GEOMETRÍA

VECTORES EN EL ESPACIO

VECTORES FIJOS EN EL ESPACIO

Un vector es la representación de una magnitud vectorial , es decir, una magnitud que necesita para su determinación, además de cantidad y unidad, dirección ,sentido y punto de aplicación

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en B

Un vector queda determinado por:

- Su módulo, que es la longitud del segmento AB y se designa por $|AB|$
- Su dirección, indicada por la recta que pasa por A y B
- Su sentido, orientado por el recorrido de A hacia B

El vector de módulo unidad se llama unitario

El vector de módulo cero se llama vector nulo

Se admite que todos los vectores nulos tiene la misma dirección y sentido

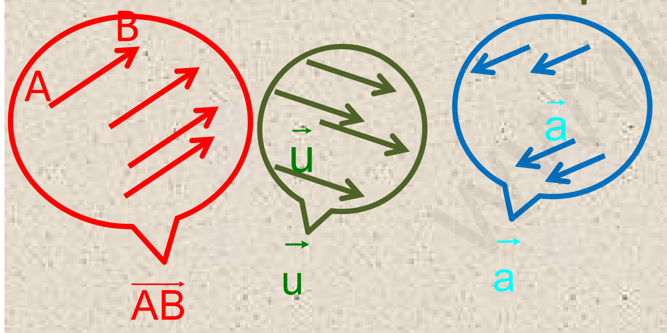
Relación de equipolencia entre vectores fijos:

Dos vectores fijos son equipolentes si tiene el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

La relación de equipolencia es una relación de equivalencia pues es: reflexiva, simétrica y transitiva

VECTORES LIBRES EN EL ESPACIO

Al introducir una relación de equipolencia en el conjunto de los vectores fijos , realizamos una clasificación en clases de equivalencia distintas



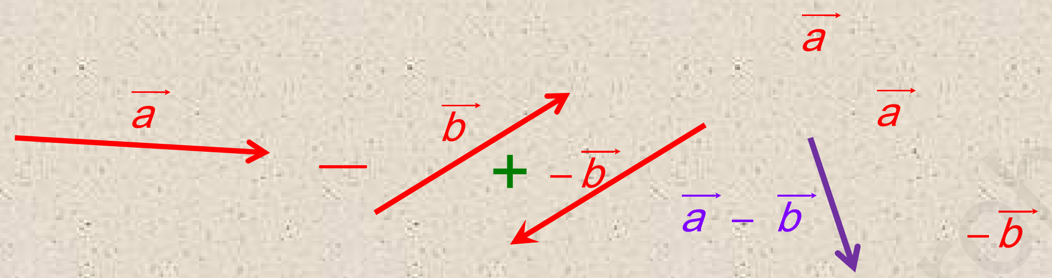
Se llama vector libre a cada una de las clases en que queda clasificado el conjunto de vectores fijos al introducir la relación de equipolencia

Un vector libre se designa de la misma forma que cualquiera de sus representantes

- OPERACIONES CON VECTORES LIBRES

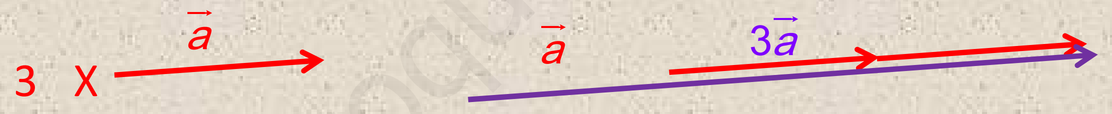
- Suma

- Resta



Multiplicación de un escalar por un vector:

Al multiplicar un número k por un vector $\vec{a}$ obtenemos un vector que tiene la mima dirección que $\vec{a}$, el mismo sentido o sentido contrario, según se K positivo o negativo, y su módulo es "$|k|\,\vec{a}$"



PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON VECTORES

Suma

Asociativa:	$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
Conmutativa:	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
vector nulo:	$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
vector opuesto:	$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

Producto de número por vector

Asociativa:	$\alpha\cdot\left(\beta\cdot\vec{c}\right)=\left(\alpha\cdot\beta\right)\cdot\vec{c}$
Distributiva:	$\begin{cases}\left(\alpha+\beta\right)\cdot\vec{c}=\alpha\cdot\vec{c}+\beta\cdot\vec{c}\\ \alpha\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\alpha\cdot\vec{b}+\alpha\cdot\vec{c}\end{cases}$
producto por 1:	$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

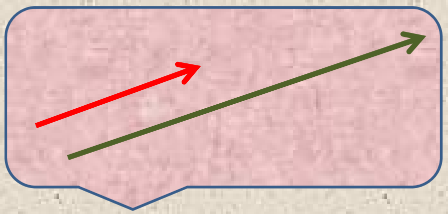
COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de otros $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$, si existen n números $a_1, a_2, \cdots, a_n$, no todos nulos, tales que:

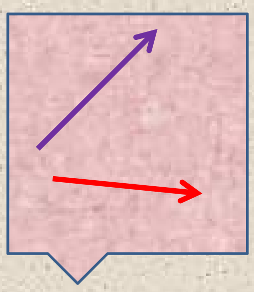
$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

Decimos que $\vec{v}$ depende linealmente de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ si $\vec{v}$ es una combinación de ellos

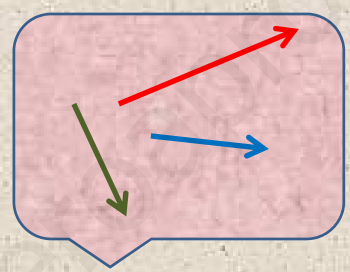
Decimos que $\vec{v}$ es linealmente independiente de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ si $\vec{v}$ no es una combinación de ellos



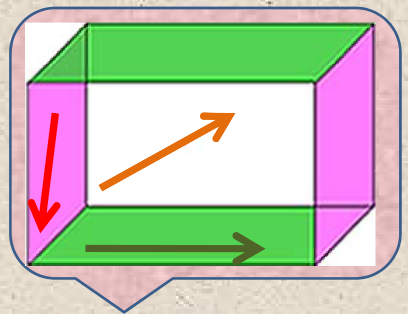
linealmente dependientes



linealmente independientes



linealmente dependientes



linealmente independientes

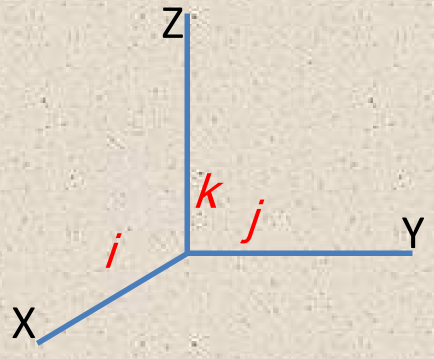
Una base de V^n es un conjunto de vectores, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$, linealmente independientes, de forma que cualquier otro vector $\vec{v}$ es combinación lineal de ellos

- a los númneros $a_1, a_2, \cdots, a_n$, se les llama las coordenadas de $\vec{v}$ en dicha base
- los vectorres $a_1\vec{v_1}, a_2\vec{v_2}, \cdots, a_n\vec{v_n}$, son las componentes de $\vec{v}$ en dicha base

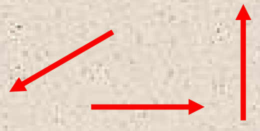
COORDENADAS CARTESIANAS DE UN VECTOR

En V^3 podemos elegir un número infinito de conjuntos de tres vectores linealmente independientes, cada una de los cuales podría ser una base

Llamamos base canónica a la formada por tres vectores perpendiculares entre si que tienen módulo unidad



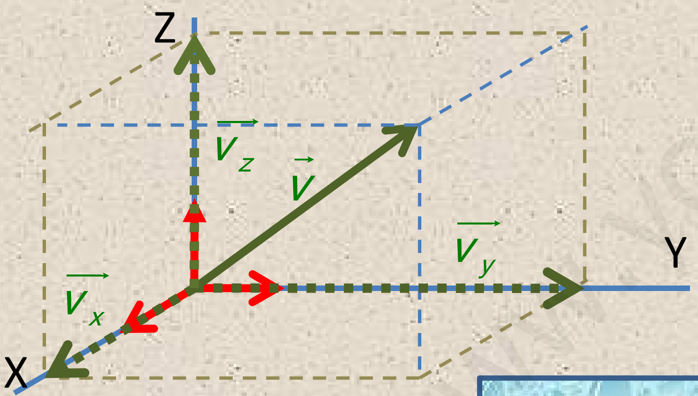
Elegimos un sistema de ejes cartesianos en el espacio
Elegimos tres vectores unitarios,{*i,j,k*}, en la dirección de los ejes, y sentido desde el origen a la parte positiva de cada eje



Donde:

$$\begin{cases} i = 1i + 0j + 0k \\ j = 0i + 1j + 0k \\ k = 0i + 0j + 1k \end{cases} \xrightarrow{\text{LAS COORDENADAS DE LOS VECTOTRES DE LA BASE CANONICA SON}} \begin{cases} i = (1,0,0) \\ j = (0,1,0) \\ k = (0,0,1) \end{cases}$$

Cualquier vector $\vec{v}$ lo podemos representar como combinación lineal de los vectores $\{i, j, k\}$



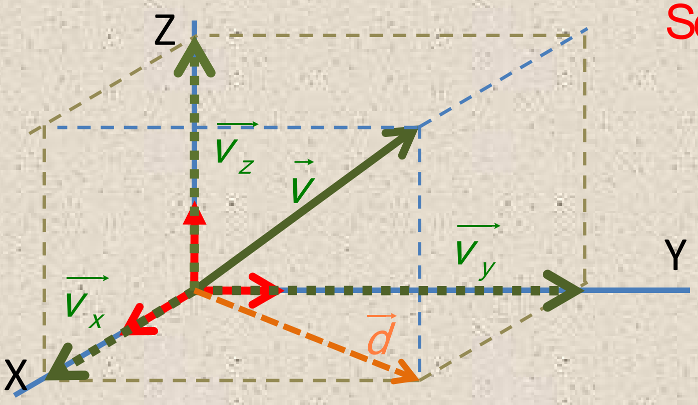
$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{v_z} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_x} = ai + 0j + 0k \\ \overrightarrow{v_y} = 0i + bj + 0k \\ \overrightarrow{v_z} = 0i + 0j + ck \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = ai + bj + ck$$

Así pues, elegida la base canónica como referencia, cualquier vector se puede escribir en la forma:

$$\vec{v} = [a, b, c]$$

donde "*a*" , "*b*" y "*c*" son las coordenadas cartesianas del vector

Modulo de un vector en función de sus coordenadas



Sea el vector $\vec{v} = ai + bj + ck$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{d}|^2 + |\vec{v}_z|^2 = |\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 + |\vec{v}_z|^2 \Leftrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 + |\vec{v}_z|^2}$$

luego: $$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{(ai)^2 + (bj)^2 + (ck)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Calcular el módulo del vector $\vec{v} = 5i - 6j + k$

$$\vec{v} = \sqrt{5^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{62} \text{ unidades}$$

Suma de vectores en función de sus coordenadas

Dado los vectores $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ y $\vec{b} = b_x i + b_y j + b_z k$, el vector suma $\vec{a} + \vec{b}$ es:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_x i + a_y j + a_z k) + (b_x i + b_y j + b_z k) = (a_x + b_x) i + (a_y + b_y) j + (a_z + b_z) k}$$

Dados los vectores $\vec{v} = 2i - 5j + 3k$ y $\vec{w} = -i + j - 2k$ calcular $\vec{v} + \vec{w}$ y $\vec{w} - \vec{v}$

$$\vec{v} + \vec{w} = [2,-5,3] + [-1,1,-2] = [1,-4,2] = i - 4j + k$$

$$\vec{w} - \vec{v} = [-1,1,-2] - [2,-5,3] = [-3,6,-5] = -3i + 6j - 5k$$

Producto de un escalar por un vector

Dado el vector $\vec{v} = ai + bj + ck$ y el escalar h, el vector $h\vec{v}$ es:

$$\boxed{h\vec{v} = h(ai + bj + ck) = (ha)i + (hb)j + (hb)k}$$

Multiplicar por -3 el vector $\vec{v} = -2i + j + 3k$

$$-3\vec{v} = -3[-2,1,3] = [6,-3,-9] \Leftrightarrow 6i - 3j - 9k$$

Estudio de la dependencia lineal de vectores en función de las coordenadas

Para que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sean independientes, debe cumplirse que:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0 \quad \text{para} \quad \alpha=\beta=\gamma=0$$

o lo que es lo mismo, el sistema: $\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ debe ser compatible y determinado

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0}$$

¿Son linealmente independientes los vectores $\vec{a}=i+j+3k$, $\vec{b}=3i+j+11k$ y $\vec{c}=5i-2j+22k$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 11 \\ 5 & -2 & 22 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \vec{a}\ ,\ \vec{b} \text{ y } \vec{c} \text{ son linealmente dependientes}$$

¿Para qué valores de "x" los vectores $\vec{u}=2i-j-k$, $\vec{v}=i+2j+k$ y $\vec{w}=xi+3j+k$ pueden ser una base para V^3?

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 3 & 1 \end{vmatrix}=x-4; \text{ que se anula para } x=4 \text{ ,luego los vectores forman una base si } x\neq 4$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

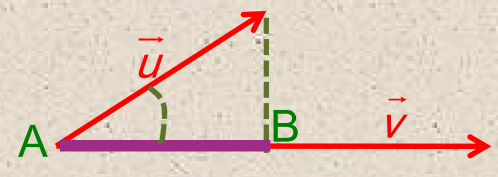
Se llama producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ al escalar que se obtiene multiplicando sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)}$$

Calcular el producto escalar de los vectores $\vec{v} = 3i + 2j - 6k$ y $\vec{w} = i + j - k$, si sabemos que forman un ángulo de 25º

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |3i + 2j - 6k|\cdot|i + j - k|\cos 25º = 7\sqrt{3}\cdot 0.90 \simeq 10,9$$

- Sentido geométrico del producto escalar:



Si proyectamos el vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$, vemos que:

$$\overline{AB} = |\vec{u}|\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right) \qquad \vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right) = |\vec{v}|\overline{AB}$$

El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él

- Propiedades del producto escalar

- Propiedad conmutativa $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\alpha = |\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cos(-\alpha) = \vec{v}\cdot\vec{u}$

- Propiedad distributiva respecto a la suma: $\vec{u}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{u}\cdot\vec{a} + \vec{u}\cdot\vec{b}$

-PRODUCTO ESCALAR EN FUNCIÓN DE SUS COMPONENTES

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x i + a_y j + a_z k\right)\cdot\left(b_x i + b_y j + b_z k\right) = a_x b_x ii + a_x b_y ij + a_x b_z ik + a_y b_x ji + a_y b_y jj +$$

$$+ a_y b_z jk + a_z b_x ki + a_z b_y kj + a_z b_z = \boxed{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Calcular el producto escalar de los vectores $\vec{v} = 2i - j + k$ y $\vec{w} = -3i + 2k - 3k$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 2(-3) + (-1)\cdot 2 + 1\cdot(-3) = -11$$

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES (Continuación)

- Producto escalar y módulo de un vector: Multiplicando escalarmente un vector por si mismo:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0^{o}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|^{2}=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$ de donde: $$\boxed{\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

- Cálculo del ángulo que forman dos vectores:

Dado que: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ entonces $\boxed{\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}}$

¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{v}=i+3j-k$ y $\vec{w}=2i+j+k$?

$$Cos\ \alpha=\frac{\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}}{\left|\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\end{bmatrix}\right|\cdot\left|\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}\right|}=\frac{4}{\sqrt{11}\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{66}}{33}\Rightarrow\alpha=ar\cos\frac{2\sqrt{66}}{33}=\begin{cases}\alpha\simeq 60^{o}30'14''\\ \alpha\simeq 1{,}06\text{ rad}\end{cases}$$

- Condición de perpendicularidad entre vectores:

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares si su producto escalar es cero.

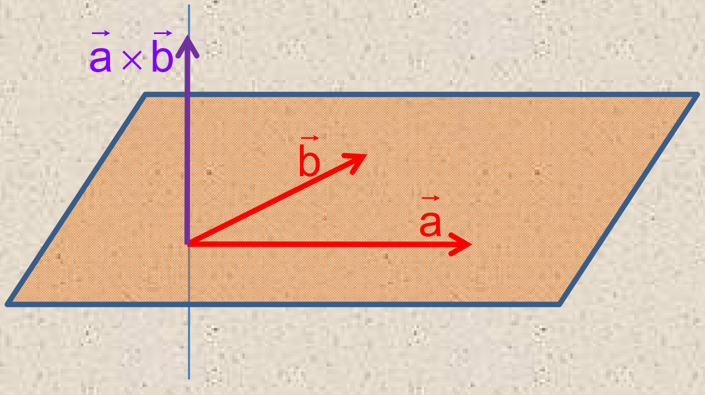
$$\boxed{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0}$$

Calcular el valor de "x" para que los vectores $\vec{v}=xi+j+3k$ y $\vec{w}=2i-xj-2k$ sean pependiculares

$$\begin{bmatrix}x & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-x\\-2\end{bmatrix}=0\Rightarrow 2x-x-6=0\Rightarrow x=6$$

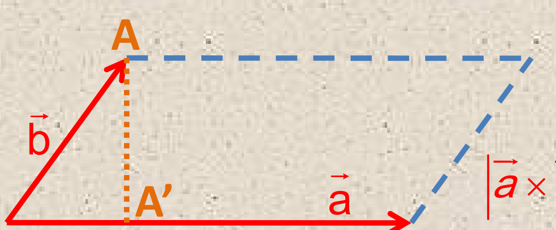
PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se llama producto vectorial, $\vec{a}\times\vec{b}$, al vector que:



- tiene la dirección de la perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$
- tiene por módulo $|\vec{a}||\vec{b}|\,sen\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$
- y tiene el sentido del avance de un sacacorchos que gira en sentido de $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$

- Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial



Si dibujamos el paralelogramo cuyos lados son los vectores

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\boxed{|\vec{b}|\,sen\alpha} = |\vec{a}|\boxed{\overline{AA'}}$$ = Área del paralelogramo de lados $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

- Propiedades del producto vectorial:

- Propiedad anticonmutativa: $\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

- Propiedad de homogeneidad: $\left(k\vec{a}\right)\times\vec{b} = k\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{a}\times\left(k\vec{b}\right)$

- Propiedad de homogeneidad: $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$

PRODUCTO VECTORIAL EN FUNCIÓN DE SUS COMPONENTES

$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x i+a_y j+a_z k\right)\times\left(b_x i+b_y j+b_z k\right)$ $\Rightarrow$ Desarrollando estos producto y teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} i\times i=0 & j\times i=-k & k\times i=-j \\ i\times j=k & j\times j=0 & k\times j=-i \\ i\times k=j & j\times k=i & k\times k=0 \end{cases}$$

tenemos:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_y b_z-a_z b_y\right)i-\left(a_x b_z-a_z b_x\right)j+\left(a_x b_y-a_y b_x\right)k}$$

expresión que podemos eescribir en forma más manejable:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$

Calcular el producto vectorial de los vectores $\vec{v}=-2i+j+2k$ y $\vec{w}=i+j-3k$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-5i-4j-3k$$

Calcular el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\vec{a}=i-j+2k$ y $\vec{b}=3j+k$

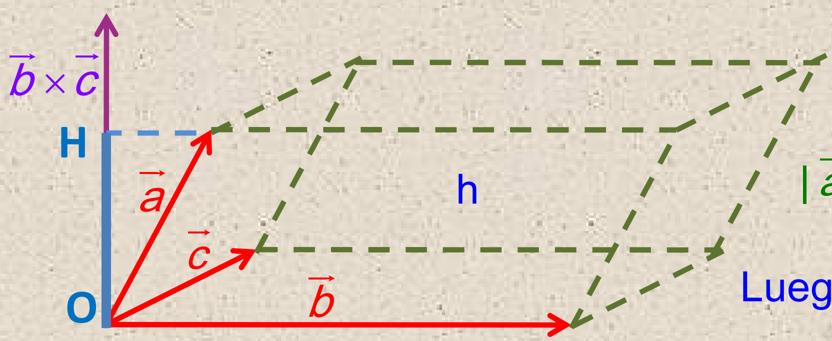
$$S=\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right|=\left|\left[-7,-1,3\right]\right|=\sqrt{\left(-7\right)^2+\left(-1\right)^2+3^2}=\sqrt{59}\ \text{unidades de área}$$

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

Se llama producto mixto de tres vectores, $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$, al escalar $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$ que se obtiene mediante el producto escalar de uno de ellos por el producto vectorial de los otros dos.

$$\boxed{\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}$$

- Sentido geométrico del producto mixto:



$$\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|=\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}}\right)$$

Pero

$$|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}}\right)=|OH|=h \Leftrightarrow \text{altura del paralelepípedo}$$

Luego $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}}\right)=$ área de la base $\times$ altura

$$\boxed{\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|=\text{Volumen del paralelepípedo de aristas } |\vec{a}|,|\vec{b}| \text{ y } |\vec{c}|}$$

- Producto mixto de tres vectores en función de sus coordenadas:

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left[a_x \quad a_y \quad a_z\right]\begin{pmatrix} i & j & k \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}$$

- Orden de multiplicación de los vectores y signo del producto

A la vista de resultado anterior, si cambiamos el orden de multiplicación de los vectores, cambiará, como máximo el signo del resultado ; pero no el valor absoluto del producto

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES (Ejemplos)

Calcular el producto mixto de los vectores $\vec{u} = 2i - j - k$, $\vec{v} = -i + k$ y $\vec{w} = -i - j + k$

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Demostrar que los vectores $\vec{a} = i + j + k$. $\vec{b} = -2i - 8k$ y $\vec{c} = i - 3j + 13k$ son coplanarios

Si los tres vectores están en un mismo plano, el volumen del paralelepípedo de aristas los módulos de esos vectores debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

Demostrar que los vectores $\vec{a} = i - j + 2k$, $\vec{b} = -2i + k$ y $\vec{c} = i + 5j + 2k$ pueden ser las aristas de un prisma recto. ¿Cuál es su volumen?

Si forman un prisma recto sus aristas deben ser perpendiculares estre sí:

$$\text{en efecto} \begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \\ \vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \\ \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{son perpendiculares entre sí}$$

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \right| = 30 \text{ uni. de volu.} \Leftrightarrow \text{(por ser prisma recto)} \ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}| = \sqrt{6}\sqrt{5}\sqrt{30} = 30 \text{ uni. de volu.}$$

FIN

DEL

TEMA