

1° Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ ,

a) Estudiar para que valores de "a", el rango de A es menor que 3

b) Resuelve el sistema  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  para un valor de "a" que haga el sistema

compatible indeterminado.

**Solución:**

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2$  que se anula para  $\begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$ , luego para esos valores de a

la matriz tiene un rango menor que 3

b)

El sistema toma la forma:  $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}}_B$ ; como nos piden que el sistema sea

compatible indeterminado  $A < 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

Si  $a = 1$  la matriz ampliada toma la forma:

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{AB}$  cuyo rango es 3 como se puede ver fácilmente, luego el sistema es

incompatible

Si  $a = 2$  la matriz ampliada toma la forma:

$Ran \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{AB} \Leftrightarrow Ran \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ran \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = Ran(A)$

Luego el sistema es compatible e indeterminado, cuya solución es:

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z = -2y \\ 2x + z = -4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$

2º.-Dadas las rectas  $r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$ :

- Estudiar razonadamente su posición relativa
- En caso de cortarse encontrar el ángulo que forman y su punto de corte
- En caso de cortarse encontrar el plano que delimitan las dos rectas

[Islas Canarias ,junio 2008]

**Solución:**

a)

Dado que el sistema  $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = -1 \\ x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases}$  es compatible y determinado, las

rectas se cortan en el punto  $(2, 4, -1)$

b)

Si  $\alpha$  es el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow s: \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Luego  $\cos \alpha = \frac{(1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{|(1 \ 1 \ 0)| \cdot |(0 \ 1 \ 1)|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

c)

El plano delimitado por las dos rectas es:

$$p: \begin{cases} x = 2 + \eta \\ y = 4 + \eta + \gamma \\ z = -1 + \gamma \end{cases}$$

3°.-Dada  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 0 \\ \frac{\text{sen}(x^2)}{x} & x > 0 \end{cases}$  se pide estudiar la continuidad y la derivabilidad

de  $f(x)$

[Castilla y León. Junio 2008]

**Solución:**

La función es continua dentro de cada rama.

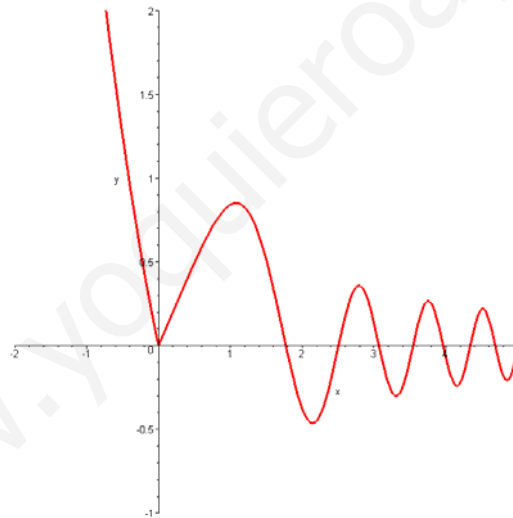
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(x^2)}{x} \not\equiv \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos(x^2)}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Luego la función es siempre continua

$$f'_{\text{dentro de las ramas}}(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x^2 \cos(x^2) - \text{sen}(x^2)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pero en  $x=0$

$$f'_-(0) = -2 \quad \text{mientras que} \quad f'_+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 \cos(x^2) - \text{sen}(x^2)}{x^2} = 1,$$



luego la función no tiene derivada en  $x = 0$  como puede verse en la figura

4º.-Dada las funciones  $f(x) = x^3 - 1$ , y  $g(x) = x^2 - 5x + 6$  calcular:

a) Sus las asíntotas de la función  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Las zonas de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, y los puntos singulares de la función  $f(x)$

c)  $\int h(x) dx$

**Solución:**

a)

$$h(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

- No tiene asíntotas horizontales pues  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \infty, \text{ luego } x = 2 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \infty, \text{ luego } x = 3 \text{ es otra asíntota vertical}$$

- Asíntotas oblicuas de la forma  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = 1 \quad : \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - 1x] = 5$$

Luego  $y = x + 5$  es asíntota oblicua

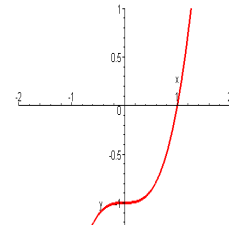
b)

$f'(x) = 3x^2$  que se anula para  $x = 0$  por lo que  $f(x)$  es una función siempre creciente pues  $f'(x) > 0$  para  $x \neq 0$ , luego no tiene ningún punto de máximo ni de mínimo

$f''(x) = 6x$  que se anula para  $x = 0$ ,

luego en  $\begin{cases} (-\infty, 0), f(x) \text{ es convexa (concavidad negativa)} \\ (0, \infty), f(x) \text{ es concava (concavidad positiva)} \end{cases}$

y el punto  $(0, -1)$  es un punto de inflexión



c)

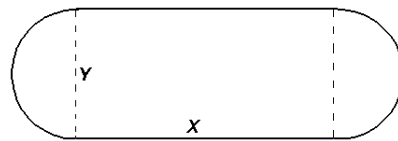
$$\begin{aligned} \int h(x) dx &= \int \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \left( x + 5 - \frac{7}{x-2} + \frac{26}{x-3} \right) dx = \\ &= \int x dx + \int 5 dx - \int \frac{7}{x-2} dx + \int \frac{26}{x-3} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x - 7Ln|x-2| + 26Ln|x-3| + k \end{aligned}$$

5°.- Se dispone de 200 m de tela metálica y se desea vallar un recinto formado por un rectángulo y dos semicírculos, como indica la figura. Determinar las dimensiones  $x$  e  $y$  para que el área encerrada sea máxima.

[Oviedo Junio, 2008]

**Solución:**

$$P = 2x + 2\frac{y}{2}\pi = 2x + y\pi \Rightarrow x = \frac{p - \pi y}{2}$$



Y la función a maximizar es;

$$S(y) = x \cdot y + \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p - \pi y}{2}\right)y + \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{py}{2} - \frac{\pi y^2}{2} + \frac{\pi y^2}{4} = \frac{py}{2} - \frac{\pi y^2}{4}$$

De donde

$S'(y) = \frac{p}{2} - \frac{\pi}{2}y$  que se anula para  $y = \frac{p}{\pi}$  y como  $S''(x) < 0$  se trata de un máximo; de ahí que las dimensiones del recinto serán:

$$y = \frac{200}{\pi} \quad x = \frac{200 - \pi \frac{200}{\pi}}{2} = 0$$

Luego la figura que da el área máxima es un círculo de radio  $r = \frac{100}{\pi}$