(3,2) \end{array} \right. \to r \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(0,1) \\ m_r = \frac{1}{3} \end{array} \right. \to r \equiv y - 1 = \frac{1}{3}x \to r \equiv y = \frac{1}{3}x + 1$
$t \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}) \\ m_t = m_r = \frac{1}{3} \end{array} \right. \to t \equiv y - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{4}\right) \to r \equiv y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{12}$
Vamos a dibujar la gráfica, la recta $r$ y la recta $t$



# Cálculo Integral

Juan José Isach Mayo

23 de Septiembre de 2007

# Contents

[1]Esta función es estrictamente creciente en $[0,1]$.Por lo que $\sup\{f(x)/x\in[x_{i-1},x_i]\}=f(x_i)$ y $\inf\{f(x)/x\in[x_{i-1},x_i]\}=f(x_{i-1})$

# Part I

# Integrales indefinidas

# Chapter 1

# Integrales indefinidas

**Definicion** Primitiva de una función en $]a, b[$

Toda función $F(x)$ que verifique la relación $F\,'(x) = f(x)\ \forall x \in\ ]a, b[$ se denomina primitiva de la función $f(x)$ en el intervalo $]a, b[$

<u>Ejemplos:</u>

| Función | Primitiva | Intervalo |
|---|---|---|
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $F(x) = \ln x$ | $]0, 1[$ |
| $f(x) = x$ | $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ | $]3, 4[$ |
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x$ | $]2, 3[$ |

*Nota* :

Si consideramos las funciones

$f_1(x) = x^2 + 1 \quad f_2(x) = x^2 + 2 \quad f_3(x) = x^2 + 3 \quad f_4(x) = x^2 + 4$

Sus derivadas correspondientes $\forall x \in \Re$ son:

$f_1'(x) = 2x \quad f_2'(x) = 2x \quad f_3'(x) = 2x \quad f_4'(x) = 2x$

Así pues: la función $h(x) = 2x$ no tiene en $\Re$ una única primitiva

**Teorema fundamental del cálculo**

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ funciones continuas en } [a, b] \\ f \text{ y } g \text{ funciones derivables en } ]a, b[ / \ f\,'(x) = g\,'(x)\ \forall x \in\ ]a, b[ \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) - g(x) = C\ \forall x \in\ ]a, b[$$

Consideremos la función auxiliar $H(x) = f(x) - g(x)$ en $[a, b]$. Por las hipótesis iniciales, podemos afirmar que $H$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ por ser resta de las funciones $f$ y $g$ continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$

Como $H$ verifica las hipótesis del valor medio en $[x_1, x_2]$ donde $x_1$ y $x_2$ son valores genéricos del intervalo $[a, b]$; entonces podemos afirmar que existe al menos un $c \in ]a, b[$ tal que:

$$\frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} = H\,'(c) = f\,'(c) - g\,'(c) =^{[1]} 0 \Longrightarrow H(x_2) - H(x_1) = 0$$

Acabamos de demostrar que sean cuales sean $x_1, x_2 \in [a, b] \Longrightarrow H(x_2) = H(x_1)$

Luego la función $H(x) = H(a) = C\ \forall x \in [a, b]$

Este teorema nos permite afirmar que:

[1] Por hipótesis sabemos que $f\,'(x) = g\,'(x)\ \forall x \in\ ]a, b[$;en particular $f\,'(c) = g\,'(c)$

- Si $f(x)$ posee una primitiva entonces posee infinitas
- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $]a, b[$;entonces todas las primitivas de $f$ en $]a, b[$ son de la forma $F(x) + C$..

Al conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ en $]a, b[$ $(F(x) + C)$ se le llama integral indefinida de $f$ y se le representa por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Ejemplos

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad \int e^x dx = e^x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $]a, b[$ y además conocemos un punto de la gráfica de $F$,entonces está función $F$ es única

Ejercicio: De todas las primitivas de la función $f(x) = 3x^2$, determina la que pasa por el punto $(-2, 3)$
$F(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$. Como $F$ ha de pasar por el punto $(-2, 3)$ entonces:

$$3 = F(-2) = (-2)^3 + C \longrightarrow C = 11$$

La solución es la función $F(x) = x^3 + 11$

# Chapter 2

# Integrales inmediatas

## 2.1 Integrales polinómicas

**Para calcular la integral de un polinomio, necesitarás conocer la siguientes reglas:**

1. $\int f\,'(x)dx = f(x) + C$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
4. $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx \;\; k \in \Re$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$
6. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

Ejemplos:

⋆ $\int (x^3 - 3x^2 + 4x - 3 + \frac{2}{3x})dx$

$I = \int x^3 dx - 3\int x^2 dx + 4\int x dx - 3\int dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}dx$

$I = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 3x + \frac{2}{3}\ln|x| + C$

⋆ $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 3}{3x^2}dx$

$J = \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2}dx - \int \frac{x^2}{x^2}dx + \frac{4}{3}\int \frac{x}{x^2}dx - \frac{3}{3}\int \frac{1}{x^2}dx$

$J = \frac{1}{3}\int x dx - \int dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx$

$J = \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} - x + \frac{4}{3}\ln|x| + \frac{1}{x} + C$

⋆ $\int \frac{\sqrt{3x^3}}{2x^2})dx$

$K = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\sqrt{x^3}}{x^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{x^{(3/2)}}{x^2}dx$

$K = \frac{\sqrt{3}}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{3x} + C$

1. $\int (2x+3)dx = x^2+3x+C$

2. $\int x^2(x+4)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + C$

3. $\int \frac{t^2+3t+2}{t}dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 2\ln t + C$

4. $\int \left(s\sqrt{s}+1\right)ds = \frac{2}{5}\left(\sqrt{s}\right)^5 + s + C$

5. $\int \frac{(3x-2)^2}{x\sqrt{x}}dx = 2\frac{3x^2-12x-4}{\sqrt{x}} + C$

6. $\int \left(\frac{3}{2x^3} - \frac{3}{5\sqrt{x}}\right)^2 dx = -\frac{9}{20x^5} + \frac{18}{25\left(\sqrt{x}\right)^5} + \frac{9}{25}\ln x + C$

7. $\int \left(6x^3 + \sqrt{2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{5}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx = \frac{3}{2}x^4 + \sqrt{2}x + 2\ln x + \frac{3}{2x^2} + \frac{15}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + C$

8. $\int \left((3x)^{\frac{2}{3}} - 3\right)dx = \frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{x}\right)^5\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 - 3x + C$

9. $\int (2-3x^2)^3 dx = -\frac{27}{7}x^7 + \frac{54}{5}x^5 - 12x^3 + 8x + C$

10. $\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{x} + C$

11. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{x} - \ln x + C$

12. $\int x(x-1)(x-2)dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + C$

13. $\int 12x(x+2)(x-2)dx = 3x^4 - 24x^2 + C$

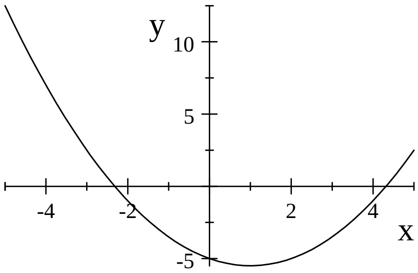
**Ejercicios adicionales**

*De una función $f(x)$ conocemos su función derivada $f'(x) = x-1$. Si además sabemos que un punto de su gráfica (la de $f$) es el punto $(4,-1)$. Calcula la expresión de dicha función.*

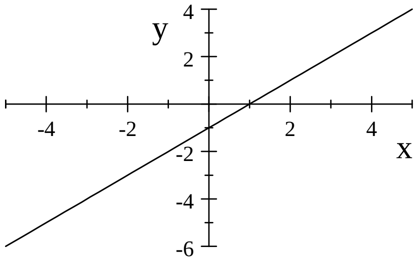
$f(x) = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + C$

Como $(4,-1)$ pertenece a la gráfica de $f \to -1 = \frac{(4)^2}{2} - (4) + C$

De donde $C = -5 \to f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 5$




Grfica de $f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 5$

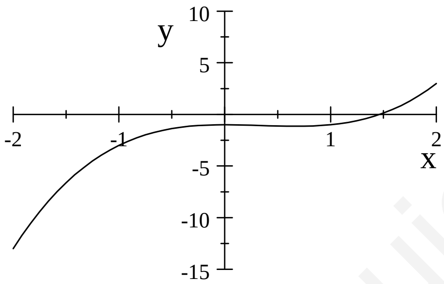



Grfica de $f\ '(x) = x - 1$

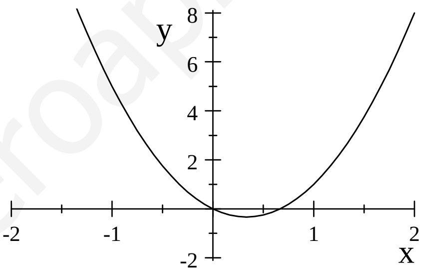
*De una función $f(x)$ conocemos su función derivada $f\ '(x) = 3x^2 - 2x$. Si además sabemos que un punto de su gráfica (la de $f$) es el punto $(0, -1)$. Calcula la expresión de dicha función.*

$f(x) = \int \left(3x^2 - 2x\right) dx = x^3 - x^2 + C$

Como $(0, -1)$ pertenece a la gráfica de $f \to -1 = C$




Grfica de $f(x) = x^3 - x^2 - 1$



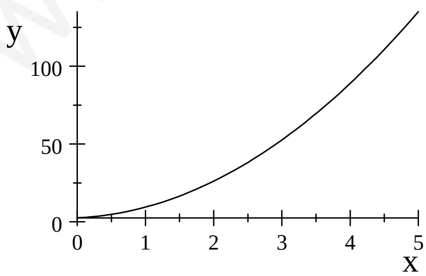

Grfica de $f'(x) = 3x^2 - 2x$

*La velocidad de un móvil (en m/seg), viene dada por la expresión $v = 9.8t+2$ donde $t$ es el tiempo medido en seg . Si además sabemos, que en el instante inicial el móvil se encuentra a 2.5 m del observador Calcula la expresión que nos permita calcular el espacio en función del tiempo.*

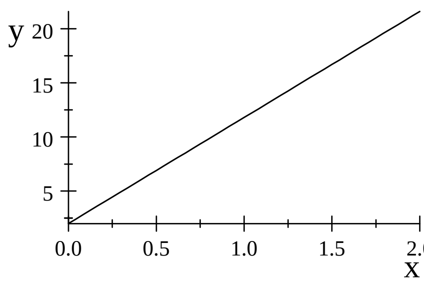
$e(t) = \int (9.8t + 2)\, dt = 4.\,9t^2 + 2t + C$

Como $(0\ seg, 2.5\ m)$ pertenece a la gráfica de $e \to 2.5 = C$

De donde $C = 2.5 \to e(t) = 4.\,9t^2 + 2t + 2.5$




Grfica del espacio




Grfica de la velocidad

## 2.2 Integrales de tipo potencial

**Tan sólo necesitas conocer que** $\int f\,'(x)\cdot(f(x))^n dx =^{1} \dfrac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$ **siempre que** $n \neq -1$

**Ejemplo1** $\displaystyle\int x(4+3x^2)^3 dx =^{2} \frac{1}{\boxed{6}}\int \boxed{6}\,x(4+3x^2)^3 dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{(4+3x^2)^4}{4} + C$

**Ejemplo2** $\displaystyle\int \frac{3}{(x-2)^3}dx = 3\int (x-2)^{-3}dx = \frac{3(x-2)^{-2}}{-2} + C = \frac{-3}{2(x-2)^2}$

**Ejemplo3** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx =^{3} \frac{1}{\boxed{2}}\int \boxed{2}\cdot x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx =$

$$= \frac{1}{\boxed{2}}\cdot\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

**Ejemplo4** $\displaystyle\int \sin x\cdot\cos^2 x dx =^{4} \boxed{-}\int \boxed{-}\sin x\cdot\cos^2 x dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$

**Ejemplo5** $\displaystyle\int \cos 3x\cdot\sin^2 3x dx =^{5} \frac{1}{3}\int \boxed{3}\cos 3x\cdot\sin^2 3x dx = \frac{\sin^3 3x}{9} + C$

1. $\displaystyle\int x(4+3x^2)^3 dx = \frac{(4+3x^2)^4}{24} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{3}{(x-2)^3}dx = -\tfrac{3}{2(x-2)^2} + C$
3. $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{(1-5\cdot 3^{2x})^3}dx = \tfrac{1}{20(-1+5\cdot 9^x)^2\ln 3} + C$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{(1+x^2)} + C$
5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+5x^3)^2}dx = -\tfrac{1}{15(1+5x^3)} + C$
6. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}dx = \tfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{(x^2+2x)}\right)^2 + C$
7. $\displaystyle\int (\sin 4x)(1+5\cos 4x)^4 dx = -\tfrac{1}{100}\left(1+5\cos 4x\right)^5 + C$

---

[1] $\displaystyle\int f\,'(x)\cdot(f(x))^n dx = \frac{1}{n+1}\int (n+1)f\,'(x)\cdot(f(x))^n dx = \frac{1}{n+1}\int \left[(f(x))^{n+1}\right]' dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$

[2] Si $f(x) = 4+3x^2$ entonces $f\,'(x) = 6x$

[3] Si $f(x) = 1+x^2$ entonces $f\,'(x) = 2x$

[4] Si $f(x) = \cos x$ entonces $f\,'(x) = -\sin x$

[5] Si $f(x) = \sin 3x$ entonces $f\,'(x) = 3\cos 3x$

8. $\displaystyle\int \sin 4x \cos^4 4x dx = -\tfrac{1}{20}\cos^5 4x + C$

9. $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x dx = -\tfrac{1}{4}\cos^4 x + C$

10. $\displaystyle\int x^3 \ \sqrt[4]{1-x^4} dx = -\tfrac{1}{5}\left(\sqrt[4]{(1-x^4)}\right)^5 + C$

11. $\int x^4(3+5x^5)^{-3}dx = -\dfrac{1}{50(3+5x^5)^2} + C$

12. $\displaystyle\int (2+5x)^7 dx = \tfrac{1}{40}\left(2+5x\right)^8 + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{(2-x)^3}dx = \tfrac{1}{2(2-x)^2} + C$

14. $\displaystyle\int \sin^2 3x \cos 3x dx = \tfrac{1}{9}\sin^3 3x + C$

15. $\displaystyle\int \tan^3 x \ \sec^2 x dx = \frac{\tan^4 x}{4} + C$

16. $\displaystyle\int \cot^4 5x \csc^2 5x dx = -\frac{\cot^5 5x}{25} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{x\ln(3x^2+2)}{3x^2+2}dx = \tfrac{1}{12}\ln^2\left(3x^2+2\right) + C$

18. $\displaystyle\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}dx = \tfrac{1}{4}\arctan^4 x + C$

19. $\displaystyle\int \frac{(\arcsin\ x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \tfrac{1}{4}\arcsin^4 x + C$

20. $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{1-x}}dx = -8\sqrt{(1-x)} + C$

## 2.3 Integrales de tipo logarítmicas

Para resolver este tipo de integrales has de saber que:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \qquad\qquad \int \frac{f\,'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

**Ejemplo 1** $\displaystyle\int \frac{1}{x-2}dx = \ln|x-2| + C$

**Ejemplo 2** $\displaystyle\int \frac{1}{2-3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3}{2-3x}dx = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$

**Ejemplo 3** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-3}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-3\right| + C$

**Ejemplo 4** $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{3-4\cdot e^{3x}}dx = -\frac{1}{12}\int \frac{-12e^{3x}}{3-4\cdot e^{3x}}dx = -\frac{1}{12}\ln\left|3-4\cdot e^{3x}\right| + C$

**Ejemplo 5** $\displaystyle\int \tan 5x dx = \int \frac{\sin 5x}{\cos 5x}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{-5\sin 5x}{\cos 5x}dx = -\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$

**Ejemplo 6** $\displaystyle\int \frac{2^{5x}}{5\cdot 2^{5x}+3}dx = \frac{1}{25\cdot\ln 2}\int \frac{2^{5x}\cdot 25\cdot\ln 2}{5\cdot 2^{5x}+3}dx = \frac{1}{25\cdot\ln 2}\ln\left|5\cdot 2^{5x}+3\right| + C$

**Ejemplo 7** $\displaystyle\int \frac{1}{(64+x^2)\arctan\frac{x}{8}}dx = \frac{1}{8}\int \frac{\frac{8}{(64+x^2)}}{\arctan\frac{x}{8}}dx = \frac{1}{8}\ln\left|\arctan\frac{x}{8}\right| + C$

**Ejemplo 8** $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln|\ln x| + C$

**Nota** Fíjate en estas dos integrales, que vienen a continuación, como se resuelven

- $\displaystyle\int \sec x dx =^{[6]} \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx = \int \frac{\sec^2 x+\sec x\cdot\tan x}{\sec x+\tan x}dx$

Observa que la derivada de $\sec x+\tan x$ es $\sec^2 x+\sec x\cdot\tan x$. Por lo tanto la integral anterior es de tipo logarítmico

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x+\tan x| + C$$

- $\displaystyle\int \csc x dx =^{[7]} \int \frac{\csc x(\csc x-\cot x)}{\csc x-\cot x}dx = \int \frac{\csc^2 x-\csc x\cdot\cot x}{\csc x-\cot x}dx$

Observa que la derivada de $\csc x-\cot x$ es $\csc^2 x-\csc x\cdot\cot x$. Por lo tanto la integral anterior es de tipo logarítmico

$$\int \sec x dx = \ln|\csc x-\cot x| + C$$

1. $\displaystyle\int \frac{2}{3x}dx = \tfrac{2}{3}\ln x + C$
2. $\displaystyle\int \frac{7}{1-3x}dx = -\tfrac{7}{3}\ln(1-3x) + C$
3. $\displaystyle\int \frac{3x}{1+5x^2}dx = \tfrac{3}{10}\ln\left(1+5x^2\right) + C$
4. $\displaystyle\int \tan 5x\ dx = -\tfrac{1}{5}\ln(\cos 5x) + C$
5. $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = -\ln(1+e^{-x}) + C$

[6] Multiplicamos y dividimos por $\sec x+\tan x$
[7] Multiplicamos y dividimos por $\csc x-\cot x$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+4x^4}dx = \tfrac{1}{16}\ln\,(1+4x^4)+C$

7. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx = \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right)+C$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2-e^{-x}}{x^3+3e^{-x}}dx = \tfrac{1}{3}\ln\left(x^3+3e^{-x}\right)+C$

9. $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^4+2x^2}dx = \tfrac{1}{4}\ln\left(x^4+2x^2\right)+C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln\left(\ln x\right)+C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx = \ln\left(\arcsin x\right)+C$

12. $\displaystyle\int \sec x\ dx = \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{(\sec x+\tan x)}dx = \ln(\sec x+\tan x)+C$

13. $\displaystyle\int \frac{2x+2}{3x^2+6x+1}dx = \tfrac{1}{3}\ln\left(3x^2+6x+1\right)+C$

14. $\displaystyle\int \csc x\ dx = \int \frac{\csc x(\csc x-\cot x)}{(\csc x-\cot x)}dx = \ln(\csc x-\cot x)+C$

15. $\displaystyle\int \frac{x-\sin x}{x^2+2\cos x}dx = \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2\cos x\right)+C$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \ln\left(1+e^{-x}\right)+x+C$

17. $\displaystyle\int \frac{\sin 8x}{\cos^2 4x}dx = -\tfrac{1}{2}\ln\left(\cos 4x\right)+C$

18. $\displaystyle\int \frac{\sin 6x}{\sin^2 3x}dx = \tfrac{2}{3}\ln\left(\sin 3x\right)+C$

19. $\displaystyle\int \frac{1+3x^4}{5x+3x^5}dx = \tfrac{1}{5}\ln x+\tfrac{1}{5}\ln\left(5+3x^4\right)+C = \ln\sqrt[5]{x}\,\sqrt[5]{(5+3x^4)}+C$

20. $\displaystyle\int \frac{1+e^{-x}}{x-e^{-x}}dx = \ln\left(x-e^{-x}\right)+C$

## 2.4 Integrales de tipo exponencial

Para resolver este tipo de integrales has de conocer que:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \text{ donde } a\in\Re^+\sim\{1\} \qquad \int a^{f(x)}f\,'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+C \text{ donde } a\in\Re^+\sim\{1\}$$

$$\int e^x dx = e^x+C \qquad \int e^{f(x)}f\,'(x)dx = e^{f(x)}+C$$

**Ejemplo1** $\displaystyle\int x\cdot 2^{x^2}dx=\frac{1}{\boxed{2}}\int\boxed{2}\cdot x\cdot 2^{x^2}dx=\frac{1}{\boxed{2}}\frac{2^{x^2}}{\ln 2}+C$

**Ejemplo2** $\displaystyle\int\cos(3x)\cdot 5^{\sin(3x)}dx=\frac{1}{\boxed{3}}\int\boxed{3}\cos(3x)\cdot 5^{\sin(3x)}dx=\frac{5^{\sin(3x)}}{3\ln 5}+C$

**Ejemplo3** $\displaystyle\int e^{1-x}dx=\boxed{-}\int\boxed{(-1)}\cdot e^{1-x}dx=-e^{1-x}+C$

**Ejemplo4** $\displaystyle\int(x-1)(ab)^{x^2-2x}dx=\frac{1}{2}\int 2\cdot(x-1)(ab)^{x^2-2x}dx=\frac{(ab)^{x^2-2x}}{2\ln(ab)}+C$

**Ejemplo5** $\displaystyle\int\frac{e^{\arctan 3x}}{1+9x^2}dx=\frac{1}{\boxed{3}}\int\frac{\boxed{3}}{1+9x^2}\cdot e^{\arctan 3x}dx=\frac{1}{\boxed{3}}\cdot e^{\arctan 3x}+C$

**Ejemplo6** $\displaystyle\int 10^{\ln(\cos x)}\tan x dx=^{8}-\int(-1)\tan x 10^{\ln(\cos x)}dx=\frac{-10^{\ln(\cos x)}}{\ln 10}+C$

**Ej7** $\displaystyle\int\left(e^x-e^{-x}\right)^2dx=\int e^{2x}dx-2\int dx+\int e^{-2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}-2x-\frac{e^{-2x}}{2}+C$

1. $\displaystyle\int e^{3x}dx=\tfrac{1}{3}e^{3x}+C$

2. $\displaystyle\int 5^{-2x}dx=-\tfrac{1}{2\ln 5}25^{-x}+C$

3. $\displaystyle\int xe^{x^2+3}dx=\tfrac{1}{2}e^{x^2+3}+C$

4. $\displaystyle\int 3^{\sin 3x}\cos 3x dx=\tfrac{3^{-1+\sin 3x}}{\ln 3}+C$

5. $\displaystyle\int\frac{e^{\overline{\frac{1-x}{1+x}}}}{(1+x)^2}dx=-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{-1+x}{1+x}}+C$

6. $\displaystyle\int e^{\tan x}\sec^2 x dx=e^{\tan x}+C$

7. $\displaystyle\int\frac{3^{\arctan 3x}}{1+9x^2}dx=\tfrac{3^{-1+\arctan 3x}}{\ln 3}+C$

8. $\displaystyle\int\frac{3^{\ln(1+x)}}{1+x}dx=\tfrac{1}{\ln 3}\left(1+x\right)^{\ln 3}+C$

9. $\displaystyle\int\left(\frac{5}{3}\right)^x dx=-5^x\tfrac{3^{-x}}{-\ln 5+\ln 3}+C$

10. $\displaystyle\int x\cdot(3\cdot e)^{x^2+1}dx=\tfrac{1}{2(\ln 3+1)}3^{x^2+1}e^{x^2+1}+C$

---

[8] $\left[\ln\left(\cos(x)\right)\right]'=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$

11. $\int (x^2+1)e^{x^3+3x+2}dx = \frac{1}{3}e^{x^3+3x+2} + C$

12. $\int \sec 3x \tan 3x \cdot e^{\sec 3x}dx = \dfrac{e^{\sec 3x}}{3} + C$

13. $\int \dfrac{e^{\sqrt{1-x^2}}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -e^{\sqrt{(1-x^2)}} + C$

14. $\int \dfrac{e^{-\dfrac{1}{x}}}{x^2}dx = e^{-\frac{1}{x}} + C$

15. $\int x \cdot e^{2x^2+1}dx = \frac{1}{4}e^{2x^2+1} + C$

16. $\int \dfrac{5^{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4\ln 5}5^{\frac{-1+x^2}{x^2+1}} + C$

17. $\int x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}dx = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$

18. $\int x^2 \cdot 5^{\frac{-x^3+3}{2}}dx = -\frac{10}{3\ln 5}5^{-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}} + C$

19. $\int \dfrac{5^{\ln(1-4x)}}{4x-1}dx = \frac{1}{4\ln 5}\left(1-4x\right)^{\ln 5} + C$

## 2.5 Integrales tipo seno y coseno

Para resolver algunas integrales trigonométricas, es conveniente que recuerdes algunas fórmulas trigonométricas[9]

| | |
|---|---|
| $\int \cos x dx = \sin x + C$ | $\int f\,'(x)\cos f(x)dx = \sin f(x) + C$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | $\int f\,'(x)\sin f(x)dx = -\cos f(x) + C$ |

**Ejemplo1** $\int x \cdot \sin(x^2)dx = \dfrac{1}{\boxed{2}}\int \boxed{2} \cdot x \cdot \sin(x^2)dx = -\dfrac{1}{2}\cos(x^2) + C$

9

| | |
|---|---|
| $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ | $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ |
| $\csc A = \dfrac{1}{\sin A}$ | $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ |
| $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$ | |
| $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ | $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$ |
| $\sin(2A) = 2\sin A \cdot \cos A$ | $\cos(2A) = \begin{cases} \cos^2 A - \sin^2 A \\ 1 - 2\sin^2 A \\ -1 + 2\cos^2 A \end{cases}$ |
| $\sin^2 A = \dfrac{1-\cos(2A)}{2}$ | $\cos^2 A = \dfrac{1+\cos(2A)}{2}$ |

**Ejemplo2** $\int \cos(5x)dx = \frac{1}{\boxed{5}}\int \boxed{5}\cos(5x)dx = \frac{1}{5}\sin(5x) + c$

**Ejemplo3** $\int \frac{x}{1+x^2}\cos(\ln(1+x^2))dx = \frac{1}{2}\sin(\ln(1+x^2)) + C$

**Ejemplo4** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx = 2\int \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx = -2\cos\sqrt{x} + C$

**Ejemplo5** $\int \frac{\sin(\arctan 3x)}{1+9x^2}dx = \frac{1}{\boxed{3}}\int \frac{\boxed{3}}{1+9x^2}\cdot\sin(\arctan 3x)dx = -\frac{1}{3}\cdot\cos(\arctan 3x) +$ $C$

**Ejemplo6** $\int e^x\cos(e^x+3)dx = \sin(e^x+3) + C$

1. $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$

2. $\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

3. $\int x\cos(x^2+3)dx = \frac{1}{2}\sin\left(x^2+3\right) + C$

4. $\int x^2\sin(3-2x^3)dx = \frac{1}{6}\cos\left(-3+2x^3\right) + C$

5. $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\cos\sqrt{1+3x^2}dx = \frac{1}{3}\sin\sqrt{(1+3x^2)} + C$

6. $\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)dx = -\cos(\ln x) + C$

7. $\int e^{3x}\cos(3e^{3x})dx = \frac{1}{9}\sin\left(3e^{3x}\right) + C$

8. $\int 5^{2x}\cos(5^{2x})dx = \frac{1}{2}\frac{\sin 25^x}{\ln 5} + C$

9. $\int \frac{1}{(1+x)^2}\cos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\sin\frac{-1+x}{1+x} + C$

## 2.6 Integrales tipo tangente,cotangente,secante y cosecante

| | |
|---|---|
| $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \sec^2 x dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ \displaystyle\int (1+\tan^2 x) dx\end{array}\right\} = \tan x + C$ | $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int f\ '(x) \sec^2 f(x) dx \\ \displaystyle\int \frac{f\ '(x)}{\cos^2 f(x)} dx \\ \displaystyle\int f\ '(x)(1+\tan^2 f(x)) dx\end{array}\right\} = \tan f(x) + C$ |
| $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \csc^2 x dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ \displaystyle\int (1+\cot^2 x) dx\end{array}\right\} = -\cot x + C$ | $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int f\ '(x) \csc^2 f(x) dx \\ \displaystyle\int \frac{f\ '(x)}{\sin^2 f(x)} dx \\ \displaystyle\int f\ '(x)(1+\cot^2 f(x)) dx\end{array}\right\} = -\cot f(x) + C$ |
| $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \sec x \cdot \tan x dx \\ \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx\end{array}\right\} = \sec x + C$ | $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int f\ '(x) \sec f(x) \cdot \tan f(x) dx \\ \displaystyle\int \frac{f\ '(x) \sin f(x)}{\cos^2 f(x)} dx\end{array}\right\} = \sec f(x) + C$ |
| $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \csc x \cdot \cot x dx \\ \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx\end{array}\right\} = -\csc x + C$ | $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int f\ '(x) \csc f(x) \cdot \cot f(x) dx \\ \displaystyle\int \frac{f\ '(x) \cos f(x)}{\sin^2 f(x)} dx\end{array}\right\} = -\csc f(x) + C$ |

Las integrales que aparecen en las dos últimas filas de la tabla anterior; son de tipo potencial

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(3x+2)} dx = \frac{1}{3} \tan(3x+2) + C$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2(3x^2)} dx = -\frac{1}{6} \cot(3x^2) + C$

3. $\displaystyle\int \csc^2 5x dx = -\frac{1}{5} \cot(5x) + C$

4. $\displaystyle\int x \sec^2(3x^2+1) dx = \frac{1}{6} \tan(1+3x^2) + C$

5. $\displaystyle\int x \csc^2(3x^2+1) dx = -\frac{1}{6} \cot(3x^2+1) + C$

6. $\displaystyle\int \tan^2(3x-1) dx = \int \left[1+\tan^2(3x-1)\right] dx - \int 1 dx = \frac{1}{3} \tan(3x-1) - x + C$

7. $\displaystyle\int x^2 \cot^2(3x^3-1) dx = -\frac{1}{9} \cot(3x^3-1) - \frac{x^3}{3} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{\sin^2(e^{3x}+1)} dx = -\frac{1}{3} \cot(e^{3x}+1) + C$

9. $\int \frac{1}{x^2 \sin^2(\frac{1}{x})} dx = \cot(\frac{1}{x}) + C$

10. $\int x^3 \sec^2(3x^4+1) dx = \frac{1}{12} \tan(3x^4+1) + C$

11. $\int \sec 5x \tan 5x dx = \frac{1}{5 \cos 5x} + C$

12. $\int \csc 5x \cot 5x dx = -\frac{1}{5 \sin 5x} + C$

13. $\int \frac{e^{3x} \cos(e^{3x}+1)}{\sin^2(e^{3x}+1)} dx = -\frac{1}{3 \sin(e^{3x}+1)} + C$

14. $\int \frac{x^2 \sin(x^3+1)}{\cos^2(x^3+1)} dx = \frac{1}{3 \cos(x^3+1)} + C$

15. $\int \frac{\sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\cos \sqrt{x}} + C$

16. $\int 5^x \sec 5^x \tan 5^x dx = \frac{1}{\ln 5 \cos 5^x} + C$

17. $\int \frac{x \cos(\ln(1+x^2))}{(1+x^2) \sin^2(\ln(1+x^2))} dx = -\frac{1}{2 \sin(\ln(x^2+1))} + C$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx = 2 \tan \sqrt{x} + C$

19. $\int \sin \frac{x}{3} dx = -3 \cos \frac{1}{3} x + C$

20. $\int x \cos \frac{x^2}{3} dx = \frac{3}{2} \sin \frac{1}{3} x^2 + C$

21. $\int \csc \frac{5x}{2} \cot \frac{5x}{2} dx = -\frac{2}{5 \sin \frac{5}{2} x} + C$

## 2.7 Integrales del tipo $\int \sin^{2n+1}(x)dx$ o $\int \cos^{2n+1}(x)dx$ siendo $n \in N$ y además $n \geq 1$

Procedimiento para resolver $\int \sin^{2n+1}(x)dx$

1º *Desharemos la imparidad de la potencia que aparezca en el integrando*

$$\int \sin^{2n+1}(x)dx = \int \sin^{2n} x \cdot \sin x \, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^n \cdot \sin x \, dx$$

$2^o$ *Desarrollamos el integrando; obteniendo siempre integrales del siguiente tipo:*

$$\int \cos^k x \cdot \sin x \, dx = -\int (\cos x)^k \cdot (-\sin x) \, dx = -\frac{(\cos x)^{k+1}}{k+1} + C \ (k \in N \ y \ par)$$

$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$

Procedimiento para resolver $\int \cos^{2n+1}(x)dx$

1º *Desharemos la imparidad de la potencia que aparezca en el integrando*
$\int \cos^{2n+1}(x)dx = \int \cos^{2n} x \cdot \sin x \; dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^n \cdot \sin x \; dx$

$2^o$ *Desarrollamos el integrando; obteniendo siempre integrales del siguiente tipo:*

$$\int \sin^k x \cdot \cos x \; dx = \int (\sin x)^k \cdot \cos x \; dx = \frac{(\sin x)^{k+1}}{k+1} + C \; (k \in N \; y \; par)$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + C$$

**Ejemplo 1** $\int \sin^3 3x dx = \int \sin^2 3x \cdot \sin 3x dx = \int (1-\cos^2 3x) \cdot \sin 3x dx$

Esta integral se descompone en las dos siguientes:
$= \int \sin 3x dx - \int \cos^2 3x \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int 3 \sin 3x dx + \frac{1}{3}\int (-3) \cos^2 3x \sin 3x dx =$
El resultado final después de integrar es:

$$\int \sin^3 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos^3 3x}{9} + C$$

**Ejemplo 2** $\int \cos^3 3x dx = \int \cos^2 3x \cdot \cos 3x dx = \int (1-\sin^2 3x) \cdot \cos 3x dx$

Esta integral se descompone en las dos siguientes:
$= \int \cos 3x dx - \int \sin^2 3x \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int 3 \cos 3x dx - \frac{1}{3}\int 3 \sin^2 3x \cos 3x dx =$
El resultado final después de integrar es:

$$\int \cos^3 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin^3 3x}{9} + C$$

## 2.8 Integrales del tipo $\int \sin^k(x) \cdot \cos^t(x)dx$ siendo al menos $k$ o $t$ impar

*La transformación es la misma que en los apartados anteriores para aquella potencia de seno o coseno cuyo exponente sea impar*

**Ejemplo 3** $\int \cos^3 3x \cdot \sin^2 3x dx = \int \cos 3x \cdot (1-\sin^2 3x) \sin^2 3x dx =$

Desarrollando el integrando tendremos las siguientes integrales

$= \int \cos 3x \cdot \sin^2 3x dx - \int \cos 3x \cdot \sin^4 3x dx =$[10]
Con lo que la integral quedará

$$\int \cos^3 3x \cdot \sin^2 3x dx = \frac{\sin^3 3x}{9} - \frac{\sin^5 3x}{15} + C$$

**Ejemplo 4** $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 3x) \cos^2 x dx =$

Desarrollando el integrando tendremos las siguientes integrales
$= \int \sin x \cdot \cos^2 x dx - \int \sin x \cdot \cos^4 x dx =$[11]
Con lo que la integral quedará

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = -\frac{\cos^3 3x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

**Ejemplo 5** Resuelve la integral $\int \sin^3 2x \cdot \cos^3 2x dx$

Nota: La puedes resolver de dos formas distintas

## 2.9 Integrales del tipo $\int \sin^{2n}(x)dx$ o $\int \cos^{2n}(x)dx$ siendo $n \in N$ y además $n \geq 1$

1º *Utilizaremos alguna de las siguientes fórmulas*

| | |
|---|---|
| $\sin^2 A = \frac{1 - \cos(2A)}{2}$ | $\cos^2 A = \frac{1 + \cos(2A)}{2}$ |

2º *Las integrales a resolver son de tipos anteriores*

**Ejemplo 6** $\int \sin^2 2x dx =$[12] $\int \frac{1 - \cos(4x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x dx$

Estas dos integrales son inmediatas
$\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2 \cdot \boxed{4}} \int \boxed{4} \cos 4x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + C$

**Ejemplo 7** $\int \cos^2 8x dx =$[13] $\int \frac{1 + \cos(16x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 16x dx$

[10] $\int \cos 3x \cdot \sin^2 3x dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos 3x \cdot \sin^2 3x dx = \frac{\sin^3 3x}{9} + C$
$\int \cos 3x \cdot \sin^4 3x dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos 3x \cdot \sin^4 3x dx = \frac{\sin^5 3x}{15} + C$

[11] $\int \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\int -\sin x \cdot \cos^2 x dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$
$\int \sin x \cdot \cos^4 x dx = -\int -\sin x \cdot \cos^4 x dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$

[12] Como $\sin^2 A = \frac{1 - \cos(2A)}{2}$ ; entonces $\sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2}$

[13] Como $\cos^2 A = \frac{1 + \cos(2A)}{2}$ ; entonces $\cos^2(8x) = \frac{1 + \cos(16x)}{2}$

Estas dos integrales son inmediatas
$$\int \cos^2 8x dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2 \cdot \boxed{16}} \int \boxed{16} \cos 4x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 16x}{32} + C$$

## 2.10 Integrales del tipo $\int \sin^{2n}(x)\cdot\cos^{2k}(x)dx$ siendo $n \in N$ y además $n, k \geq 1$

Además de poder utilizar alguna de las dos fórmulas anteriores, también se puede utilizar la siguiente:

$$2 \sin A \cos A = \sin 2A \to \sin A \cos A = \frac{\sin 2A}{2}$$

**Ejemplo 8** $\int \cos^2 8x \cdot \sin^2 8x dx =^{14} \int \frac{\sin^2 16x}{4} dx = \frac{1}{4}\left[\int \frac{1-\cos(32x)}{2} dx\right]$

Estas dos integrales son inmediatas
$$\int \cos^2 8x \cdot \sin^2 8x dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 32xd\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 32x}{64}\right] + C$$

**Ejemplo 9** Resuelve tú la integral $\int \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx$

1. $\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$
2. $\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$
3. $\int \sin^5 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos^3 2x - \frac{1}{10}\cos^5 2x + C$
4. $\int \cos^5 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 4x + \frac{1}{4}\sin^5 4x + C$
5. $\int \sin^3 \frac{3x}{4} dx = -\frac{4}{3}\cos\frac{3}{4}x + \frac{4}{9}\cos^3\frac{3}{4}x + C$
6. $\int \cos^3 \frac{x}{3} dx = 3\sin\frac{x}{3} - \sin^3\frac{x}{3} + C$
7. $\int \frac{\sin^3(\ln(x))}{x} dx = -\cos(\ln x) + \frac{1}{3}\cos^3(\ln x) + C$
8. $\int \frac{\sin^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\left(-\cos\sqrt{x} + \frac{1}{3}\cos^3\sqrt{x}\right) + C$
9. $\int \sin^2 3x \cos 3x dx = \frac{1}{9}\sin^3 3x + C$

[14] Como $\sin A \cos A = \frac{\sin 2A}{2}$ ; entonces $\sin 8x \cos 8x = \frac{\sin 16x}{2}$

10. $\int \sin^3 3x \cos^2 3x dx = -\frac{1}{9}\cos^3 3x + \frac{1}{15}\cos^5 3x + C$

11. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 \cos x dx =$[15] $\dfrac{\sin^3 x}{3} - 2\dfrac{\sin^5 x}{5} + \dfrac{\sin^7 x}{7} + C$

12. $\int \sin^4 2x \cos^3 2x dx = \int \sin^4 2x(1-\sin^2 x)\cos 2x dx =$[16] $\dfrac{\sin^5 2x}{10} - \dfrac{\sin^7 2x}{14} + C$

13. $\int \sin^3 4x \cos^3 4x dx$

14. $\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

15. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

16. $\int \sin^4 2x dx = -\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{3}{8}x + \frac{1}{64}\sin 8x + C$

17. $\int \cos^4 4x dx = \frac{1}{128}\sin 16x + \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{3}{8}x + C$

18. $\int \sin^2 \dfrac{3x}{4} dx = -\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x + C$

19. $\int \cos^2 \dfrac{x}{3} dx = \frac{3}{4}\sin\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + C$

20. $\int \dfrac{\sin^2(\ln(x))}{x} dx = -\frac{1}{4}\sin(2\ln x) + \frac{1}{2}\ln x + C$

21. $\int \dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{x} + \sqrt{x} + C$

22. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

23. $\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 12x\right) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\sin 12x + C$

24. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

25. $\int \sin^4 2x \cos^4 2x dx =$

26. $\int \sin^4 4x \cos^2 4x dx$

---

[15] $\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 \cos x dx = \int \sin^2 x \cos x dx - 2\int \sin^4 x \cos x dx + \int \sin^6 x \cos x dx$

[16] $\int \sin^4 2x(1-\sin^2 x)\cos 2x dx = \int \sin^4 2x \cos 2x dx - \int \sin^6 2x \cos 2x dx$

## 2.11 Integrales del tipo $\int \tan^n x\ dx$ , $\int \cot^n x\ dx$ con n≥ 2

1. $\int \tan^2 4x dx = \int (1+\tan^2 4x) dx - \int dx = \int \sec^2 4x dx - \int dx = \dfrac{\tan 4x}{4} - x + C$

2. $\int \tan^3 2x dx =^{17} \frac{\tan^2 2x}{4} + \frac{1}{2}\ln(\cos 2x) + C$

3. $\int \tan^4 3x dx = \int \tan^2 3x \left(\sec^2 3x - 1\right) dx = \int \tan^2 3x \sec^2 3x dx - \int \tan^2 3x dx =$
$= \frac{1}{3}\dfrac{\tan^3 3x}{3} - \left(\dfrac{\tan 3x}{3} - x\right) + C$

4. $\int \tan^5 x dx = \int \tan^3 x \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan^3 x dx =$
$= \dfrac{\tan^4 x}{4} - \int (\sec^2 x - 1)\tan x dx = \dfrac{\tan^4 x}{4} - \int \sec^2 x \tan x dx + \int \tan x dx =$
$= \dfrac{\tan^4 x}{4} - \dfrac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$

5. $\int \cot^2 4x dx =$

6. $\int \cot^3 2x dx$

7. $\int \cot^4 3x dx$

8. $\int \cot^5 x dx$

## 2.12 Integrales del tipo $\int \sec^{2n} x\ dx$ , $\int \csc^{2n}\ dx$ con n≥ 1

1. $\int \sec^2 4x dx = \frac{1}{4}\tan 4x + C$

2. $\int \sec^4 2x dx = \int \sec^2 2x(1+\tan^2 2x) dx = \int \sec^2 2x dx + \int \sec^2 2x \tan^2 2x dx =$
$= \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{2}\dfrac{\tan^3 2x}{3} + C$

3. $\int \csc^2 5x dx = -\frac{1}{5}\cot 5x + C$

---

[17] $\int \tan^2 2x \tan 2x dx = \int (\sec^2 2x - 1)\tan 2x dx = \int \sec^2 2x \tan 2x dx - \int \tan 2x dx$

4. $\int \csc^4 3x dx$

## 2.13 Integrales del tipo $\int \sec^n x \tan^m x dx$ , $\int \csc^n x \cot^m x dx$

1. $\int \sec^4 x \tan^3 x dx$

2. $\int \sec^3 2x \tan^3 2x dx$

3. $\int \sec^3 3x \tan 3x dx$

4. $\int \csc^5 x \cot^3 x dx$

5. $\int \sec^3 x \tan^3 3x dx$

## 2.14 Integrales del tipo $\int \sin A \cos B$, $\int \sin A \sin B$, $\int \cos A \cos B$

Hemos de recordar las siguientes formulas

| | |
|---|---|
| $\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$ | $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$ |
| $\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$ | |

1. $\int \sin 5x \cos 4x dx$

2. $\int \cos 7x \cos 2x dx$

3. $\int \sin 4x \sin x dx$

## 2.15 Integrales del tipo arcseno,arco tangente y otras

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{f\,'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{f\,'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = arcsen(f(x)) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C \qquad \int \frac{f\,'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}dx = \ln\left|f(x)+\sqrt{1+(f(x))^2}\right| + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C \qquad \int \frac{f\,'(x)}{\sqrt{(f(x))^2-1}}dx = \ln\left|f(x)+\sqrt{(f(x))^2-1}\right| + C$$

1. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right)$
5. $\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \frac{1}{3}\arctan 3x$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+1}}dx$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-1}}dx = \frac{1}{3}\ln\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right) + C$
9. $\int \frac{1}{4+9x^2}dx = \frac{1}{6}\arctan \frac{3}{2}x + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = \frac{1}{3}\arcsin \frac{3}{2}x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+4}}dx = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{9x^2+4}\right)$
12. $\int \frac{1}{3+5x^2}dx$
13. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$
14. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

15. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}dx$

16. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$

17. $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$

18. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^6}}dx$

19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-4}}dx$

20. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3x^6+1}}dx$

21. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

22. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

23. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$

24. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$

25. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

26. $\int \frac{\cos 3x}{1+sen^2 3x}dx$

27. $\int \frac{\cot x}{1+[\ln(senx)]^2}dx$

28. $\int \frac{5^x}{1+5^{2x}}dx$

29. $\int \frac{sen10x}{\sqrt{1-\cos^4 5x}}dx$

30. $\int \frac{sen6x}{1+\cos^4 3x}dx$

31. $\int \frac{5^x}{\sqrt{1-5^{2x}}}dx$

32. $\int \frac{\sin 6x}{\sqrt{1+\cos^4 3x}}dx$

33. $\int \frac{\sin 10x}{\sqrt{1+\cos^4 5x}}dx$

## 2.16 Integrales del tipo $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ siendo $b^2-4ac<0$

1. Multiplicamos y dividimos por 4a

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = 4a\int \frac{1}{4a^2x^2+4abx+4ac}dx$$

2. Sumamos y restamos en el denominador $b^2$

$4a\int \frac{1}{4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac}dx$ .Observa que los tres primeros términos del denominador son un cuadrado perfecto

$4a\int \frac{1}{(2ax+b)^2-b^2+4ac}dx$ .Fíjate que $-b^2+4ac>0$ .Si llamamos H$=-b^2+4ac$ la integral quedaría:

$$4a\int \frac{1}{H+(2ax+b)^2}dx$$

3. Sacamos factor común en el denominador H

$$4a\int \frac{1}{H\left[1+\frac{(2ax+b)^2}{H}\right]}dx = 4a\int \frac{1}{H\left[1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}}\right)^2\right]}dx = \frac{4a}{H}\int \frac{1}{\left[1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}}\right)^2\right]}dx$$

4. Esta integral será tipo arco tangente si multiplicamos, dentro de la integral por, $\frac{2a}{\sqrt{H}}$y fuera por $\frac{\sqrt{H}}{2a}$ (para que no varíe)

$$\frac{4a\sqrt{H}}{2aH}\int \frac{\frac{2a}{\sqrt{H}}}{\left[1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}}\right)^2\right]}dx = \frac{2\sqrt{H}}{H}arctag\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}}\right)+C$$

Ejemplos

1. $$\int \frac{dx}{2x^2-3x+2} = 8\int \frac{dx}{16x^2-24x+16} = 8\int \frac{dx}{16x^2-24x+9-9+16} =$$

$$= 8\int \frac{dx}{(4x-3)^2+7} = \frac{8}{7}\int \frac{dx}{\frac{(4x-3)^2}{7}+1} = \frac{8}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{4x-3}{\sqrt{7}}\right)^2+1} =$$

$$=\frac{8\sqrt{7}}{7\cdot 4}\int \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{4x-3}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dx = \frac{2\sqrt{7}}{7}arctag\left(\frac{4x-3}{\sqrt{7}}\right)+C$$

2. $$\int \frac{dx}{x^2+3x+3} = 4\int \frac{dx}{4x^2+12x+12} = 4\int \frac{dx}{4x^2+12x+9-9+12} =$$

$$= 4\int \frac{dx}{(2x+3)^2+3} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\frac{(2x+3)^2}{3}+1} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3\cdot 2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}arctag\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C$$

## 2.17 Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ siendo $b^2-4ac<0$

$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = M\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx + N\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$

$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax}{ax^2+bx+c}dx + N\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$

$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}dx + N\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$

$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx - \frac{bM}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx + N\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$

$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(N - \frac{bM}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$

La segunda integral es del tipo anterior y la primera es de tipo logarítmico

$= \frac{M}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(N-\frac{bM}{2a}\right)\frac{2\sqrt{H}}{H}arctag\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}}\right)+C$

Ejemplos

1. $\int \frac{3x-4}{2x^2-3x+2}dx = 3\int \frac{x}{2x^2-3x+2}dx - 4\int \frac{1}{2x^2-3x+2}dx =$

$= \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2-3x+2}dx - 4\int \frac{1}{2x^2-3x+2}dx =$

$= \frac{3}{4}\int \frac{4x-3+3}{2x^2-3x+2}dx - 4\int \frac{1}{2x^2-3x+2}dx =$

$= \frac{3}{4}\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+2}dx + \frac{9}{4}\int \frac{1}{2x^2-3x+2}dx - 4\int \frac{1}{2x^2-3x+2}dx =$

$= \frac{3}{4}\ln\left|2x^2-3x+2\right| + \left(\frac{9}{4}-4\right)\int \frac{1}{2x^2-3x+2}dx$

La última integral está resuelta en la página anterior

$= \frac{3}{2}\ln\left|2x^2-3x+2\right| - \frac{7}{4}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}arctag\left(\frac{4x-3}{\sqrt{7}}\right)+C =$

$= \frac{3}{2}\ln\left|2x^2-3x+2\right| - \frac{\sqrt{7}}{2}arctag\left(\frac{4x-3}{\sqrt{7}}\right)+C$

2. Demuestra que $\int \frac{x-5}{x^2+3x+3}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+3\right| + \left(-\frac{3}{2}-5\right)\frac{2\sqrt{3}}{3}arctag\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C =$

$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+3\right| - \frac{13\sqrt{3}}{3}arctag\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C$

## 2.18 Integrales del tipo $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $a<0, b^2-4ac>0$

1. Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{-4a}$

$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \sqrt{-4a}\int \frac{1}{\sqrt{-4a^2x^2-4abx-4ac}}dx$

2. Restamos y sumamos en el denominador $b^2$

## 2.18. INTEGRALES DEL TIPO $\int \frac{1}{\sqrt{AX^2+BX+C}} DX$ $A<0, B^2-4AC>0$33

$$\sqrt{-4a}\int \frac{1}{\sqrt{-4a^2x^2-4abx-b^2+b^2-4ac}}dx$$

Observa detenidamente el siguiente paso

$\sqrt{-4a}\int \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac-(2ax+b)^2}}dx$ .Fíjate que $b^2-4ac>0$ . $\Delta$=$b^2-4ac$ la integral quedaría:

$$\sqrt{-4a}\int \frac{1}{\sqrt{\Delta-(-2ax-b)^2}}dx$$

3. Sacamos factor común dentro de la raíz del denominador $\Delta$

$$\sqrt{\text{-}4a}\int \frac{1}{\sqrt{\Delta\left[1-\frac{(-2ax-b)^2}{\Delta}\right]}}dx = \sqrt{\text{-}4a}\int \frac{1}{\sqrt{\Delta\left[1-\left(\frac{-2ax-b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right]}}dx =$$

$$\frac{\sqrt{\text{-}4a}}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{-2ax-b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right]}}dx$$

4. Esta integral será tipo arco seno si multiplicamos, dentro de la integral ,por $\frac{-2a}{\sqrt{\Delta}}$y fuera por $\frac{\sqrt{\Delta}}{-2a}$ (para que no varíe)

$$\frac{\sqrt{-4a}\sqrt{\Delta}}{-2a\sqrt{\Delta}}\int \frac{\frac{-2a}{\sqrt{\Delta}}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{-2ax-b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right]}}dx = \frac{\sqrt{-a}}{-a}\arcsin\left(\frac{-2ax-b}{\sqrt{\Delta}}\right)+C$$

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2-3x+2}} = \sqrt{8}\int \frac{dx}{\sqrt{-16x^2-24x+16}} = \sqrt{8}\int \frac{dx}{\sqrt{-16x^2-24x-9+9+16}} =$$

$$= \sqrt{8}\int \frac{dx}{\sqrt{25-(4x+3)^2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{25}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(4x+3)^2}{25}}} = \frac{\sqrt{8}}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x+3}{5}\right)^2}} =$$

$$=\frac{\sqrt{8}\cdot 5}{5\cdot 4}\int \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{4x+3}{5}\right)^2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{4x+3}{5}\right)+C$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+3}} = \sqrt{4}\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+12x+12}} = \sqrt{4}\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+12x-9+9+12}} =$$

$$= \sqrt{4}\int \frac{dx}{\sqrt{21-(2x-3)^2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{21}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(2x-3)^2}{21}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{21}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-3}{\sqrt{21}}\right)^2}} =$$

$$=\frac{\sqrt{4}\sqrt{21}}{\sqrt{21}\cdot 2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{21}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-3}{\sqrt{21}}\right)^2}}dx = \arcsin\left(\frac{2x-3}{\sqrt{21}}\right)+C$$

## 2.19 Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $a<0, b^2-4ac>0$

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = M\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + N\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + N\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + N\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx - \frac{bM}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + N\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{M}{2a}\int (2ax+b)(ax^2+bx+c)^{\frac{-1}{2}}dx + \left(N-\frac{bM}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

La segunda integral es del tipo anterior y la primera es de tipo potencial

$$= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N-\frac{bM}{2a}\right)\frac{\sqrt{-a}}{-a}\arcsin\left(\frac{-2ax-b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C$$

Ejemplos

1. $$\int \frac{3x-4}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx =$$
$$= \frac{-3}{4}\int \frac{-4x}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx =$$
$$= \frac{-3}{4}\int \frac{-4x-3+3}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx =$$
$$= \frac{-3}{4}\int \frac{-4x-3}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx - \frac{9}{4}\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx =$$
$$= -\frac{3}{2}\sqrt{-2x^2-3x+2} + \left(-\frac{9}{4}-4\right)\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2-3x+2}}dx$$

La última integral está resuelta en la página anterior

$$= -\frac{3}{2}\sqrt{-2x^2-3x+2} - \frac{25}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{4x+3}{5}\right) + C$$

2. Demuestra $\int \frac{x-5}{\sqrt{-x^2+3x+3}}dx = -\sqrt{-x^2+3x+3} + \left(-\frac{3}{2}-5\right)\arcsin\left(\frac{2x-3}{\sqrt{21}}\right) + C$

## 2.20 Integrales del tipo $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ **a>0 y** $b^2-4ac>0$

1. Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{4a}$
$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \sqrt{4a}\int \frac{1}{\sqrt{4a^2x^2+4abx+4ac}}dx$$
2. Sumamos y restamos en el denominador $b^2$
$$\sqrt{4a}\int \frac{1}{\sqrt{4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac}}dx$$
Observa detenidamente el siguiente paso
$$\sqrt{4a}\int \frac{1}{\sqrt{(2ax+b)^2-b^2+4ac}}dx$$

## 2.20. INTEGRALES DEL TIPO $\int \frac{1}{\sqrt{AX^2+BX+C}} DX$ A>0 Y $B^2-4AC > 0$35

Fíjate que $b^2-4ac>0$ . $-b^2+4ac=-\Delta$ la integral quedaría:
$\sqrt{4a}\int \frac{1}{\sqrt{(2ax+b)^2-\Delta}}dx$

3. Sacamos factor común dentro de la raíz del denominador $\Delta$

$$\sqrt{4a}\int \frac{1}{\sqrt{\Delta\left[\frac{(2ax+b)^2}{\Delta}-1\right]}}dx = \sqrt{4a}\int \frac{1}{\sqrt{\Delta\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2-1\right]}}dx = \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2-1\right]}}dx$$

4. Esta integral será inmediata si multiplicamos, dentro de la integral ,por $\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}$y fuera por $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ (para que no varíe)

$$\frac{\sqrt{4a}\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{\Delta}}\int \frac{\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}}{\sqrt{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2-1\right]}}dx = \frac{\sqrt{a}}{a}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}+\sqrt{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2-1\right]}\right|+ C$$

1.$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}} = \sqrt{8}\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-24x+8}} = \sqrt{8}\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-24x+9-9+8}} =$$
$$= \sqrt{8}\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-3)^2-1}} = \frac{\sqrt{8}}{4}\int \frac{4dx}{\sqrt{(4x-3)^2-1}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|4x-3+\sqrt{(4x-3)^2-1}\right|+C$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}} = \sqrt{4}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x-4}} = \sqrt{4}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+9-9-4}} =$$
$$= \sqrt{4}\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+3)^2-13}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{13}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{(2x+3)^2}{13}-1}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{13}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{13}}\right)^2-1}} =$$
$$=\frac{\sqrt{4}\sqrt{13}}{\sqrt{13}\cdot 2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{\sqrt{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{13}}\right)^2-1}}dx = \ln\left|\frac{2x+3}{\sqrt{13}}+\sqrt{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{13}}\right)^2-1}\right|+C$$
$$= \ln\left|2x+3+\sqrt{(2x+3)^2-13}\right|-\ln\sqrt{13}+C = \ln\left|2x+3+\sqrt{4x^2+12x-4}\right|+ C'$$

## 2.21 Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $a > 0, b^2-4ac > 0$

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = M\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + N\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + N\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + N\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx - \frac{bM}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + N\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{M}{2a}\int (2ax+b)(ax^2+bx+c)^{\frac{-1}{2}}dx + \left(N - \frac{bM}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

La segunda integral es del tipo anterior y la primera es de tipo potencial

$$= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N - \frac{bM}{2a}\right)\frac{\sqrt{a}}{a}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + \sqrt{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 - 1\right]}\right| + C$$

Ejemplos

1. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx =$
$$= \frac{3}{4}\int \frac{4x}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx =$$
$$= \frac{3}{4}\int \frac{4x-3+3}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx =$$
$$= \frac{3}{4}\int \frac{4x-3}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx + \frac{9}{4}\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx =$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2-3x+1} + \left(\frac{9}{4} - 4\right)\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}dx$$

La última integral está resuelta en la página anterior

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2-3x+1} - \frac{7}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|4x-3+\sqrt{(4x-3)^2-1}\right| + C =$$

2. Demuestra $\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2+3x-1}}dx = \sqrt{x^2+3x-1} - \frac{13}{2}\ln\left|2x+3+\sqrt{4x^2+12x-4}\right| + C$

## 2.22 Integrales del tipo $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $a > 0, b^2-4ac < 0$

Demuestra como ejercicio que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{\sqrt{a}}{a}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{H}} + \sqrt{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}}\right)^2 + 1\right]}\right| \text{ donde } H = -\Delta$$

Calcula las siguientes integrales:
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+3}}dx$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$

## 2.23 Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\ \ a > 0, b^2-4ac<0$

Demuestra como ejercicio que:

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(N-\frac{bM}{2a}\right)\frac{\sqrt{a}}{a}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{H}}+\sqrt{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}}\right)^2+1\right]}\right|$$

donde $H=-\Delta$
$\int \frac{-3x+4}{\sqrt{x^2+3x+3}}dx$
$\int \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$

## 2.24 Más integrales de los tipos anteriores

En esta sección, vamos a repasar los tipos anteriores
$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ siendo $a>0$ y $\Delta<0$
$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ siendo $a>0$ y $\Delta<0$
$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (excepto si $a<0$ y $\Delta<0$)
$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (excepto si $a<0$ y $\Delta<0$)

1. $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$
2. $\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}dx$
3. $\int \frac{1}{3x^2+2x+1}dx$
4. $\int \frac{x-3}{3x^2+2x+1}dx$
5. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$
6. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$
7. $\int \frac{1}{x^2+3x+3}dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+3x+3}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3x+3\right)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+2}}dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{-x^2+2x+2}}dx$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x-4}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(-3x^2+2x+1)}-\frac{11}{9}\sqrt{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)+C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}}dx$

14. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{-x^2+2x+1}}dx$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+2x+1}}dx$

16. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{-2x^2+2x+1}}dx$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx =$

18. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx =$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-2}}dx = \ln\left(x+1+\sqrt{(x^2+2x-2)}\right)+C$

20. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+2x-2}}dx = 3\sqrt{(x^2+2x-2)}-5\ln\left(x+1+\sqrt{(x^2+2x-2)}\right)+$
$C$

# Chapter 3

# Integración por partes

Este método de integración se debe a la aplicación de la derivada de un producto de funciones

$$[f(x)g(x)]^{'} = f^{\,'}(x)g(x) + f\ (x)g^{\,'}(x)$$

Puesto que la integración es la operación inversa de la derivación; entonces

$$\int [f(x)g(x)]^{'}\, dx = f(x)g(x)$$

Como la integral de una suma es la suma de integrales se obtiene:

$$f(x)g(x) = \int [f(x)g(x)]^{'}\, dx = \int f^{\,'}(x)g(x)dx + \int f(x)g^{'}(x)dx$$

Despejando $\int f(x)g^{'}(x)dx$ obtendremos la regla de integración por partes:

$$\int f(x)g^{'}(x)dx = f(x)g(x) - \int f^{\,'}(x)g(x)dx$$

Nota 1: La elección de f(x) y g '(x) es fundamental. Siempre es conveniente elegir g'(x) de manera que se pueda integrar facilmente

Nota 2: La segunda integral ha de ser más sencilla de resolver que la primera

Nota 3: En muchas ocasiones tendrás que repetir este método varias veces

Ejemplos:

1. $\int \ln x dx$

$f(x) = \ln x$ ; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$g'(x) = 1$ ; $g(x) = \int 1dx = x$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + C$$

2. $\int x^2 \sin x dx$
$f(x) = x^2$ ; $f'(x) = 2x$
$g'(x) = \sin x$ ; $g(x) = \int \sin x dx = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \ @$$

Volvemos a integrar por partes para calcular $\int x \cos x dx$
$f(x) = x$ ; $f'(x) = 1$
$g'(x) = \cos x$ ; $g(x) = \int \cos x dx = \sin x$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C \ @@$$

Sustituyendo @@ en @ tendremos:
$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C)$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C'$$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$f(x) = x$ ; $f'(x) = 1$
$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx @$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\arcsin x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx @@$$

Sustituyendo @@ en @ tendremos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + 2C$$

Observa que la integral inicial $I$ aparece a ambos lados de la igualdad.

$$I = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - I + 2C$$

Despejando I como si de una ecuación se tratase tendríamos

$$I = \frac{-x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + C \text{ (Integral cíclica)}$$

Este procedimiento es muy útil para calcular integrales del siguiente tipo:
$\int \ln x dx$ $(f(x) = \ln x,\ g^{'}(x) = 1)$
$\int P(x) \ln x dx$ siendo $P(x)$ un polinomio en x $(f(x) = \ln x,\ g^{'}(x) = P(x))$
$\int P(x) e^x dx$ siendo $P(x)$ un polinomio en x $(f(x) = P(x),\ g^{'}(x) = e^x)$

$\int P(x)\sin x dx$ siendo $P(x)$ un polinomio en x $(f(x) = P(x),\ g'(x) = \sin x)$
$\int P(x)\cos x dx$ siendo $P(x)$ un polinomio en x $(f(x) = P(x),\ g'(x) = \cos x)$
$\int e^x \sin x dx$ $(f(x) = \sin x,\ g'(x) = e^x)$ (Cíclica o de retorno)
$\int \sec^{2p+1} x dx = \int \sec^{2p-1} x \sec^2 x dx$ $(f(x) = \sec^{2p-1} x,\ g'(x) = \sec^2 x)$ (Cíclica)
$\int \csc^{2p+1} x dx = \int \csc^{2p-1} x \csc^2 x dx$ $(f(x) = \csc^{2p-1} x,\ g'(x) = \csc^2 x)$ (Cíclica)
$\int \arctan x dx$ $(f(x) = \arctan x,\ g'(x) = 1)$
$\int \arcsin x dx$ $(f(x) = \arcsin x,\ g'(x) = 1)$
$\int P(x)\arctan x dx$ $(f(x) = \arctan x,\ g'(x) = P(x))$
$\int \sin^2 x dx$ $(f(x) = \sin x,\ g'(x) = \sin x)$ (Cíclica o de retorno).etc, etc, etc ....

## 3.1 Ejercicios de integracion por partes

1. $\int x^2 \ln x dx =$[1] $\frac{1}{3}(\ln x)\, x^3 - \int \frac{1}{3}x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

2. $\int x^2 \sin x dx =$[2] $-x^2\cos x + 2\cos x + 2x\sin x$

3. $\int x^2 \cos x dx =$[3] $x^2\sin x - 2\int x\sin x\, dx = x^2\sin x - 2\left(-x\cos x - \int(-\cos x)\, dx\right) = x^2\sin x - 2\sin x + 2x\cos x + C$

4. $\int x e^x dx =$[4] $xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C$

5. $\int x^2 e^x dx =$[5] $x^2e^x - 2\int xe^x\, dx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x\, dx) = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$

---

[1] $\begin{cases} f(x) = \ln x & f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = x^2 & g(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

[2] $\begin{cases} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{cases}$

[3] $\begin{cases} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{cases}$

[4] $\begin{cases} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{cases}$

[5] $\begin{cases} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{cases}$

6. $\displaystyle\int e^x \cos x dx =^6 e^x \cos x + \int \sin x e^x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$
Cíclica: Si Despejas $\int e^x \cos x \, dx$ tendrás
$\displaystyle\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$

7. $\displaystyle\int e^{3x} \sin 4x dx$

8. $\displaystyle\int \sin x \cos 4x dx$

9. $\displaystyle\int \cos 2x \cos 4x dx =$

10. $\int \sin^2 x dx =$

11. $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx$

12. $\displaystyle\int x^2 \cos x dx$

13. $\displaystyle\int x \sin(3x - 2) dx$

14. $\displaystyle\int \arctan\, x dx$

15. $\displaystyle\int x \arctan\, x dx$

16. $\displaystyle\int \arcsin x dx$

17. $\displaystyle\int x \arcsin x dx$

18. $\displaystyle\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \left(\sec^2 x - 1\right) dx =$
$\displaystyle\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x dx - \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| -$
$\displaystyle\int \sec^3 x dx =$
Despejando $\displaystyle\int \sec^3 x dx$ tendremos
$\displaystyle\int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + C$

19. $\displaystyle\int \csc^3 x dx$

---

[6] $\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f\,'(x) = -\sin x \\ g\,'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{array} \right.$

# Chapter 4

# Integrales racionales

Son del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde P(x) y Q(x) son dos polinomios en x

Casos:

A) Si grado $P(x) \geq Q(x)$ . Efectuamos la división entre ambos polinomios y:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

siendo $C(x)$ *y* $R(x)$ el cociente y resto de la división efectuada

B) Si grado $R(x) < Q(x)$

Para resolver este tipo de integrales, tendremos que utilizar el siguiente teorema de Álgebra:

Si $Q(x) = (x-\alpha)^t(x-\beta)(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)^p$

(con $b^2-4ac<0$ y $e^2-4df<0$) y grado$R(x)$ <grado $Q(x)$ entonces:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^t} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{t-1}} + ....... + \frac{A_{t-1}}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_t}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} + \frac{B_1x+C_1}{dx^2+ex+f} + \frac{B_2x+C_2}{(dx^2+ex+f)^2} + .............. + \frac{B_Px+C_P}{(dx^2+ex+f)^P}$$

Nota: *todas las integrales racionales, después de determinar los coeficientes adecuados, quedarán reducidas a la resolución de las siguientes integrales*

1. $\int \frac{B}{(x-\beta)}dx = B\ln|x-\beta| + C$

2. $\int \frac{B}{(x-\alpha)^t}dx = B\int (x-\alpha)^{-t}dx = \frac{B(x-\alpha)^{-t+1}}{-t+1} + C = \frac{-B}{(t-1)(x-\alpha)^{t-1}} + C$

3. $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = \frac{M}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(N - \frac{bM}{2a}\right)\frac{2\sqrt{H}}{H}\arctan\left(\frac{2axb}{\sqrt{H}}\right) + C$

4. $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^p}dx$ →Se resuelve por Partes (Facultad)

Ejemplos

a) $\int \frac{x^3+2}{x^2+4}dx = \int x\ dx + \int \frac{-4x+2}{x^2+4}dx = \frac{x^2}{2} + I$

$I = \int \frac{-4x+2}{x^2+4}dx = -4\int \frac{x}{x^2+4}dx + 2\int \frac{1}{x^2+4}dx = -2\int \frac{2x}{x^2+4}dx +$
$2\int \frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)}dx$

$I = -2\ln\left|x^2+4\right| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = -2\ln\left|x^2+4\right| + \arctan\frac{x}{2} + C$

Por lo tanto $\int \frac{x^3+2}{x^2+4}dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln\left|x^2+4\right| + \arctan\frac{x}{2} + C$

b) $\int \frac{3x^2+4x+1}{x^2-4x+4}dx = \int 3dx + \int \frac{16x-11}{x^2-4x+4}dx = 3x + J$

Para resolver $J$ tendremos que descomponer la fracción $\frac{16x-11}{x^2-4x+4} = \frac{16x-11}{(x-2)^2}$

Por el teorema anterior
$\frac{16x-11}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} \Longrightarrow 16x-11 = A + B(x-2)$

Si le damos a $x$ el valor 2 tendremos $21 = A$

Si le damos a $x$ el valor 0 tendremos $-11 = 21 - 2B \to B = 16$

$\int \frac{16x-11}{x^2-4x+4}dx = 21\int \frac{1}{(x-2)^2}dx + 16\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{-21}{x-2} + 16\ln|x-2| +$
$C$

$\int \frac{3x^2+4x+1}{x^2-4x+4}dx = 3x - \frac{21}{x-2} + 16\ln|x-2| + C$

c) $\int \frac{3x-1}{x^2+x-2}dx$. Como $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$ entonces por el teorema anterior

$\frac{3x-1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} \Longrightarrow 3x-1 = A(x-1) + B(x+2)$

Si le damos a $x$ el valor $-2$ tendremos $-7 = -3A \to A = \frac{7}{3}$

Si le damos a $x$ el valor 1 tendremos $2 = 3B \to B = \frac{2}{3}$

$\int \frac{3x-1}{x^2+x-2}dx = \frac{7}{3}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}dx = \frac{7}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| +$
$C$

d) $\int \frac{3x^2-3x-1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$ . Como $x^3-3x^2+3x-1 = (x-1)^3$ entonces
$\frac{3x^2-3x-1}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} \to 3x^2-3x-1 = A + B(x-$
$1) + C(x-1)^2$

Si $x = 1 \to -1 = A$

Si $x = 0 \to -1 = -1 - B + C \to B = C$

Si $x = 2 \to 5 = -1 + 2C \to C = 3$ ; $B = 3$

$\int \frac{3x^2-3x-1}{(x-1)^3}dx = -\int \frac{1}{(x-1)^3}dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + 3\int \frac{1}{x-1}dx =$

$$= \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + 3\ln|x-1| + C$$

e) $\int \frac{3x^2-4}{x^3-5x^2+8x-4}dx$ . Como $x^3-5x^2+8x-4 = (x-1)(x-2)^2$

$\dfrac{3x^2-4}{(x-1)(x-2)^2} = \dfrac{A}{(x-2)^2} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x-1}$

$3x^2 - 4 = A(x-1) + B(x-2)(x-1) + C(x-2)^2$

Si $x = 1 \to -1 = C$

Si $x = 2 \to 8 = A$

Si $x = 0 \to -4 = -8 + 2B - 4 \to B = 4$

$\displaystyle\int \frac{3x^2-4}{(x-1)(x-2)^2}dx = 8\int \frac{1}{(x-2)^2}dx + 4\int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx =$

$$= -\frac{8}{x-2} + 4\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2-x-2}dx$ Como $x^3+2x^2-x-2 = (x-1)(x+1)(x+2)$

$\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x+2}$

$x^2 - x + 1 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$

Si $x = 1 \to 1 = 6A \to A = \dfrac{1}{6}$

Si $x = -1 \to 3 = -2B \to B = -\dfrac{3}{2}$

Si $x = -2 \to 7 = 3C \to C = \dfrac{7}{3}$

$\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{7}{3}\int \frac{1}{x+2}dx =$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{3}\ln|x+2| + C$$

g) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3+x^2+2x-4}dx$ : $\frac{4}{7}\ln(x-1) - \frac{2}{7}\ln\left(x^2+2x+4\right) - \frac{1}{21}\sqrt{3}\arctan\frac{1}{6}(2x+2)\sqrt{3}$

Como $x^3 + x^2 + 2x - 4 = (x-1)(x^2+2x+4)$

$\dfrac{x+3}{(x-1)(x^2+2x+4)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Mx+N}{x^2+2x+4}$

$x + 3 = A(x^2+2x+4) + (Mx+N)(x-1)$

Si $x = 1 \to 4 = 7A \to A = \dfrac{4}{7}$

Si $x = 0 \to 3 = \dfrac{16}{7} - N \to N = -\dfrac{5}{7}$

Si $x = -1 \to 2 = \dfrac{12}{7} + (-M - \dfrac{5}{7})(-2) \to M = -\dfrac{4}{7}$

$\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+2x+4)}dx = \frac{4}{7}\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-\frac{4}{7}x - \frac{5}{7}}{x^2+2x+4}dx = \frac{4}{7}\ln|x-1| - \frac{1}{7}J$

siendo $J = \displaystyle\int \frac{4x+5}{x^2+2x+4}dx$ Resuélvela tú (integral de tipo ln + arctag ).Comprueba que:

$J = 2\ln\left|x^2+2x+4\right| + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{3}} + C$

Por lo que $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+2x+4)}dx = \frac{4}{7}\ln|x-1| - \frac{1}{7}\left(2\ln\left|x^2+2x+4\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x^3-1}dx$ Como $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$entonces

$\displaystyle\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$

$x^2-x+1 = A(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)$

Si $x=1 \to 1 = 3A \to A = \dfrac{1}{3}$

Si $x=0 \to 1 = \dfrac{1}{3} - N \to N = -\dfrac{2}{3}$

Si $x=2 \to 3 = \dfrac{7}{3} + 2M - \dfrac{2}{3} \to M = \dfrac{2}{3}$

$\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx + \int\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}J$

siendo $\displaystyle J = \int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$(Compruébalo)

$\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

## 4.1 Ejercicios de integrales racionales

1. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx =$[1] $\displaystyle -\frac{1}{6}\ln x - \frac{2}{15}\ln(x+3) + \frac{3}{10}\ln(x-2) + C$

2. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3+x^2}dx =$[2] $\displaystyle -\frac{3}{x} - 2\ln x + 2\ln(x+1) + C$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx =$[3]$= x + \ln(x+2) + 4\ln(x-4) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx =$[4] $\displaystyle \frac{1}{2}\ln x + \frac{3}{2}\ln(x+2) - \ln(x-1) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{6x^3-5x^2-6x}dx = -\tfrac{2}{3}\ln x + \tfrac{20}{39}\ln(3x+2) + \tfrac{25}{78}\ln(2x-3)$

6. $\displaystyle\int \frac{4x^2-5x+2}{(4x^2-1)(5x-2)}dx =$[5] $\tfrac{1}{4}\ln(2x-1) + \tfrac{11}{36}\ln(2x+1) - \tfrac{16}{45}\ln(5x-2) + C$

---

[1] $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx = \int\left(-\tfrac{1}{6x} - \tfrac{2}{15(x+3)} + \tfrac{3}{10(x-2)}\right)dx$

[2] $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3+x^2}dx = \int\left(\tfrac{3}{x^2} - \tfrac{2}{x} + \tfrac{2}{x+1}\right)$

[3] $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx = \int\left(1 + \tfrac{1}{x+2} + \tfrac{4}{x-4}\right)dx$

[4] $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \int \tfrac{1}{2x}dx + \int\tfrac{3}{2(x+2)}dx - \int\tfrac{1}{x-1}dx$

[5] $\displaystyle\int \frac{4x^2-5x+2}{(4x^2-1)(5x-2)}dx = \int\left(\tfrac{1}{2(2x-1)} + \tfrac{11}{18(2x+1)} - \tfrac{16}{9(5x-2)}\right)$

7. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx =$[6] $\frac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{4}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x-1) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)^2}dx = \int \tfrac{2}{(x-2)^2}dx + \int \tfrac{1}{x-2}dx = -\tfrac{2}{x-2} + \ln(x-2) + C$

9. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x-1)^3}dx =$[7] $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2(-1+x)^2} - \frac{4}{-1+x} + 6\ln(-1+x) + C$

10. $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-x+1}{x^3-x^2}dx = \int \left(x - \tfrac{1}{x^2}\right)dx = \tfrac{1}{2}\tfrac{x^3+2}{x} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx =$[8] $\ln x + \dfrac{1}{1+x} - \ln(1+x) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx =$[9] $\frac{1}{2}\frac{x^4-4x^3+4x^2+10-16x}{(x-2)^2} + C$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx =$[10]

14. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^3-2x^2+3x}dx =$[11] $x + \ln x + \ln\left(x^2-2x+3\right) + \sqrt{2}\arctan\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2} + C$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+3)}dx =$[12] $\frac{3}{2}\arctan x - \frac{1}{6}\sqrt{3}\arctan\frac{1}{3}x\sqrt{3} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x^2+x+3)}dx =$[13] $\frac{2}{3}\ln(x-3) + \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+3\right) + \frac{1}{33}\sqrt{11}\arctan\frac{1}{11}(2x+1)\sqrt{11} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{x+1}{3x^2-2x-5}dx = \int \tfrac{1}{3x-5}dx = \tfrac{1}{3}\ln(3x-5) + C$

18. $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3-x^2-x+1}dx =$[14] $\frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{3}{x-1} + C$

---

[6] $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx = \int \left(\tfrac{1}{2(1+x)} + \tfrac{4}{(-1+x)^2} - \tfrac{1}{2(-1+x)}\right)dx$

[7] $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x-1)^3}dx = \int \left(x + 3 + \tfrac{1}{(x-1)^3} + \tfrac{4}{(x-1)^2} + \tfrac{6}{x-1}\right)$

[8] $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int \left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{(1+x)^2} - \tfrac{1}{1+x}\right)dx$

[9] $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx = \int \left(x + \tfrac{22}{(x-2)^3} + \tfrac{8}{(x-2)^2}\right)dx$

[10] $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx = \int \left(\tfrac{3}{16(x-3)^2} - \tfrac{1}{32(x-3)} + \tfrac{15}{16(x+1)^2} + \tfrac{1}{32(x+1)}\right)dx$

[11] $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^3-2x^2+3x}dx = \int \left(1 + \tfrac{1}{x} + 2\tfrac{x}{x^2-2x+3}\right)dx$

[12] $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+3)}dx = \int \left(\tfrac{3}{2(x^2+1)} - \tfrac{1}{2(x^2+3)}\right)dx$

[13] $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x^2+x+3)}dx = \int \left(\tfrac{2}{3(x-3)} + \tfrac{1}{3}\tfrac{x+1}{x^2+x+3}\right)dx$

[14] $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3-x^2-x+1}dx == \int \left(\tfrac{1}{2(x+1)} + \tfrac{3}{(x-1)^2} - \tfrac{1}{2(x-1)}\right)dx$

19. $\int \frac{x-3}{x^3-5x^2+4x}dx =$[15] $-\frac{3}{4}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x-1) + \frac{1}{12}\ln(x-4) + C$

20. $\int \frac{x^3-x-1}{x^3-3x-2}dx =$[16] $x + \frac{5}{9}\ln(x-2) - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{5}{9}\ln(x+1) + C$

21. $\int \frac{x^2-2}{x^3-2x^2-x-6}dx =$[17] $\frac{1}{2}\ln(x-3) + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+2\right) + \frac{3}{14}\sqrt{7}\arctan\frac{1}{7}(2x+1)\sqrt{7} + C$

22. $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+3}dx =$[18] $\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x-3) + C$

23. $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx =$[19] $-\frac{1}{6}\ln x - \frac{2}{15}\ln(x+3) + \frac{3}{10}\ln(x-2) + C$

24. $\int \frac{x^3+x^2+2x-5}{x^3+x^2+x-3}dx =$[20] $x - \frac{1}{6}\ln(x-1) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) + 4\sqrt{2}\arctan\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{2}\right) + C$

25. $\int \frac{3x-2}{x^4-1}dx =$[21] $\frac{1}{4}\ln(-1+x) + \frac{5}{4}\ln(1+x) - \frac{3}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \arctan x + C$

26. $\int \frac{x^4+x^2}{(x-2)(x+1)^2}dx ==$[22] $\frac{x^2}{2} + \frac{20}{9}\ln(x-2) + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{16}{9}\ln(x+1) + C$

27. $\int \frac{x^3-2x+1}{6x^2-x-1}dx =$[23] $\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{36}x - \frac{44}{135}\ln(3x+1) + \frac{1}{40}\ln(2x-1) + C$

[15] $\int \frac{x-3}{x^3-5x^2+4x}dx = \int \left(-\frac{3}{4x} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{12(x-4)}\right)dx$

[16] $\int \frac{x^3-x-1}{x^3-3x-2}dx = \int \left(1 + \frac{5}{9(x-2)} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{5}{9(x+1)}\right)dx$

[17] $\int \frac{x^2-2}{x^3-2x^2-x-6}dx = \int \left(\frac{1}{2(x-3)} + \frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)dx$

[18] $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+3}dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x-3)}\right)dx$

[19] $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx = \int \left(-\frac{1}{6x} - \frac{2}{15(x+3)} + \frac{3}{10(x-2)}\right)dx$

[20] $\int \frac{x^3+x^2+2x-5}{x^3+x^2+x-3}dx = \int \left(1 - \frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{6}\int \frac{9+x}{x^2+2x+3}dx\right)dx =$

[21] $\int \frac{3x-2}{x^4-1}dx = \int \left(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{5}{4(x+1)} - \frac{1}{2}\frac{3x-2}{x^2+1}\right)dx$

[22] $\int \frac{x^4+x^2}{(x-2)(x+1)^2}dx = \int \left(x + \frac{20}{9(x-2)} - \frac{2}{3(x+1)^2} + \frac{16}{9(x+1)}\right)dx$

[23] $\int \frac{x^3-2x+1}{6x^2-x-1}dx = \int \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{44}{45(3x+1)} + \frac{1}{20(2x-1)}\right)dx$

# Chapter 5

# Integrales por sustitución

Este método de integración se basa en lo siguiente:

Dada la integral $\int f(x)dx$

Hacemos el cambio de variable $x = \varphi(t)$ ; $dx = \varphi'(t)dt$

siendo $\varphi(t)$una función que admite derivada continua no nula y cuya función inversa es $t = \psi(x)$

Entonces

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$[1] $\phi(t) + C = \phi(\psi(x)) + C$

Tenemos que demostrar que $[\phi(\psi(x))]' = f(x)$

Demostración:

$[\phi(\psi(x))]' =$[2] $\phi'(\psi(x))\psi'(x)$[3]$= \phi'(t)\dfrac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot \dfrac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)$

Ejemplos:

1) $\int \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ Hacemos $e^x = t$ ; $x = \ln t$ ; $dx = \dfrac{1}{t}dt$ Con lo que la integral quedaría:

$$\int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t + C$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \arctan e^x + C$$

2) $\int \dfrac{x}{\sqrt{3x^2-3}}dx$ Hacemos $3x^2 - 3 = t$ ; $6xdx = dt$ ; $xdx = \dfrac{1}{6}dt$ Con lo que

$\dfrac{1}{6}\int \dfrac{1}{\sqrt{t}}dt = \dfrac{1}{6}\int t^{\frac{-1}{2}}dt = \dfrac{1}{6}\dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \dfrac{\sqrt{t}}{3} + C$. Deshaciendo el cambio

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-3}}dx = \frac{\sqrt{3x^2-3}}{3} + C$$

[1] Este cambio de variable es adecuado siempre que esta integral sea más sencilla

[2] Por la regla de la cadena

[3] Al ser $\varphi$ y $\psi$ funciones inversas, por la derivada de una función inversa $\psi'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$

3) $\int \sqrt{4-x^2}dx$. Hacemos el cambio de variable $x = 2\sin t$ ; $dx = 2\cos t dt$
Con lo la integral quedaría:
$\int \sqrt{4-4\sin^2 t}2\cos t dt = 4\int \cos^2 t dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2t + \sin 2t + C =$
$= 2t + 2\sin t \cos t + C$
Deshaciendo el cambio de variable ( $t = \arcsin\frac{x}{2}$ ; $\sin t = \frac{x}{2}$; $\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$)

$$\int \sqrt{4-x^2}dxdx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

4) $\int \cos\sqrt{x}dx$[4] Realiza el cambio de variable siguiente $x = t^2$ ; $dx = 2tdt$

Tendrás que resolver por partes la siguiente integral $2\int t\cos t dt$ y después volver a deshacer el cambio de variable

## 5.1 Ejercicios de integración por cambio de variable

- $- \; I_1 = \int \frac{1}{2^x + 2^{-x}}dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable
$2^x = t \rightarrow x\ln 2 = \ln t; x = \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln t \rightarrow dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{t}dt$
Con lo que la integral quedará de la siguiente manera:

$$I_1 =^5 \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{(t^2+1)\ln 2}dt = \frac{\arctan t}{\ln 2} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable tendremos

$$\int \frac{1}{2^x + 2^{-x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\arctan 2^x + C$$

**Nota:Esta integral; también se puede resolver con las siguientes transformaciones**
$\int \frac{1}{2^x+2^{-x}}dx = \int \frac{1}{2^x + \frac{1}{2^x}}dx = \int \frac{2^x}{2^{2x}+1}dx = \int \frac{2^x}{1+(2^x)^2}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x\cdot\ln 2}{1+(2^x)^2}dx =$
$\frac{1}{\ln 2}\arctan 2^x + C$

[4] Otra forma de resolverla:→ $\int \cos\sqrt{x}dx = \int \sqrt{x}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Intégrala por partes considerando $f(x) = \sqrt{x}$ y $g'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

[5] $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$

- 2) $I_2 = \int \frac{e^{2x} + e^x}{e^x - 1} dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable

$$e^x = t \to x \ln e = \ln t; x = \ln t \to dx = \frac{1}{t} dt$$

Con lo que la integral quedará de la siguiente manera:

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{t^2 + t}{t - 1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t^2 + t}{t^2 - t} dt = \int \frac{t + 1}{t - 1} dt$$

Como $\frac{t+1}{t-1} = 1 + \frac{2}{t-1}$ ; entonces

$$\int \frac{t+1}{t-1} dt = \int \left(1 + \frac{2}{t-1}\right) dt = t + 2 \ln |t - 1| + C$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{e^x - 1} dx = e^x + 2 \ln |e^x - 1| + C$$

**Nota:Esta integral; también se puede resolver con la siguiente idea feliz:**

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{(e^x)^2 + e^x}{e^x - 1} dx =^6 \int \left(e^x + \frac{2 \cdot e^x}{e^x - 1}\right) dx = e^x + 2 \ln |e^x - 1| + C$$

- 3) $I_3 = \int \frac{e^x + 1}{e^x + 2 + e^{-x}} dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable

$$e^x = t \to x \ln e = \ln t; x = \ln t \to dx = \frac{1}{t} dt$$

Con lo que la integral quedará de la siguiente manera:

$I_3 = \int \frac{t+1}{t + 2 + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t+1}{t^2 + 2t + 1} dt = \int \frac{t+1}{(t+1)^2} dt = \int \frac{1}{t+1} dt = \ln |t+1| + C$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x + 2 + e^{-x}} dx = \ln |e^x + 1| + C$$

**Nota:Otra forma de resolverla; sería**

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x + 2 + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x + 1}{e^x + 2 + \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx = \int \frac{e^x (e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} dx =$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln |e^x + 1| + C$$

---

6 $\frac{(e^x)^2 + e^x}{e^x - 1} = e^x + \frac{2 \cdot e^x}{e^x - 1}$

- 4) $I_{4=}\int \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable

$$\ln x = t \to x = e^t; \to dx = e^t dt$$

Con lo que la integral quedará de la siguiente manera:
$I_4 = \int \frac{1}{e^t(1+t)} \cdot e^t dt = \int \frac{1}{t+1}dt = \ln|t+1| + C$
Deshaciendo el cambio de variable
$\int \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \ln|1+\ln x| + C$
**Nota:Otra forma de resolverla; sería**

$$\int \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)}dx = \ln|1+\ln x| + C$$

- 5) $I_{5=}\int \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable

$$\ln x = t \to x = e^t; \to dx = e^t dt$$

Con lo que la integral quedará de la siguiente manera:
$I_5 = \int \frac{1+t}{e^t(1-t)} \cdot e^t dt = \int \frac{t+1}{1-t}dt = \int \left(-1 - \frac{2}{t-1}\right) dt = -t - 2\ln|t-1| + C$
Deshaciendo el cambio de variable
$\int \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}dx = -\ln|x| - 2\ln|1-\ln x| + C$

- 6) $\int \frac{2+\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt{x-1}}dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable
$x-1 = t^6$ (fíjate que 6=m.cm(2,3,6))$\to x = t^6+1 \to dx = 6t^5 dt$
Con lo que
$\int \frac{2+\sqrt[6]{t^6}}{\sqrt[3]{t^{12}} - \sqrt{t^6}} \cdot 6t^5 dt = \int \frac{6t^3+12t^2}{t-1}dt =$
$\int \left(6t^2 + 18t + 18 + \frac{18}{t-1}\right) dt = 2t^3 + 9t^2 + 18t + 18\ln|t-1| + C$
Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{2+\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt{x-1}}dx = 2\sqrt{x-1} + 9\sqrt[3]{x-1} + 18\sqrt[6]{x-1} + 18\ln\left|\sqrt[6]{x-1} - 1\right| + C$$

- 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3}}dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable
$x = t^4$ (fíjate que $4 = m.c.m(2,4)$)$\rightarrow dx = 4t^3dt$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}-\sqrt[4]{t^{12}}} \cdot 4t^3dt =$$
$$4\int \frac{t}{1-t}dt = 4\int \left(-1+\frac{1}{1-t}\right)dt = 4\left(-t-\ln|1-t|\right)+C$$
Deshaciendo el cambio de variable
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x^3}}dx = 4\left(-\sqrt[4]{x}-\ln|1-\sqrt[4]{x}|\right)+C$$

- 8) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}}dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable
$x-1=t^2 \rightarrow x = t^2+1 \rightarrow dx = 2tdt$
Con lo que
$$\int \frac{x-\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{t^2+1-t}{t^2+1+t} \cdot 2tdt = 2\int \frac{t^3-t^2+t}{t^2+t+1}dt$$
Esta integral es racional; sigue resolviéndola tú

El resultado de $\displaystyle\int \frac{\left(t^3-t^2+t\right)}{t^2+t+1}dt$ ha de ser: $\frac{1}{2}t^2-2t+\ln\left(t^2+t+1\right)+\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$

- 9) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

Realizamos el siguiente cambio de variable
$1-x=t^2 \rightarrow x=1-t^2 \rightarrow dx=-2tdt$
Con lo que
$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2tdt}{(2-1+t^2)t} = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2\arctan t + C$$
Deshaciendo el cambio de variable
$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2\arctan\sqrt{1-x} + C$$

- 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}$

Realizamos el siguiente cambio de variable
$x+2=t^2 \rightarrow x=t^2-2 \rightarrow dx=2tdt$
Con lo que
$$\int \frac{2tdt}{(t^2-2)\,t} = 2\int \frac{dt}{(t^2-2)} =^{7} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int \frac{dt}{t-\sqrt{2}} - \int \frac{dt}{t+\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|t-\sqrt{2}\right| - \ln\left|t+\sqrt{2}\right|\right) + C$$
Deshaciendo el cambio de variable
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right| - \ln\left|\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right|\right) + C$$

- 11) $I_{11} = \displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable
$x=t^2 \rightarrow\rightarrow dx=2tdt$
Con lo que
$$\int \frac{t^2}{1+\sqrt{t^2}} \cdot 2tdt = 2\int \frac{t^3}{t+1}dt = 2\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C$$
Deshaciendo el cambio de variable
$$I_{11} = 2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}+1|\right) + C$$

- 12) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)^2\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

Realizamos el siguiente cambio de variable $x-3=\dfrac{1}{t}$
$x=3+\dfrac{1}{t}$; $dx=\dfrac{-1}{t^2}dt$ Con lo que la integral quedará así:

---

[7] $\dfrac{1}{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{t-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{t+\sqrt{2}}\right)$

$$\int \frac{1}{(x-3)^2\sqrt{x^2-2x+5}}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\left(3+\frac{1}{t}\right)^2-2\left(3+\frac{1}{t}\right)+5}}\frac{-1}{t^2}dt$$

$$= -\int \frac{t}{\sqrt{8t^2+4t+1}}dt = -\frac{1}{16}\int \frac{16t+4-4}{\sqrt{8t^2+4t+1}}dt$$

Esta integral se descompone como suma de dos integrales

$$= -\frac{1}{16}\int \frac{16t+4}{\sqrt{8t^2+4t+1}}dt + \frac{4}{16}\int \frac{1}{\sqrt{8t^2+4t+1}}dt =$$

$$= -\frac{2}{16}\sqrt{8t^2+4t+1} + \frac{1}{4}\ J$$

Calculemos pues $J$ por el método de los cuatro pasos

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{8t^2+4t+1}}dt$$

Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{4a}(\sqrt{32})$

$$J = \sqrt{32}\int \frac{1}{\sqrt{256t^2+128t+32}}dt =$$

Sumemos y restemos en el denominador $b^2(16)$

$$= \sqrt{32}\int \frac{1}{\sqrt{256t^2+128t+16-16+32}}dt$$

Fíjate en esta transformación

$$= \sqrt{32}\int \frac{1}{\sqrt{(16t+4)^2+16}}dt :$$

Sacamos en el radicando del denominador factor común 16

$$= \sqrt{32}\int \frac{1}{\sqrt{16\left(\frac{(16t+4)^2}{16}+1\right)}}dt = \sqrt{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{16t+4}{4}\right)^2+1}}dt =$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{1}{\sqrt{(4t+1)^2+1}}dt$$

Multiplicamos dentro de la integral por 4 y fuera de la integral dividimos por 4 para que no varíe

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{4}{\sqrt{(4t+1)^2+1}}dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|4t+1+\sqrt{(4t+1)^2+1}\right| + C$$

Con lo que la integral $\boxed{K = -\int \frac{t}{\sqrt{8t^2+4t+1}}dt}$ dará

$$K = -\frac{2}{16}\sqrt{8t^2+4t+1} + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|4t+1+\sqrt{(4t+1)^2+1}\right|$$

Deshaciendo el cambio de variable inicial y teniendo presente que $t = \frac{1}{x-3}$ tendremos que

$$I_{12} = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{8}{(x-3)^2}+\frac{4}{x-3}+1} + \ln\left|\frac{4}{x-3}+1+\sqrt{\left(\frac{4}{x-3}+1\right)^2+1}\right| +$$

$C =$

$$I_{12} = \frac{-\sqrt{x^2-2x+5}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{1+x+\sqrt{2}\sqrt{(5-2x+x^2)}}{x-3}\right| + C$$

- 13) $\int \frac{1}{(x-2)^2\sqrt{x^2-4x+1}}dx$ ; $x-2=\frac{1}{t}$

**14)** $\int \frac{1}{y\sqrt{y^2+y+1}}dy;;\ y=\frac{1}{t}$

**14)** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

$x = \frac{1}{t} \to dx = \frac{-1}{t^2}dt$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{\frac{-1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-4}}dt = \int \frac{-t}{\sqrt{1-4t^2}}dt = \tfrac{1}{4}\sqrt{(1-4t^2)} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable; tendremos

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx = \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} + C = \frac{\sqrt{(x^2-4)}}{4x} + C$$

Nota:**Todas las integrales inmediatas también se pueden resolver por cambio de variable**

# Chapter 6

# Integrales trigonométricas por sustitución

Las integrales del tipo $\int R(\sin x, \cos x)dx$ donde $R(\sin x, \cos x)$ es una función racional en $\sin x$ y en $\cos x$ (Es decir $\sin x$ y $\cos x$ están relacionadas únicamente por medio de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) se resuelven mediante el cambio de variable siguiente:

$\tan\dfrac{x}{2} = t \to x = 2\arctan t$ ; $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$

$\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{\sec^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = \cos^2\dfrac{x}{2}\left[1 - \dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\right] = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{\sec^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} =$
$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Ejemplos

1) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}dx$ Utilizando el cambio anterior tendremos:

$$\int \frac{1}{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{\dfrac{2t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{1-\cos x}dx = -\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}} + C = -\cot\frac{x}{2} + C$$

Nota 1: Otra manera de resolver esta integral sería:

$\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}dx = \int \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}dx$

Esta integral se descompone como suma de otras dos:

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx+\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx+\int \cot x \text{cosec} x dx = -\cot x - \csc x + C$ :

$$\int \frac{1}{1-\cos x}dx = \frac{\sin x}{-1+\cos x}+C = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}+C = --\cot\frac{x}{2}+C$$

Nota 1: Otra manera de resolver esta integral sería:

$$\int \frac{1}{1-\cos x}dx = \int \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx = -\cot\frac{x}{2}+C$$

2) $\int \frac{1}{1-\sin x}dx$ Utilizando el cambio anterior tendremos:

$$\int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{\frac{t^2-2t+1}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{(t-1)^2}dt = -\frac{2}{t-1}+C$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{1-\sin x}dx = \frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}}+C$$

Nota 1: Otra manera de resolver esta integral sería:

$$\int \frac{1}{1-\sin x}dx = \int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx = \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$$

Esta integral se descompone como suma de otras dos:

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int \tan x \sec x dx = \tan x+\sec x+C$

:

Nota 2: Otra manera de resolver esta integral sería:

$$\int \frac{1}{1-\sin x}dx = \int \frac{1}{1-\cos(x-\frac{\pi}{2})}dx \int \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}dx =$$

$$\int \frac{1}{1-\sin x}dx = -\cot\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

3) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$ Utilizando el cambio anterior tendremos:

$\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{t^2+2t+1}{t^2+1}dt = \int \left(1+\frac{2t}{t^2+1}\right)dt = t+\ln\left|t^2+1\right|+ C$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \tan\frac{x}{2}+\ln\left|1+\tan^2\frac{x}{2}\right|+C$$

Nota) Otra manera de hacerla

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx = \int \frac{1-\cos x+\sin x-\sin x\cos x}{\sin^2 x}dx =$$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin x}dx - \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$
$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = -\cot x + \mathrm{cosec} x + \ln|\mathrm{cosec} x - \cot x| - \ln|\sin x| + C$
4) $\int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}dx$ . Utilizando el cambio anterior tendremos:
$\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{2t^2+2t}dt = \int \frac{1}{t^2+t}dt$
Como $t^2+t = t(t+1)$ entonces
$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \to 1 = A(t+1)+Bt$
Si $t=0 \to 1 = A$
Si $t=-1 \to 1=-B \to B=-1$ Por lo tanto

$$\int \frac{1}{t(t+1)}dt = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+1}dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

5) $\int \frac{1}{4-2\cos x}dx$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right\} \int \frac{1}{4-\frac{2\left(1-t^2\right)}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{1+3t^2}dt$$

$\int \frac{1}{1+3t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}t\right)^2}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}t + C$
Deshaciendo el caambio de variable
$\int \frac{1}{4-2\cos x}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) + C$
**Nota: Otra manera de resolver esta integral**
$\int \frac{1}{4-2\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2-\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}dx =$
$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}dx =$
$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{3\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}dx$

Multiplicamos y dividimos el divisor del integrando por $\cos^2 \dfrac{x}{2}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}\left(\dfrac{3\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}+1\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{3\tan^2 \frac{x}{2}+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\left(\sqrt{3}\tan \frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 \frac{x}{2}}{\left(\sqrt{3}\tan \frac{x}{2}\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\tan \frac{x}{2}\right)+C$$

**¡Qué virguería!**

Resuelve las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\cos x-\sin x}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\cos x}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{4-3\cos x}dx$ h) $\displaystyle\int \frac{5}{1+3\cos x}dx$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\sin x}dx$

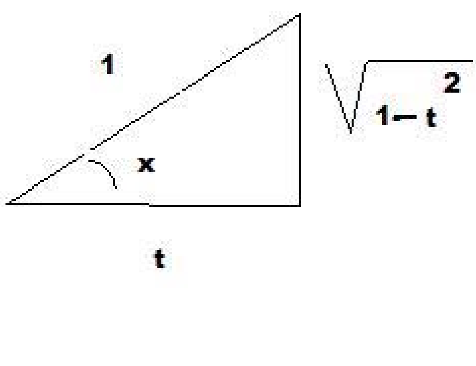
Nota: En ocasiones, no conviene utilizar el cambio de variable anterior, porque la integral racional que obtenemos es excesivamente compleja. Veamos estos casos:

A) Cuando la función integrando sea impar en $\sin x$ (Esto es $R(-\sin x, \cos x)$ $=-R(\sin x, \cos x)$)

Se utilizará el cambio de variable $\cos x = t$ ; $x = \arccos t$; $dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$ ; $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$

Recuerda esta figura




Ejemplo:

1) $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$ . Como $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^3 x}$ y $R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^3} = -\frac{1}{\sin^3 x}$

La función que aparece en el integrando es impar en seno $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Tendremos que utilizar el cambio de variable $\cos x = t$ ; $x = \arccos t$; $dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$ Con lo que la integral quedará así:

$\int \frac{1}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3} \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{-1}{(1-t^2)^2}dt = \int \frac{-1}{(t^2-1)^2}dt = J$

Como $(t^2-1)^2 = (t-1)^2(t+1)^2$ entonces

$\frac{-1}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{(t-1)^2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{t+1}$

$-1 = A(t+1)^2 + B(t-1)(t+1)^2 + C(t-1)^2 + D(t+1)(t-1)^2$

Si $x = 1 \to -1 = 4A \to A = -\frac{1}{4}$

Si $x = -1 \to -1 = 4C \to C = -\frac{1}{4}$

Si $x = 0 \to -1 = -\frac{1}{4} - B - \frac{1}{4} + D \to -B + D = -\frac{1}{2}$

Si $x = 2 \to -1 = -\frac{9}{4} + 9B - \frac{1}{4} + 3D \to 9B + 3D = \frac{3}{2} \to 3B + D = \frac{1}{2}$

Resolviendo el sistema obtendremos $B = \frac{1}{4}$ y $D = -\frac{1}{4}$

Con lo que $J = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{(t-1)^2}dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(t+1)^2}dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}dt =$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{4}\ln|t-1| + \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\ln|t+1| + C$

Deshaciendo el cambio de variable

$J = \frac{1}{4}\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{4}\ln|\cos x - 1| + \frac{1}{4}\frac{1}{\cos x + 1} - \frac{1}{4}\ln|\cos x + 1| + C =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1}\right) + \frac{1}{4}\left(\ln|\cos x - 1| - \ln|\cos x + 1|\right) + C =$

$= \frac{-\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C$

Vamos ahora a resolverla por partes

$\int \frac{1}{\sin^3 x}dx = \int \csc x \cdot \csc^2 x dx =$ [1]

$\int \frac{1}{\sin^3 x}dx = -\csc x \cot x - \int \csc x \cot^2 x dx$

$I = \int \frac{1}{\sin^3 x}dx = -\csc x \cot x - \int \csc x(\csc^2 x - 1)dx$

$I = -\csc x \cot x - I + \int \csc x dx = -\csc x \cot x - I + \ln(\csc x - \cot x) + 2C$

$I = \frac{-\csc x \cot x + \ln(\csc x - \cot x)}{2} + C$

[1] $f(x) = \csc x \to f'(x) = -\csc x \cot x$
$g'(x) = \csc^2 x \to g(x) = -\cot x$

Prueba a resolver esta integral utilizando el cambio de variable general $\tan\dfrac{x}{2} = t$

Ejercicios:

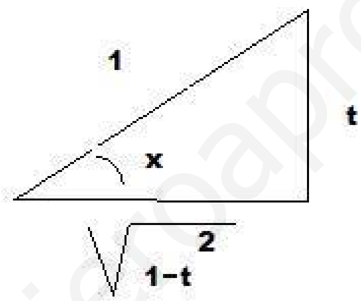
a) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ b) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x dx$ c)$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

B) Cuando la función integrando sea impar en cos$x$ (Esto es $R(\sin x, -\cos x)$ $=-R(\sin x, \cos x)$)

Se utilizará el cambio de variable $\sin x = t$ ; $x = \arcsin t$; $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

cos$x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$ ; $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

Recuerda esta figura




1) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$ Como $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$ y $R(\sin x, -\cos x) = \dfrac{(-\cos^3 x)}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$

La función integrando es impar en $\cos x$. Realizamos el cambio de variable $\sin x = t$

$x = \arcsin t$; $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ ; cos$x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

$\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t^2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \int \frac{1}{t^2}dt - \int dt = \frac{-1}{t} - t + C$

Deshaciendo el cambio de variable

$\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \frac{-1}{\sin x} - \sin x + C$

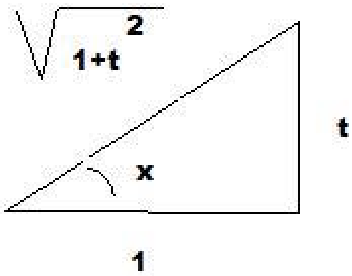
Ejercicios:

Resuelve las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$ ; b)$\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ ; c)$\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

C) Cuando la función integrando sea par en $\sin x$ y cos$x$ a la vez (Esto es $R(-\sin x, -\cos x)$ $=R(\sin x, \cos x)$)

Se utilizará el cambio de variable $\tan x = t$ ; $x = \arctan t$; $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$
$\cos x = \dfrac{1}{\sec x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ; $\sin x = \tan x \cdot \cos x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
Recuerda esta figura




Ejemplos:

1) $\displaystyle\int \tan^4 x dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx$. $R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{(-\sin x)^4}{(-\cos x)^4} = \dfrac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = R(\sin x, \cos x)$

La función que aparece en el integrando es par en $\sin x$ y $\cos x$ a la vez; entonces utilizaremos el siguiente cambio de variable:

$\tan x = t$ ; $x = \arctan t$; $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$
$\cos x = \dfrac{1}{\sec x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ; $\sin x = \tan x \cdot \cos x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
Con lo que la integral quedaría así:
$$\int \tan^4 x dx = \int \frac{t^4}{1+t^2}dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \arctan t + C$$
Deshaciendo el cambio de variable
$$\int \tan^4 x dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + \arctan(\tan x) + C = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$$

2) $\displaystyle\int \tan^3 x dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx$. $R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{(-\sin x)^3}{(-\cos x)^3} = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = R(\sin x, \cos x)$

La función que aparece en el integrando es par en $\sin x$ y $\cos x$ a la vez; entonces utilizaremos el siguiente cambio de variable:

$\tan x = t$ ; $x = \arctan t$; $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$
$\cos x = \dfrac{1}{\sec x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ; $\sin x = \tan x \cdot \cos x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
Con lo que la integral quedaría así:
$$\int \tan^3 x dx = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + C$$
Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \tan^3 x dx = \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\tan^2 x\right| + C = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$$

Ejercicios

a) $\int \cot^3 x dx$ b) $\int \cot^4 x dx$ c) $\int \sec^4 x dx$ d) $\int \text{cosec}^4 x dx$

e) $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$ f) $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$ g) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$

## 6.1 Ejercicios de integrales racionales trigonométricas

1. $\int \frac{1}{1+\sin x - \cos x} dx =$
2. $\int \frac{1}{3 - 2\cos x} dx =$
3. $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx =$
4. $\int \frac{1}{2+\cos x} dx$
5. $\int \frac{1}{5+4\sin x} dx$
6. $\int \frac{1}{2+\sin x} dx$
7. $\int \frac{1}{1-2\sin x} dx$
8. $\int \frac{1}{1+\cos x - \sin x} dx$
9. $\int \frac{1}{3+5\sin x} dx$
10. $\int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx$
11. $\int \frac{1}{2-\cos x} dx$
12. $\int \frac{1-\cos x}{1+\sin x} dx$
13. $\int \frac{1+\cos x}{1-\sin x} dx$
14. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx$
15. $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x} dx$

16. $\displaystyle\int \frac{1-\cos^2 x}{1+\sin^2 x}dx$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx$

18. $\displaystyle\int \frac{1-\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$

19. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

20. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

21. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1-\sin x}dx$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

24. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$

25. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx$

# Chapter 7

# Integrales irracionales

## 7.1 Del tipo $\int R(x,(ax+b)^{\frac{m}{r}},...,(ax+b)^{\frac{y}{z}})dx$

Se resuelven mediante el siguiente cambio de variable

$$ax+b=t^n \text{ donde } n=m.c.m(r,,...,z)$$

$$\text{Diferenciando tendremos } adx=nt^{n-1}dt \to dx=\frac{nt^{n-1}}{a}dt$$

Convirtiéndose la integral en una polinómica o racional en t

Ejemplos:

1) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx \overset{x=t^2\to dx=2tdt}{=} \int \frac{2t}{t(t+1)}dt = \int \frac{1}{(t+1)}dt = \ln|t+1|+C$$

Deshaciendo el cambio de variable (Si $x=t^2$; entonces $t=\sqrt{x}$). Con lo que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx = \ln|\sqrt{x}+1|+C$$

2) $\int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx$

$$x=t^6 \text{ (ya que } 6=mcm(2,3)) \to dx=6t^5dt$$

$\int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx = \int \frac{t^4}{t^3+t^4}6t^5dt = \int \frac{6t^6}{1+t}dt = 6\int (t^5-t^4+t^3-t^2+t-1+\frac{1}{1+t})dt =$

$=6(\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|+C$

Deshaciendo el cambio de variable (Si $x=t^6$; entonces $t=x^{\frac{1}{6}}$). Con lo que:

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx = 6\left(\frac{x}{6}-\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{4}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-x^{\frac{1}{6}}+\ln\left|1+x^{\frac{1}{6}}\right|\right)+C$$

## 7.2 Del tipo $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{m}{r}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{y}{z}})dx$

Se resuelven mediante el siguiente cambio de variable

$$\frac{ax+b}{cx+e} = t^n \text{ donde } n = m.c.m(r, , ..., z)$$

$$\text{Despejando } x \text{ tendremos: } ax+b = (cx+e)\, t^n \to x = \frac{e \cdot t^n - b}{a - c \cdot t^n}$$

$$\text{Diferenciando } dx = \frac{\left(e \cdot n \cdot t^{n-1}(a - c \cdot t^n) + c \cdot n \cdot t^{n-1}(e \cdot t^n - b)\right)}{\left(a - ct^n\right)^2} dt$$

Convirtiéndose la integral en una polinómica o racional en t

Ejemplos:

1) $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} dx$

$$x+2 = t^2 \to x = t^2 - 2 \to dx = 2tdt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} dx = \int \frac{2t}{t+1} dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2(t - \ln|1+t|) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} dx = 2(\sqrt{x+2} - \ln\left|1 + \sqrt{x+2}\right|) + C$$

2) $\int \frac{x + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$

$$2x+1 = t^6 \to x = \frac{t^6-1}{2} \to dx = 3t^5 dt$$

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{\frac{t^6-1}{2} + \sqrt[3]{t^6}}{\sqrt{t^6}} 3t^5 dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^6-1}{t^3} 3t^5 dt + \int \frac{t^2}{t^3} 3t^5 dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int (t^6-1)t^2 dt + 3\int t^4 dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^3}{3}\right) + 3\frac{t^5}{5} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{(2x+1)\sqrt{2x+1}}{6} - \frac{\sqrt{2x+1}}{2} + \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5} + C$$

3) $\int \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$

$$1 + \frac{1}{x} = t^2 \to x = \frac{1}{t^2-1} \to dx = \frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2} dt$$

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = \int t \cdot \frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2} dt = -\int t \cdot \frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2} dt$$

Esta integral se puede resolver por partes

$u = t \qquad du = dt$

$dv = \frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt \quad v = \int \frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt = -\frac{1}{(t-1)(t+1)} = -\frac{1}{t^2-1} \quad :$

$$= -\int t \cdot \frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt = \frac{t}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1}dt =^1$$

$$= \frac{t}{t^2-1} - \int \frac{1}{2(t-1)}dt + \int \frac{1}{2(t+1)}dt = \frac{t}{t^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C$$

Deshaciendo el cambio de variable y teniendo presente que $t = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}dx = \frac{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}}{\frac{x+1}{x}-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}+1}{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}-1}\right| + C =$$

$$= \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{(x+1)}+\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)}-\sqrt{x}}\right| + C =$$

$$=^2 \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{(x+1)}+\sqrt{x}\right)^2 + C =$$

$$\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right| + C$$

Con lo que

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}dx = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right| + C$$

# Nota:También se puede resolver de la siguiente manera

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}dx = \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx =$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{\sqrt{x^2+x}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx + \left(1-\frac{1}{2}\right)\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}J$$

Resolvamos pues $J$

$J = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{4x^2+4x}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{4x^2+4x+1-1}}dx =$

$= \int \frac{2}{\sqrt{(2x+1)^2-1}}dx = \ln\left|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-1}\right| + C$

---

[1] Como $\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}$

[2] Si racionalizamos $\frac{\sqrt{(x+1)}+\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)}-\sqrt{x}} = \left(\sqrt{(x+1)}+\sqrt{x}\right)^2$

Con lo que

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}dx = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{(x^2+x)}\right| + C'$$

## 7.3 Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{a \pm bx^2})dx, \int R(x, \sqrt{bx^2 - a})dx$

Para resolver estas integrales $\int R(x, \sqrt{a \pm bx^2})dx, \int R(x, \sqrt{bx^2 - a})dx$ donde $a, b$ son números reales positivos

| *Integrales* | *Cambio de variable* |
|---|---|
| $\int R(x, \sqrt{a - bx^2})dx$ | $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \sin t$ |
| $\int R(x, \sqrt{a + bx^2})dx$ | $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \tan t$ |
| $\int R(x, \sqrt{bx^2 - a})dx$ | $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \sec t$ |

**1)** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}dx$ ;
$x = 2\tan t \rightarrow dx = 2\sec^2 t\ dt$

Con lo que $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}dx = \int \frac{1}{4\tan^2 t\sqrt{4 + 4\tan^2 t}} 2\sec^2 t\ dt$
Teniendo presente que $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$; tendremos
$= \int \frac{1}{8\tan^2 t\sqrt{\sec^2 t}} 2\sec^2 t\ dt = \frac{1}{4}\int \frac{\sec t}{\tan^2 t}dt =$
$= \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt =$
$= \frac{1}{4}\int \cos t \sin^{-2} t\ dt = \frac{-1}{4}\sin^{-1} t + C = \frac{-1}{4}\csc t + C$
Teniendo presente que $x = 2\tan t$ y que $\csc t = \sqrt{1 + \cot^2 t} = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 t}} =$ $\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + 4}$ entonces

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}dx = \frac{-\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$$

**2)** $\int \sqrt{1 - x^2}dx$
$x = \sin t \rightarrow dx = \cos t\ dt$
$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\ dt = \int \cos^2 t\ dt$

Como $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ entonces
$\int \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$
Si utilizas que $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ entonces
$\int \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + C$

Deshaciendo el cambio de variable $x = \sin t$ y teniendo en cuenta que $\cos t = \sqrt{1-x^2}$
$t = \arcsin x$
$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$

Nota: Esta integral también se puede resolver por partes.Fíjate

$I = \int \sqrt{1-x^2}dx$

$u = \sqrt{1-x^2} \quad du = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Observa detenidamente las transformaciones a realizar

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \arcsin x + 2C\end{aligned}$$

Como $\frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$;entonces $\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$ y de esta forma tenemos una integral cíclica o de retorno

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + 2C$$

Despejando $I$; obtendremos que

$$I = \int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

**3)** $\int \frac{x^2}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}dx$

$x = 2\sec t \rightarrow dx = 2\sec t \cdot \tan t \; dt$

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{4\sec^2 t}{(4\sec^2 t-4)^{\frac{3}{2}}} 2\sec t \cdot \tan t \; dt =$$

Como $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$ entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{4\sec^2 t}{(4\sec^2 t-4)^{\frac{3}{2}}} 2\sec t \cdot \tan t \; dt &= \int \frac{4\sec^2 t}{(4\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} 2\sec t \cdot \tan t \; dt = \\ = \int \frac{\sec^3 t}{\tan^2 t}dt &= \int \frac{\frac{1}{\cos^3 t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt = \int \frac{1}{\cos t \sin^2 t}dt\end{aligned}$$

Esta integral es impar en $\cos t$ →Realizamos el cambio

$$\left.\begin{array}{ll} \sin t = u & \cos t = \sqrt{1-u^2} \\ t = \arcsin u & dt = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} \end{array}\right\}\text{Con lo que}$$

$$\int \frac{1}{\cos t\cdot \sin^2 t}dt = \int \frac{du}{(1-u^2)\cdot u^2} =$$[3]

$$\int \frac{du}{(1-u^2)\cdot u^2} = -\int \frac{1}{2\,(u-1)}du + \int \frac{1}{2\,(u+1)}du + \int \tfrac{1}{u^2}du =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\ln(u-1) + \tfrac{1}{2}\ln(u+1) - \tfrac{1}{u} + C = \tfrac{1}{2}\,\ln\tfrac{(u+1)}{(u-1)} - \tfrac{1}{u} + C =$$

Si deshacemos el último cambio de variable efectuado ($u = \sin t$); tendremos

$$= \tfrac{1}{2}\,\ln\tfrac{(1+\sin t)}{(-1+\sin t)} - \tfrac{1}{\sin t} + C$$

Si deshacemos el primer cambio $x = 2\sec t$ y teniendo presente que

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{1}{\sec^2 t}} = \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\sqrt{(x^2-4)}}{x}$$

Entonces la integral quedará así

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\dfrac{\sqrt{(x^2-4)}}{x}}{-1+\dfrac{\sqrt{(x^2-4)}}{x}}\right| - \frac{x}{\sqrt{(x^2-4)}} + C$$

Simplificando al máximo tendremos

$$\tfrac{1}{2}\ln\left|-\tfrac{x+\sqrt{(x^2-4)}}{x-\sqrt{(x^2-4)}}\right| - \tfrac{x}{\sqrt{(x^2-4)}} + C =$$[4]$$\ln\left|x+\sqrt{(x^2-4)}\right| - \tfrac{x}{\sqrt{(x^2-4)}} - \frac{\ln 4}{2} + C$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}dx = \ln\left|x+\sqrt{(x^2-4)}\right| - \frac{x}{\sqrt{(x^2-4)}} + C'$$

## Nota: Esta integral también se puede resolver por partes.Fíjate que es mucho más sencilla

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}dx = \int x\cdot\frac{x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}dx & v = \displaystyle\int \frac{x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}dx = -\tfrac{1}{\sqrt{(x^2-4)}} \end{array} \quad :$$

$$\int x\cdot\frac{x}{(x^2-4)^{\frac{5}{2}}}dx = -\tfrac{x}{\sqrt{(x^2-4)}} + \int \tfrac{1}{\sqrt{(x^2-4)}}dx = -\tfrac{x}{\sqrt{(x^2-4)}} + J$$

---

[3] Como $\dfrac{1}{(1-u^2)\cdot u^2} = -\frac{1}{2(u-1)} + \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{u^2}$ (Compruébalo)

[4] $\ln\left|-\frac{x+\sqrt{(x^2-4)}}{x-\sqrt{(x^2-4)}}\right| = \ln\left|\frac{x+\sqrt{(x^2-4)}}{x-\sqrt{(x^2-4)}}\right| =$

$\ln\left|\frac{\left(x+\sqrt{(x^2-4)}\right)^2}{4}\right| = 2\ln\left|x+\sqrt{(x^2-4)}\right| - \ln 4$

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2-4)}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}}dx = \ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{(x^2-4)}\right| - \ln 2 + C$$

Con lo que

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}dx = \ln\left|x+\sqrt{(x^2-4)}\right| - \frac{x}{\sqrt{(x^2-4)}} + C'$$

**4)** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx \ ; \ x = \sin t$

**5)** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx \ ; \ x = 2\sin t$

**6)** $\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx \ ; \ x = 2\sin t$

**7)** $\int \frac{1}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}dx \ ; \ x = 3\sin t$

**8)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx \ ; \ x = \tan t$

**9)** $\int \frac{x^2}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}dx \ ; \ x = 2\sin t$

**10)** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx \ ; \ x = \sin t$

**11)** $\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}dx \ ; \ x = \tan t$

**12)** $\int \frac{1}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}dx \ ; \ x = 2\tan t$

**13)** $\int \frac{1}{\sqrt{(9+x^2)^3}}dx \ ; \ x = 3\tan t$

**14)** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx \ ; \ x = 3\sin t$

**15)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx \ ; \ x = 2\sec t$

**16)** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx \ ; \ x = 2\sin t$

**17)** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}dx \ ; \ x = 2\tan t$

**18)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$ ; $x = 2\sec t$

**19)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$ ; $x = 2\sin t$

**20)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9+4x^2}}dx$ ; $x = \frac{3}{2}\tan t$

**21)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$ ; $x = 2\sin t$

**22)** $\displaystyle\int \frac{1}{(9+x^2)^2}dx$ ; $x = 3\tan t$

**23)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}dx$ ; $x = a\tan t$

**24)** $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ ; $x = a\tan t$

tocPART II

# Part II

# Integral definida

# Chapter 8

# Integral de Riemann y Regla de Barrow



## 8.1 Sumas de Riemann

Sea P=$\{a = x_o, x_1, x_2, x_3, .......x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y $f(x)$ una función acotada en dicho intervalo . [1]

Suma inferior de Riemann de $f(x)$ respecto a la partición P es el número real

$$s_p = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

donde $m_i = \inf \{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Suma superior de Riemann de $f(x)$ respecto a la partición P es el número real

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

donde $M_i = \sup \{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

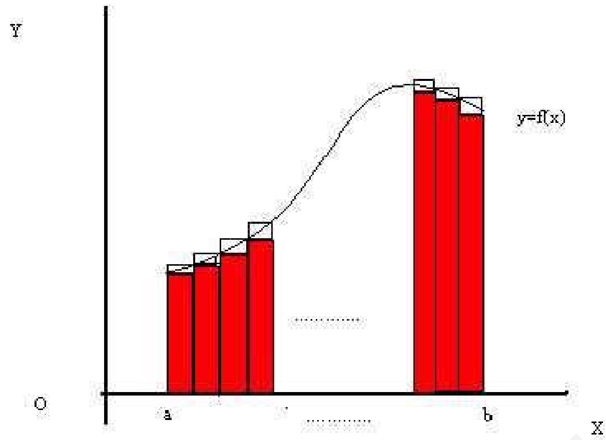
## 8.2 Interpretacion geometrica de las Sumas de Riemann

a) Si $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b]$ , geométricamente las sumas de Riemann representan

$s_p$es el área de los rectángulos sombreados de la figura 1 y $S_p$ es el área determinada por los rectángulos sombreados y los no sombreados

Observa también que $S_p - s_p$ es el área de los rectángulos sin sombrear.

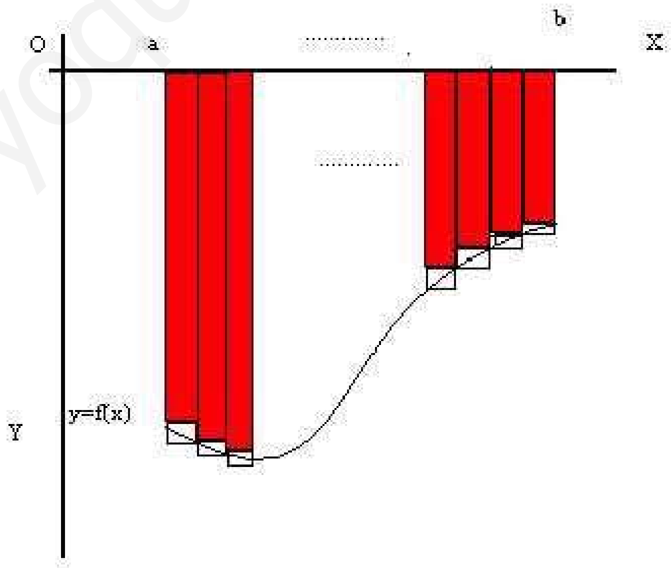
[1] El supremo y el infímo de $f(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$ siempre existen al ser f acotada en $[a, b]$




b) Si $f(x) \leq 0\ \forall x \in [a, b]$ , geométricamente las sumas de Riemann representan

$s_p$ es el área cambiada de signo de los rectángulos sombreados y no sombreados de la figura 2 y $S_p$ es el área cambiada de signo determinada por los rectángulos sombreados

Observa también que $S_p - s_p$ es el área cambiada de signo de los rectángulos sin sombrear.




c) Si $f(x) > 0\ \forall x \in [a, c[\ ;\ f(c) = 0$ y $f(x) > 0\ \forall x \in ]c, b]$. Dibuja tú e interpreta geométricamente que representan $s_p$ y $S_p$

**Theorem 1** *Si f es una función acotada en* $[a, b]$ . $P_k$ *es una partición cualquiera de* $[a, b]$ *,entonces:*

$$s_k \leq S_k$$

**La suma inferior asociada a una partición es siempre menor o igual que la suma superior asociada a la misma partición**

**Theorem 2** *Si f es una función acotada en* $[a, b]$ . $P_1$*y* $P_2$ *son particiones de* $[a, b]$ *de forma que* $P_1 \subset P_2$ *y* $s_1$ *y* $s_2$ *son las sumas inferiores de Riemann correspondientes a* $P_1$*y* $P_2$ *respectivamente, entonces:*

$$s_1 \leq s_2$$

**La suma inferior asociada a una partición P$_1$es siempre menor o igual que la suma inferior asociada a otra partición P$_2$que contiene más puntos que la primera**

**Theorem 3** *Si f es una función acotada en* $[a, b]$ . $P_1$*y* $P_2$ *son particiones de* $[a, b]$ *de forma que* $P_1 \subset P_2$ *y* $S_1$ *y* $S_2$ *son las sumas superiores de Riemann correspondientes a* $P_1$*y* $P_2$ *respectivamente, entonces:*

$$S_1 \geq S_2$$

**La suma superior asociada a una partición $P_1$es siempre mayor o igual que la suma superior asociada a otra partición $P_2$ que contiene más puntos que la primera**

**Theorem 4** *Si f es una función acotada en* $[a, b]$ . $P_1$*y* $P_2$ *son particiones cualesquiera de* $[a, b]$ *, entonces:*

$$s_P \leq S_{P'}$$

**La suma inferior asociada a una partición es siempre menor o igual que la suma superior asociada a cualquier otra partición**

**Theorem 5** *La sucesión* $\{s_n / n \in N^*\}$ *es una sucesión monótona creciente y acotada superiormente por* $S_1$*y además* $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \sup \{s_n / n \in N^*\}$

**Theorem 6** *La sucesión* $\{S_n / n \in N^*\}$ *es una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente por* $s_1$*y además* $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \inf \{S_n / n \in N^*\}$

Nota: Si f es una función acotada en $[a, b]$, $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{s}_n = \sup \{s_n / n \in N^*\}$ no siempre coincide con $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{S}_n = \inf \{S_n / n \in N^*\}$

## 8.3 Integral superior de f en $[a, b]$

Si f es una función acotada en $[a, b]$ . Llamaremos integral superior de f en $[a, b]$ , y lo representaremos por $\int\limits_a^b f(x)dx$ , al número real $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \inf \{S_n / n \in N^*\}$

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} S_n = \inf \{S_n / n \in N^*\}}$$

## 8.4 Integral inferior de f en $[a, b]$

Si f es una función acotada en $[a, b]$ $\forall x \in [a, b]$. Llamaremos integral inferior de f en $[a, b]$ , y lo representaremos por $\int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx$ , al número real $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n/n \in N^*\}$

$$\boxed{\int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n/n \in N^*\}}$$

## 8.5 Definición de Funcion Integrable Riemann en $[a, b]$

Diremos que dada una función f acotada en $[a, b]$ es integrable Riemann cuando se verifique que:

$$\boxed{\int_{a}^{\underline{b}} f(x)dx = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx}$$

**A dicho valor se le denomina** $\int_a^b f(x)dx$

### 8.5.1 Ejemplos: Determina de la funcion $f(x) = x^2 + 1$ [2]las siguientes sumas de Riemann en $[0, 1]$

a) $s_1$ , $S_1$ asociadas a la partición $P_1 = \{0, 1\}$

$s_1 = m_1(1 - 0) = f(0) = 1$

$S_1 = M_1(1 - 0) = f(1) = 2$

b) $s_2$ , $S_2$ asociadas a la partición $P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$s_2 = m_1\frac{1}{2} + m_2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(f(0) + f(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}(1 + \frac{5}{4}) = \frac{9}{8}$

$S_2 = M_1\frac{1}{2} + M_2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(f(\frac{1}{2}) + f(1)) = \frac{1}{2}(\frac{5}{4} + 2) = \frac{13}{8}$

c) $s_3$ , $S_3$ asociadas a la partición $P_3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$

$s_3 = m_1\frac{1}{3} + m_2\frac{1}{3} + m_3\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})) = \frac{1}{3}(1 + \frac{10}{9} + \frac{13}{9}) = \frac{32}{27}$

$S_3 = M_1\frac{1}{3} + M_2\frac{1}{3} + M_3\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1)) = \frac{1}{3}(\frac{10}{9} + \frac{13}{9} + 2) = \frac{41}{27}$

............

c) $s_{10}$ , $S_{10}$ asociadas a la partición $P_{10} = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, .....\frac{9}{10}, 1\right\}$

[2]Esta función es estrictamente creciente en $[0, 1]$ .Por lo que $\sup\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i)$ y $\inf\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1})$

$$s_{10} = m_1\frac{1}{10} + m_2\frac{1}{10} + ....... + m_{10}\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9} f(\frac{j}{10}) = \frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9}\left[\left(\frac{j}{10}\right)^2 + 1\right]$$

$$S_{10} = M_1\frac{1}{10} + M_2\frac{1}{10} + ....... + M_{10}\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} f(\frac{j}{10}) = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}\left[\left(\frac{j}{10}\right)^2 + 1\right]$$

Calcúlalas

d) $s_n$ , $S_n$ asociadas a la partición $P_n = \left\{\frac{i}{n}/\ i \text{ varía de } 0 \text{ a } n\right\}$

$$s_n = m_1\frac{1}{n} + m_2\frac{1}{n} + ....... + m_n\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\frac{j}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(\frac{j}{n}\right)^2 + 1\right]$$

$$S_n = M_1\frac{1}{n} + M_2\frac{1}{n} + ....... + M_n\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{j}{n}\right)^2 + 1\right]$$

Ejercicios:

a) Demuestra que la sucesión $s_n$ es estrictamente creciente y que está acotada superiormente (por $S_1$) . Por lo tanto, tiene límite ($\sup\{s_n/\ n \in N\}$)

b) Demuestra que la sucesión $S_n$ es estrictamente decreciente y que está acotada inferiormente (por $s_1$) .Por lo tanto, tiene límite ( $\inf\{S_n/\ n \in N\}$ )

Nota: Por ser la función continua ambos límites coinciden

$$\int_{\bar{0}}^{1} (x^2+1)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(\frac{j}{n}\right)^2 + 1\right] =^3 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n-1)\,(n-1)n}{6}}{n^3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_{0}^{1} (x^2+1)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{j}{n}\right)^2 + 1\right] =^4 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)\,n(n+1)}{6}}{n^3} = \frac{4}{3}$$

Dicho valor coincide con el área del trapecio mixtilíneo determinado por la función $y = x^2 + 1$, las rectas $x = 0$ , $x = 1$ , y el eje $OX$[5]

## 8.6 ¿Que funciones acotadas en $[a, b]$ son integrables Riemann?

1. Las funciones continuas en $[a, b]$

2. Las funciones monótonas crecientes o decrecientes (no necesariamente continuas)

3. Las funciones continuas en $[a, b]$ salvo para un número finito de puntos

---

[3] $1^2 + 2^2 + 3^2 + ....... + (n-1)^2 = \frac{(2n-1)\,(n-1)n}{6}$

[4] $1^2 + 2^2 + 3^2 + ....... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{(2n+1)\,n(n+1)}{6}$

[5] $\int_0^1 (x^2+1)dx = \frac{4}{3}$

## 8.7 Propiedades

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ **(Relación de Chasles)**

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$

- Si $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ **(ley de monotonía)**

- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

- $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

## 8.8 TEOREMAS DE LA MEDIA

**Theorem 7** ***Teoremas de la media o del valor medio del cálculo integral***

$1^o$ Si $f(x)$ es integrable Riemann en $[a,b] \Longrightarrow \exists\ \mu \in [M,m]\ /\ \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ siendo $M = \sup\{f(x)\ /\ x \in [a,b]\}$ y $m = \inf\{f(x)\ /\ x \in [a,b]\}$

$2^o$ Si $f(x)$ es continua en $[a,b] \Longrightarrow \exists\ c \in [a,b]\ /\ \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

$\boxed{\text{Interpretación geométrica}}$ **:Si $f(x)$ es es continua en $[a,b]$ y además $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ entonces el área del trapecio mixtilíneo determinado por la función $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$ , $x = b$ y el eje $OX$ coincide con el área del rectángulo de base $b-a$ y de altura $f(c)$** (a este valor se le denomina valor medio de f en $[a,b]$)

Demostración:

$1^o$ Por ser I.R en $[a,b]$ y dados $m = \inf\{f(x) \ / \ x \in [a,b]\}$ y $M = \sup\{f(x) \ / \ x \in [a,b]\}$ siempre se verifica que $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

dividiendo por b-a, tendremos $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$

y tomando $\mu$ como dicho valor intermedio queda demostrado el teorema, puesto que

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

$2^o$ Si f es continua en $[a,b]$ $\to$f es I:R: en $[a,b]$ y aplicando el teorema anterior

$$\exists \ \mu \in [M,m] \ / \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Por el teorema de los valores intermedios de Darboux al ser f continua en $[a,b]$, podemos afirmar que $\exists \ c \in [a,b] \ / \ f(c) = \mu$. Así pues:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Ejemplo: (Leer después de la Regla de Barrow)

a) Dada la función $f(x) = x^2+1$. Determina el valor medio de f en $[2,3]$

Por ser f continua en $[2,3] \to \exists \ c \in [2,3] \ / \int_2^3 (x^2+1)dx = f(c)(3-2) = f(c)$

$\int_2^3 (x^2+1)dx = \left[\dfrac{x^3}{3}+x\right]_2^3 = \left(\dfrac{3^3}{3}+3\right) - \left(\dfrac{2^3}{3}+2\right) = 1 + \dfrac{19}{3} = \dfrac{22}{3}$

Como $f(c) = c^2+1$ entonces

$c^2+1 = \dfrac{22}{3} \Longrightarrow c^2 = \dfrac{19}{3}$; $c = \pm\dfrac{19}{3}$.Observa que $c = \sqrt{\dfrac{19}{3}} \in [2,3]$

Por lo tanto el valor medio de f en $[2,3]$ es $f(\sqrt{\dfrac{19}{3}}) = \dfrac{22}{3}$

Ejercicio

a) Dada la función $f(x) = x^2+1$. Determina el valor medio de f en $[2,4]$

## 8.9 FUNCION INTEGRAL DEFINIDA O FUNCION DE AREAS

Si f es una función Integrable Riemann en $[a,b]$ ,a la función que a todo número real $t \in [a,b]$ le asocia $\int_a^t f(x)dx$se le denomina función de áreas asociada a $f$ en

$[a,b]$, siendo la función f y el límite inferior fijos

$$A(t) = \int_a^t f(x)dx$$

$\boxed{\text{Interpretación geométrica}}$ **:Si $f(x)$ es es continua en $[a,b]$ y además $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ entonces el área del trapecio mixtilíneo determinado por la función $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$ , $x = t$ con $t \in [a,b]$y el eje $OX$ coincide con $A(t) = \int_a^t f(x)dx$**

**Theorem 8** ***PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE ÁREAS***

$1^o$ Si $f(x)$ es I.R. en $[a,b] \Longrightarrow A(t)$ es continua en $[a,b]$ (aunque f no sea continua)

$2^o$ Si f(x) es continua en $[a,b] \Longrightarrow A(t)$ es derivable en $]a,b[$ y $A'(t) = f(t)$

Nota: El segundo teorema nos indica que la función de áreas $A(t)$es una primitiva de $f$ en $]a,b[$

Demostración

$1^o$ Tenemos que demostrar que $\forall t \in ]a,b[ \ \lim\limits_{h\to 0} (A(t+h) - A(t)) = 0$

$$\lim_{h\to 0} (A(t+h) - A(t)) =^{6} \lim_{h\to 0} \left( \int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx \right) =^{7} \lim_{h\to 0} \int_t^{t+h} f(x)dx =^{8}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(c)h =^{9} 0 \cdot f(t) = 0$$

Demuestra tú

$$\lim_{h\to 0^+} A(a+h) - A(a) = 0 \text{ y que } \lim_{h\to 0^-} A(b+h) - A(b) = 0$$

$2^o$ Tenemos que demostrar que $\forall t \in ]a,b[ \ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{A(t+h) - A(t)}{h} = f(t)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_t^{t+h} f(x)dx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c)h}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(t)$$

Así pues:

$$A'(t) = f(t) \ \forall t \in ]a,b[$$

**La función de áreas asociada a f en $[a,b]$ es una primitiva de ésta en $]a,b[$**

[6] Por la definición de la función de áreas

[7] $\int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx = \int_a^t f(x)dx + \int_t^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx = \int_t^{t+h} f(x)dx$

[8] Por ser f continua en $[t, t+h]$ (Si h>0) o en $[t+h, t]$(Si h<0) se verifica el 2 teorema del valor medio. Por lo que $\exists c \in [t, t+h]$ (o $[t+h, t]$ según el signo de h)/ $\int_t^{t+h} f(x)dx = f(c)h$

[9] siendo $c \in [t+h, t]$si h<0 o $c \in [t, t+h]$ si h>0; en cualquier caso si $h \to o$ entonces $f(c) \to f(t)$

## 8.10 La Regla de Barrow

**Theorem 9** ***LA REGLA DE BARROW***

Si $f$ es continua en $[a,b]$ y $F$ es una primitiva de $f$ en $]a,b[$ , siendo además $F$continua en $[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Demostración

Por ser f continua en $[a,b]$ por el teorema anterior la función de áreas $A(t) = \int_a^t f(x)dx$ asociada a $f$ es una función continua en $[a,b]$y además es una primitiva de f en $]a,b[$ $(A'(t) = f(t)\ \forall t \in ]a,b[)$

Como por hipótesis tenemos otra función $F$ que es primitiva de $f$ y además es continua en $[a,b]$ . Entonces, en virtud del teorema fundamental del cálculo integral podemos afirmar que ambas se diferencian en una constante; esto es:

$$A(x) = F(x) + C\ \forall x \in [a,b]$$

Hallemos la constante $C$ dándole a x el valor $a$ y $b$

$$A(a) = \int_a^a f(x)dx = 0 = F(a) + C \to C = -F(a)$$

$$A(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

## 8.11 Ejercicios de integrales definidas

**Ejercicios de integrales definidas**

1. $\int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}$

2. $\int_1^3 \ln x dx =$[10] $[x \ln x - x]_1^3 = 3\ln 3 - 3 - (1 \ln 1 - 1) = 3\ln 3 - 2$

3. $\int_{-3}^2 (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - \left(\frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2}\right) = \frac{85}{6}$

4. $\int_0^\pi \sin 3x dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^\pi = -\frac{1}{3}\cos 3\pi - \left(-\frac{1}{3}\cos 0\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 5x} dx = \left[\frac{1}{5}\tan 5x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{5}\tan\left(5\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{5}\tan 0 = -\frac{1}{15}\sqrt{3}$

6. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{1}{4}\pi$

[10] $\int \ln x dx = x \ln x - \int 1\, dx = x(\ln x - 1) + C$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_{-1}^{1} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \tfrac{1}{4}\pi - (-\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi$

8. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [\arcsin x]_{0}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \tfrac{1}{2}\pi$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [\arcsin x]_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \tfrac{1}{2}\pi - \left(-\tfrac{1}{2}\pi\right) = \pi$

10. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = [-\ln(\cos x)]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\cos\tfrac{\pi}{4}) - (-\ln(\cos 0)) = \tfrac{1}{2}\ln 2$

11. $\displaystyle\int_{-5}^{3} xe^x dx = [xe^x - e^x]_{-5}^{3} = 3e^3 - e^3 - \left[(-5)e^{-5} - e^{-5}\right] = 2e^3 + \frac{6}{e^5} \approx 40.212$

12. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}dx$ :

Para resolver esta integral tenemos que realizar el siguiente cambio de variable

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\ dt \end{array}\right\}$$

Al mismo tiempo que realizamos el cambio de variable; hemos de cambiar los límites de integración

Observa que:

Si $x = 0 \rightarrow 0 = 2\sin t \rightarrow t = 0$

Si $x = 1 \rightarrow 1 = 2\sin t \rightarrow \sin t = \dfrac{1}{2} \rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$

$$\int_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\ 2\cos t\ dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\ dt =^{11}$$

$$4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\ dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 2\left(\tfrac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\left(\tfrac{2\pi}{6}\right)\right) =:\ \tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

**13)** $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$

Para resolver esta integral tenemos que realizar el siguiente cambio de variable

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\tan t \\ dx = 2\sec^2 t\ dt \end{array}\right\}$$

Al mismo tiempo que realizamos el cambio de variable; hemos de cambiar los límites de integración

[11] Recuerda que $\cos^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$

Observa que:
Si $x = 0 \rightarrow 0 = 2\tan t \rightarrow t = 0$
Si $x = 2 \rightarrow 2 = 2\tan t \rightarrow \tan t = 1 \rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{4+4\tan^2 t}}\ 2\sec^2 t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t\ dt =$$

$$= [\ln(\sec t + \tan t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sec\tfrac{\pi}{4} + \tan\tfrac{\pi}{4}) - \ln(\sec 0 + \tan 0) = \ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

## 8.12 Tabla de integrales inmediatas

1. $\displaystyle\int f'(x)dx = f(x) + C$

2. $\displaystyle\int dx = x + C$

3. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

4. $\displaystyle\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx \text{ si } k \in \Re$

5. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1$

6. $\displaystyle\int f'(x) \cdot (f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C\textbf{si } \; n \neq -1$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

8. $\displaystyle\int \frac{f\ '(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

9. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \text{ si } a \in \Re^+ \sim \{1\}$

10. $\displaystyle\int a^{f(x)} f\ '(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C \text{ si } a \in \Re^+ \sim \{1\}$

11. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

12. $\displaystyle\int e^{f(x)} f\ '(x)dx = e^{f(x)} + C$

13. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

14. $\displaystyle\int f'(x)\cos f(x)dx = \sin f(x) + C$

15. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

16. $\displaystyle\int f\ '(x)\sin f(x)dx = -\cos f(x) + C$

17. $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \sec^2 x dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx \\ \displaystyle\int (1+\tan^2 x)dx\end{array}\right\} = \tan x + C$$

18. $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int f\ '(x)\sec^2 f(x)dx \\ \displaystyle\int \frac{f\ '(x)}{\cos^2 f(x)}dx \\ \displaystyle\int f\ '(x)(1+\tan^2 f(x))dx\end{array}\right\} = \tan f(x) + C$$

19. $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \csc^2 x dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}dx \\ \displaystyle\int (1+\cot^2 x)dx\end{array}\right\} = -\cot x + C$$

20. $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int f\ '(x)\csc^2 f(x)dx \\ \displaystyle\int \frac{f\ '(x)}{\sin^2 f(x)}dx \\ \displaystyle\int f\ '(x)(1+\cot^2 f(x))dx\end{array}\right\} = -\cot f(x) + C$$

21. $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \sec x \cdot \tan x dx \\ \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx\end{array}\right\} = \sec x + C$$

22. $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int f\ '(x)\sec f(x) \cdot \tan f(x)dx \\ \displaystyle\int \frac{f\ '(x)\sin f(x)}{\cos^2 f(x)}dx\end{array}\right\} = \sec f(x) + C$$

23. $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \csc x \cdot \cot x dx \\ \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx\end{array}\right\} = -\csc x + C$$

24. $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int f\ '(x)\csc f(x) \cdot \cot f(x)dx \\ \displaystyle\int \frac{f\ '(x)\cos f(x)}{\sin^2 f(x)}dx\end{array}\right\} = -\csc f(x) + C$$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

26. $\displaystyle\int \frac{f\ '(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + C$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

28. $\displaystyle\int \frac{f\ '(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$

30. $\displaystyle\int \frac{f\ '(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}dx = \ln\left|f(x) + \sqrt{1+(f(x))^2}\right| + C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{f\ '(x)}{\sqrt{(f(x))^2-1}}dx = \ln\left|f(x) + \sqrt{(f(x))^2-1}\right| + C$

**Nota** Fíjate en estas dos integrales, que vienen a continuación, como se resuelven

- $\displaystyle\int \sec x dx =^{12} \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

Observa que la derivada de $\sec x + \tan x$ es $\sec^2 x + \sec x \cdot \tan x$. Por lo tanto la integral anterior es de tipo logarítmico

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

- $\displaystyle\int \csc x dx =^{13} \int \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} dx = \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cdot \cot x}{\csc x - \cot x} dx$

Observa que la derivada de $\csc x - \cot x$ es $\csc^2 x - \csc x \cdot \cot x$. Por lo tanto la integral anterior es de tipo logarítmico

$$\int \sec x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

[12] Multiplicamos y dividimos por $\sec x + \tan x$

[13] Multiplicamos y dividimos por $\csc x - \cot x$

# Chapter 9

# Integrales tipo $\int \frac{1}{(t^2+1)^p}dt$ si p$\geq 2$

$I_p = \int \frac{1}{(t^2+1)^p}dt = \int \frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^p}dt = I_{p-1} - \int t \cdot \frac{t}{(t^2+1)^p}dt$

Esta segunda integral se resuelve por partes

$u = t \qquad du = dt$

$\frac{t}{(t^2+1)^p}dt = dv \qquad v = \int t(t^2+1)^{-p}dt = \frac{1}{2}\frac{(t^2+1)^{-p+1}}{-p+1} = \frac{-1}{2\,(p-1)\,(t^2+1)^{p-1}}$

$I_p = \int \frac{1}{(t^2+1)^p}dt = I_{p-1} - \left(\frac{-t}{2\,(p-1)\,(t^2+1)^{p-1}} + \frac{1}{2\,(p-1)}\int \frac{1}{(t^2+1)^{p-1}}\right)$

$I_p = I_{p-1} + \frac{t}{2\,(p-1)\,(t^2+1)^{p-1}} - \frac{1}{2\,(p-1)}\ I_{p-1}$

$I_p = \frac{t}{2\,(p-1)\,(t^2+1)^{p-1}} + \left(1 - \frac{1}{2\,(p-1)}\right) I_{p-1}$

$I_p = \frac{t}{2\,(p-1)\,(t^2+1)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2\,(p-1)} I_{p-1}$

Fíjate que $I_1 = \int \frac{1}{(t^2+1)}dt = \arctan t + C$

Ejemplo 1 $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$

Según la fórmula de reducción deducida en este apéndice

$I_{2=}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{t}{2\,(2-1)\,(t^2+1)^{2-1}} + \frac{2(2)-3}{2\,(2-1)}I_1$

Como $I_1 = \int \frac{1}{(t^2+1)}dt = \arctan t + C$ entonces

$I_{2=}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + C$

Ejemplo 2 $\int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt$

Según la fórmula de reducción deducida anteriormente
$I_3 = \frac{t}{2(3-1)(t^2+1)^{3-1}} + \frac{2(3)-3}{2(3-1)} I_2$
Si te fijas en el ejemplo 1 y sustituyes el valor de $I_2$
$I_3 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t\right) + C$
Integrales tipo $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^p} dx$ si p$\geq 2$ siendo $\nabla = b^2 - 4ac < 0$

$$\text{Como } ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abx+4ac\right) =$$
$$\frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac\right) = \frac{1}{4a}\cdot\left[(2ax+b)^2-\nabla\right]$$

Si llamamos a $-\nabla = H$ $(H>0)$ tendremos

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\cdot\left[(2ax+b)^2+H\right] = \frac{H}{4a}\cdot\left[(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}})^2+1\right]$$

Con lo que

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^p} dx = \int \frac{1}{\left[\frac{H}{4a}\cdot\left((\frac{2ax+b}{\sqrt{H}})^2+1\right)\right]^p} dx =$$
$$\left(\frac{4a}{H}\right)^p \int \frac{1}{\left[(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}})^2+1\right]^p} dx$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable $\frac{2ax+b}{\sqrt{H}} = t \to dx = \frac{\sqrt{H}}{2a} dt$

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^p} dx = \left(\frac{4a}{H}\right)^p \int \frac{1}{\left[(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}})^2+1\right]^p} dx =$$
$$= \left(\frac{4a}{H}\right)^p \frac{\sqrt{H}}{2a} \int \frac{1}{(t^2+1)^p} dt = \frac{2^{2p-1}a^{p-1}}{H^{p-\frac{1}{2}}} I_p$$ siendo $I_p$ la integral del apéndice anterior

**Ejemplo 1)** $\int \frac{1}{(3x^2+2x+1)^2} dx$ Observa que $\nabla = 4-12 = -8 < 0$

$$\text{Como } ax^2+bx+c = \frac{H}{4a}\cdot\left[(\frac{2ax+b}{\sqrt{H}})^2+1\right] \text{ siendo } H = -\nabla$$
$$3x^2+2x+1 = \frac{8}{12}\cdot\left[(\frac{6x+2}{\sqrt{8}})^2+1\right] = \frac{2}{3}\left[(\frac{3x+1}{\sqrt{2}})^2+1\right] \text{ entonces}$$

$$\int \frac{1}{\left(3x^2+2x+1\right)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\left[\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]\right)^2}dx = \frac{9}{4}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]^2}dx$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable $\frac{3x+1}{\sqrt{2}} = t \rightarrow dx = \frac{\sqrt{2}}{3}dt$

$$\frac{9}{4}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]^2}dx = \frac{9\sqrt{2}}{4\cdot 3}\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \frac{3\sqrt{2}}{4}I_2$$

Si te fijas en el apéndice anterior $I_2 = \int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + C$

Deshaciendo el cambio de variable

$$I_2 = \frac{\frac{3x+1}{\sqrt{2}}}{2\left(\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} + \frac{1}{2}\arctan \frac{3x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Así pues simplificando y sustituyendo en la integral inicial tendremos

$$\int \frac{1}{\left(3x^2+2x+1\right)^2}dx = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}\,(3x+1)}{3x^2+2x+1} + \frac{1}{2}\arctan \frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\left(3x^2+2x+1\right)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{3x+1}{3x^2+2x+1} + \frac{3\sqrt{2}}{8}\arctan \frac{3x+1}{\sqrt{2}} + C$$