

1°.-En el primer curso de bachillerato de un instituto hay matriculados 65 alumnos divididos en tres grupos: A,B ,y C. Comen en el centro 42 de ellos, que corresponden a la mitad de los del grupo A, las cuatro quintas partes de los del B y las dos terceras partes de los del C. A una salida fuera del centro acudieron las tres cuartas partes de los alumnos del grupo A, todos los del B y las dos terceras partes de los del C, sumando en total 52 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

**Solución:**

$$\text{Sea: } \begin{cases} x = \text{"Alumnos que hay en el grupo A"} \\ y = \text{" " " " " B"} \\ z = \text{" " " " " C"} \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ \frac{x}{2} + \frac{4y}{5} + \frac{2z}{3} = 42 \text{ que resolviendo por cualquier procedimiento conocido nos da} \\ \frac{3x}{4} + y + \frac{2z}{3} = 52 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 20 \\ z = 21 \end{cases}$$

2°.-Encontrar la matriz  $A$  que verifica la ecuación:

$$A \cdot B + A = 2B' \quad \text{siendo} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B' \triangleleft B'$$

**Solución:**

$$A \cdot B + A = 2B' \Rightarrow A(B + I) = 2B' \Rightarrow A = 2B'(B + I)^{-1}$$

luego:

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}' \cdot \left[ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3°.-Encontrar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Rango}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -30 \Rightarrow \text{Rango es 3}$$

4°.- a) Para qué valor de “m” la siguiente matriz no tiene inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & m & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calcula, por determinantes,  $A^{-1}$  cuando  $m = 5$

**Solución:**

**a)**

A no tiene inversa si su determinante se anula;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & m & -1 \end{vmatrix} = m - 4 \quad \text{que se anula para } m = 4, \text{ luego para ese valor de } m \text{ la}$$

matriz A no tiene inversa.

**b)**

Si  $m = 5$  la matriz toma la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -11 & -3 & 18 \\ 7 & 2 & -11 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 18 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 18 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

5°.- Estudiar el siguiente sistema y resolverlo por Cramer:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - y + 4z = -3 \end{cases}$$

**Solución:**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_B$$

$$\text{Rang}(A) \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2$$

Estudio del rango de  $AB$ :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

luego  $\text{Rang}(AB) = 2$

Se trata de un sistema compatible e indeterminado, equivalente a:

$$\left. \begin{cases} 3x + y = 1 - 2z \\ x + y = 2 + z \end{cases} \right\} \text{ que resolvemos por Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2z & 1 \\ 2+z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1+3z}{2} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-2z \\ 1 & 2+z \end{vmatrix}}{2} = \frac{5+5z}{2}$$