Problema 1 Se pide:

1. Demostrar que, cualquiera que sea el valor de a, los vectores $\overrightarrow{u_1} = (a, 1, 2)$, $\overrightarrow{u_2} = (1, 1, a)$ y $\overrightarrow{u_3} = (3a - 2, 1, 6 - 2a)$, son linealmente dependientes.
2. Si $a = 2$, escribir el vector $\overrightarrow{w} = (9, 2, 4)$ como combinación lineal de $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$

Solución:

1. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 3a-2 & 1 & 6-2a \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{son linealmente dependientes}$$

2. Si $a = 2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_1} = (2,1,2) \\ \overrightarrow{u_2} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{u_3} = (4,1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow (9,2,4) = a(2,1,2) + b(1,1,2) \Longrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{l} a = 7 \\ b = -5 \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{w} = 7\overrightarrow{u_1} - 5\overrightarrow{u_2}$

Problema 2 Encontrar la distancia del punto $P(1, 1, 1)$ a la recta $L : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{array} \right.$

Solución:

$$\overrightarrow{P_L P} = (0, 1, 0)$$

$$|\overrightarrow{u_L} \times \overrightarrow{P_L P}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(1,0,1)| = \sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{u_L}| = \sqrt{3}$$

$$d(P, L) = \sqrt{\frac{3}{2}}\ u$$

Problema 3 Se pide:

1. Demostrar que las rectas $L_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{array} \right.$ y $L_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 - t \end{array} \right.$ se cortan en un punto. ¿Cuál es ese punto?

2. Encontrar la ecuación del plano determinado por dichas rectas.

Solución:

1. $$\left\{\begin{array}{l} 1+2t=h\\ 1-t=0\\ t=4-h \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=1\\ h=3 \end{array}\right. \Longrightarrow P(3,0,1)$$

   Luego se cortan en un punto $P(3,0,1)$.

2. $$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{U_{L_1}}\\ \overrightarrow{U_{L_2}}\\ P_{U_{L_2}}(0,0,4) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{rrc} 2 & 1 & x\\ -1 & 0 & y\\ 1 & -1 & z-4 \end{array}\right|=0 \Longrightarrow x+3y+z-4=0$$

Problema 4 Sea el plano $\pi: 3x-y+z-3=0$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-\lambda \end{array}\right.$ se pide:

1. Encontrar un plano π' perpendicular a π que contenga a r.
2. Calcular la proyección ortogonal de r sobre π
3. Calcular la proyección ortogonal del origen sobre π
4. Si el plano π corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C, calcular el volumen del tetraedro formado por estos puntos con el origen de coordenadas, y la altura de éste sobre la base formada por los puntos.

Solución:

1. $$\pi':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(3,-1,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-1)\\ P(1,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{rrc} 3 & -1 & x-1\\ -1 & 1 & y\\ 1 & -1 & z \end{array}\right|=0 \Longrightarrow y+z=0$$

2. $$t:\left\{\begin{array}{c} 3x-y+z-3=0\\ y+z=0 \end{array}\right.$$

3. Calculamos la recta h perpendicular a π que pase por O y después cortamos con esta recta al plano π:

$$h : \begin{cases} \overrightarrow{\pi} = (3, -1, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El corte lo encontramos sustituyendo en el plano

$$3(3\lambda) + \lambda + \lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{3}{11}$$

lo que en la recta nos proporciona el punto buscado:

$$\left(\frac{9}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{3}{11}\right)$$

4.

$$\begin{cases} \text{Punto } A \text{ hacemos :} y = 0 \;\; z = 0 \Longrightarrow A(1, 0, 0) \Longrightarrow \overrightarrow{OA} = (1, 0, 0) \\ \text{Punto } B \text{ hacemos :} x = 0 \;\; z = 0 \Longrightarrow B(0, -3, 0) \Longrightarrow \overrightarrow{OB} = (0, -3, 0) \\ \text{Punto } C \text{ hacemos :} x = 0 \;\; y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 3) \Longrightarrow \overrightarrow{OC} = (0, 0, 3) \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{|-9|}{6} = \frac{3}{2}\ u^3$$

para calcular el área de la base calculamos los vectores

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 0) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(-9, 3, -3)| = \frac{3\sqrt{11}}{2}\ u^2$$

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h \Longrightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{3\sqrt{11}}{11}\ u$$