Problema 1 Se pide:

a) Calcular el punto simétrico al $P(1,0,2)$ respecto de la recta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$, y calcular la distancia entre este punto y r.

b) Dado el mismo punto anterior, calcular su simétrico respecto al plano $\pi : x+y-2z+1 = 0$, y calcular la distancia desde este punto al plano.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(-1,0,2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$

Calculamos un plano perpendicular a la recta $\pi : x+y-z+\lambda = 0$, que contiene al punto $P(1,0,2)$, por lo que tenemos $1-2+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$. Luego el plano es $\pi : x+y-z+1 = 0$. La recta r y el plano π se cortan en un punto Q que será el punto medio entre P y su simétrico P' respecto a la recta r. Calculamos Q:

$$-1+\lambda+\lambda-2+\lambda+1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{2}{3} \Longrightarrow Q\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\frac{P+P'}{2} = Q \Longrightarrow P' = 2Q - P = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Para calcular la distancia de P a r necesitamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP} = (2,0,0)$

$$|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}| = |(0,2,2)| = \sqrt{8}\ u^2; \quad |\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{3}$$

$$d = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\, u$$

b) Calculamos una recta perpendicular al plano y que contenga al punto P

$$t : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases}$$

calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π, y este punto Q será el punto medio entre P y su sumétrico P' respecto al plano

$$1+\lambda+\lambda-4+4\lambda+1=0\Longrightarrow \lambda=\frac{1}{3}\Longrightarrow Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$\frac{P+P'}{2}=Q\Longrightarrow P'=2Q-P=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

La distancia

$$d(P;\pi)=\frac{|1+0-4+1|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\ u$$

Problema 2 Sean los planos:

$$\begin{array}{rc} \pi_1: & \lambda x+y=\lambda \\ \pi_2: & -\lambda x+2y+\lambda z=0 \\ \pi_2: & (\lambda-1)x+3y+\lambda z=1 \end{array}$$

Estudiar la posición relativa que ocupan en el espacio para los diferentes valores de λ.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 1 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 2 & \lambda & 0 \\ (\lambda-1) & 3 & \lambda & 1 \end{array}\right)\quad |A|=\lambda^2-\lambda=0\Longrightarrow \lambda=0,\ \ \lambda=1$$

Si $\lambda\neq 2$ y $\lambda\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})=3=$ n^o de incógnitas y en este caso se trata de un sistema compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Las filas primera y segunda son proporcionales y el menor $\left|\begin{array}{rr} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{array}\right|=2\neq 0$ por lo que Rango$(\overline{A})=2$.

Por el mismo menor Rango$(A)=2$. Luego se cumple Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ <n^o de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Comparando los planos dos a dos tenemos que π_1 y π_2 son coincidentes, mientras que el plano π_3 les corta en una recta.

Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La tercera fila es la suma de las otras dos y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ por lo que Rango(A) =Rango($\overline{A}$) <n^{o} de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Comparando los planos dos a dos tenemos que π_1, π_2 y π_3 se cortan dos a dos en una recta.

Problema 3 Se pide:

a) Encontrar los puntos de la recta $r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{2}$, que están a una distancia $\sqrt{6}$ del punto $P(0,1,1)$.

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos que distan $\sqrt{5}$ del punto $H(-1,2,1)$

c) Encontrar un plano tangente a la figura del anterior apartado en el punto $Q(1,3,1)$.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Para calcularlos nos apoyamos en una esfera de centro $P(0,1,1)$ y radio $\sqrt{6}$: $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$. Esta esfera corta a la recta en los siguientes puntos

$$(1+\lambda)^2+(2\lambda-1)^2+(1+2\lambda-1)^2 = 6 \Longrightarrow \lambda = 0,7869736144, \quad \lambda = -0,5647513922$$

Los puntos buscados son

$$P_1(1.787, 1.574, 2.574); \quad P_2\,(0.435, -1.130, -0.130)$$

b) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 5 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+1 = 0$ se trata de una esfera de centro $H(-1,2,1)$ y radio $r = \sqrt{5}$

c) Cogemos el vector $\overrightarrow{HQ} = (1,3,1) - (-1,2,1) = (2,1,0)$ El plano tangente $\pi : 2x + y + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5$. El plano buscado es $\pi : 2x + y - 5 = 0$